

Міністерство освіти і науки України
Чорноморський державний університет імені Петра Могили

Г. П. Чуйко, О. В. Дворник, О. М. Яремчук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник



Миколаїв – 2015

УДК 519.87(075.8)
ББК 22.12я73
Ч 87

Рекомендовано до друку вченою радою ЧДУ імені Петра Могили як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 1 від 11.09.2014).

Рецензенти:

Хомченко А. Н., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили;

Патлайчук М. І., кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, технічний директор ТОВ НВФ «Тайфун – ДЧ».

Ч 87

Чуйко Г. П.

Математичне моделювання систем і процесів : [навчальний посібник] / Г. П. Чуйко, О. В. Дворник, О. М. Яремчук. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. – 244 с.

ISBN 978-966-336-340-0

У навчальному посібнику наведено основи математичного опису систем та приладів медичного призначення; базові методи математичного моделювання вхідного впливу (сигналів, завад та їх сумішей), систем як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами, підприємств і виробничих процесів як об'єктів; методи комп'ютерного моделювання систем у математичних середовищах, зокрема в системі комп'ютерної математики MAPLE.

Навчальний посібник призначено для студентів спеціальності 8.05100307 «Медичні прилади і системи», а також може бути корисним аспірантам, молодим ученим та інженерам різних технічних спеціальностей.

УДК 519.87(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-966-336-340-0

© Чуйко Г. П., Дворник О. В.,
Яремчук О. М., 2015
© ЧДУ ім. Петра Могили, 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА	8
Лекція 1.	
1. Поняття про математичне й комп'ютерне моделювання для задач приладобудування	8
2. Методологія моделювання систем і процесів	11
Лекція 2.	
1. Методи побудови математичних моделей систем і процесів	17
2. Класифікація та опис моделей.....	22
Лекція 3.	
1. Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE).....	25
2. Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку. Резонанс	29
Лекція 4.	
1. Математичні моделі на основі системи звичайних диференціальних рівнянь	35
2. Планарні системи та фазові портрети	38
Лекція 5.	
1. Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь	43
2. Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення	48
Лекція 6.	
1. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних	49
2. Рівняння Нав'є-Стокса, Нав'є та Ейлера	53
Лекція 7.	
1. Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів	56
2. Поняття про солітони, їх типи і властивості	59
Лекція 8.	
1. Підприємство як об'єкт моделювання.....	65
2. Модель підприємства як відкритої системи	71
Лекція 9.	
1. Ефективні технології для математичного моделювання систем і процесів	75
2. Універсальні комп'ютерні середовища (огляд).....	78
РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	83
Практикум 1. Методологічні питання моделювання процесів і систем	83
Практикум 2. Задачі, які приводять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь.....	83
1. Математичні моделі фізики	83
2. Моделі екології та біофізики.....	87
Практикум 3. Математичні моделі медицини та фармації.....	92
1. Математичні моделі медицини	92
2. Фармакокінетичні моделі	99

Практикум 4.	Лінійні диференціальні рівняння математичної фізики та системи таких рівнянь.....	103
	1. Лінійні диференціальні рівняння математичної фізики.....	103
	2. Модель, задана системою диференціальних рівнянь	108
Практикум 5.	Нелінійні диференціальні рівняння як моделі процесів та систем. Їх особливості	112
	1. Нелінійні системи та їх моделі	112
	2. Нелінійні та відокремлені хвилі	120
Практикум 6.	Математичні моделі технологічних та економічних процесів	125
	1. Моделі технологічних процесів.....	125
	2. Математична модель для балансу попиту та пропозиції	135
Практикум 7.	Модель релаксації ядерних спінових моментів як основа магніторезонансної томографії	138
	1. Вступні зауваження.....	138
	2. Вектор ядерної намагніченості	139
	3. Спінова релаксація вектору намагніченості	141
	4. Основи методу спінового відлуння (spin-echo).....	146
РОЗДІЛ 3.	ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ	150
Лабораторна робота 1.	Приклади типових задач математичного моделювання в медицині	150
	1. Проста модель енергетичного балансу серця	150
	2. Математична модель фармакокінетики: надходження ліків через крапельницю та їх елімінація.....	153
	3. Моделювання зонду фотоплетизмографа для досліджень стравоходу.....	155
Лабораторна робота 2.	Засоби рішення диференціальних рівнянь Maple	160
	1. Засоби рішення звичайних диференціальних рівнянь у Maple.....	160
	2. Приклади вирішення диференціальних рівнянь та задач Коші	163
Лабораторна робота 3.	Системи диференціальних рівнянь та моделі на їх основі.....	174
	1. Методика знаходження рішень систем диференціальних рівнянь у Maple	174
	2. Приклади моделей, заданих системами диференціальних рівнянь	177
Лабораторна робота 4.	Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних	188
	1. Засоби розв'язків рівнянь у частинних похідних у Maple.....	188
	2. Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних.....	191
Лабораторна робота 5.	Рівняння Нав'є-Стокса: течія Пуазейля	199
	1. Засоби програмного підпаку Physics[Vectors]	199
	2. Рівняння Нав'є-Стокса та Нав'є в моделях гемодинаміки.....	201
	3. Течія Пуазейля та закон Хагена-Пуазейля	202

Лабораторна робота 6.	Нелінійні моделі математичної фізики	207
	1. Математична модель нелінійного математичного маятника	207
	2. Солітони Кортевега-де-Вріза	212
Лабораторна робота 7.	Приклади економіко-математичних моделей.....	218
	1. Приклади типових економіко-математичних задач	219
	2. Виробнича функція з прикладами застосування	224
ДОДАТКИ		231
Додаток А.	Методологічні питання моделювання процесів і систем	231
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК		239
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК		241

ПЕРЕДМОВА

Моделювання на сучасних комп'ютерах є чи не найпотужнішим засобом дослідження, зокрема, для складних динамічних систем, складних природних та технологічних процесів, для комплексних процесів виробництва та економіки. Воно дозволяє здійснювати комп'ютерні експерименти із системами ще на стадії їх проектування, а також вивчати системи, натурні експерименти з якими через надмірні вартість або небезпеку, є неприйнятними.

Нині беззаперечною вимогою для будь-якого фахівця напряму «Метрологія, вимірювальна техніка та інформаційно-вимірювальні технології», зокрема і для тих, які спеціалізуються на медичних приладах і системах, є володіння методами математичного моделювання. При чому такі методи повинні опановуватися на сучасній комп'ютерній базі з використанням потужних систем комп'ютерної математики (СКМ), відомих і визнаних у світі. Дисципліна «Математичне моделювання систем і процесів» є нормативною дисципліною, що передбачено освітньо-професійною програмою спеціальності 8.05100307 «Медичні прилади і системи».

Автори, komponуючи цей посібник свідомо інтегрували його практичну частину, а почасти й лекційну, в сучасну систему комп'ютерної математики Maple, яка випускається канадською корпорацією Maplesoft ®. Це пов'язано як із тим, що один з авторів з 2004 р. є членом Maple Community, так і з тим, що роботи викладачів та студентів кафедри «Медичних приладів і систем» досить широко представлено в Maple Application Center (<http://www.maplesoft.com/applications/index.aspx/>). Втім найбільшою мірою це зумовлено багаторічною традицією використання саме цієї системи комп'ютерної математики в навчальному процесі та наукових дослідженнях кафедри, починаючи з 2008 року. Практичну частину у вигляді практикуму та лабораторного практикуму представлено прикладами реалізації задач моделювання у вигляді програмних кодів та їх виконання в згаданій вище СКМ Maple.

У запропонованому навчальному посібнику викладено основи специфічних методів моделювання систем різноманітного походження, фізичних та технологічних процесів як із зосередженими, так і розподіленими параметрами, зокрема і процесів у приладах медичного призначення, або медицині. Окрім того, у посібнику визначено і розкрито поняття про підприємство як об'єкт моделювання та наведені базові відомості про сучасні технології комп'ютерного моделювання. Практична частина посібника має за мету сформувати у студентів навички для проведення наукових досліджень, проектування та професійної експлуатації систем та приладів. Курсова робота є частиною дисципліни і практична частина посібника призначена також підготувати студентів до її виконання.

Матеріал посібника передбачає наявність у студентів базових знань із вищої математики, загальної фізики, спеціальних розділів фізики, біофізики, інформатики та програмування, електроніки, електротехніки, прикладного програмування, спеціальних розділів електроніки, медичних приладів і систем, математичного моделювання елементів приладів.

Навчальний посібник може бути корисний інженерам, спеціалістам, аспірантам, студентам у галузі моделювання різноманітних процесів і систем.

Це не перший посібник, який спирається на ту чи іншу систему комп'ютерної математики і в якому текстові уривки чергуються з частинами програмних кодів, або окремими командами. Існує вже певна традиція оформлення таких видань. Для більш наочного викладу матеріалу командні рядки та результати їх виконання в Maple виділені в такий традиційний спосіб:

>Командний рядок
або його продовження # коментар, що не виконується
Результат обчислень або виконання команд

Усі групи команд (програмних кодів) виділені зліва лінією, яка відокремлює та поєднує командну групу.

Автори будуть вдячні за будь-які зауваження та пропозиції щодо покращення змісту та форми посібника.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Лекція 1

«Навіть якщо ваше пояснення таке прозоре, що виключає всі помилкові інтерпретації, завжди знайдуться люди, які зрозуміють вас неправильно»
Закон Мерфі

1. Поняття про математичне й комп'ютерне моделювання для задач приладобудування.
2. Методологія моделювання систем і процесів.

1 Поняття про математичне й комп'ютерне моделювання для задач приладобудування

Моделювання на цифрових обчислювальних машинах є одним із найпотужніших засобів дослідження, зокрема, складних динамічних систем.

Воно дає можливість здійснювати обчислювальні експерименти із системами на стадії проектування, а також вивчати системи, натурні експерименти з якими через небезпечність або високу вартість, недоцільні. У той же час, завдяки близькості за формою до фізичного моделювання, цей метод дослідження доступний широкому загалу користувачів.

Отже, комп'ютерне моделювання в медицині отримало самостійні функції і дедалі стає все більш необхідним у процесі проведення досліджень. Моделювання в медицині є тим засобом, який дозволяє встановлювати глибокі і складні взаємозв'язки між теорією та експериментом. Останні сто років експериментальні методи медицини почали наštовхуватися на низку обмежень і виявилось, що проведення деяких досліджень просто неможливе без моделювання. Це викликано такими факторами:

- втручання в біологічні системи може призводити до неможливості встановлення причин змін, що виникають при цьому;
- деякі теоретично обґрунтовані експерименти неможливо здійснити внаслідок недостатнього рівня розвитку експериментальної техніки;
- ряд експериментів, які необхідно проводити на людях, слід відхиляти з морально-етичних та правових питань.

Нині, коли комп'ютерна промисловість пропонує різноманітні засоби моделювання, будь-який кваліфікований інженер, технолог або лікар повинні вміти не просто моделювати складні об'єкти, але й досліджувати їх за допомогою сучасних технологій, реалізованих у формі комп'ютерних графічних середовищ або пакетів візуального моделювання. Створені в останні роки комп'ютерні програмні засоби реалізації числових методів не тільки забезпечують задані вимоги до похибки розв'язку, але й дозволяють визначення типу (обчислювальної складності) розв'язуваної задачі.

Усі процеси, явища та системи, з яким доводиться мати справу, у тій чи іншій мірі змінюються в часі. Саме швидкість зміни значень параметрів, які описують систему або процес, і є найбільш важливою їх ознакою і нерідко визначає їх базові характеристики. Швидкість зміни деякої величини завжди є її похідною по часу, тому моделі всіх природних або технологічних процесів неминуче міститимуть похідні або інтеграли по часу. У цьому сенсі, ми називаємо такі системи динамічними системами.

Під найпростішою динамічною системою зазвичай розуміють систему, поведінка якої задається сукупністю звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші з досить гладкими правими частинами, що забезпечують існування та унікальність розв'язку. Прикладом простого об'єкта, поведінку якого можна описати диференціальними рівняннями, може бути тіло, кинуте під кутом до горизонту, або добре відомий зі шкільного підручника басейн із двома трубами, через які вливається й виливається вода.

Деяко складнішими є моделі, зображені системою звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші й нелінійними алгебраїчними рівняннями, що супроводжуються набором допоміжних формул. Задача числової побудови фазової траєкторії таких систем помітно складніша. Втім, якщо сукупність нелінійних рівнянь однозначно розв'язна в кожній точці, а праві частини диференціальних рівнянь досить гладкі, то вони в основному також успішно розв'язуються.

Диференціальні рівняння традиційне поділяють на звичайні диференціальні рівняння (так звані ODE – ordinary differential equations), в яких шукається невідома функція, що залежить лише від однієї незалежної змінної. Якщо ж невідома функція залежить від двох, або більшої кількості незалежних змінних, то рівняння для неї називають диференціальним рівнянням у частинних похідних (так звані PDE – partial differential equations).

Під час досліджень процесів у фізиці, зокрема в гідромеханіці, більш поширеним математичним апаратом є рівняння з частинними похідними. Їх з успіхом використовують при моделюванні динаміки розподілу тепла, руху рідини й газів, коливанні пластин та оболонок. При дослідженні процесів в економіці, біології, медицині останнім часом почали використовувати також функціонально-

диференціальні рівняння. Найпростішими з них є рівняння з одним сталим запізнюванням і рівняння нейтрального типу.

У математичному моделюванні систем виділяють три такі основні частини:

- Емпірична частина, яка містить фактичні дані, отримані в експериментах і/або спостереженнях, а також інформацію з первинної систематизації.
- Теоретична частина, котра розвиває основні концепції, які дозволяють об'єднати й пояснити з єдиних позицій емпіричні закономірності та явища.
- Математична частина, яка конструює моделі для перевірки основних теоретичних концепцій, а також методи обробки експериментальних даних, планування нових експериментів і спостережень.

Важлива перевага методів математичного моделювання систем і процесів полягає в тому, що вони дозволяють різко скоротити обсяг і масштаби натурних експериментів. Математичне моделювання незамінне саме там, де натурний експеримент може стати небезпечним і навіть катастрофічним – у ядерній техніці, екології, епідеміології, при розробці економічних реформ тощо.

Моделювання також різко скорочує час і витрати на проектування за рахунок можливості аналізу великої кількості варіантів, збільшує ефективність роботи проекрованої системи, пристрою або приладу, а також дозволяє вивчити їх дизайн та поведінку в різних умовах з різними комбінаціями впливу зовнішніх факторів, що не завжди можливо здійснити під час натурних випробувань.

Саме моделювання часто є тим єдиним засобом, що дає змогу полегшити проектування та експлуатацію великих систем. Однаковою мірою це стосується і технологічних систем. Технологічна система – це сукупність функціонально взаємозв'язаних засобів технологічного оснащення предметів виробництва і виконавців для здійснення в регламентованих умовах виробництва заданих технологічних процесів або операцій.

Технологічна система як об'єкт моделювання – це складна динамічна система, у якій в єдиний комплекс об'єднані обладнання, засоби контролю і керування, допоміжні й транспортні пристрої, обробляючий інструмент або середовище, об'єкти виробництва (заготовки, напівфабрикати, готові вироби), а також люди, які здійснюють виробничий процес і керують ним.

Технологічний процес – це частина виробничого процесу, що містить цілеспрямовані дії, пов'язані зі зміною і (або) визначенням стану предмета виробництва. Технологічні процеси будують за окремими методами їх виконання (процеси механічного і термічного оброблення, покриття, складання, монтажу, контролю тощо) і розділяють на операції. Технологічна операція – це закінчена частина технологічного процесу, що виконується на одному робочому місці.

Моделювання технологічних систем полягає в імітації виконання на елементах виробництва (обладнанні, дільницях) операцій над продуктами (напівфабрикатами, заготовками, сировиною тощо) зміною відповідних параметрів елементів чи продуктів. Елементи виробництва характеризуються, крім цього, станами (елемент зайнятий, елемент справний тощо). Передача продукту від одного елемента до іншого моделюється передачею інформації про його параметри і зміну станів елементів.

2 Методологія моделювання систем і процесів

Моделювання (англ. scientific modelling, simulation) – це метод дослідження систем, явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об'єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю). Під моделлю розуміється об'єкт будь-якої природи (уявна або матеріально реалізована система), котрий частково відображає чи відтворює в певному сенсі об'єкт дослідження і здатний заміщати його так, що вивчення моделі дає нову інформацію про об'єкт (рис. 1.1.1).

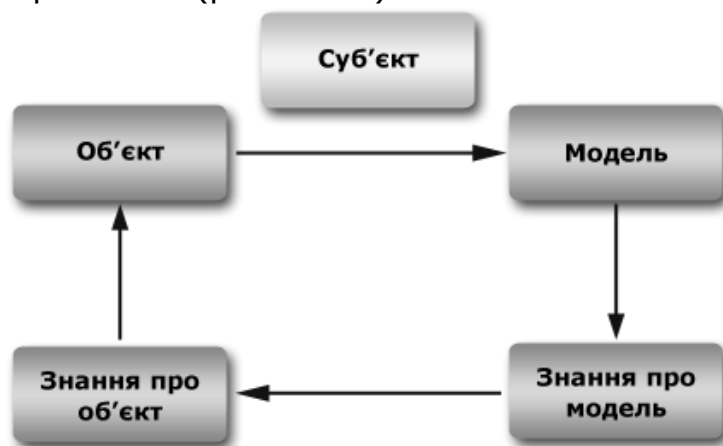


Рис. 1.1.1. Узагальнений алгоритм створення моделі

Схему рис. 1.1.1 можна пояснити такою послідовністю дій (алгоритмом):

- 1 – вивчення реального об'єкта та побудова на його основі моделі;
- 2 – дослідження моделі;
- 3 – поширення вивчених властивостей моделі на оригінал.

Треба при цьому мати на увазі, що при певній схожості моделі з оригіналом вони мають також істотні відмінності властивостей. Модель завжди певним чином спрощує оригінал. Основна мета при побудові моделі – забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об'єкта. Об'єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, однак дослідників цікавить лише невелика та скінченна їх частина. Тому під час моделювання

завжди постає задача виділити ці основні властивості й перенести їх на модель.

Усі моделі можна поділити на дві категорії:

- експериментальні;
- теоретичні моделі.

Теоретичні моделі формуються мовою тієї чи іншої предметної галузі. Розрізняють фізичні, біологічні, економічні моделі тощо. Із цього ряду виділимо математичні моделі.

Математичне моделювання (англ. mathematical simulation) – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей. В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу (прототипу) та моделі, тобто, їхню аналогію. Математичні моделі досліджуються, як правило, за допомогою цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

Математична модель (англ. mathematic model) – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес, явище, або систему. Математична модель має важливе значення для таких наук, як: економіка, екологія, соціологія, фізика, хімія, механіка, інформатика, біологія, та ін.

Унаслідок різних підходів до створення математичних моделей розрізняють:

- структурні моделі;
- функціональні моделі.

Структурна модель із деякою точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При її побудові структуру об'єкта спрощують. У результаті модель повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів.

Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом, що моделюється в різних ситуаціях за різних впливів. Структуру об'єкта при цьому не аналізують. Така математична модель повторює поведінку об'єкта (зміну характеристик, що моделюються) у випадках, для яких є результати спостережень. Виродженням випадком такого підходу є модель типу «чорної скриньки».

Процес математичного моделювання можна розділити на низку характерних етапів, зокрема:

1. Аналіз предметної області.

Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, у якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта.

2. Побудова моделі предметної області.

На наступному етапі формують модель предметної області. Вже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну

модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

3. Математичне формулювання задачі.

На основі аналізу предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, які властиві його складовим частинам тощо.

4. Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження.

Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

5. Математична модель. Числовий експеримент.

Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними. Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Наприклад, для неперервної моделі будують дискретний аналог.

6. Тестування моделі.

Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Наприклад, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригіналу, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів, відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Крім того, для моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони (закон Ньютона у фізиці) або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

7. Аналіз та інтерпретація результатів.

На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі.

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деяким вимогам, що мають рекомендаційний і суб'єктивний характер. Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

- Вимога адекватності. Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

- а) Правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками. Наприклад, стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта.

- б) Правильний якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності.

Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

- Невраховані фактори. Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття стійкості (грубості) моделі, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реальному середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша – стійка чи нестійка.

- Простота та оптимальність моделі. Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами й задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних характеристик та розуміти результати

- Ієрархія змінних. Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними. Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни в часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та шкали простору. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри.

Швидкі змінні поділяють на короткочасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють

важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один усталений режим з іншим.

За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином встановлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних. Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул, до рівнянь із частинними похідними, що використовують поняття температури й щільності.

- Інші вимоги. Різні дослідники зазначають також інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі – феноменологічні й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі. У класичній механіці це, наприклад, закони Ньютона й закон Гука.

Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання поділяють на:

1. Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів.
2. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.
3. Статичне моделювання передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому.
4. Динамічне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу.
5. Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних моделей. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різниці рівняння, рівняння з післядією та інтегральні рівняння.

Математичне моделювання можна поділити на такі:

- Аналітичне моделювання, під яким зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень.
- Імітаційне моделювання, при якому на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта.

У якості прикладу застосування методів математичного моделювання в галузі охорони здоров'я можна вказати на так звані фармако-економічні дослідження, які використовують методи моделювання. Фармако-економічні дослідження найчастіше використовують такі методи моделювання як-от: «дерево» дискретних подій (рис. 1.1.2), метод Монте-Карло, математичні та статистичної моделі.

Зокрема, «дерево рішень» – це метод математичного моделювання процесу лікування у вигляді діаграми, яка ілюструє ймовірність кожного результату, а також його вартість для конкретної ситуації, якщо не брати до уваги фактор часу. Побудова моделі у формі «дерева рішень» можлива за умов:

- аналізу внутрішніх складових системи;
- у підсумку аналізів кількох медичних технологій, які мають різні ймовірності досягнення різних результатів;
- за умов аналогічності вимірюваних показників та кількісних оцінок кожного результату;
- якщо відома ймовірність кожного досяжного результату під час вивчення альтернативних медичних технологій.

Діаграма «дерева рішень» є розгалуженою структурою (рис. 1.1.2). Гілки дерева, які самі по собі презентують вибір конкретної технології, або ж появи побічних ефектів препарату, можуть бути першого, другого, третього і наступних порядків.

Кожна гілка дерева рішень закінчується клінічно значущим, на думку дослідника, результатом: наприклад, одужання або покращення клінічних індикаторів, чи, навпаки, смерть пацієнта. Останні гілки дерева називаються термінальними.

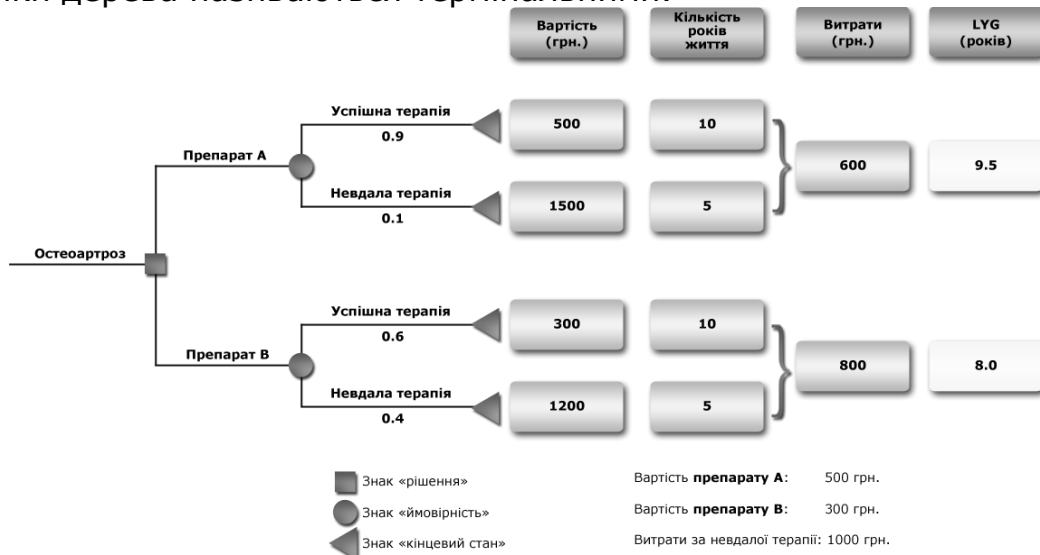


Рис. 1.1.2. «Дерево рішень» фармако-економічного дослідження

Розгалуження називаються вузлами, вони є точками, де відбуваються різні події. Ймовірність кожного клінічного результату розраховується як десятинний дріб (в інтервалі від 0 до 1), в

результаті чого сума ймовірностей на гілках одного порядку складає одиницю (рис. 1.1.2).

Далі обчислюють вартість альтернативних схем терапії шляхом послідовного перемноження значень ймовірностей за кожною гілкою (з лівого боку до правого) і наступного множення отриманого значення ймовірності на величину значущості результату, представлену в кінці гілки.

Рисунок 1.1.2 показує приклад простого дерева рішень для двох альтернативних медичних технологій під час лікування артрозу. Як видно з рис. 1.1.2 застосування препарату А гарантує пацієнту як менші затрати, так і більше математичне очікування тривалості життя ($LYG = 9.5$ років).

Лекція 2

«Якщо ви думаєте, що компетентність коштує надто дорого, спробуйте необізнаність – буде коштувати ще дорожче»
Йохан Стаель фон Хольстайн

1. Методи побудови математичних моделей систем і процесів.
2. Класифікація та опис моделей.

1 Методи побудови математичних моделей систем і процесів

1.1. Аналітичне моделювання

Для цього методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

Аналітична математична модель звичайно досліджується такими методами як:

- аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі;
- числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи процес;
- якісним – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості.

Утім, аналітичні рішення вдається отримати лише в обмеженій кількості випадків для відносно простих рівнянь, або їх систем. У більшості реальних досліджень точні аналітичні рішення або неможливі, або пов'язані з величезними ресурсними витратами.

Тоді вдаються до суттєвих спрощень первинної моделі, хоча зрозуміло, що такі спрощені моделі не завжди задовольняють усім потребам дослідників.

Результати аналітичних моделей презентуються у вигляді аналітичних виразів. Наприклад, динаміку популяції риби, яка існує у відносно великому замкненому озері, можна описати диференціальним рівнянням Ферхюльста (Verhulst), відомим також як логістичне рівняння:

$$\frac{dP}{dt} = P(\beta - \delta P), \quad (1.2.1)$$

де $P(t)$ – популяція риби, яка вимірюється у десятках тисяч особин, а коефіцієнти β, δ відповідно описують частоти народження та загибелі риби. Загальне аналітичне рішення рівняння (1.2.1) є таким:

$$P(t) = \frac{\beta}{\delta + k \exp(-\beta t)}, \quad (1.2.2)$$

де k – константа інтегрування, значення якої залежить від розміру популяції в початковий момент часу. З рис. 1.2.1 видно, що популяція риби згідно з аналітичною моделлю (1.2.1), (1.2.2) спочатку доволі швидко зростає, але з часом наближається до деякої стаціонарної та рівноважної межі. У розглянутому випадку це приблизно мільйон особин, за умови, що початкове значення складало 500 тисяч, а коефіцієнти народження та смертності прийняті такими: $\beta = 0.1$, $\delta = 0.001$.

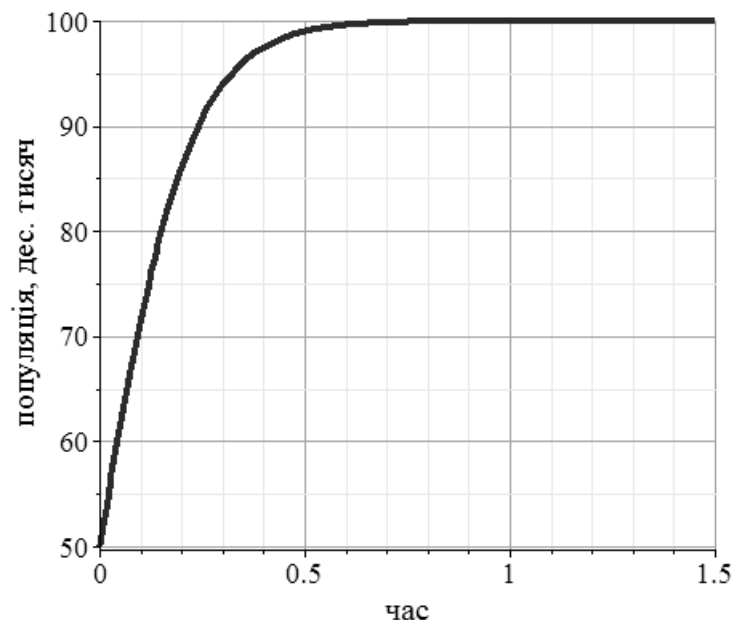


Рис. 1.2.1. Логістична крива популяції риби

Диференціальне рівняння (1.2.1) відносно просте рівняння першого порядку. Аналітичні вирази вдається отримувати також для рівнянь другого-третього порядків, але для більш складних

моделей вони найчастіше є надто громіздкими і непридатними для безпосереднього аналізу. У таких випадках корисним є такий різновид аналітичного моделювання як числове моделювання. Поведінка системи в такому методі вивчається на підставі числових рішень, отриманих одним із відповідних числових методів (Ейлера, Рунге-Кутта тощо).

Моделювання нелінійних систем практично завжди використовує саме числові методи. Розглянемо нелінійне рівняння для так званого генератора Ван-дер-Поля, який являє собою звичайний коливальний контур із джерелом живлення та нелінійним елементом з диференціальним від'ємним опором, наприклад, тунельним діодом. У такому колі за відповідного підбору параметрів можливе виникнення так званих автоколивань. Отже, рівняння генератору має наступний вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (1.2.3)$$

Аналітичне рішення цього рівняння отримати не вдається. Втім графік залежності функції $x(t)$ можна побудувати, вирішуючи рівняння (1.2.3) числовими методами (рис. 1.2.2), поклавши параметр згасання від'ємний: $\mu = -0.5$.

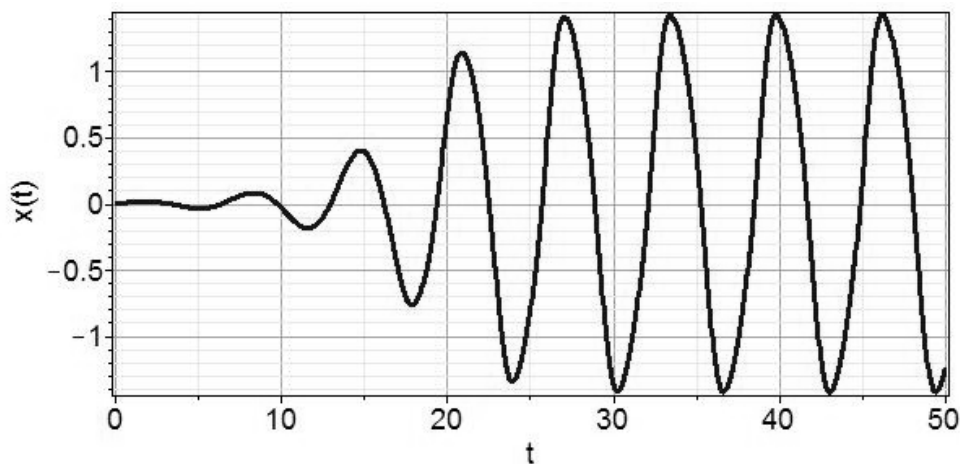


Рис. 1.2.2. Рішення рівняння генератора Ван-дер-Поля (1.2.3) числовим методом

За майже нульових початкових умов, генератор Ва-дер-Поля демонструє зростаючі автоколивання, які спонтанно виникають у системі і досить швидко стають стаціонарними за амплітудою. За своєю формою це явно не гармонічні коливання.

1.2. Імітаційне моделювання

Особливістю цього методу моделювання є те, що алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи, в певному наближенні, зрозуміло. Елементарні явища, які формують процес функціонування системи, імітуються в їх логічній та часовій послідовності.

Головна перевага такого виду моделювання – можливість роботи зі складнішими системами та процесами, аніж це може дозволити аналітичне моделювання. Головним засобом такого моделювання слугують комп'ютери.

Під час імітаційного моделювання комп'ютер відтворює алгоритм – «логіку» системи, яка моделюється, її поведінку в часі за умови різних наборів зовнішніх впливів. Прикладом найпростішої імітаційної моделі можна назвати комп'ютерні моделі різних видів руху матеріальних точок або тіл (рис. 1.2.3). У таких моделях імітується спостереження за позиціями рухомого тіла в різні моменти часу, відтворюється траєкторія руху, варіюються його параметри тощо.

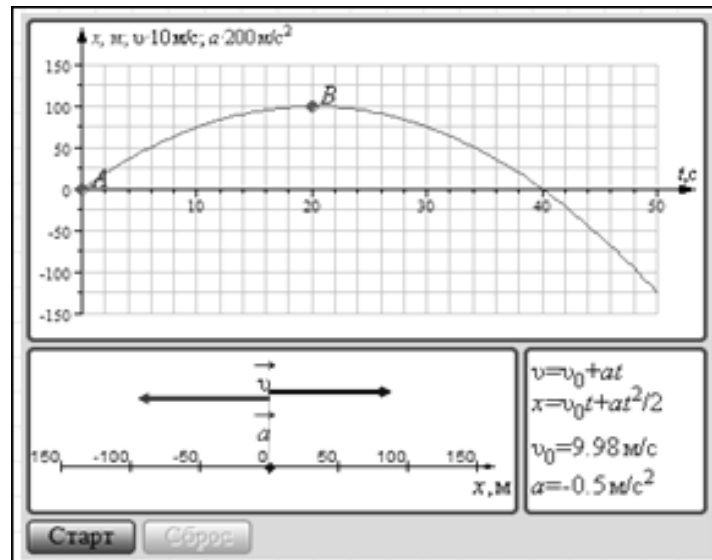


Рис. 1.2.3. Вікно імітаційної моделі руху гарматного снаряду в полі сил тяжіння

Головним недоліком імітаційного моделювання є відносно великі затрати часу на вирішення задачі, особливо якщо вимагається відносно висока точність такого рішення.

1.3. Статистичне моделювання. Метод Монте-Карло

Під час моделювання стохастичних систем, тобто систем із випадковими процесами або впливами, модель повинна відтворювати випадкові фактори, події, величини, поля та процеси, які мають місце в оригіналі.

За результатами статистичного моделювання визначають ймовірнісні оцінки критеріїв якості, які характеризують функціонування та ефективність керованої системи. Звичайно це відбувається на заключному етапі моделювання, етапі статистичної обробки отриманих результатів, коли застосовують параметричне чи непараметричне оцінювання, здійснюють статистичну перевірку гіпотез тощо.

Зокрема, прикладом параметричної статистичної оцінки є вибіркове середнє певного показника ефективності. Серед непа-

раметричних методів оцінювання широке розповсюдження отримав метод побудови гістограм.

Метод Монте-Карло (за назвою міста Монте-Карло, Монако, яке відоме своїми казино) – загальна назва групи числових методів, основаних на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо.

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ, він є різновидом статистичного моделювання. Метод об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці, або програмні генератори, для випадкових чисел.

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках симуляції на комп'ютерах. Ідея методу полягає у підрахунку співвідношення випадковим чином генерованих комп'ютером точок, які потрапили під криву інтегрованої функції до загальної кількості генерованих випадкових точок (рис. 1.2.4). Відповідне співвідношення існує поміж невідомою площею під кривою та відомою загальною площею рисунку.

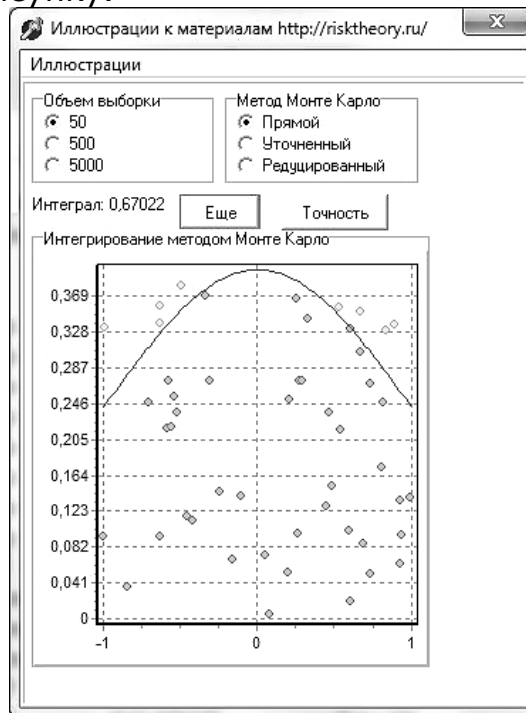


Рис. 1.2.4. Візуалізація програми площі під кривою методом Монте-Карло

Загальною тенденцією основних методів моделювання є скорочення часу моделювання, а також проведення досліджень у масштабі реального часу.

2 Класифікація та опис моделей

Під час створення математичних моделей можна вирізнити три основні стадії підготовки такої моделі:

1. Створення уявної моделі.
2. Створення концептуальної моделі.
3. Створення формальної моделі.

Уявна модель формується в голові дослідника під час спостережень за об'єктом моделювання як його мислений образ. Формуючи таку ідеальну модель розробник звичайно намагається отримати відповіді на певні питання, зокрема, чим саме можна знехтувати в реальному і складному об'єкті, а які властивості, навпаки, варто утримати в його образі. Представлення такої уявної моделі звичайною мовою (так званий вербальний образ) називають змістовною моделлю. Такі моделі поділяють на описові, пояснючі та прогностичні відповідно до їх функції.

Концептуальна модель є абстрактною моделлю, яка визначає структуру об'єкта моделювання, властивості його елементів, причинно-наслідкові зв'язки, які притаманні об'єкту і важливі для побудови його моделі. Розглядають три типи концептуальних моделей:

- логіко-семантичні;
- структурно-функціональні;
- причинно-наслідкові.

Перший із цих типів, логіко-семантична модель, є описом об'єкта в термінах предметної галузі знань, до якої він належить. Аналіз відбувається засобами логіки. Другий тип розглядає об'єкт як цілісну систему, яку можна розділити на певні підсистеми, або елементи. Частини системи пов'язані між собою деякими структурними співвідношеннями, які описують підлеглість одна одній, а також логічну та часову послідовність вирішення задачі. Третій тип – причинно-наслідкові моделі, слугує для пояснень та прогнозу поведінки об'єкта.

Побудова концептуальної моделі звичайно передбачає три етапи:

1. Визначення типу системи (об'єкта моделювання).
2. Опис зовнішніх впливів на об'єкт.
3. Декомпозиція об'єкта (його аналіз, розкладання на простіші частини).

Формальна модель є презентацією концептуальної моделі за допомогою деякої формальної мови: зокрема це може бути мова математики, алгоритмічна мова, мова програмування тощо.

Іншою класифікаційною ознакою об'єкта моделювання є множина можливих станів. Якщо об'єкт може перебувати лише в одному стані, то він відноситься до статичних систем.

Якщо кількість можливих станів системи більше одного та/або ці стани можуть змінюватися з часом, то об'єкт належить до динамічних систем. Процес зміни станів називають рухом динамічної системи. Розрізняють динамічні системи:

- з дискретними станами (кількість станів можна перенумерувати цілими числами);
- з безперервною множиною станів.

Зміна станів також може відбуватися або у дискретні фіксовані моменти часу (так звані системи з дискретним часом переходів), або ж системи з безперервним часом переходів, тобто такі, які «живуть» у реальному часі (рис. 1.2.5).

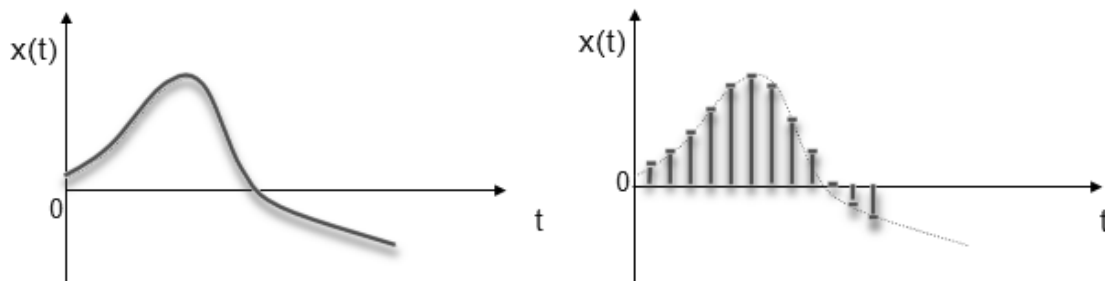


Рис. 1.2.5. Приклад безперервного та дискретного сигналів

Умови переходів між станами поділяють системи на:

- детерміновані, в яких новий стан залежить лише від поточного стану та часу;
- стохастичні, в яких можна казати лише про ймовірність переходу з поточного стану до інших можливих станів системи.

Безперервні системи поділяють на системи з:

- Зосередженими параметрами. В таких системах параметри залежать лише від часу, але не залежать від координат. Описуються звичайно за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.
- Розподіленими параметрами, в яких параметри системи залежать як від часу, так і від координат. Описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Дискретні системи поділяють на:

- синхронні;
- асинхронні.

Поділ залежить від того чи прив'язані моменти переходів поміж можливими станами системи до конкретних часових моментів: якщо відповідь позитивна – маємо справу з синхронною системою, інакше – система є асинхронною. Існують альтернативні класифікації математичних моделей. Одна з таких представлена в табл. 2.1.

Таблиця 1.2.1

Класифікаційна ознака моделі	Складові класифікаційної категорії
Характер віддзеркалюваних властивостей	1. функціональні; 2. структурні.
Належність до ієрархічного рівня	1. макрорівень; 2. макрорівень; 3. мегарівень.
Ступінь деталізації в межах одного рівня	1. повні, 2. макромоделі.
Спосіб презентації властивостей об'єкта	1. аналітичні; 2. імітаційні; 3. алгоритмічні.
Спосіб побудови моделі	1. теоретичні; 2. емпіричні.

Власна класифікація існує також у галузі економіко-математичних моделей, що видно з такої ілюстрації (рис. 1.2.6).

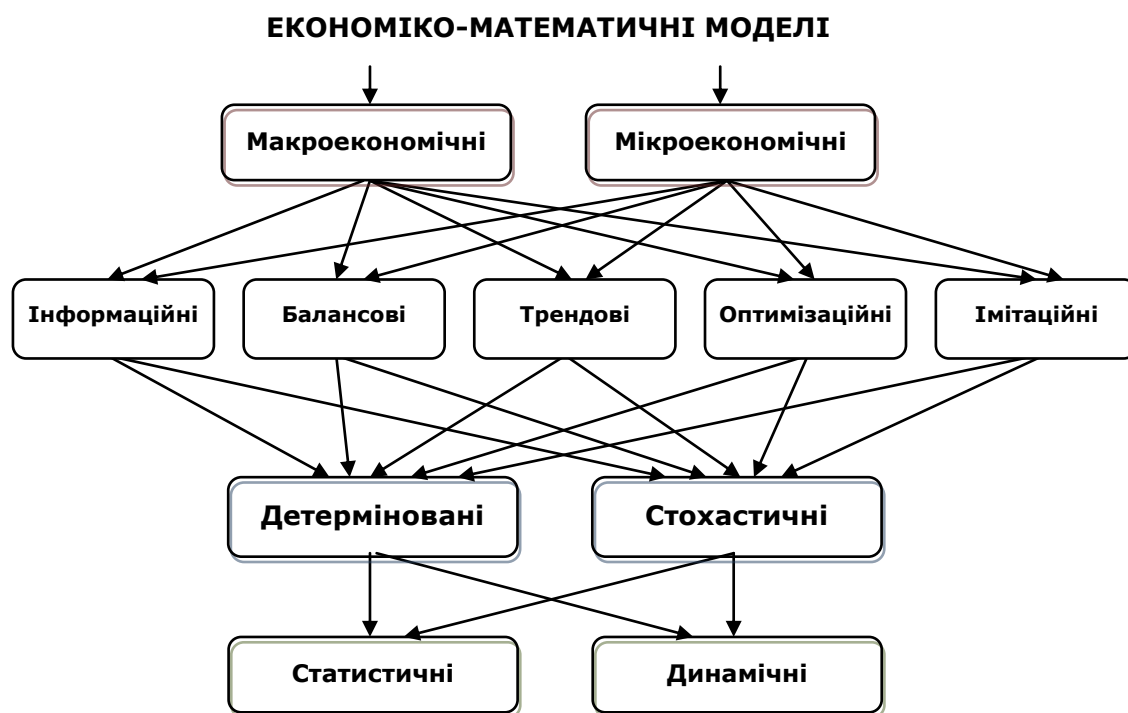


Рис. 1.2.6. Класифікація економіко-математичних моделей

У математичному аспекті важливим є також поняття лінійності моделі, котре означає, що справедливим є принцип суперпозиції, тобто, що будь-яка лінійна композиція розв'язків рівнянь моделі, наприклад їх сума, є також розв'язком задачі. Використовуючи принцип суперпозиції, неважко відшукавши рішення в будь-якому частковому випадку, побудувати рішення для більш загальної ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна судити виходячи з властивостей часткового – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Отже, у випадку лінійних моделей відгук (реакція) об'єкта на зміну умов є пропорційним величині цих змін.

Для нелінійних явищ, математичні моделі котрих не підпорядковуються принципу суперпозиції, отримані знання стосовно поведінки частини об'єкта ще не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому, а його відгук на зміну умов може якісно і не пропорційно залежати від кількісної величини (обсягів) цих змін. Наголошено, що більшість реальних процесів і відповідних (адекватних) їм математичних моделей є суттєво нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають досить частковим випадкам і, як правило, слугують лише першим наближенням до реальності.

Лекція 3

*«Якщо вам здається, що
ситуація покращується, значить
ви щось не врахували»
Другий закон Чізхольма*

1. Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE).
2. Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку.
Резонанс.

1 Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE)

Під час досліджень різноманітних фізичних явищ, технологічних процесів, систем у багатьох галузях науки і техніки, а також деяких процесів, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, що описують певний процес чи явище. Втім у багатьох випадках можна виявити певну функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їх похідні. Такі рівняння називають диференціальними, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – інтегруванням диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане під час дослідження деякого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища, процесу. Диференціальні моделі називають ще динамічними математичними моделями. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення тощо [1].

Диференціальне рівняння, яке містить функцію лише однієї незалежної змінної (природно це функція часу для динамічних систем) має назву звичайного диференціального рівняння (**ODE** – ordinary differential equation).

Рівняння, які містять функції двох або декількох незалежних змінних, називаються рівняннями з частинними похідними (**PDEs** – partial differential equation).

Далі розглянуто звичайні диференціальні рівняння – **ODE**.

Оскільки такі рівняння містять невідомі функції залежні лише від часу, отже автоматично незалежні від координат, такі рівняння здатні описувати лише так звані динамічні системи (або процеси) із зосередженими параметрами.

Розглянемо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, t). \quad (1.3.1)$$

Позаяк невідома функція $x(t)$ залежить лише від однієї змінної – часу, то рівняння (1.3.1) являє собою ODE. Припустимо додатково, що функція в правій частині (1.3.1) може бути факторизована, тобто представлена у вигляді добутку двох функцій (часу та координат):

$$f(x, t) = g(t)h(x). \quad (1.3.2)$$

За умови (1.3.2) рівняння (1.3.1) вирішується методом розділення змінних:

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt. \quad (1.3.3)$$

Аналітичне рішення у вигляді (1.3.3) можна отримати, якщо обидва інтеграли можуть бути знайдені. Розглянемо для ілюстрації таке рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}. \quad (1.3.4)$$

Його рішення, з урахуванням константи інтегрування (яку позначимо як R^2), можна записати у вигляді:

$$x^2 + t^2 = R^2. \quad (1.3.5)$$

Вираз (1.3.5) представляє безкінечну кількість рішень, які відрізняються лише значеннями константи R^2 (рис. 1.3.1).

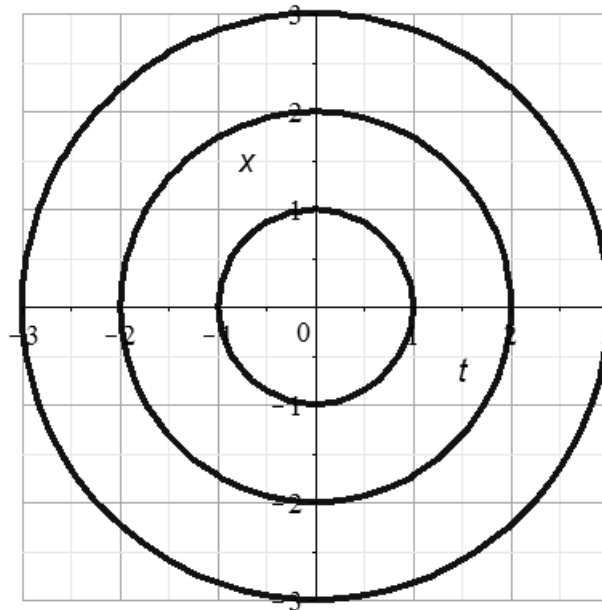


Рис. 1.3.1. Графіки функції (1.3.5) на площині (t, x) для трьох різних значень константи R^2

Розглянемо таку ілюстративну задачу: припустимо, що деяка хімічна компанія щодня скидає v літрів розчину, в кожному з яких якому міститься m грамів деякої хімічної речовини у досить велике озеро загального об'єму V . Вхідний та вихідний потоки води в озеро є стаціонарними. Користуючись фактом, що результуюча швидкість зміни концентрації речовини в озері дорівнює швидкості, з якою вона вводиться $\left(\frac{m}{V}\right)$ мінус та швидкість, з якою вона виво-

диться з озера $\left(\frac{v}{V}n\right)$, де $n(t)$ – концентрація речовини в озері.

Зміну концентрації можна описати таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{m}{V} - \frac{v}{V}n, \quad (1.3.6)$$

Рішення (1.3.6) має такий вигляд:

$$n(t) = \frac{m}{v} - C \exp\left(-\frac{v}{V}t\right), \quad (1.3.7)$$

де C – константа інтегрування. Якщо скористатися очевидною початковою умовою $n(0) = 0$, оскільки до початку скидання розчину в озеро воно було чистим, то константа інтегрування вочевидь дорівнює одиниці і з безлічі рішень (1.3.7) виокремлюється єдине рішення такого вигляду:

$$n(t) = \frac{m}{v} \left(1 - \exp\left(-\frac{v}{V}t\right)\right). \quad (1.3.8)$$

З моделі (8) видно, що концентрація речовини в озері залежить від параметра $\frac{m}{v}$, тобто концентрації речовини в тому розчині, який компанія скидає в озеро. З часом (за умови $(t \rightarrow \infty)$) концентрація речовини в озері наблизиться саме до цієї межі (рис. 1.3.2) і озеро фактично перестане відрізнятися від того розчину, який в нього скидають. Швидкість досягнення цієї межі залежить від співвідношення об'ємів розчину, які щоденно скидаються в озеро, до об'єму всього озера (на рис. 1.3.2 таке відношення дорівнює 0.001).

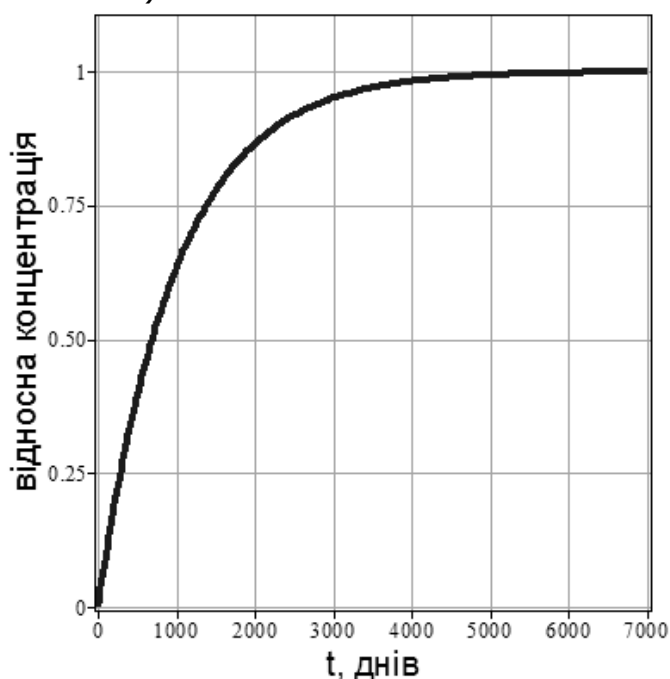


Рис. 1.3.2. Відносна концентрація речовини в озері

Ці не тривіальні висновки були зроблені з аналізу моделі (1.3.8), яка, своєю чередою, була отримана з диференціального рівняння (1.3.6).

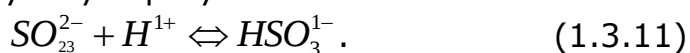
Ще один приклад диференціальних моделей першого порядку дає хімічна кінетика. Розглянемо хімічну реакцію такого вигляду:



де малими латинськими літерами показані коефіцієнти реакції, а великими – хімічні символи реагуючих молекул. Якщо вважати, що $[A], [B], [C]$ – концентрації реагентів у виразі (1.3.9), то отримаємо відомий у хімії закон масової дії. Швидкість реакції, яка задається виразом (1.3.9), може визначатися наступним чином:

$$r = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt}. \quad (1.3.10)$$

Розглянемо для прикладу реакцію поміж іонами сульфату та гідрогену з утворенням іону бісульфату:



Реакція (1.3.11) можлива в обох напрямках з різними швидкостями (r_d, r_i відповідно). Оскільки $a = b = c = 1$, і позначивши концентрації реагентів відповідно x, y, z , а їх початкові значення відповідно x_0, y_0, z_0 , можемо записати закон (1.3.10) у вигляді:

$$\frac{dz}{dt} = r_d(x_0 - z)(y_0 - z) - r_i z. \quad (1.3.12)$$

Рішення рівняння (1.3.12) можна отримати в загальному вигляді, хоча воно надто громіздке для наведення в лекції. Втім типовий вигляд зміни концентрації кінцевого продукту бісульфату, за умови, що швидкість зворотної реакції удвічі більша за швидкість прямої ($r_d = 0.5r_i$), показана на рис. 1.3.3.

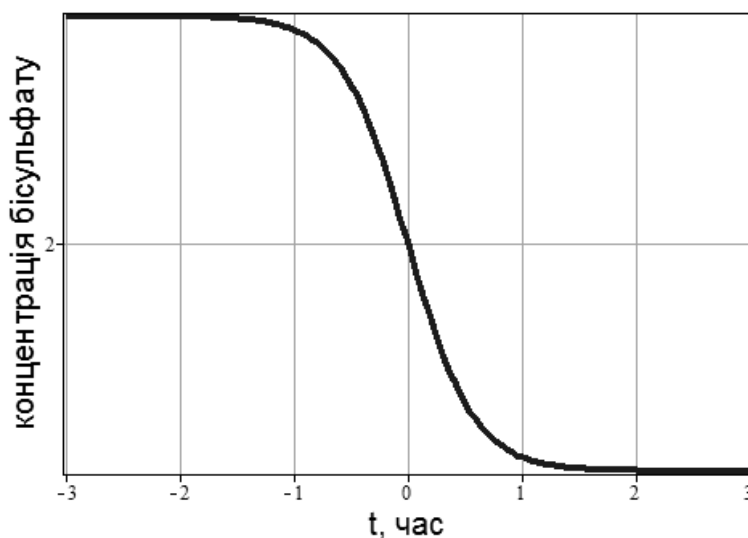


Рис. 1.3.3. Графік зміни концентрації кінцевого продукту бісульфату

2 Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку. Резонанс

Розглянемо простий послідовний коливальний контур (рис. 1.3.4), який складається з резистору R , ємності C та індуктору (котушки) L , а також елементу живлення з електрорушійною силою E .

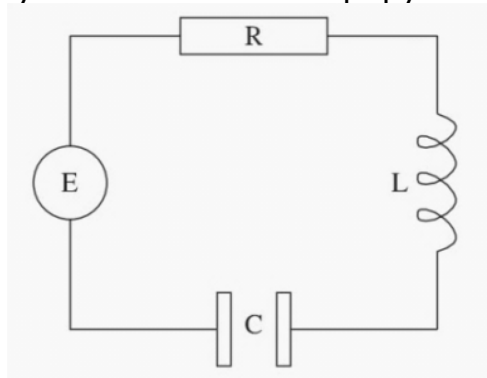


Рис. 1.3.4. Простий коливальний контур

Напруги на елементах контуру визначаються відповідно:

1. Законом Ома (резистор) $V_R = IR$.
2. Законом Фарадея (індуктор) $V_L = L \frac{dI}{dt}$.
3. Законом Кулона (конденсатор) $V_C = \frac{q}{C}$.

Застосовуючи закон Кірхгофа для напруг у контурі, отримуємо рівняння:

$$V_L + V_R + V_C = E(t), \quad (1.3.13)$$

або, враховуючи подані вище закони, а також зв'язок поміж струмом та зарядом $I = \frac{dq}{dt}$, представимо (1.3.13) в такій формі:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t). \quad (1.3.14)$$

Рівняння (1.3.14) є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Воно є лінійним, тому що похідні входять у нього лише в першому ступеню, і воно є другого порядку, бо найстарша похідна рівняння є другого порядку. Перепишемо отримане рівняння в такому вигляді:

$$\ddot{q} + p\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t), \quad (1.3.15)$$

де точками над символами вказані похідні по часу $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $p = \frac{R}{L}$,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad f(t) = \frac{E(t)}{L}.$$

Розглянемо далі абсолютно іншу, на перший погляд, систему. Припустимо, що матеріальна точка маси m рухається уздовж осі координат Ox від точки рівноваги $x = 0$ під впливом трьох таких сил (рис. 1.3.5):

1. Сили $F_1 = -kx$, яка повертає точку до початку координат, і яка пропорційна зміщенню точки від точки рівноваги.
2. Сили опору середовища $F_2 = -b\dot{x}$, яка пропорційна швидкості руху точки.
3. Зовнішньої сили $F_3(t)$, яка діє уздовж осі Ox на точку збоку зовнішніх тіл.

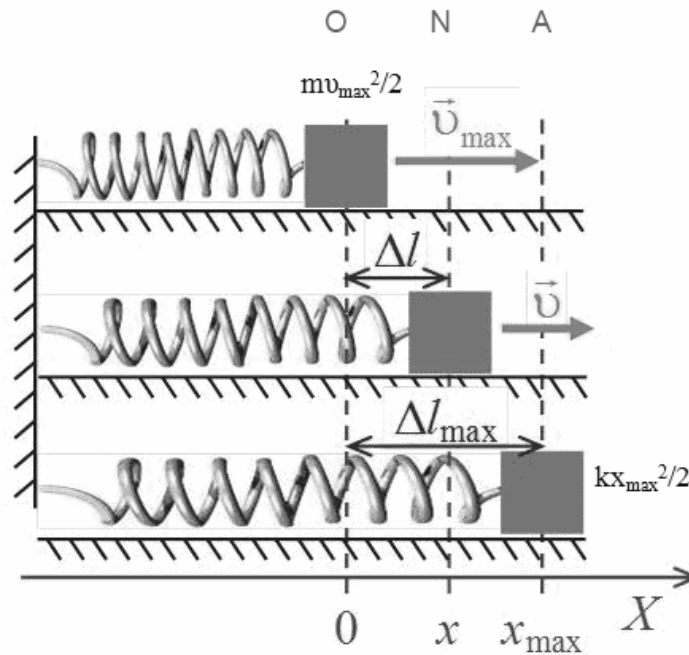


Рис. 1.3.5. Коливання матеріальної точки

Тоді рівняння руху матеріальної точки можна записати на підставі другого закону Ньютона в такому вигляді:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_3(t). \quad (1.3.16)$$

Останнє рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (1.3.17)$$

де $p = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f(t) = \frac{F_3(t)}{m}$.

Порівняймо рівняння (1.3.17) та (1.3.15), як видно, вони практично ідентичні, хоча моделюють дві різні з фізичної точки зору системи: коливання заряду на обкладинках конденсатора в коливальному контурі та коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги.

Диференціальне рівняння (1.3.17) – лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо його інтегрувати, знайдемо закон руху матеріальної точки.

Рівняння (1.3.17) з ненульовою правою частиною називають рівнянням вимушених коливань. Розглянемо спочатку простіший випадок, коли зовнішня сила відсутня, іншими словами: $f(t) = 0$. Тоді рівняння (1.3.17) спрощується до так званого рівняння вільних коливань:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3.18)$$

Розглянемо рівняння (1.3.18) і з'ясуємо як впливають на його рішення коефіцієнти цього рівняння (p, ω_0). Розглянемо спочатку рух у середовищу без опору, тобто коефіцієнт $p = 0$, рівняння такого руху виглядатиме так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3.19)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є лінійна комбінація гармонічних функцій:

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.3.20)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi = \arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$. Рух, який описується рішенням

(1.3.20), зветься гармонічним коливанням з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Величина A має назву амплітуди коливань (максимальне відхилення точки від положення рівноваги), а величину $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi$ називають фазою коливань, причому $\varphi = \Phi(0)$ – так звана початкова фаза.

З виразу (1.3.20) випливає, що всі рухи такого типу обмежені, оскільки при $t \rightarrow \pm\infty$ маємо $|x(t)| \leq A$ (рис. 1.3.6).

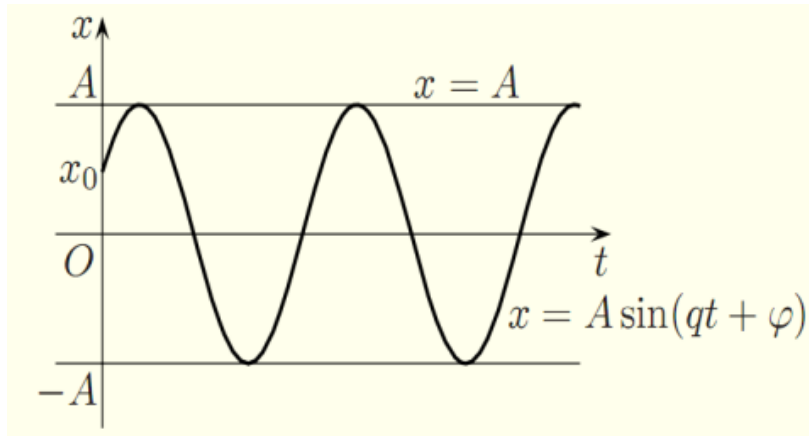


Рис. 1.3.6. Гармонічні коливання

Перейдемо до аналізу руху в середовищах з опором. Загальне рішення рівняння (1.3.18) має такий вигляд:

1. За умови, що $\omega^2 = \omega_0^2 - p^2 > 0$:

$$x(t) = A_0 \exp(-pt) \sin(\omega t). \quad (1.3.21)$$

Такий рух називають згасаючим гармонічним коливанням

(рис. 1.3.7) з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}$, частотою

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ та згасаючою з часом амплітудою $A(t) = A_0 \exp(-pt)$.

2. За умови $\omega_0^2 - p^2 < 0$ рішенням є аперіодичний згасаючий рух:

$$x(t) = \exp(-pt)(C_1 + C_2 t). \quad (1.3.22)$$

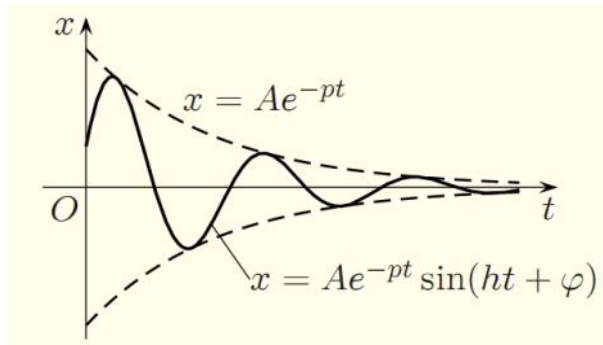


Рис. 1.3.7. Згасаючі гармонічні коливання

Такий рух не є коливальним, оскільки матеріальна точка із зростанням часу асимптотично прямує до положення рівноваги: $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ (рис. 1.3.7).

Розглянемо далі так звані вимушені коливання, диференціальна модель яких дається рівнянням (1.3.17) з ненульовою правою частиною. Припустимо, що вимушуюча сила є гармонічно залежною від часу, тобто $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$. Загальне рішення рівняння (1.3.17) за умови гармонічної вимушуючої сили має такий вигляд:

$$x(t) = \frac{f_0(p^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{2p\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos(\omega t) - \frac{2p\omega f_0}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \exp(-pt) \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} + \varphi) \quad (1.3.23)$$

За умови $t \rightarrow \infty$ останній доданок виразу (1.3.23) прямує до нуля (цей доданок описує так звані перехідні процеси в коливальній системі), тому стаціонарні вимушені коливання описуються першими двома доданками цього виразу.

$$x(t) = \frac{f_0(p^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{2p\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos(\omega t) \quad (1.3.24)$$

Насамперед варто зауважити, що вимушені коливання відбуваються з частотою вимушуючої сили – ω . Амплітуда вимушених коливань залежить від частоти і задається формулою:

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}} \quad (1.3.25)$$

Типові залежності амплітуди вимушених коливань від частоти вимушуючої сили показані на рис. 1.3.8. Опір середовища, тобто параметр p , збільшується з номером кривої.

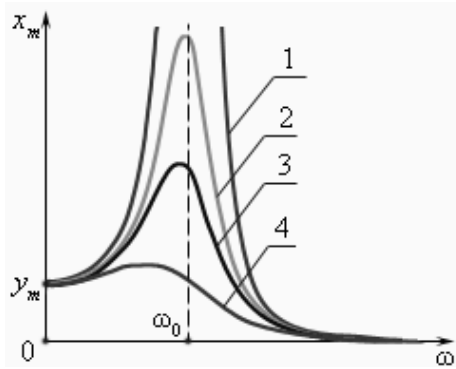


Рис. 1.3.8. Вимушені коливання

З рисунку видно, що амплітуда коливань може сягати доволі значної величини за умови так званого резонансу. Резонанс є досягненням максимуму амплітуди вимушених коливань, він має місце за умови, що частота вимушуючої сили наближається до резонансної частоти, яка задається виразом:

$$\omega \rightarrow \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}. \quad (1.3.26)$$

Для середовища без опору ($p \rightarrow 0, \omega_{res} \rightarrow \omega_0, A(\omega) \rightarrow \infty$) резонансна амплітуда теоретично може прямувати до нескінченно великих значень. Отже, чим меншим є опір середовища тим більших значень сягає резонансна амплітуда вимушених коливань.

Збільшення амплітуди є лише наслідком резонансу, а причина – збіг резонансної частоти коливальної системи з частотою зовнішнього впливу на систему. За допомогою явища резонансу можна виділити або посилити навіть дуже слабкі періодичні коливання. Резонанс – це явище, яке полягає на тому, що коливальна система особливо чутливо реагує на деякі частоти вимушуючої зовнішньої сили (впливу).

Резонанс зустрічається не лише в механіці, а практично всюди: в електроніці, оптиці, акустиці, астрофізиці. Явище резонансу лежить в основі проектування музичних інструментів: рояля, скрипки, флейти тощо.

Використовується явище резонансу і в електроніці. Коливальний контур, диференціальна модель якого представлена виразом (1.3.14), використовується в елементах налаштування та електричних фільтрах. Утім резонанс може бути й шкідливим, зокрема якщо він спричинює спотворення сигналу або паразитні шуми у приладах.

Один із найвідоміших прикладів шкідливості явища резонансу стався 12 квітня 1831 року, коли зруйнувався Бротонський підвісний міст через ріку Ірвелл в Англії, коли по ньому йшов військовий загін. Частота кроків воїнів, що крокували в ногу, збіглася з частотою резонансних коливань мосту, через що їх амплітуда стрімко зростала, ланцюги обірвалися, і міст зруйнувався, потрапивши в ріку.

Із резонансом можна стикнутися не тільки на суші, але й на морі та в повітрі. Так, за деяких частот обертання гребного вала у резонанс входили навіть кораблі. А на зорі розвитку авіації деякі

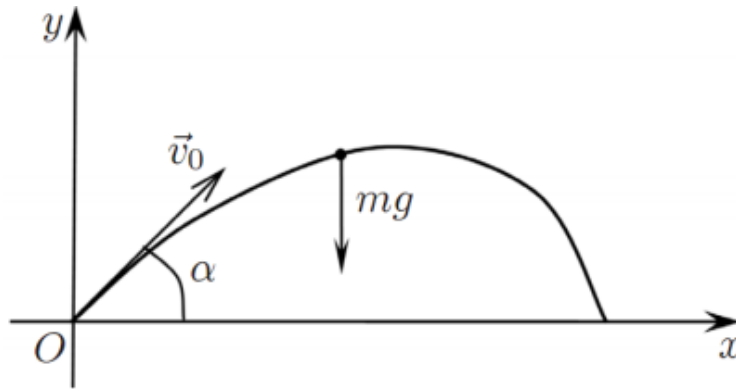


Рис. 1.4.1. Рух гарматного снаряду

Силами, які діють на снаряд є сила ваги $P = mg$ спрямована вертикально вниз (рис. 1.4.1), та сила опору повітря, проекції якої на осі координат можна записати у вигляді $mk\dot{x}$ та $mk\dot{y}$. Рівняння руху снаряду можемо записати системою з двох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -mk\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg - mk\dot{y} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.4)$$

Або після скорочення на масу в простішому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x} \\ \ddot{y} &= -g - k\dot{y} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.5)$$

Якщо знехтувати силою опору повітря ($k \rightarrow 0$), то розв'язком системи (1.4.5) є така сукупність функцій часу:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha) + C_1, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\alpha) + C_2. \quad (1.4.6)$$

Враховуючи початкові умови $x(0) = 0, y(0) = 0$, матимемо, що $C_1 = C_2 = 0$. В такому випадку послідовність (1.4.6) спрощується до вигляду:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha), \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\alpha). \quad (1.4.7)$$

Виключаючи час з (1.4.7) отримаємо траєкторію руху снаряду, це парабола:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + xt \tan(\alpha). \quad (1.4.8)$$

Диференціальне рівняння n -го порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.4.9)$$

завжди можна звести до нормальної системи з n -диференціальних рівнянь першого порядку і навпаки. Для цього позначимо:

$$y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n. \quad (1.4.10)$$

Тоді рівняння (1.4.9) стає еквівалентним такій нормальній системі:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.11)$$

Зворотне перетворення здійснюється шляхом $(n-1)$ -кратного диференціювання одного з рівнянь системи, наприклад першого, послідовними замінами в (1.4.10) у зворотному порядку.

2 Планарні системи та фазові портрети

Розглянемо автономну двовимірну систему диференціальних рівнянь у наступній формі (точками згори традиційно позначені похідні по часу від шуканих функцій):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.12)$$

або те саме в матрично-векторній формі:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.4.13)$$

де $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначення 1. Будь-яке рішення систем (1.4.12), (1.4.13), припустимо, у вигляді $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, можна представити як криву лінію на фазовій площині (x, y) . Такі криві мають назву траєкторії або орбіти.

Теорема існування та унікальності рішень гарантує, що траєкторії не перетинаються між собою, інакше у точці перетинання траєкторій існувало б одночасно мінімум два рішення системи. Позаяк система (1.4.12), або (1.4.13), має безліч рішень, існує відповідно також безліч можливих траєкторій, які суцільно заповнюють фазову площину. Однак якісна поведінка системи може бути зрозумілою з аналізу лише декількох траєкторій, кожна з яких відповідає своїм початковим умовам.

Визначення 2. Фазовим портретом системи диференціальних рівнянь (1.4.12) і (1.4.13) є двовимірна фігура, яка показує якісну поведінку системи і визначає як функції x та y залежать від часу t . За допомогою належної кількості зображених траєкторій фазовий портрет повинен показати як виглядає і де закінчується кожна траєкторія для будь-яких початкових умов.

Визначення 3. Поле напрямів, або векторне поле, задає градієнти $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ і вектори напрямків траєкторій на фазовій площині.

Нахил траєкторій визначається за «правилом ланцюга»: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Отже, напрям векторного поля задається відношенням похідних від невідомих функцій в кожній точці фазової площини.

Визначення 4. Контурні лінії, уздовж яких виконується умова $\frac{dy}{dx} = \text{const}$ називають ізоклінами системи (1.4.12), (1.4.13).

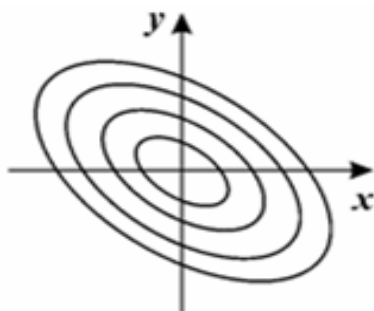
Ізокліни допомагають орієнтуватися в поведінці функції: зокрема ізокліна $\dot{x} = 0$ показує напрям, у якому функція $x(t)$ лишається незмінною.

Система (1.4.13) є простою канонічною, якщо її матриця не вироджена: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Така система має єдину критичну точку спокою (точку рівноваги) і вона розташована на початку координат: $x = y = 0$. Тип фазового портрету системи визначається власними числами матриці $\mathbf{A}$. Вони знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (1.4.14)$$

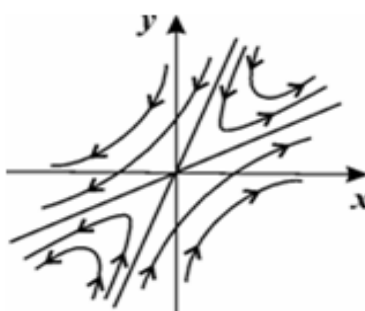
Обидва кореня квадратного рівняння (1.4.14) можуть бути дійсними (з різними, або однаковими знаками, або навіть співпадати), або комплексними спряженими (з різними знаками дійсних частин). Типи фазових портретів та умови їх спостереження для різних можливих випадків представлено на рис. 1.4.2.

λ_1, λ_2 – комплексні
і $\text{Re}(\lambda_i) = 0$



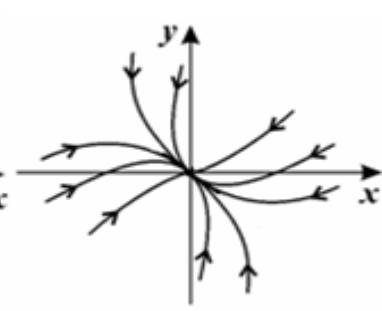
Центр

λ_1, λ_2 – дійсні і
різного знаку



Сідло

λ_1, λ_2 – дійсні і
різного негативні



Стійкий вузол

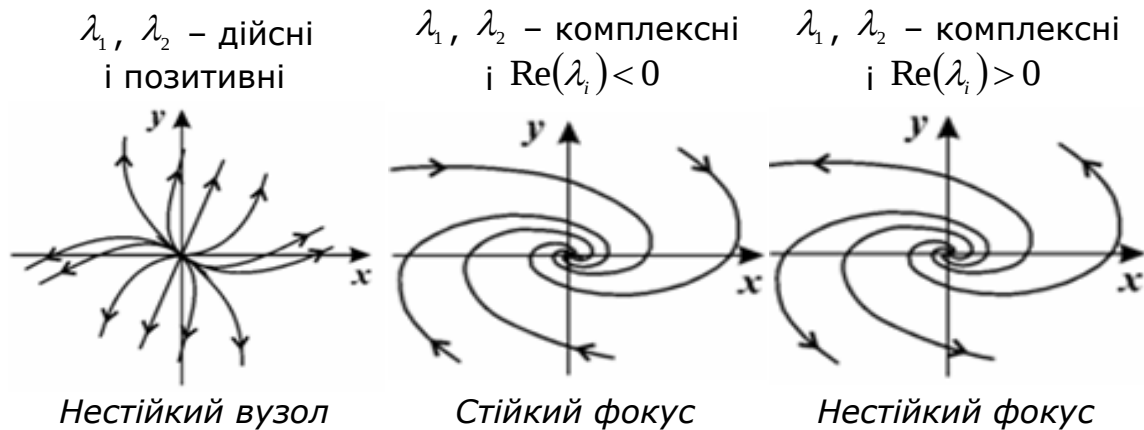
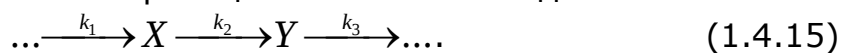


Рис. 1.4.2. Типи фазових портретів та умови їх спостереження

Розглянемо приклад фазового портрету системи, яка описує процес лінійних хімічних реакцій. Припустимо, що хімічна речовина X поступає ззовні з незмінною швидкістю і перетворюється в речовину Y зі швидкістю пропорційною концентрації речовини X , а далі зі швидкістю пропорційною концентрації речовини Y виводиться з реактора. Схема реакції має такий вигляд:



Її можна описати такою простою канонічною системою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= k_1 - k_2 x \\ \dot{y} &= k_2 x - k_3 y \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.16)$$

Розглянемо фазовий портрет системи. Поділимо друге рівняння системи (1.4.16) на перше, тож матимемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x}. \quad (1.4.17)$$

Побудуємо вертикальну ізокліну, виходячи з умов $\frac{dy}{dx} = \infty \rightarrow x = \frac{k_1}{k_2}$. Горизонтальну ізокліну отримаємо з умов $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow y = \frac{k_2}{k_3} x$.

Особлива точка, тобто стаціонарний стан, лежить на перетині двох цих ізоклін. Вочевидь, це точка з координатами $x_0 = \frac{k_1}{k_2}, y_0 = \frac{k_1}{k_3}$. Характер стабільності особливої точки з'ясуємо з аналізу характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + (k_2 + k_3) + k_2 k_3 = 0. \quad (1.4.18)$$

Корені рівняння (1.4.18) мають такий вигляд:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_2 + k_3) \pm \sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4k_2k_3}}{2}. \quad (1.4.19)$$

Оскільки дискримінант квадратичного рівняння (1.4.18) $D = (k_2 + k_3)^2 - 4k_2k_3 = (k_2 - k_3)^2 > 0$ позитивний завжди, то обидва корені рівняння (1.4.19) є дійсними, причому вони є від'ємними, як це видно з (1.4.19). Отже, фазовий портрет системи (1.4.16) має такий вигляд як показано на рис. 1.4.3 і являє собою стійкий вузол. На рисунку показані також обидві знайдені вище ізокліни: горизонтальна та вертикальна.

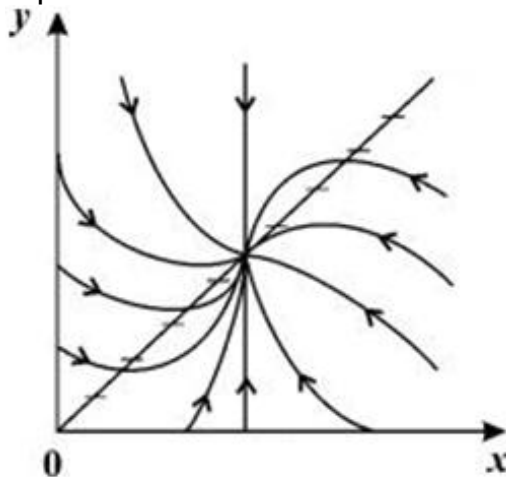


Рис. 1.4.3. Фазовий портрет системи (1.4.16), яка описує процес лінійних хімічних реакцій

При цьому концентрація речовини X прямує до стаціонарного значення $\left(x = \frac{k_1}{k_2} = \text{const}\right)$ причому монотонно, тоді як концентрація речовини Y може проходити через екстремум. Коливальні режими в такій системі неможливі, про що свідчить не замкненість фазових траєкторій.

Розглянемо ще просту систему, яка складається з двох компонентів: хижаків та об'єкта їх полювання: наприклад, акули та сардини, леви та антилопи тощо. Дуже просту модель такої системи запропонував свого часу Вольтерра, і вона відома як модель Лотка-Вольтерра.

Розглянемо диференціальну модель такої системи у вигляді системи з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} = y(\gamma x - \delta) \end{cases}, \quad (1.4.20)$$

де x, y – чисельність популяцій жертви та хижака відповідно, а коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – всі є позитивними константами. Зокрема, величина αx описує зростання популяції жертв за рахунок народження та за відсутності хижаків, величини $(-\beta xy)$, (γxy) описують

зміни популяцій за рахунок взаємодії (тобто зустрічей поміж хижаками та жертвами), величина $(-\delta y)$ описує зміну популяції хижаків за рахунок смертності внаслідок відсутності жертв.

Критичні точки фазової діаграми знайдемо з рішення рівнянь $\dot{y} = \dot{x} = 0$. З правих частин (1.4.20) легко знаходимо їх координати на фазовій площині:

$$\left. \begin{aligned} x_{01} &= \frac{\alpha}{\beta}, y_{01} = \frac{\delta}{\gamma} \\ x_{02} &= 0, y_{02} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.21)$$

Отже, система (1.4.20) має дві критичні точки. Фазовий портрет системи показаний на рис. 1.4.4 за такого набору коефіцієнтів: $\alpha = \beta = 1$, $\delta = \gamma = 0.3$.

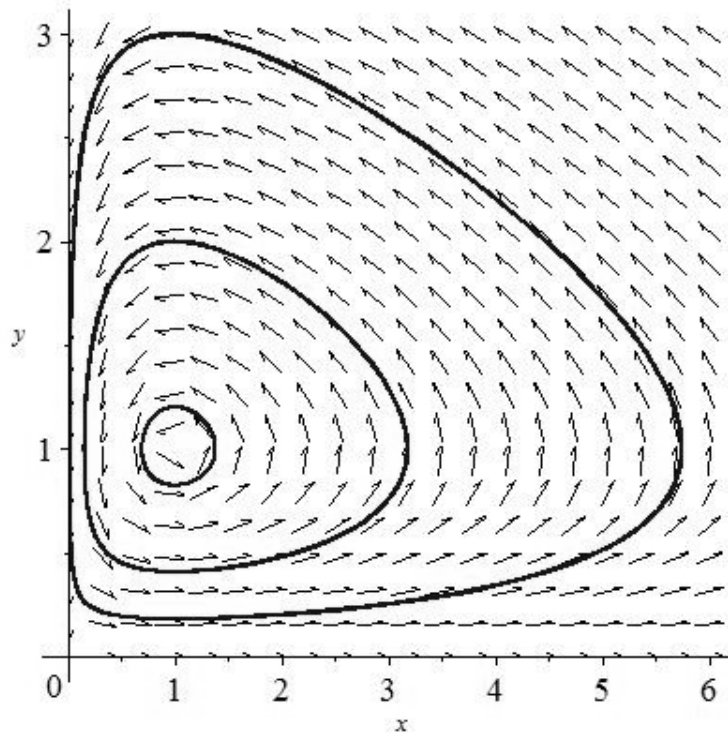


Рис. 1.4.4. Фазовий портрет системи (1.4.20), яка описує процес взаємодії хижаків та об'єктів їх полювання

Перша критична точка вочевидь є центром, навколо якого формуються замкнені траєкторії, які вказують на регулярні коливання чисельності обох популяцій навколо першої критичної точки (1.4.21). Відмінність форми траєкторії від еліптичної вказує на суттєву негармонічність таких коливань. Зроблені вище висновки засвідчуються як рішенням системи (1.4.20), так і спостереженнями за взаємодіючими парами популяцій у природі. Зокрема на рис. 1.4.5 показано коливання чисельності популяцій рисі та зайців на півночі Канади за даними багаторічних спостережень хутових кампаній.

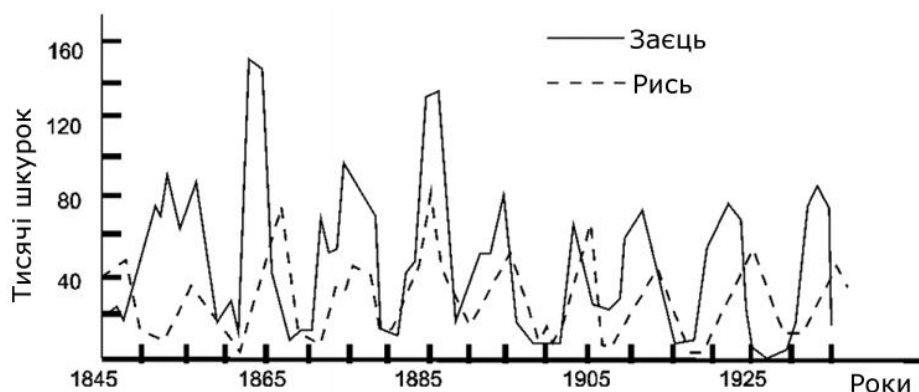


Рис. 1.4.5. Коливання чисельності популяцій рисі та зайців

Лекція 5

*«На захист власної теорії
завжди можна навести достатню
кількість досліджень»
Закон наукових розвідок Мерфі*

1. Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь.
2. Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення.

1 Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь

Задача Абеля історично була першою задачею, яка привела до розгляду та розв'язання інтегральних рівнянь. Задачу можна сформулювати таким чином: нехай матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається у вертикальній площині (ξ, η) за деякою кривою (рис. 1.5.1). Необхідно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, що почала свій рух без початкової швидкості в точці кривою з ординатою x , досягла осі $O\xi$, тобто свого найнижчого положення, за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція початкового положення точки.

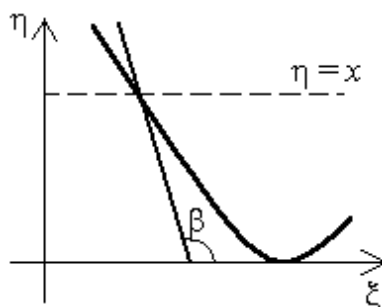


Рис. 1.5.1. Рух матеріальної точки в задачі Абеля

Абсолютна величина швидкості точки, що рухається, обчислюється за формулою:

$$v = \sqrt{2g(x-\eta)}. \quad (1.5.1)$$

Нехай $\beta = \beta(\eta)$ – кут нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 1.5.1). Тоді будемо мати для вертикальної компоненти швидкості руху точки:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)} \sin \beta. \quad (1.5.2)$$

Звідси:

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)} \sin \beta}. \quad (1.5.3)$$

Проінтегруємо останній вираз від 0 до x і покладемо $\frac{1}{\sin \beta} = \varphi(\eta)$. Тоді з (1.5.3) одержимо такий вираз:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g} f_1(x). \quad (1.5.4)$$

Нехай $f(x) = -\sqrt{2g} f_1(x)$. Тоді (1.5.4) запишеться в такому вигляді:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = f(x), \quad (1.5.5)$$

де $\varphi(\eta)$ – невідома, а $f(x)$ – відома функції.

Рівняння виду (1.5.5) називають інтегральним рівнянням Абеля. Воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду.

Якщо рівняння Абеля (1.5.5) може бути вирішено відносно невідомої функції $\varphi(\eta)$, то далі, виходячи з того, що $\frac{1}{\sin \beta} = \varphi(\eta)$ маємо, що $\eta = \Phi(\beta)$. Користуючись зв'язком між тангенсом кута β та похідною, маємо:

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\Phi'(\beta) d\beta}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{\operatorname{tg} \beta} d\beta = \Phi_1(\beta), \quad (1.5.6)$$

де штрихами позначено відповідні похідні від функції $\Phi(\beta)$ по куту β . Рівняння (1.5.6) є фактично параметричним завданням шуканої кривої:

$$\xi = \Phi_1(\beta), \quad \eta = \Phi(\beta). \quad (1.5.7)$$

Зокрема, якщо функція $f(x) = \tau = \text{const}$, тобто матеріальна точка повинна досягти свого найнижчого положення за один і той самий час, незалежно від початкового положення, то такою кривою є циклоїда (рис. 1.5.2, суцільна крива). Такі задачі ще називаються задачами про таутохрону, або, як варіант, задачами про

брахістохрону, тобто таку криву, спуск матеріальної точки уздовж якої потребує мінімального часу. Цю задачу вперше поставив і вирішив Бернуллі.

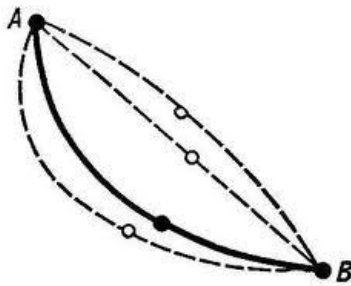


Рис. 1.5.2. Циклоїда

Рівняння Абеля є одним з інтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, якщо при цьому не використовувати диференціальні рівняння.

Моделювання розподілу яскравості світла. Розглянемо центровану оптичну систему P , яка проектує на екран (вісь Os у просторі зображень) зображення деякого відрізка (вісь Ot у просторі предметів рис. 1.5.3).

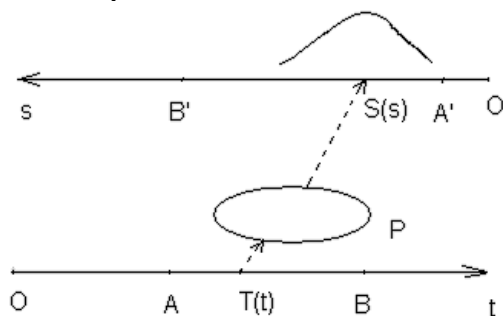


Рис. 1.5.3. Схема проектування центрованою оптичною системою зображення відрізка

Згідно із законами геометричної оптики, зображення об'єкта подібно до самого об'єкта, таким чином відрізок AB відображується у відрізок $A'B'$, при цьому довжина цих двох відрізків (оригіналу та зображення) в загальному випадку різні.

У заданій системі лінз центрованого оптичного приладу P оберемо масштаби на вісях Ot, Os так, щоб для двох взаємно відповідних точок $T(t)$ і $S(s)$ оригіналу та зображення мала місце рівність $s = t$ (рис. 1.5.3).

Точка $T(t)$ об'єкта AB , що світиться, впливає на освітлення всього зображення $A'B'$, причому найбільша яскравість освітлення в точці $S(s)$. Отже, інтенсивність освітлення J є функцією від s та t , тобто $J = J(s, t)$.

Нехай $\eta(t)$ – лінійна густина яскравості об'єкта. Тоді величина добутку $(\eta(t) \cdot J(s, t) \cdot \Delta t)$ визначає наближене значення яскравості

зображення в точці $S(s)$, яке породжується елементом об'єкта Δt , який світиться. Величина $J(s, t)$ визначається властивостями оптичного приладу P .

Лінійну густину яскравості зображення в точці $S(s)$, згідно з принципом суперпозиції, можна наближено представити у вигляді такого інтегральної суми:

$$\varphi(s) \approx \sum_k \eta(t_k) J(s, t_k) \Delta t_k. \quad (1.5.8)$$

Якщо довжина відрізка AB дорівнює l , то, переходячи від суми до інтеграла, отримаємо для функції яскравості зображення відрізка такий результат:

$$\varphi(s) = \int_0^l J(s, t) \eta(t) dt. \quad (1.5.9)$$

Звичайно, функція $J(s, t)$ є відомою функцією, яка визначається властивостями оптичного приладу. Якщо густина яскравості зображення $\varphi(s)$ відома, а потрібно знайти розподіл яскравості об'єкта $\eta(t)$, яке надає задану яскравість зображення, тоді $\varphi(s)$ – задана функція, $\eta(t)$ – шукана. Отже (1.5.9) – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

Задача Коші для звичайного лінійного диференційного рівняння n -го порядку з неперервними коефіцієнтами може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду. Покажемо це на прикладі диференційного рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t) x(t) = F(t), \quad (1.5.10)$$

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1. \quad (1.5.11)$$

Нехай:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi(t). \quad (1.5.12)$$

Враховуючи початкові умови та формулу:

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad (1.5.13)$$

послідовно знаходимо:

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \varphi(s) ds + C_1, \quad (1.5.14)$$

$$x(t) = \int_0^t (t-s) \varphi(s) ds + C_1 t + C_0. \quad (1.5.15)$$

На підставі (1.5.14), (1.5.15) рівняння (1.5.10) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \int_0^t [a_1(t) + a_2(t)(t-s)]\varphi(s)ds = \\ = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t) \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Покладемо:

$$\begin{aligned} K(t,s) = -[a_1(t) + a_2(t)(t-s)], \quad f(t) = \\ = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t) \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Тоді (1.5.15) набуває такого вигляду:

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \quad (1.5.18)$$

Таким чином задача Коші (1.5.10), (1.5.11) звелась до розв'язання інтегрального рівняння (1.5.18). Знайдену функцію $\varphi(t)$ підставимо в співвідношення (1.5.15) і отримаємо розв'язок $x(t)$ задачі (1.5.10), (1.5.11).

Існування єдиного розв'язку рівняння (1.5.18) впливає з існування єдиного розв'язку задачі Коші (1.5.10), (1.5.11) для лінійного диференційного рівняння з неперервними коефіцієнтами в околі точки $t=0$.

Однією з найбільш комп'ютеризованих галузей медичної діагностики нині є комп'ютерна томографія, яка історично виникла саме з рентгенівської томографії. Вона застосовує математичний апарат так званих інтегральних перетворень Радона. При цьому комп'ютерна розшифровка томограм із математичної точки зору зводиться саме до вирішення деякого інтегрального рівняння (рис. 1.5.4).

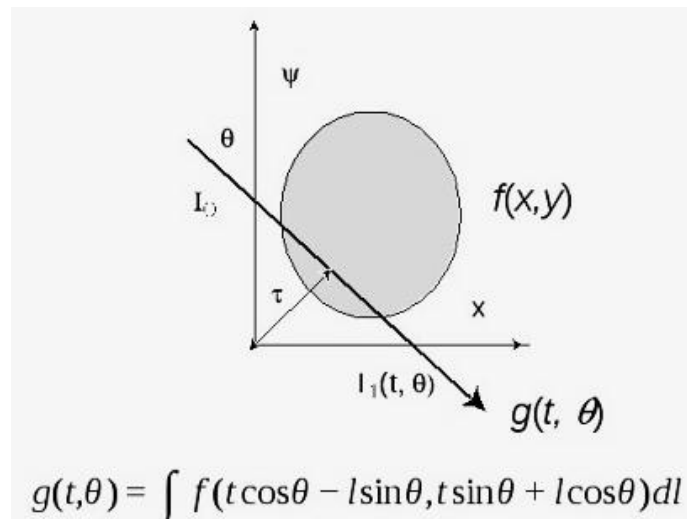


Рис. 1.5.4. Перетворення Радона

Більш складними є моделі процесів, які використовують інтегрально-диференціальні рівняння, наприклад моделі кінетичних процесів з урахуванням розсіювання частинок. Рішення таких рівнянь отримують або за рахунок суттєвих спрощень отриманих рівнянь, або суто числовими методами.

2 Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \quad x \in [a,b], \quad (1.5.19)$$

або

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \quad (1.5.20)$$

де $K(x,t)$, $f(x)$ – задані функції, λ – комплексний параметр, $\varphi(x)$ – шуканий розв'язок. Функції $K(x,t)$ та $f(x)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння відповідно:

Інтегральні рівняння класифікуються таким чином:

1. Якщо шукана функція $\varphi(t)$ міститься тільки під знаком інтеграла, то рівняння називається інтегральним рівнянням *першого роду*. Такими є рівняння вигляду:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1.5.21)$$

або

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (1.5.22)$$

Рівняння (1.5.21) і (1.5.22), в яких шукана функція міститься також і поза інтегралом, називаються інтегральними рівняннями *другого роду*.

2. Якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається рівнянням *Фредгольма*, як у випадку (1.5.21) і (1.5.22). Якщо ж межі інтегрування змінні, як у (1.5.16) і (1.5.18), то інтегральне рівняння називається рівнянням *Вольтерра*.

Формально рівняння Вольтерра можна розглядати як частинний випадок рівняння Фредгольма, поклавши, наприклад, у (1.5.22) $K(x,t)=0$ при $t > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерра і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь, істотно різні. Тому рівняння Вольтерра виділяють в особливий тип рівнянь;

3. Рівняння (1.5.21), (1.5.22) називаються *однорідними*, якщо $f(x) \equiv 0$. У супротивному випадку ці рівняння називаються *неоднорідними*. Розв'язком інтегрального рівняння називається функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність по x .

Одними з перших відомих інтегральних рівнянь були так звані парні інтегральні рівняння. Це пари рівнянь-рівностей, що визначають відповідні типи нескінчених інтегральних перетворень, як наприклад, відоме інтегральне перетворення Фур'є:

$$\left. \begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} y(t) dt \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} Y(\omega) d\omega \end{aligned} \right\}. \quad (1.5.23)$$

Парними ці рівняння називаються за такої причини: якщо в одній із таких рівностей під знаком інтеграла множник ядра інтегрального перетворення вважати невідомим (саме в цьому випадку ці рівності є інтегральними рівняннями), то інша парна до неї рівність є формулою, за якою визначається шуканий розв'язок рівняння. Зокрема до таких парних рівнянь відносяться також згадані вище пряме та зворотне інтегральні перетворення Радона, які складають математичне підґрунтя комп'ютерної томографії взагалі, незалежно від того які фізичні принципи покладено в її основу: рентгенівська томографія, магніто-резонансна томографія, когерентна оптична томографія, імпедансна томографія тощо.

Варто зауважити, що для інтегральних рівнянь, як і для диференціальних, не завжди вдається отримати точне аналітичне рішення. Вибір методу рішення залежить від виду рівняння, як от, наприклад, у методі перетворень Лапласа, методі послідовних наближень, методі резольвент або в методі зведення до алгебраїчних рівнянь тощо.

Лекція 6

*«Під будь-якою безоднею
може розкритися ще одна,
більш глибока»*

Закон безкінечного падіння Емерсона

1. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Рівняння Нав'є-Стокса, Нав'є та Ейлера.

1 Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних

Диференціальним рівнянням у частинних похідних називається рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функцію і частинні похідні від цієї функції. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають порядком рівняння. Багато фізичних явищ моделюються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє відоме рівняння Хопфа-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.6.1)$$

де функція $u = u(x, t)$ описує процес розповсюдження одновимірної ударної хвилі в газовому середовищі (рис. 1.6.1).

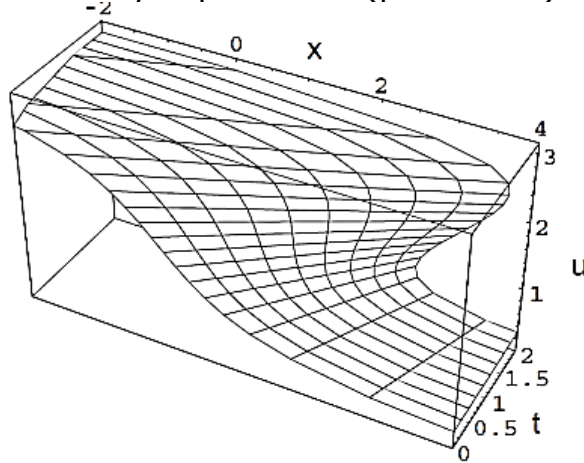


Рис. 1.6.1. Розповсюдження одновимірної ударної хвилі в газовому середовищі

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку. Це рівняння є частинним випадком більш загального рівняння Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.6.2)$$

за умови, що в'язким тертям у середовищі можна знехтувати ($\eta \rightarrow 0$).

Якщо $u = u(x, t)$ – розв'язок рівняння (1.6.1), то його графік у просторі змінних називають інтегральною поверхнею рівняння (1.6.1). Неявним рішенням для рівняння (1.6.1) є такий вираз:

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t), \quad (1.6.3)$$

де $f(z)$ – довільна функція свого аргументу, зокрема $f(x) = u(x, 0)$ – початковий профіль нелінійної ударної хвилі. Рис. 1.6.1 демонструє інтегральну поверхню для розв'язку рівняння (1.6.1) за початкової умови $u(x, 0) = \arctg(x)$. Модель наочно ілюструє явище «перекидання» фронту ударної хвилі.

В оптиці, наприклад, вивчається рівняння, яке описує поширення світлової хвилі в неоднорідному середовищі з показником заломлення $n(x, y, z)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z), \quad (1.6.4)$$

де $u = u(x, y, z)$.

Якщо у рівнянні (1.6.1) функція (1.6.3) залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції (1.6.3), то його називають

лінійним. Рівняння (1.6.1) з цієї точки зору є лінійним, а (1.6.2) – нелінійним.

Для того, щоб повністю описати той чи інший процес, необхідно, окрім самого рівняння в частинних похідних, задати початковий стан цього процесу (початкові умови) та режим роботи на границі області, у якій відбувається процес (граничні умови). Математично це пов'язано з нескінченною кількістю розв'язків диференціальних рівнянь. Тому, щоб виділити розв'язок, який описує реальний процес, необхідно задати додаткові умови. Такими додатковими умовами і є крайові умови – початкові та граничні. Відповідна задача називається крайовою задачею або задачею математичної фізики.

Широкий клас фізичних процесів описується лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Наприклад, лінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку є рівняння Шредінгера, яке є основним рівнянням квантової механіки.

Розглянемо окремі характерні фізичні процеси, що зводяться до різних крайових задач для диференціальних рівнянь такого типу.

1. **Натягнена струна**, закріплена на кінцях, координати яких $x=0$ та $x=l$. Моделюючи струну будемо нехтувати її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, що виникають при згинанні, та силами ваги. Врахуємо лише сили натягу, які описуються законом Гука: натяг струни пропорційний її видовженню. За основну величину, що характеризує процес коливання струни виберемо функцію $u(x,t)$ зміщення точок струни від положення рівноваги.

Розглянемо малі відхилення точок струни від положення рівноваги, при яких можна вважати, що рух усіх точок струни відбувається в одній площині і перпендикулярно до осі Ox . Рівняння малих коливань такої струни виглядає так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1.6.5)$$

з крайовими умовами:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad (1.6.6)$$

та початковими умовами:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (1.6.7)$$

де $\varphi(x)$ – відома функція, яка описує форму струни в початковий момент часу, a^2 – квадрат швидкості розповсюдження хвилі по струні.

2. **Рівняння теплопровідності** в однорідному стрижні $(0,l)$ полягає в розв'язку рівняння вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (1.6.8)$$

де $u(x, t)$ – функція, яка описує температуру в певній точці та певний момент часу, a^2 – коефіцієнт теплопроводності стрижня (прямо пропорційний теплопроводності та обернено пропорційний теплоємності та густині), $f(x, t)$ – відома функція, яка описує розподіл потужності джерел тепла.

Початкові умови можна записати у вигляді:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.6.9)$$

де $\varphi(x)$ – відома функція розподілу температур у початковий момент, а крайові умови можна задати в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} b_0 u_x(0, t) + c_0 u(0, t) &= \mu(t) \\ b_l u_x(l, t) + c_l u(l, t) &= \nu(t) \end{aligned} \right\}. \quad (1.6.10)$$

Рис. 1.6.2 представляє розподіл температур в однорідному стрижні залежно від координати та часу за умови розповсюдження тепла з точкового джерела.

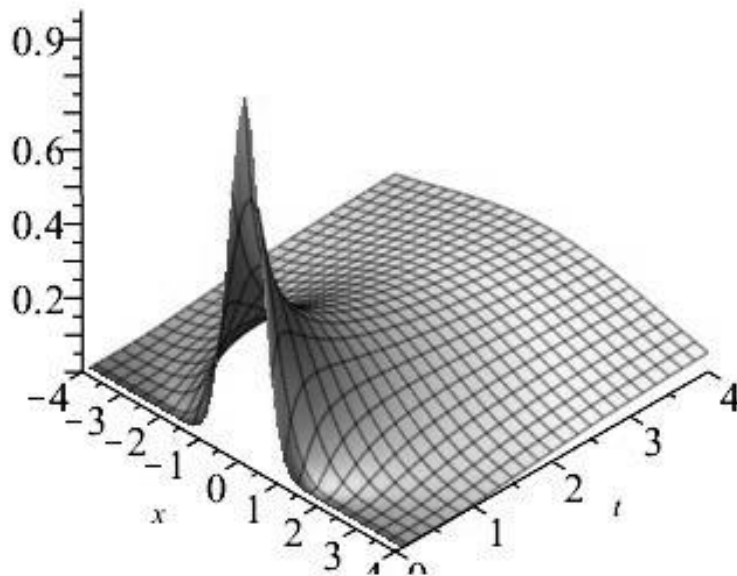


Рис. 1.6.2. Розподіл температур в однорідному стрижні

3. **Хвильове рівняння**, яке описує процес розповсюдження плоскої хвилі в одному напрямі, припустимо, уздовж осі Ox . Якщо v^2 – квадрат фазової швидкості хвилі, а $u(x, t)$ – функція зміщення точки з певною координатою у певний момент часу, то процес її поширення описується такою моделлю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.6.11)$$

2 Рівняння Нав'є-Стокса, Нав'є та Ейлера

Гідродинаміка – розділ фізики суцільних середовищ, що вивчає рух ідеальних і реальних рідини і газу. Як і в інших розділах фізики суцільних середовищ передусім здійснюється перехід від реального середовища, що складається з великого числа окремих атомів або молекул (або дрібних частинок, як, наприклад, пісок), до моделі абстрактного суцільного середовища, для якого і записуються всі рівняння руху.

Ізотермічним, або адіабатичним коефіцієнтом стискання рідини, або газу, називають відносну зміну їх об'ємів, які зумовлені підвищенням тиску при відповідній умові (постійній температурі, або відсутності теплообміну):

$$\chi_{T,ad} = \frac{1}{V(P,T)} \left(\frac{\partial V(P,T)}{\partial P} \right).$$

Для газів ці коефіцієнти мають помітні значення, іншими словами гази помітно і легко змінюють свій об'єм під дією зовнішнього тиску, коротше кажучи – вони легко стискаються.

Для звичних рідин, однак, величини цих коефіцієнтів надзвичайно малі, що дозволяє застосовувати модель рідини, яка не стискається, тобто має нульовий коефіцієнт стискання (1.6.11). Звичайна рідина може вважатися такою, що практично не стискається, тобто за практично всіх зовнішніх тисках її густина (об'єм) залишаються майже незмінними.

Ідеальна рідина – уявна рідина, позбавлена в'язкості і теплопровідності та процесів, пов'язаних із ними. У ідеальній рідині відсутнє внутрішнє тертя, тобто немає дотичних напружень між двома сусідніми шарами, вона неперервна і не має структури. Для такої рідини нульовими є як коефіцієнт стискання (1.6.10) так і коефіцієнт в'язкості. Цим вимогам задовільно відповідають чимала кількість реальних рідин і навіть газів, утім тільки за умов що швидкості їх руху значно менші від швидкості розповсюдження звуку в цих рідинах, і якщо під час течії у потоках не виникає великих градієнтів швидкості.

Найбільш загальним рівнянням гідродинаміки є диференціальне рівняння Нав'є-Стокса, яке у векторному вигляді можна записати в такій формі:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) - \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla, \mathbf{v}) + \nabla P = 0. \quad (1.6.12)$$

Тут $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – векторне поле швидкостей рідини в кожній точці простору і кожний момент часу, ρ – густина рідини (маса елементарного об'єму), $P(\mathbf{r}, t)$ – поле тисків тиск, η – коефіцієнт динамічної в'язкості, ζ – інший коефіцієнт в'язкості рідини, ∇ – оператор набла (Гамільтона).

Це рівняння виникає при застосуванні другого закону Ньютона до руху рідини, отже, як і цей закон, є диференціальними рівняннями в частинних похідних другого порядку. Рівняння (1.6.12) звичайно розглядається в системі з так званим рівнянням безперервності, яке відображає закон збереження енергії під час руху рідини:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, (\rho \mathbf{v})) = 0. \quad (1.6.13)$$

Для рідин, які не стискаються (тобто $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), з рівняння (1.6.13) виникає:

$$(\nabla, \rho \mathbf{v}) = \rho (\nabla, \mathbf{v}) = 0, \quad (1.6.14)$$

і тоді доданок:

$$\left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla, \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6.15)$$

обертається в нуль.

Внаслідок цього рівняння Нав'є-Стокса (1.6.12) спрощується до вигляду рівняння Нав'є, яке описує течію рідини, котра практично не стискається, але все ж має помітні сили в'язкого тертя:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) - \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla P = 0. \quad (1.6.18)$$

З рівняння (1.6.18) можна зробити корисний попередній висновок, застосовуючи лише міркування теорії розмірностей. Стаціонарний рух рідини по каналу, припустимо по кровоносній судині, визначається фактично лише її кінематичною в'язкістю $\mu = \frac{\eta}{\rho}$ з

розмірністю $\left(\frac{L^2}{T} \right)$, швидкістю елементу рідини v з розмірністю

$\left(\frac{L}{T} \right)$, та характерними розміром каналу $d \sim \sqrt{S}$ з розмірністю (L) .

З цих величин можна скласти лише один безрозмірний параметр, який має назву числа Рейнольдса і грає важливу роль в оцінці режимів руху рідини:

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}. \quad (1.6.19)$$

Можна показати, що число Рейнольдса характеризує відношення сили, яка виникає за рахунок конвективного прискорення – нелінійний доданок $(\rho (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v})$ у рівняннях (1.6.12) та (1.6.13), до сили в'язкого тертя – доданку $(\eta \nabla^2 \mathbf{v})$. Конвективним називається прискорення, що виникає за рахунок зміни площі перерізу каналу: у вузьких місцях (дифузорах) швидкість потоку збільшується, у

ширших (конфузорах), навпаки, зменшується. Тиск рідини поводить ся навпаки. Цей ефект отримав назву ефекту Бернуллі (рис. 1.6.3). Так, наприклад, для стаціонарного руху крові по артерії число Рейнольдса сягає 1500.

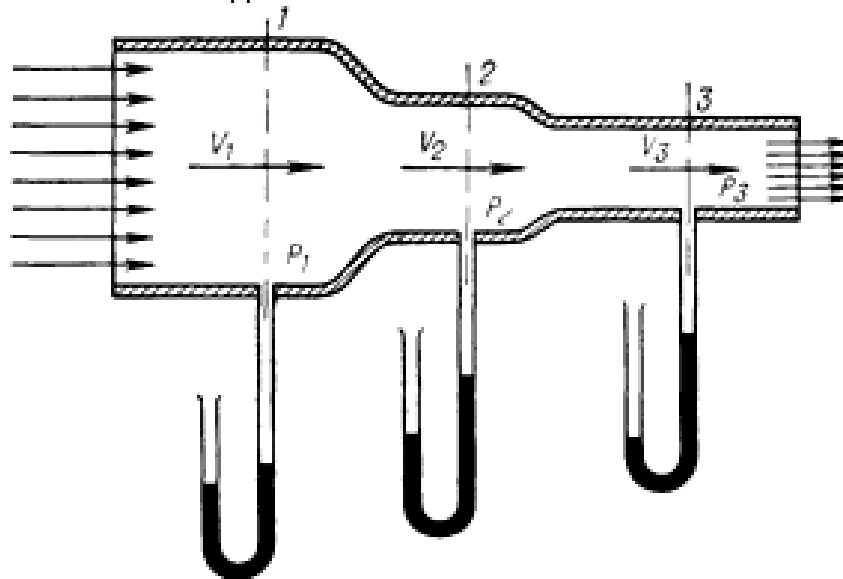


Рис. 1.6.3. Ефект Бернуллі

Отже, за великих чисел Рейнольдса ($Re \gg 1$) для потоків рідин можна нехтувати силами в'язкого тертя порівняно з силами, зумовленими конвективним прискоренням. Це дозволяє вважати рідину ідеальною, а рівняння Нав'є спростити до рівняння Ейлера для ідеальної рідини без тертя:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla P = 0. \quad (1.6.20)$$

Нелінійність навіть цього, найпростішого з рівнянь, розглянутих вище, викликана фактором, який описує сили за рахунок конвективного прискорення і дається виразом:

$$(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{2} - [\mathbf{v} \times \text{rot}(\mathbf{v})], \quad (1.6.21)$$

який є вочевидь квадратичним за швидкістю.

Для випадку стаціонарного, одновимірного потоку рідини чи газу рівняння Ейлера набуває такого вигляду:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (1.6.22)$$

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (1.6.22), то отримуємо відоме рівняння Бернуллі (закон Бернуллі) для течії ідеальної рідини, яка не стискається:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = \text{const}. \quad (1.6.23)$$

Ефект Бернуллі (рис. 1.6.3) легко пояснюється, виходячи з рівняння (1.6.22).

«Якщо з якихось причин певний негативний елемент середовища відсутній або не впливає суттєво на ситуацію, він буде замінений іншою, не менш паскудною гидотою»
Принцип Ле-Шательє

1. Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів.
2. Поняття про солітони, їх типи і властивості.

1 Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів

Із нелінійними рівняннями математичного моделювання уперше в цьому курсі ми познайомилися під час розгляду рівнянь Ван-дер-Поля (лекція 2, п. 1), Хопфа-Рімана (лекція 6, п. 1) та Нав'є-Стокса (лекція 6, п. 2).

Утім, нелінійні диференціальні рівняння в математичній фізиці з'являються вже під час вивчення коливань простого математичного маятника. Якщо не обмежуватися малими коливаннями, коли виконується умова $\sin(\phi) \approx \phi$, то диференціальне рівняння коливань для звичайного математичного маятника є істотно нелінійним:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin(\phi) = 0. \quad (1.7.1)$$

Рівняння (1.7.1) суттєво нелінійне: якщо ми навіть знайдемо якісь два його окремі рішення, припустимо $\phi_1(t), \phi_2(t)$, то жодна їх лінійна комбінація не буде рішенням рівняння (1.7.1), як це повинно бути для лінійного рівняння:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0. \quad (1.7.2)$$

Хоча б через те, що синус – це нелінійна функція і тому:

$$\sin(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \neq c_1 \sin(\phi_1) + c_2 \sin(\phi_2). \quad (1.7.3)$$

Як було вже зазначено вище, зазвичай нелінійне рівняння (1.7.1), у якості першого наближення, апроксимують лінійним рівнянням (1.7.2) для малих коливань, замінюючи синус його аргументом $\sin(\phi) \approx \phi$. Така ситуація є доволі типовою: більшість реальних систем та процесів описуються саме нелінійними моделями, тоді як лінійні моделі є найчастіше лише наближеннями до складніших нелінійних.

Рішенням нелінійного рівняння (1.7.1) є функція:

$$\phi(t) = \arcsin \left[\sin \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \cdot \operatorname{sn}(\omega t) \right], \quad (1.7.4)$$

де $\text{sn}(\phi)$ – спеціальна функція: так званий синус Якобі, ϕ_0 – початковий кут відхилення маятника. На рис. 1.7.1 показані залежності (1.7.4) кута відхилення нелінійного математичного маятника, який моделюється рівнянням (1.7.1) для двох початкових кутів відхилення: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

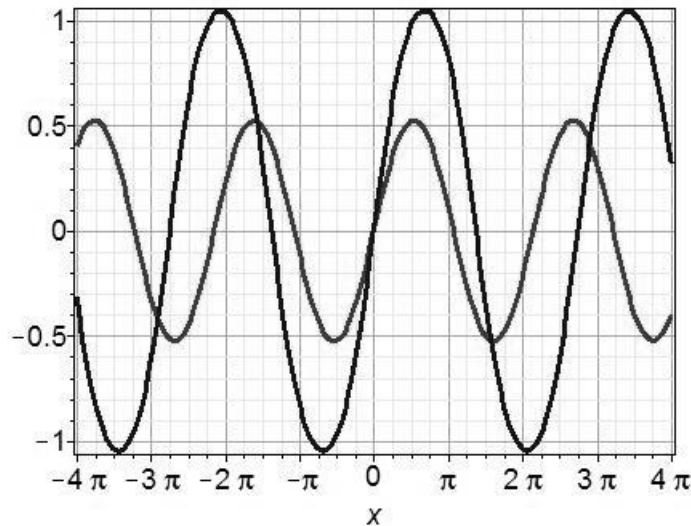


Рис. 1.7.1. Кут відхилення нелінійного математичного маятника (1.7.4)

З рис. 1.7.1 можна помітити, що на відміну від малих лінійних коливань, періоди нелінійних коливань помітно різні і залежні від початкового кута відхилення: період більший для більшого початкового кута відхилення маятника.

Розглянемо в якості іншого прикладу окремі рішення нелінійного диференціального рівняння, яке є узагальненням моделі Бюргерса-Хопфа. Рівнянням Бюргерса називають нелінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних, що використовується зокрема в гідродинаміці та акустиці і загалом під час вивчення нелінійних хвиль у суцільних середовищах. Воно є окремим випадком рівнянь Нав'є-Стокса в одновимірному випадку.

Нехай задана швидкість течії рідини $u(x, t)$ та її кінематична в'язкість μ . Рівняння Бюргерса в загальному вигляді записується так (похідні по змінних показані нижніми індексами):

$$u_t + u \cdot u_x - \mu u_{xx} = 0. \quad (1.7.5)$$

Третій доданок в (1.7.5) пропорційний другій похідній швидкості по координаті $\left(\mu u_{xx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$, і описує вплив сил в'язкого

тертя на рух хвилі. Якщо в'язким тертям можна знехтувати, то рівняння Бюргерса переходить у простіше рівняння Хопфа, розглянуте в попередній лекції:

$$u_t + u \cdot u_x = 0. \quad (1.7.6)$$

Якщо ж в рівнянні Бюргерса додатково враховані процеси дисипації (розсіяння) енергії хвилі під час її проходження по середовищу, то рівняння Бюргерса узагальнюється до вигляду:

$$u_t + u \cdot u_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.7.7)$$

Останнє рівняння має назву рівняння Кортевега-де-Вріза-Бюргерса (**КдВБ**). Воно моделює зокрема процес проходження ударних хвиль у крупних кровоносних судинах [2]. Розглядаючи артерію як в'язко-пружний аксіально симетричний канал (трубу) змінного перерізу з системи рівнянь Нав'є-Стокса та неперервності можна отримати рівняння (1.7.5), де доданок βu_{xxx} описує процеси дисипації енергії хвилі під час руху судиною.

Доповнимо рівняння КдВБ початковими умовами вигляду:

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \\ u(x,0) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.7.8)$$

У такому разі рівняння (1.7.5) з початковими умовами (1.7.8) має рішення у вигляді біжучої хвилі, так званого кінку, яка рухається з постійною амплітудою та швидкістю (рис. 1.7.2). Кінк є фактично відокремленою хвилею ударного типу. Відокремленою (усамітненою) хвилею називають такий хвильовий рух під час якого хвиля в кожний окремий момент часу локалізована в обмеженій області простору і швидко спадає з віддаленням від цієї області. Типова усамітнена хвиля має вигляд імпульсу (**солітон**), або перепаду (**ударна хвиля, кінк**), утім вона може мати і більш складні структури. Такі усамітнені хвилі спостерігаються в різних середовищах: газах, рідинах, електронній плазмі тощо.

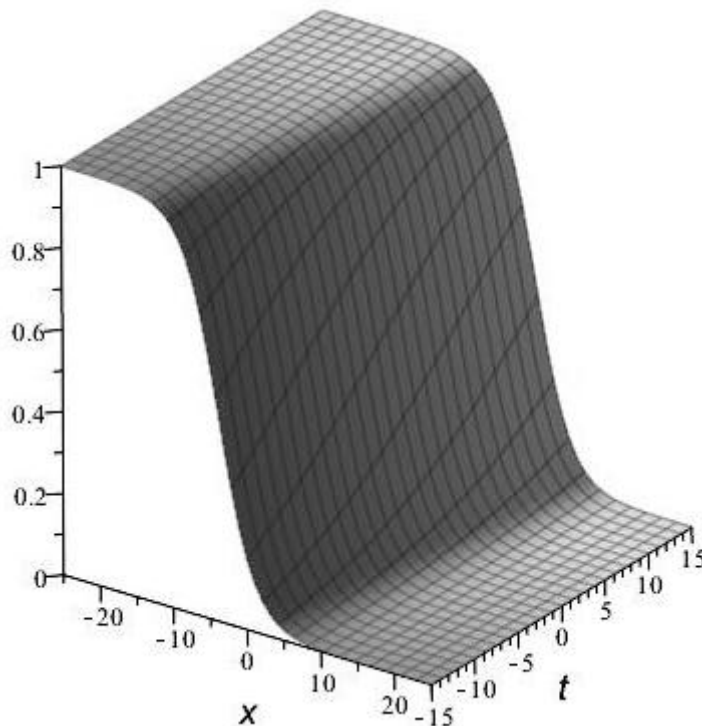


Рис. 1.7.2. Біжуча хвиля (кінк)

2 Поняття про солітони, їх типи і властивості

Одне з таких фізичних явищ, яке коректно описується тільки нелінійними рівняннями математичної фізики, – **солітон** – структурно стійка усамітнена (відокремлена) хвиля, яка розповсюджується в нелінійному середовищі. Солітони поведуться подібно до частинок. Тому солітони можна навіть називати, і вважати, частинкою подібними хвилями. Під час взаємодії один із одним, або з деякими іншими збудженнями, солітони не руйнуються, а рухаються, зберігаючи свою структуру незмінною. Солітони описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних (для суцільних середовищ).

Історія вивчення солітона розпочалася в серпні 1834 року на березі Юніон-каналу поблизу від Едінбургу. Джон Скотт Рассел спостерігав на поверхні води каналу явище, яке він назвав усамітненою (відокремленою) хвилею, – «solitary wave»:

«Я спостерігав рух баржі, яку досить швидко тягли уздовж вузького каналу парою коней, коли баржа несподівано зупинилася – але не маса води в каналі, яку вона рухала на своєму ході; ця маса води спочатку акумулювалася навкруги носу судна у стані сильного збурення, потім раптово відривається від баржі, накатом посуваючись вперед з великою швидкістю, і приймаючи форму великого самотнього пагорбу, гладкої і заокругленої, чітко визначеної купи води, яка продовжувала свій курс уздовж каналу ймовірно без зміни зазначеної форми, або зменшення швидкості. Я переслідував її верхи протягом восьми або дев'яти міль приблизно годину, і спостерігав її все ще в стані руху зі збереженням початкової фігури приблизно 30 футів довжиною і від фута до півтора фута висотою. Висота хвилі поступово зменшувалася, і через пару міль я загубив її у звивах каналу».

Загальноприйнятим вважають визначення, наведене Дразінім та Джонсоном [3]. Згідно з цим визначенням солітоном називають хвильове збудження в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним трьом вимогам:

- 1) розповсюджується з постійною швидкістю, не змінюючи при цьому своєї форми;
- 2) локалізоване у просторі;
- 3) не змінюється при зіткненні з іншим таким збудженням (окрім можливого зсуву фаз).

У реальних фізичних системах часто використовують більш слабке визначення, де одна, або дві з перелічених умов, виконуються або в межах певного наближення, або ж не виконуються взагалі. Солітони експериментально спостерігаються в низці фізичних систем, які перелічено нижче.

1. На поверхнях рідин солітони утворюються у вигляді локалізованих хвиль-горбів, які розповсюджуються на доволі

далекі відстані (рис. 1.7.3). Це перші солітони, які було виявлено в природі.

2. Іноді солітонами вважають також гігантські самотні хвилі, які утворюються на поверхні океанів після землетрусів та вивержень вулканів – так звані цунамі.
3. Іонозвукові та магнітозвукові солітони в плазмі.
4. Гравітаційні солітони в шаруватій рідині.
5. Солітони у вигляді коротких світлових імпульсів в активному середовищі лазера.
6. Солітони можуть утворюватися в довгих контактах Джозефсона або в масивах точкових контактів Джозефсона. Вони мають фізичний зміст кванту магнітного потоку і називаються джозефсонівськими вихорами або флуксонами. Солітони в джозефсонівських контактах описуються рівнянням синус-Гордон.
7. У магнетиках можуть утворюватися солітони різного типу, зокрема доменні стінки мають властивості солітонів.
8. В оптичних волоконних хвилеводах, у яких присутня нелінійна залежність показника заломлення волокна від електричного поля, завдяки так званому ефекту Керра, утворюються оптичні солітони.
9. У бозе-ейнштейнівських конденсатах холодних атомних газів спостерігалися солітони, що мають фізичний зміст рухливих областей підвищеної густини атомів.



**Рис. 1.7.3. Водяний солітон на каналі
Едінбургського університету**

Є ще багато систем, у яких можуть існувати солітони, або хвильові збудження, близькі до них за своїми властивостями. Зок-

рема, своєрідні солітони здатні існувати у протеїнах та ДНК. У цих макромолекулах солітони пов'язані з низько-частотним колективним коливальним рухом фрагментів протеїнів та ДНК [4].

Солітони є адекватною моделлю для так званих пульсових хвиль тиску [5] у крупних кровоносних судинах.

У певному наближенні можна розглядати як солітони також і нервові імпульси. Така гіпотеза була висловлена ще Гельмгольцем, який першим виміряв швидкість їх розповсюдження по нервових волокнах. Сучасна модель солітонів у нейрології – це відносно новітня модель (розвивається з 2005 року), яка намагається пояснити, як сигнали проходять у мережах біологічних нейронів. Вона припускає, що нервові сигнали подорожують уздовж клітинних мембран у формі певних видів акустичних солітонів, так званих солітонів Кортвега-де-Вріза.

Як така, ця модель конкурує із більш давньою та загальноприйнятою моделлю Ходжкіна-Хакслі (Hodgkin-Huxley), котра передбачає, що нервові сигнали розповсюджуються як електричні потенціали. Передача нервового збудження у вигляді електричного сигналу повинна супроводжуватися супутнім виділенням деякої кількості тепла (завдяки ефекту Джоуля-Ленца), в той час як солітон під час свого руху практично не втрачає енергії. Реальні температурні режими нервових волокон, причому температури під час збудження є практично незмінними, свідчать на користь саме сучаснішої солітонної моделі [6].

Однією з найпростіших і найвідоміших моделей, що допускають існування солітонів у своїх рішеннях, є нелінійне диференціальне рівняння Кортвега-де-Вріза (**КдВ**). Солітони КдВ, або так звані акустичні солітони, можливі в середовищах з:

- дисперсією, тобто швидкість хвилі в середовищі повинна залежати від її довжини;
- суттєвою нелінійністю.

Рівняння Кортвега-де-Вріза можна отримати з більш загального рівняння КдВБ (1.7.5), нехтуючи в ньому доданком, який описує сили в'язкого тертя:

$$u_t + u \cdot u_x + \nu u_{xxx} = 0. \quad (1.7.9)$$

Рівняння КдВ, на відміну від рівняння (1.7.5), допускає точне солітонне рішення в такому вигляді:

$$u(x, t) = \frac{V}{2 \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{V}(Vt - x)}{2} \right)}, \quad (1.7.10)$$

де V – параметр швидкості розповсюдження солітону. Два важливі зауваження щодо солітонного рішення (1.7.10) є такими:

- дійсність рішення (1.7.10) вимагає позитивності параметра швидкості $V > 0$, а за позитивного значення цього параметра солітон (1.7.10) рухається праворуч по осі координат;

- пропорційність амплітуди солітону параметра швидкості ($V > 0$) означає, що солітони з більшою амплітудою рухаються швидше солітонів з меншою амплітудою.

Просторово-часова еволюція солітону КдВ (його форма) показана на рис. 1.7.4.

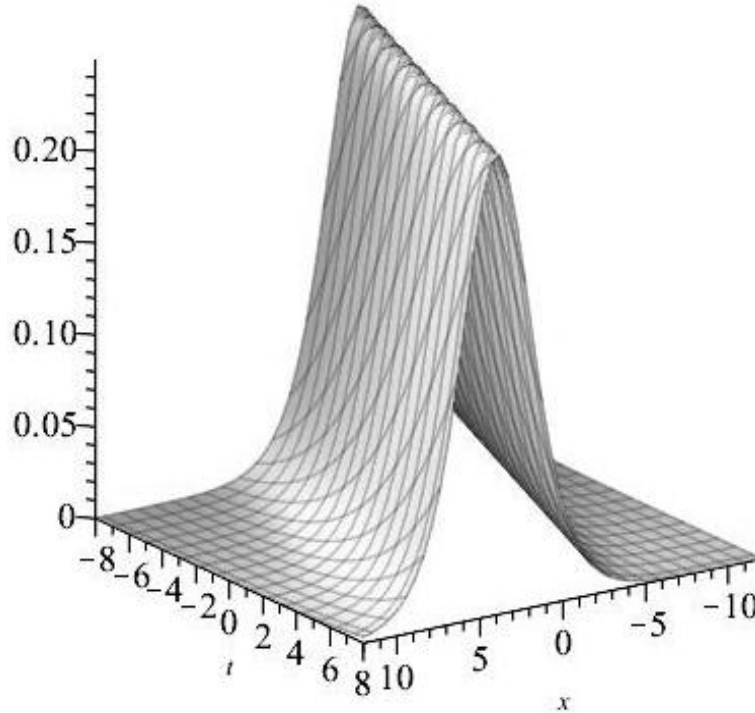


Рис. 1.7.4. Форма солітону Картевега-де-Вріза

Визначимо «об'єм» солітону, власне площу під його кривою. Оскільки солітон не змінює своєї форми під час свого руху і така площа однакова в різні моменти часу, отже, знайдемо її інтегруванням виразу (1.7.10) за умови $t = 0$. Тоді, урахуванням симетрії солітону (1.7.7) відносно точки $x = 0$ маємо для площі під кривою солітону простий вираз:

$$\int_0^{\infty} \frac{V}{\cosh^2\left(\frac{x\sqrt{V}}{2}\right)} dx = 2\sqrt{V}. \quad (1.7.11)$$

Отже, кількість рідини, яку містить і переносить у просторі солітон, пропорційна кореню квадратному його амплітуди. Отже, імпульс солітону пропорційний його амплітуді в ступені $(3/2)$, а його кінетична енергія навіть в ступені $(5/2)$.

Якщо інтегральну площу (1.7.11) поділити на амплітуду солітону $\left(\frac{V}{2}\right)$, то отримаємо його середню (інтегральну) ширину, яка вочевидь обернено пропорційна кореню квадратному з амплітуди солітону: $\lambda = \frac{4}{\sqrt{V}}$. Отже, солітони більшої амплітуди не тільки

рухаються швидше, вони також переносять більше рідини і мають меншу інтегральну ширину (є вищими і вужчими).

Рис. 1.7.5 демонструє схему механізму послідовного розповсюдження пульсової хвилі по аорті [7]. Під час систоли (серцевого скорочення) спочатку розтягується найближча до серця ділянка аорти, де нагромаджується додаткова кров (А). Потім ця ділянка стискається до початкового стану, при цьому розтягується і накопичує кров інша ділянка (Б). Далі цей процес поширюється і реплікується у вигляді деформації стінок уздовж еластичних стінок артерії (В). Отже, пульсову хвилю можна розглядати як типовий солітон деформації стінок артерії та пов'язаного з ним додаткового тиску крові.

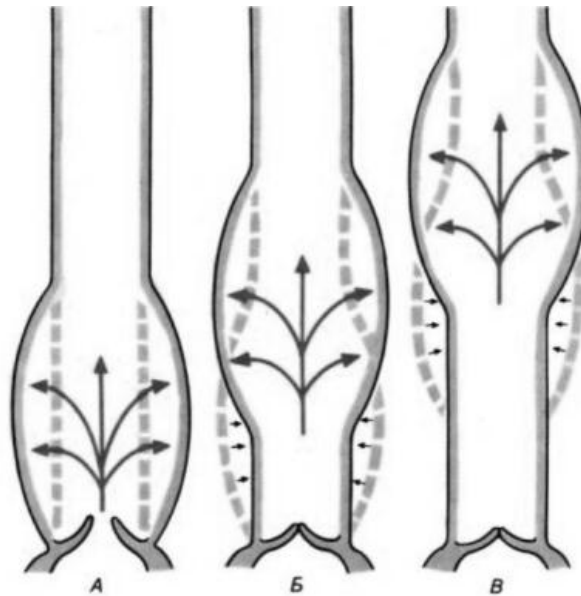


Рис. 1.7.5. Схема послідовного розповсюдження пульсової хвилі в аорті

Розрахунки в моделі солітону КдВ показують, що типовими значеннями для пульсової хвилі є її довжина (2.5–2.7 м), додатковий тиск (приблизно 69 мм.рт.ст.), а також об'єм крові, який переноситься за кожен удар (приблизно 55–60 см³), що відповідає експериментальним значенням.

Іншим нелінійним диференціальним рівнянням, відомим для моделей так званих оптичних солітонів, є нелінійне рівняння Шредінгера, яке має такий вигляд:

$$iu_y + u \cdot u_{xx} - 2v|u|^2 u = 0, \quad (1.7.12)$$

де $u(x, t)$ – комплексна функція.

Будучи нелінійним узагальненням параболічного рівняння, нелінійне рівняння Шредінгера (1.7.12) описує динаміку хвильових пакетів у середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю. Подібна ситуація зустрічається, наприклад, при поширенні електромагнітних хвиль у плазмі: з одного боку плазма є диспергуючим середовищем, з іншого боку, при досить високих амплітудах хвилі

проявляється пондеромоторна нелінійність, яка в деяких випадках може бути апроксимована кубічним фактором – третій доданок у рівнянні (1.7.12).

Іншим фізичним прикладом процесів, які описуються рівнянням (1.7.12), є поширення світла в нелінійних кристалах із дисперсією: у багатьох випадках квадратична нелінійність мала або тотожно дорівнює нулю в силу центральної симетрії кристалічної решітки, тому враховується тільки кубічний доданок.

Для нелінійного рівняння Шредінгера знайдено велику кількість точних розв'язків, що представляють собою стаціонарні нелінійні хвилі. Крім того, рівняння (1.7.12) має також локалізований розв'язок солітонного типу:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{2\beta}}{\sqrt{v} \cosh^2(x - Vt)}, \quad (1.7.13)$$

де параметр α визначає амплітуду, а параметр V – швидкість оптичного солітону. На відміну від акустичних солітонів КдВ (1.7.9) амплітуда та швидкість оптичних солітонів (1.7.13) не пов'язані між собою пропорційним співвідношенням.

На рис. 1.7.6 показано просторово-часову еволюцію так званого брізера, який є комбінацією оптичного солітону та антисолітону (солітон із протилежним напрямом фазової швидкості).

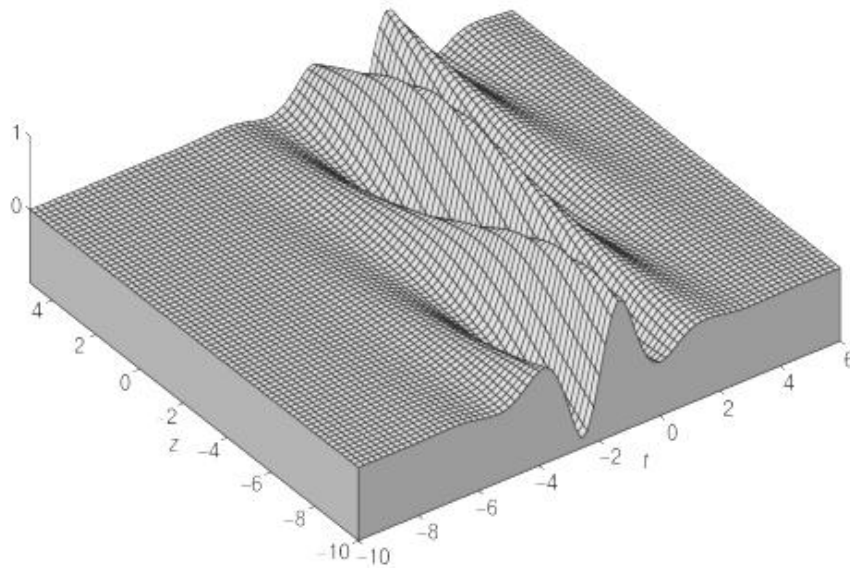


Рис. 1.7.6. Брізер

Ще одна нелінійна математична модель, так зване рівняння синус-Гордона:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin(\varphi) = 0, \quad (1.7.14)$$

де функція $\varphi(x,t)$ описує крутильні коливання елементів у деяких системах (зокрема в згаданих вище молекулах ДНК).

Цікава властивість рівняння синус-Гордона – існування солітонних і навіть багатосолітонних розв'язків (рис. 1.7.7), які отримали назву топологічних солітонів.

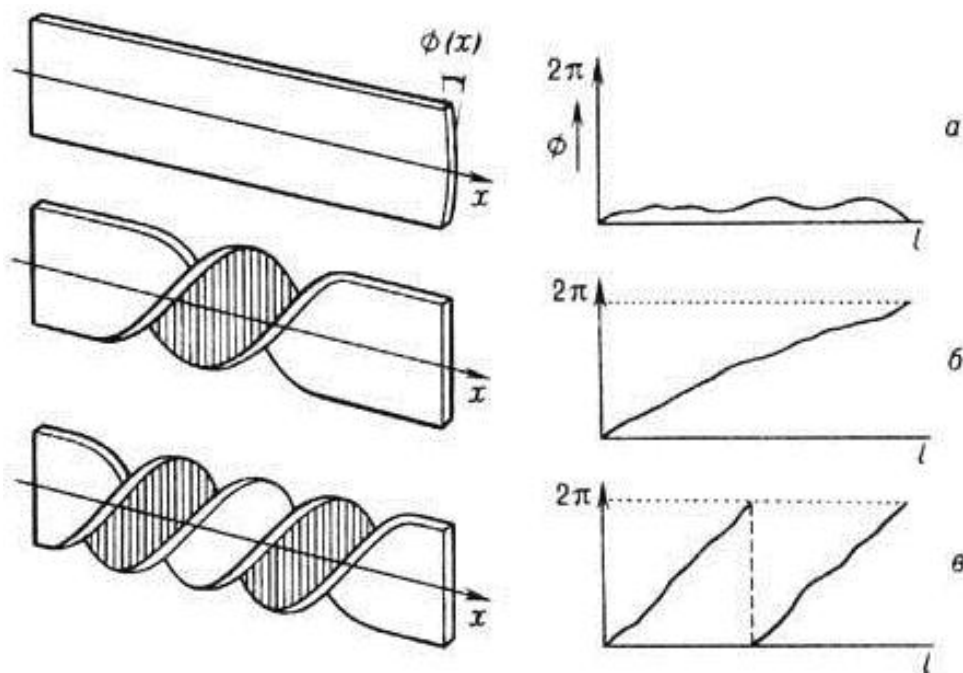


Рис. 1.7.7. Топологічні солітони

Лекція 8

«Якщо здається, що роботу зробити легко, це неодмінно буде важко. Якщо на вигляд вона важка, значить виконати її практично неможливо»
Теорема Стокмаєра

1. Підприємство як об'єкт моделювання.
2. Модель підприємства як відкритої системи.

1 Підприємство як об'єкт моделювання

Звернемося до роботи вітчизняних дослідників В. Здрок и М. Черкес «Системний підхід до дослідження виробничих процесів інформаційно-технологічних підприємств», опубліковану у Віснику Львівського університету [37].

Дослідження та моделювання виробництва передбачає розгляд та зміну умов низки закладених у нього технологічних процесів з метою отримання певного рівня якості продукції або послуг, за додаткової умови мінімальних витрат ресурсів. Типовими задачами, які доводиться при цьому вирішувати, є такі:

- підвищення ефективності виробництва, яке звичайно задається відомою функцією, так званою виробничою функцією, яка буде детальніше розглядатися у практикумі;

- зростання продуктивності праці, яке вимірюється кількістю продукції виробленої в одиницю часу;
- оптимізація виробничих програм за умови обмежених ресурсів, звичайно вимагається максимальний прибуток підприємства за рахунок оптимального асортименту продукції;
- поліпшення умов праці та/або культури виробництва.

Реальні задачі в процесах моделювання та дослідження виробництв можуть бути також різноманітними комбінаціями наведених вище типових задач.

Специфіка загальних вище задач полягає, зокрема, в тому, що виконання таких суперечних між собою вимог як, наприклад, підвищення якості продукції і зменшення витрат на її виробництво є результатом досягнення певного техніко-економічного компромісу. До того ж, технологічні процеси мають властивості бути альтернативними: рівноцінний за якістю та споживчими характеристиками продукт може бути створено різними технологічними процесами, які своєю чергою можуть різними способами бути організовані у виробничу низку.

В умовах жорсткої конкуренції на споживчому ринку, які є характерними наприклад для ринку країн ЄС, інтенсивному виробництві, в умовах зростаючих енергетичних, фінансових та інформаційних потоків, ухвалення рішень відбувається в умовах жорсткого цейтноту і, як не дивно, в умовах дефіциту інформації. Відповідно зростає ціна помилкових рішень. Для того, щоб уникнути або значно знизити ризики такої помилки, керівному складу підприємства доводиться ухвалювати управлінські рішення, спираючись на:

- прикладні методи в галузі математичного моделювання виробництв та їх технологічних процесів;
- методи дослідження операцій та методи оптимізації;
- методи системного аналізу;
- методи теорії прийняття та оптимізації рішень.

Аналіз різноманітних виробничих процесів переконує в тому, що вони демонструють низку спільних характерних ознак. Найважливішими є такі ознаки, як-от:

- структурна складність та багатофакторність;
- ієрархія, яка розкривається в існуванні вертикального підпорядкування окремих технологічних етапів виробництва та структурних підрозділів підприємства;
- тісні інформаційні та функціональні взаємини між суб'єктами зазначеної ієрархії;
- функціональна визначеність як окремих технологічних процесів, так і всього виробничого процесу в цілому;
- рухливість, яка віддзеркалена у постійних змінах у технологічному середовищі, причому такі зміни можуть бути як детерміновані (визначені), так і стохастичні (випадкові);

- процеси регулювання та саморегулювання, які забезпечують перебування контрольованих параметрів технологічних процесів та виробництва в цілому в межах заданих (прийнятних) значень.

Порівняння цих ознак з ознаками систем дозволяє зробити висновок, що виробничий процес можна розглядати як технічну або технологічну систему (ТС), в якій під керуванням виконавця реалізується функціональний взаємозв'язок засобів та предметів виробництва для виконання регламентованих технологічних операцій [8].

Отже, дослідження ТС доцільно організувати з використанням таких інструментів як-от:

- математичного апарату багатофакторного аналізу;
- методів теорії моделювання та оптимізації систем і процесів;
- теорії автоматизованих систем управління та кібернетики.
- методів системного аналізу.

Сучасне виробництво відрізняється повсюдним застосуванням автоматизованих систем контролю та управління технологічними процесами, високим ступенем комп'ютеризації та наукоємністю. Подальше зростання ефективності виробництва пов'язане зокрема з моделюванням як окремих технологічних процесів та операцій, так і з моделями виробничого процесів у цілому. Математичне моделювання оптимально організовувати технологічні операції (процеси), знаходити ефективніші режими їх функціонування. Як завжди, моделювання дозволяє отримувати нові знання про об'єкт, уникаючи можливої небезпеки від безпосереднього контакту з ним, та/або великих затрат коштів. Модель – це спрощений, умовний опис досліджуваного об'єкта, в якому адекватно (тотожно, еквівалентно) відображуються лише його головні внутрішні зв'язки. Моделювання звичайно потребує формалізованого опису об'єкта в таких символах або такою формальною мовою, якій сприймаються комп'ютером.

Виробничий процес можна розглядати як послідовність технологічних операцій, кожна з яких змінює стан предмета виробництва від первинної сировини до фінального продукту. Будь-який проміжний стан можна формально задавати числами (наприклад, сигналами відповідних датчиків, сенсорів, вимірювачів). Такий набір чисел (вектор стану S_i) характеризує фізико-хімічні властивості виробу в деякому стані, а множина таких станів формує деяку матрицю станів S . Перехід від стану S_i до стану S_{i+1} відбувається під впливом певної команди керування $V_i(t_i)$ яка надходить на робоче обладнання в момент часу t_i . Команди керування можна розглядати як складові деякого вектора керування $V(t)$, який являє собою програму роботи технологічної системи в символах керування (див. рис. 1.8.1).

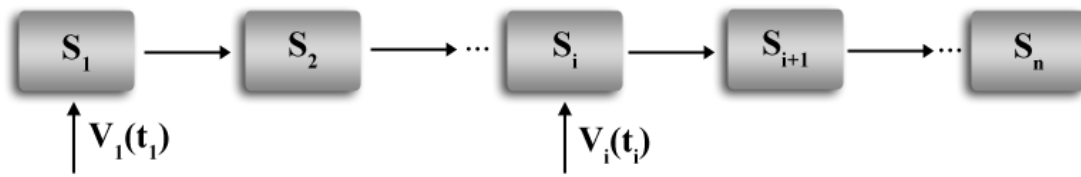


Рис. 1.8.1. Програма роботи технологічної системи в символах керування

Не викликає сумнівів існування певного функціонального зв'язку поміж станом предмету виробництва та командами керування (див. рис. 1.8.1). Зазначений зв'язок можна представити деякою функцією F (аналітичною або логічною) таким способом, що $S = F(V)$. Знаходження функції зв'язку F і складає один із головних предметів математичного моделювання виробничих процесів.

Під час моделювання виробничих процесів, та/або технологічних операцій, користуються апробованими методами моделювання. Коротко перелічимо такі методи нижче.

Фізичне моделювання – такий спосіб моделювання передбачає дослідження процесів шляхом їх відтворення в іншому масштабі зі збереженням при цьому критеріїв подібності. Подібність – це деяка умова, при виконанні якої кількісні результати експериментів на моделі та на об'єкті співпадають. Критерій подібності – це числова величина або функція аргументу, який описує характерні властивості об'єкта моделювання. Фізичне моделювання ефективне для дослідження відносно нескладних ТС, у яких потрібно враховувати порівняно невелику кількість критеріїв подібності, а також таких, які не втрачають свої властивості в процесі масштабування. Воно вимагає таких знань:

- механізмів протікання технологічного процесу в умовах дії зовнішніх збурень;
- точних значень констант, за допомогою яких описують ці механізми;
- допустимих граничних умов.

Що складнішою є ТС або процес, то більша кількість критеріїв подібності потрібна для фізичного моделювання. Часто не вдається вибрати фізичну модель так, аби ці критерії були сумісними, тобто, виконувались одночасно.

Математичне моделювання як метод використовується для дослідження ТС довільного рівня складності, в яких зв'язки між окремими складовими описуються за допомогою переважно диференціальних, або інтегральних, або алгебраїчних систем рівнянь. Ці рівняння утворюють систему, яка пов'язує множину вихідних характеристик ТС з множиною факторів, внутрішніх параметрів та зовнішніх впливів на неї, включно з випадковими, якщо це потрібно. Отже, математичне моделювання – це формалізація внутрішніх

зв'язків об'єкта моделювання за допомогою математичного апарату. Вибір математичного апарату для опису технологічних систем залежить від низки умов:

- рівня складності об'єкта моделювання;
- необхідної точності представлення результатів;
- апаратних можливостей дослідника;
- традицій, уподобань дослідника тощо.

Перевагами математичного моделювання є контрольована точність результату моделювання, можливість коректування отриманої моделі зі зміною граничних умов, допусків або фізичних уявлень про технологічні процеси, можливість проведення необмеженої кількості комп'ютерних експериментів.

Недоліки математичного моделювання пов'язані з тим, що внаслідок дефіциту інформації щодо об'єкта моделювання система математичних рівнянь завжди містить певні похибки, а прагнення достовірного та точнішого опису всіх компонентів системи призводить до занадто громіздкої моделі, яка стає практично непридатною. За таких умов витрати, пов'язані з отриманням результату, можуть нівелювати економічний ефект від його впровадження.

Звичайно математичною моделлю вважають деяку функцію або систему рівнянь, за допомогою яких встановлюють відповідність між множиною вхідних збурень і узагальненою інтегрованою фізичною величиною, що характеризує вимірюваний стан ТС. Оскільки завжди мають місце погано детерміновані фактори, які не враховані математичною моделлю, виникають так звані помилки моделювання. Тому будь-яка математична модель є певною абстракцією, причому спрощеною, тих процесів, які вона описує. Критеріями оптимальності для математичної моделі є такі:

- точність моделювання;
- зручність користування;
- зрозумілий алгоритм математичних перетворень;
- простота оцінки достовірності отриманих результатів.

Моделювання вважається прийнятною, якщо похибка апроксимації фізичної величини є прийнятною для користувача (замовника).

За умов нестачі інформації про об'єктивно існуючі внутрішні зв'язки об'єкта моделювання такий об'єкт можна розглядати як деяку абстрактну «чорну скриньку» (рис. 1.8.2). Тоді функціональний зв'язок між виходом і входом об'єкта визначається так званою передатною функцією. При цьому інформативною є вихідна реакція об'єкта на деякі тестові сигнали на його вході. До «входу» виробничої системи звичайно відносять все, що підприємство отримує ззовні для організації виробництва товарів, інновацій, послуг стороннім організаціям, інформації тощо. Зокрема, на «вході» підприємство отримує капітал, документи, матеріали, ресурси, включно з трудовими, інформацію тощо.

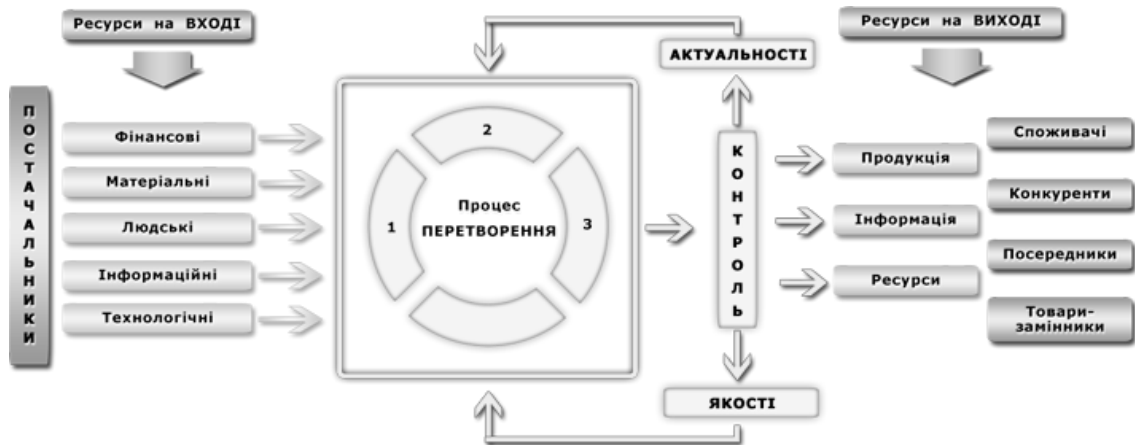


Рис. 1.8.2. Схема функціонального зв'язку між «входом» та «виходом» підприємства як об'єкта моделювання

У виробничих «процесах перетворення» згадані вище ресурси отримують матеріально-предметну форму, готову до подальшої обробки та/або до реалізації, застосування тощо.

Як видно з рис. 1.8.2 на «виході» схеми отримують товари, роботи, послуги, прибуток, зростання об'єму продаж, соціальну відповідальність, задоволення потреб робітників та споживачів, зростання виробництва тощо.

Імітаційне моделювання технологічних процесів полягає в тому, що за заданими теоретичними моделями ймовірнісних розподілів для відомих входних впливів, отримують ймовірнісні розподіли для вихідних характеристик. Згідно з таким методом моделювання за допомогою генератора випадкових чисел (або наборів таких чисел, векторів) задаються випадкові сполучення входних факторів, а далі за допомогою визначеної моделі технологічності системи обчислюють відповідні значення параметра оптимізації. Така процедура може повторюватися багаторазово. Отримані значення дають змогу побудувати передатну функцію та отримати ймовірнісні густини розподілу для вихідних характеристик, розрахувати математичні очікування важливих параметрів, похибку вимірювань та інші актуальні статистичні характеристики.

Графо-аналітичні методи дослідження технологічних процесів передбачають представлення множини значень критеріїв подібності у вигляді образної геометричної фігури, кожна точка поверхні якої взаємно однозначно відповідає (зображує) деякий стан системи. Найчастіше графо-аналітичними моделями реальних технологічних процесів є криволінійні фігури, які описуються складними нелінійними рівняннями. Цей спосіб моделювання вважають наочним та інформативним. Утім така наочність втрачається, якщо кількість змінних моделі більше двох, оскільки фігура стає багатовимірною. Тоді графо-аналітичний аналіз процесів проводять методом відображення багатовимірних фігур на три- або двовимірний простір (так званий метод перерізів).

2 Модель підприємства як відкритої системи

Підприємство – це організаційно відокремлена та економічно самостійна ланка виробничої сфери економіки країни, що виробляє продукти певного типу: товари, послуги, інформацію, нові знання – як окремо, так і в певному співвідношенні. Підприємство є відкритою системою, яка може існувати за умови активної взаємодії із зовнішнім середовищем (схема рис. 1.8.3).

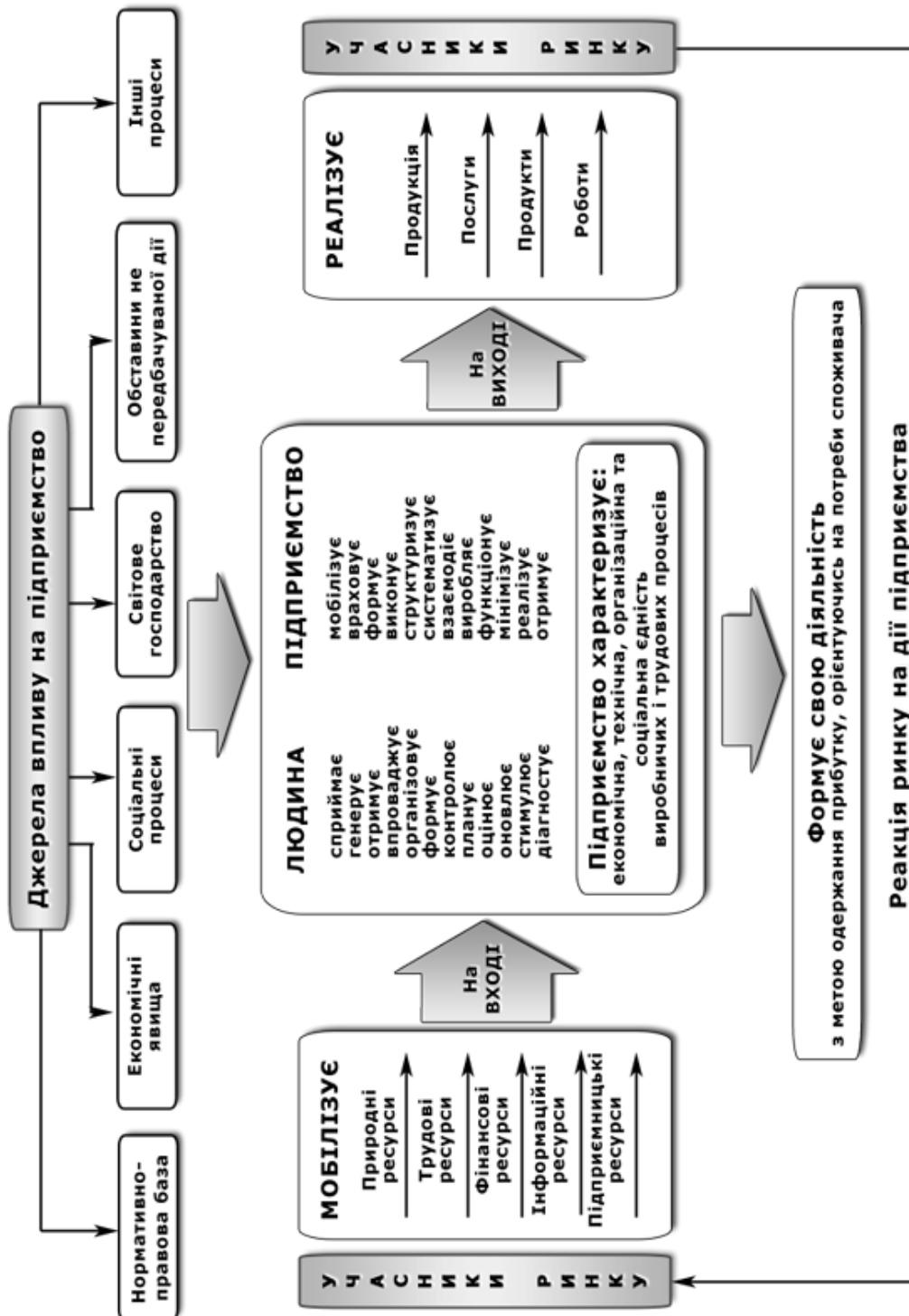


Рис. 1.8.3. Схема підприємства як відкритої системи

Підприємство функціонує в певному зовнішньому середовищі. Безпосередньо близько функціонує проміжне середовище, яке представлене споживачами, постачальниками, конкурентами, банками, страховими компаніями, органами державного управління та іншими партнерами і конкурентами, які знаходяться в загальному зовнішньому середовищі.

Підприємство є «відкритою» матеріально-речовинною системою, оскільки його діяльність можна описати з погляду моделі «вхід – вихід»: на «вході» підприємства є всі види матеріальних і нематеріальних ресурсів (сировина, техніка, персонал, фінанси, інформація тощо), а на «виході» – товари, послуги, висококваліфікований персонал і таке інше. «Вхідні» та «вихідні» потоки сполучають організацію з відповідними ринками.

Підтвердженням віднесення такої системи як «підприємство» у широкому сенсі до класу комплексних відкритих систем є наявність відповідних прикмет (властивостей):

- Складність визначення границь та розбиття на підсистеми. Склад підсистем, що реально забезпечують діяльність підприємства як системи, та характер такої діяльності постійно змінюється: урізноманітнюються ролі менеджерів, власників і фахівців та їх реакції на події; склад постачальників, клієнтів; якість та склад засобів, інтереси та склад зацікавлених у діяльності підприємства суб'єктів.
- Відкритість системи. Підприємство як ціле сприймається спостерігачем за наявності деякого «системного ядра», яке може вижити тільки за умов постійного обміну із оточуючим середовищем (клієнтами, постачальниками, трудовими ресурсами). Довготермінове виживання підприємства, незалежно від досягнутої високої ефективності діяльності, залежить від адаптації у «надсистемі» ланцюга доданої вартості, що існує в зовнішньому для підприємства економічному середовищі. Така мета діяльності, як отримання максимального прибутку, вже свідчить про відсутність на рівні цілей діяльності підприємства завдань досягнення енергетичної рівноваги.
- Підприємство є динамічною системою із станами, що залежать від минулої діяльності, тобто, має «пам'ять», що виражена в обсягах активів, зобов'язань, репутації, культурі персоналу.
- Підприємство є комплексною системою, що складається із комплексних підсистем різного рівня зв'язності, наявність яких зумовлена різнонаправленими вимогами до результатів діяльності.
- Підсистеми підприємства, включно і особливо через участь суб'єктів-фізичних осіб, характеризуються нелінійною

поведінкою та зв'язками. Мале відхилення умов у такій системі може призводити до непропорційних ефектів. Наприклад, ефективна юридична служба в поєднанні із надзвичайно ефективною технічною не убезпечують підприємство від рейдерського захвату або конфлікту в системі управління.

Підприємство являє собою штучну систему, яка створена людиною заради її власних інтересів і перш за все для спільної праці.

Ринкова економіка висуває до підприємства декілька основних вимог:

- 1.** Підприємство повинне працювати так, щоб результатом робіт був не тільки випуск продукції (робіт чи послуг), але і одержання прибутку. Тобто завжди повинне бути перевищення доходів над витратами.
- 2.** Підприємство повинне ставити собі за мету не нарощування обсягу виробництва, а формування такого обсягу, який диктується попитом споживачів.
- 3.** Підприємство є досить самостійними за основними питаннями господарчої діяльності, але плата за цю самостійність – це ймовірність банкрутства.

Підприємство на вході споживає ресурси певного виду, щоб потім у результаті виробничого процесу одержати ресурси іншої споживчої якості. Співвідношення ресурсів на вході та виході складає зміст такого поняття як економіка підприємства.

Для економіки в якійсь мірі не цікавий продукт, який виробляється, вибрана технологія, склад і кваліфікаційний рівень кадрів. Єдине, що її цікавить – це співвідношення у використанні ресурсів, яке передбачає три можливі комбінації:

- 1) доходна робота;
- 2) збиткова робота;
- 3) робота в умовах самоокупності.

Як саме працює підприємство прибутково, збитково чи в умовах самоокупності, в значній мірі залежить від форм і методів перетворення ресурсів і може бути визначеним цілим рядом, як конкретних, так і загальних показників ефективності.

Самостійне «відкрите» підприємство в перехідній та ринковій економіці постає перед розв'язанням таких завдань:

- дослідження ринку та виявлення потреб споживачів для забезпечення існування підприємства в довгостроковій перспективі;
- самостійне визначення цілей розвитку та підтримки власної життєздатності;
- визначення необхідних обсягів виробництва, структури постачання та постачальників;

- налагодження ефективних зв'язків з партнерами та організаціями регуляторами; громадськістю для формування позитивного іміджу – головного «капіталу» підприємства;
- створення та постійне поповнення власних банків даних і знань, які б забезпечували обґрунтування рішень, що приймаються, та захист інформації (комерційної таємниці) від конкурентів;
- забезпечення конкурентоспроможності підприємства завдяки вибору адекватних стратегій та нагромадження (підтримки) конкурентних переваг;
- інвестування та управління фінансами підприємства з метою отримання високих економічних результатів діяльності (прибутковість);
- визначення необхідного для існування та розвитку підприємства кадрового складу з конкретними кількісними (чисельність) та якісними (кваліфікація) показниками.

Зазначені завдання звісно ж не охоплюють усього переліку, з яким кожне підприємство нині стикається у своїй діяльності, однак основні з них перелічені вище.

У загальному вигляді завдання оптимізації процесу діяльності можна сформулювати таким чином: **«Мінімізувати (максимізувати) цільову функцію математичної моделі об'єкта (процесу) з урахуванням обмежень»**.

Аналіз задач управління підприємством як системою свідчить, що в реальній постановці завдання комплексної оптимізації діяльності підприємства є багатокритеріальним (рис. 1.8.4). У загальному випадку цільова функція та область визначення є нелінійними та нестационарними. За умови коректного визначення обмежень враховуються всі можливі ефекти.



Рис. 1.8.4. Спрощена схема аналізу задач управління підприємством

Існуючі математичні моделі підприємства як об'єкта управління різної комплексності можуть включати велику кількість структурних, технологічних, суб'єктивних чинників із невизначеними методами вимірів, до яких може застосовуватися розвинений математичний апарат.

*«Рішення складної задачі доручить
ледачому співробітнику – він знайде
найлегший спосіб розв'язку»*

Правило Хлейда

1. Ефективні технології для математичного моделювання систем і процесів.
2. Універсальні комп'ютерні середовища (огляд).

1 Ефективні технології для математичного моделювання систем і процесів

Символьна, або іншими словами комп'ютерна математика, або ще інакше комп'ютерна алгебра, є великим розділом математичного моделювання. Програми такого типу можна в принципі відносити також до інженерних програмних продуктів автоматизованого проектування, так званим САПР. У цій галузі вирізняють три таких основних напрями як-от:

- 1) CAD – Computer Aided Design – системи автоматизованого комп'ютерного проектування;
- 2) CAM – Computer Aided Manufacturing – системи автоматизованого комп'ютерного виробництва;
- 3) CAE – Computer Aided Engineering – системи комп'ютерного інжинірингу.

Сьогодні серйозне конструювання у приладобудуванні, машинобудуванні, архітектурі та будівництві, електротехніці та електроніці, а також в інших галузях інженерної діяльності вже неможливе без САПР. Математичні ж програмні пакети нині є складовою частиною CAE-систем, причому далеко не другорядною, хоча б тому, що все більшу частину задач взагалі неможливо вирішити без застосування комп'ютерів.

Ще 20 років тому ці програмні пакети вважалися суто професійними інструментами і потребували спеціалізованих великих комп'ютерів. Утім приблизно у другій половині 90-х років ринок CAD/CAM/CAE-систем та технологій почав бурхливо розвиватися. Розробники подібних систем насамперед зробили їх доступними для персональних комп'ютерів, отже, для десятків і сотень тисяч інженерів та дослідників.

Окрім того, в сучасних математичних пакетах застосовується принцип конструювання математичної моделі. Користувач лише формулює задачу, тоді як всі рутинні операції: розкриття дужок, перетворення виразів, знаходження коренів рівнянь, похідних та інтегралів тощо, – комп'ютер виконує самостійно без втручання користувача. Сучасні математичні пакети окрім символьних перет-

ворень здатні також на виконання складних обчислень і навіть на зв'язок з Інтернетом.

Типова структура математичних програмних пакетів (систем комп'ютерної математики) є такою:

- ядро системи (з вбудованими командами та функціями);
- інтерфейсна оболонка;
- бібліотека спеціалізованих програм, модулів та функцій;
- програмні пакети розширень;
- довідкова система (Help).

Ядро звичайно містить найбільш уживані та ретельно налагоджені з точки зору ефективності та мінімальних затрат машинного часу оператори та функції для символьних обчислень машинно-орієнтованою мовою. Об'єм ядра системи завжди обмежений, проте саме об'єм ядра характеризує базові можливості математичного пакету або системи комп'ютерної математики.

Інтерфейсна оболонка пакету (системи) комп'ютерної математики забезпечує підтримку всіх функцій необхідних для інформаційних та керуючих взаємодій між користувачем та системою зокрема й операцій вводу/виводу, збереження, редагування файлів, обмін програмами, використання апаратних засобів тощо (рис. 1.9.1).

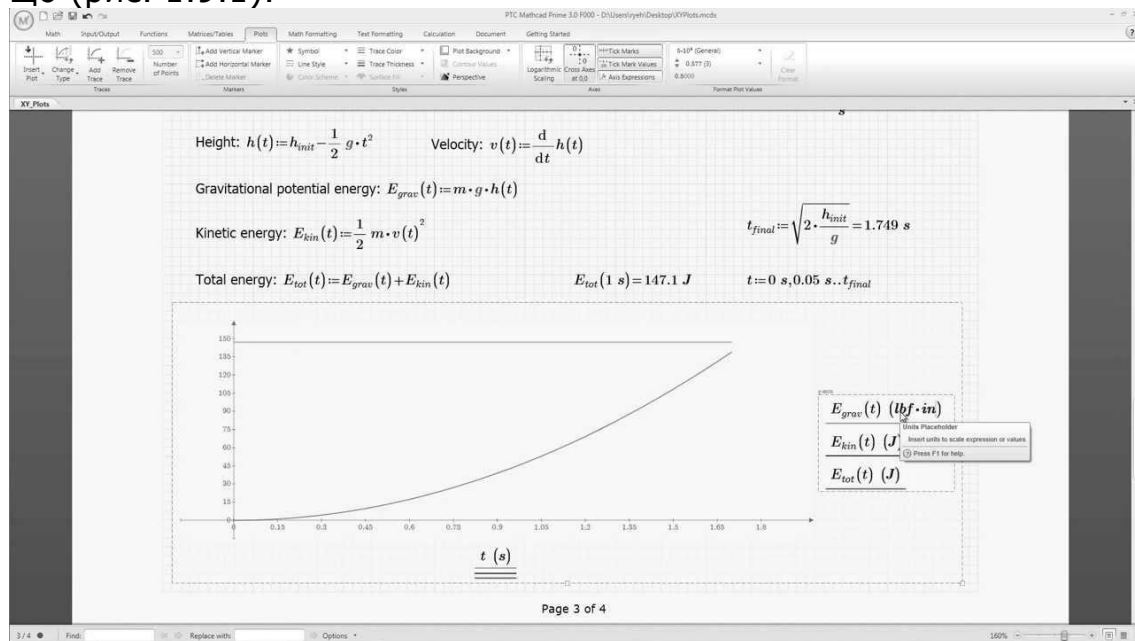


Рис. 1.9.1. Вікно інтерфейсу СКМ Mathcad Prime 3.0

Бібліотеки та пакети розширення функціонально розширюють функції та операції ядра системи, забезпечуючи програмування та створення алгоритмів не лише машинною мовою системи, але також мовою програмування вищого рівня.

Довідкова система забезпечує користувача інформацією, демонстраціями та прикладами типових задач та їх розв'язків. Деякі системи комп'ютерної математики є з такої точки зору фак-

тично математичними енциклопедіями з огляду на обсяги їх довідкової системи.

Системи комп'ютерної математики (СКМ) дозволяють за допомогою комп'ютерів реалізувати аналітичні та числові методи вирішення задач, представлення результатів у графічній формі (візуалізацію), оформлення результатів та їх підготовку до друку.

В аналітичній формі, зокрема, більшість СКМ дозволяють виконати такі операції:

- спрощення виразів, або їх приведення до стандартної форми;
- підстановки символьних та/або числових значень у вирази;
- виокремлення множників або дільників у виразах;
- факторизацію, розкриття ступенів та добутків;
- розкладання виразів на прості дробі;
- знаходження меж функцій та послідовностей;
- операції з рядами;
- диференціювання в повних та частинних похідних;
- знаходження визначених та невизначених інтегралів;
- повний аналіз функцій включно з пошуком сингулярностей та екстремумів;
- операції з векторами, матрицями та тензорами;
- знаходження рішень алгебраїчних та диференціальних рівнянь;
- символьне рішення задач оптимізації;
- інтегральні перетворення, прямі та зворотні (Фур'є, Лапласа, Ганкеля, Мелліна тощо);
- пряме та зворотнє швидке перетворення Фуріє (ШПФ);
- інтерполяція, екстраполяція, апроксимація;
- статистичні обчислення;
- машинні докази теорем.

Додатково більшість просунутих СКМ забезпечує такі можливості як:

- числові операції довільної точності;
- цілочисельну арифметику великих чисел;
- обчислення фундаментальних фізичних констант з довільною точністю;
- підтримку функцій теорії чисел;
- редагування математичних виразів у двовимірній формі;
- побудову графіків аналітично та неявно заданих функцій, побудову графіків за табличними даними, а також у двох та трьох вимірах;
- анімацію побудованих графіків;
- використання пакетів розширень спеціального призначення;
- програмування на вбудованій мові високого рівня;
- автоматичну верифікацію;
- синтез програм;
- інтерактивні режими роботи.

Визнаними лідерами серед існуючого розмаїття СКМ сьогодні є три такі системи:

1. Maple.
2. MATHLAB.
3. Mathematica.

2 Універсальні комп'ютерні середовища (огляд)

Maple є типовою інтегрованою системою комп'ютерної математики. Першу версію було розроблено та оприлюднено в 1980-му році групою Symbolic Computation Group з університету Ватерлоо, місто Ватерлоо, Онтаріо, Канада. Остання версія Maple 2015 від 2015 року містить понад 5000 функцій для більшості розділів сучасної математики, інтерактивної візуалізації та моделювання, підтримує мову програмування Maple, і дозволяє комбінувати алгоритми, результати обчислення, математичні формули, текст, графіку, діаграми та анімацію зі звуком в електронному документі. Окремими пакетами можна придбати розвинену систему рівневого візуального моделювання MapleSim. З 1988 року програму Maple розробляє і продає ліцензії компанія Waterloo Maple Inc. (також відома як Maplesoft) – канадська компанія з Ватерлоо, Онтаріо, Канада.

Основний документ СКМ Maple – це Worksheet (робочий аркуш), робота з яким дуже подібна до звичайного редагування документа в текстовому редакторі типу Word. Текст можна форматовувати на рівні абзаців або символів, оформлюючи їх у різних стилях. Зміст документів можна структурувати за секціями та підсекціями. Кожна секція може містити об'єкти різної природи: текстові коментарі, рядки введів та виводів команд, графіки, а також підсекції тощо.

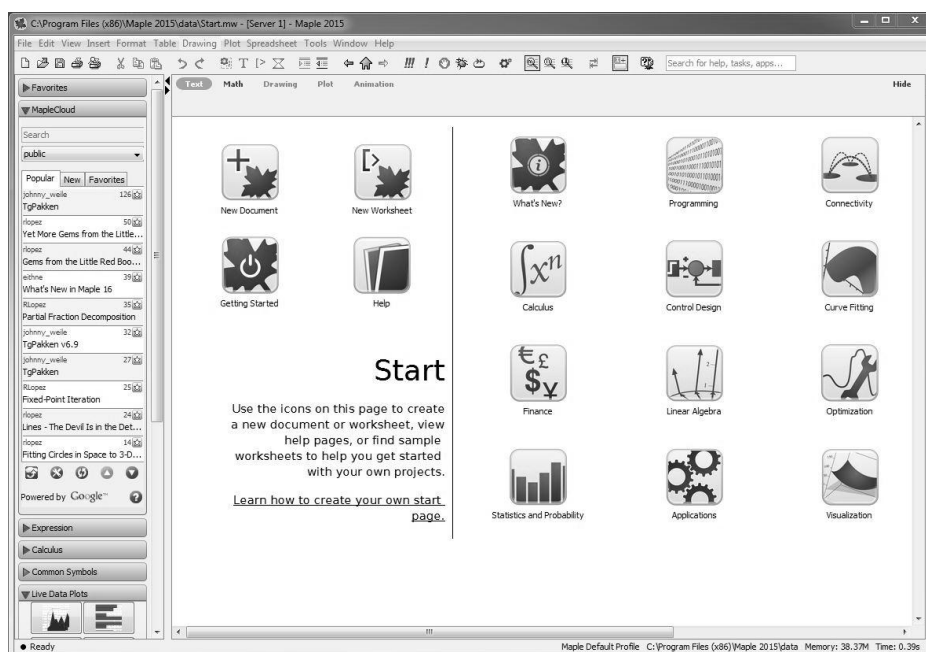


Рис. 1.9.2. Вікно інтерфейсу СКМ Maple 2015

Рядки вводу команд вирізняються спеціальним символом, окремим кольором і є активними: введені в такі рядки команди передаються в ядро системи, виконуються і повертаються у вигляді тексту, або графіків (рис. 1.9.2). Отже, в СКМ Maple поєднані функції текстового та командного процесорів.

Система Maple інтегрує в собі три мови:

- вхідну або мову спілкування з системою;
- мову реалізації програм;
- мову програмування.

Вхідна мова є інтерпретуючою мовою надвисокого рівня, зорієнтованою на рішення математичних задач практично будь-якого рівня складності в діалоговому режимі. Вона слугує для завдання вхідних даних задачі для їх наступної обробки. Вхідна мова має велику кількість заздалегідь визначених математичних та графічних функцій разом із розгалуженою бібліотекою функцій, які можна підключати в міру потреб.

Вбудована мова програмування Maple вважається однією з найпотужніших та кращих мов програмування математичних задач. Її класифікують як мову процедурного програмування.

Ядро системи покращується від версії до версії: останньою на момент написання лекції була версія 2015, яка містить понад 5000 функцій ядра. Частина функцій ядра може бути використана без спеціальної об'яви, інша потребує об'яв для ужиття. Існує ціла низка спеціальних програмних пакетів, які можна підключати, якщо виникає потреба; їх тематика охоплює практично всі розділи сучасної математики. Довершеність ядра системи характеризує той факт, що в неповному складі воно експлуатується такими СКМ як MATLAB та MathCad.

Система Maple підтримує як двовимірну, так і тривимірну графіку. Таким чином, можна представити явні, неявні та параметричні функції, а також багатомірні функції і навіть набори даних у графічному вигляді і візуально шукати закономірності.

Графічні засоби системи дозволяють будувати двовимірні та тривимірні графіки одразу декількох функцій, створювати графіки конформних перетворень функцій комплексних аргументів, будувати графіки функцій в логарифмічному, подвійному логарифмічному, параметричному, фазовому, полярному та контурному вигляді. Графічно можна також представляти функції, які задані неявним способом, рішення диференціальних рівнянь, зокрема отримані в числовій формі, кореневі годографи тощо.

Maple здатний будувати поверхні та криві в тривимірному представленні, включно з поверхнями, заданими в явній та параметричній формі, а також рішеннями диференціальних рівнянь та їх систем. Такі поверхні можна зображувати не лише в статичному, але також у динамічному вигляді, користуючись можливостями анімації.

Maple є першим пакетом, який запропонував повну підтримку стандарту MathML 2.0, який керує як зовнішнім виглядом, так змістом математики в Інтернеті. Ця ексклюзивна функція робить СКМ основним засобом математичних досліджень в Інтернеті. TCP/IP-протокол забезпечує динамічний доступ з інтерфейсу СКМ Maple до інформації з Інтернет-ресурсів, наприклад до даних фінансового аналізу в режимі реального часу, або даних про поточні погодні умови.

Mathematica – СКМ розробки компанії Wolfram Research (USA). Остання версія СКМ має номер 10.1 і розповсюджується з березня 2015 року. Можливостями та навіть віконним інтерфейсом ця СКМ практично не відрізняється від СКМ Maple, тому варто зупинитися лише на суттєвих відмінностях між цими програмними продуктами. Зокрема, останні версії системи дозволяють вільний вибір мови вводу: користувач може ввести речення англійською і одразу отримує результат – знання синтаксису не є обов'язковим.

Після закінчення обчислень система самостійно вносить пропозиції щодо продовження роботи, наприклад рекомендує натиснути певну інтерфейсну кнопку, або викликати нове діалогове вікно тощо.

СКМ Mathematica має декілька десятків зовнішніх розширень для спеціалізованих математичних задач. Так, WolframLibraryLink забезпечує підключення зовнішніх програмних бібліотек, ефективно розподіляючи оперативну пам'ять комп'ютера та гарантуючи високу швидкість обчислень.

Для роботи з базами даних СКМ має програму DatabaseLink, яка є набором вбудованих інструментів, які дозволяють інтеграцію з будь-якою базою даних SQL, або навіть декількома такими базами.

Інтерфейсна частина цієї СКМ відділена від процесів її обчислювального ядра (рис. 1.9.3). Таке рішення забезпечує неперервність процесу обчислень навіть у випадку коли багатоядерний процесор знаходиться під максимальним навантаженням. Приміром, у випадку двох ядер інтерфейс та обчислювальне ядро системи працюють на різних ядрах процесору. Ядро системи є машинно-незалежним, що дозволяє легко переносити його на різні платформи.

Певним недоліком СКМ Mathematica є доволі незвична мова програмування, що лише частково компенсується розвиненою довідковою системою цього математичного середовища.

MATLAB – ця система комп'ютерної математики є одночасно високого рівня мовою програмування, яка забезпечує широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості та інтерфейси до програм, які у свою чергу написані іншими мовами. СКМ MATHLAB спочатку розроблялася як суто обчислювальна, і лише у старших версіях отримала можливості символічних обчислень, використовуючи для цього ядро такої СКМ як Maple.

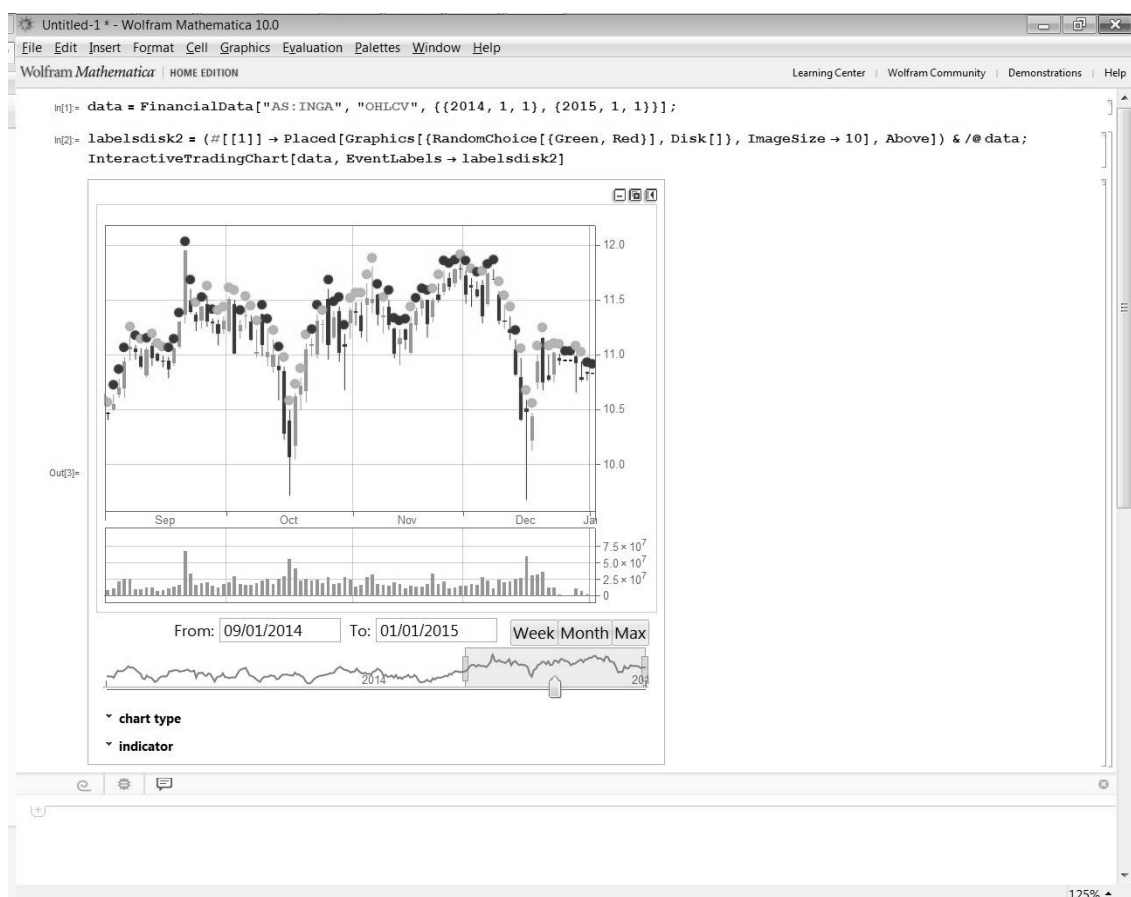


Рис. 1.9.3. Фрагмент програми у вікні СКМ Mathematica

MATLAB є мовою цілої родини програмних продуктів фірми MathWorks (USA), зокрема такого відомого як Simulink. Остання версія СКМ має номер 2015a – «в ході» з березня 2015 року. MATLAB має більше, ніж мільйон користувачів.

Програми написані на MATLAB бувають двох типів: функції та скрипти. Функції мають як вхідні, так і вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання результатів проміжкових обчислень. Скрипти ж користуються загальним робочим простором. Як скрипти, так і функції не компілюються в машинні коди і зберігаються як текстові файли.

Головна особливість мови MATLAB – його широкі можливості в роботі з матрицями, які розробники мови висловили в гаслі «думай по-векторному» (англ. «Think vectorized»).

У склад MATLAB входять:

- інтерпретатор команд;
- графічна оболонка;
- редактор-налагоджувач;
- профайлер;
- компілятор;
- символічне ядро від Maple;
- математичні бібліотеки та пакети розширень.

Для MATLAB існує можливість створювати спеціальні набори інструментів (англ. *toolboxes*), які розширюють можливості СКМ. Такі набори являють собою колекції функцій написаних мовою MATLAB для вирішення певного класу задач. Компанія Mathworks постачає набори таких інструментів для використання в різних галузях математики. Завдяки великій кількості пакетів розширень СКМ є найбільшою за об'ємом серед свого класу.

Інтерфейс СКМ MATLAB 2013 року, який за інтерфейсом майже не відрізняється від останньої версії 2015 року, з фрагментами програми та графіки представлений на рис. 1.9.4.

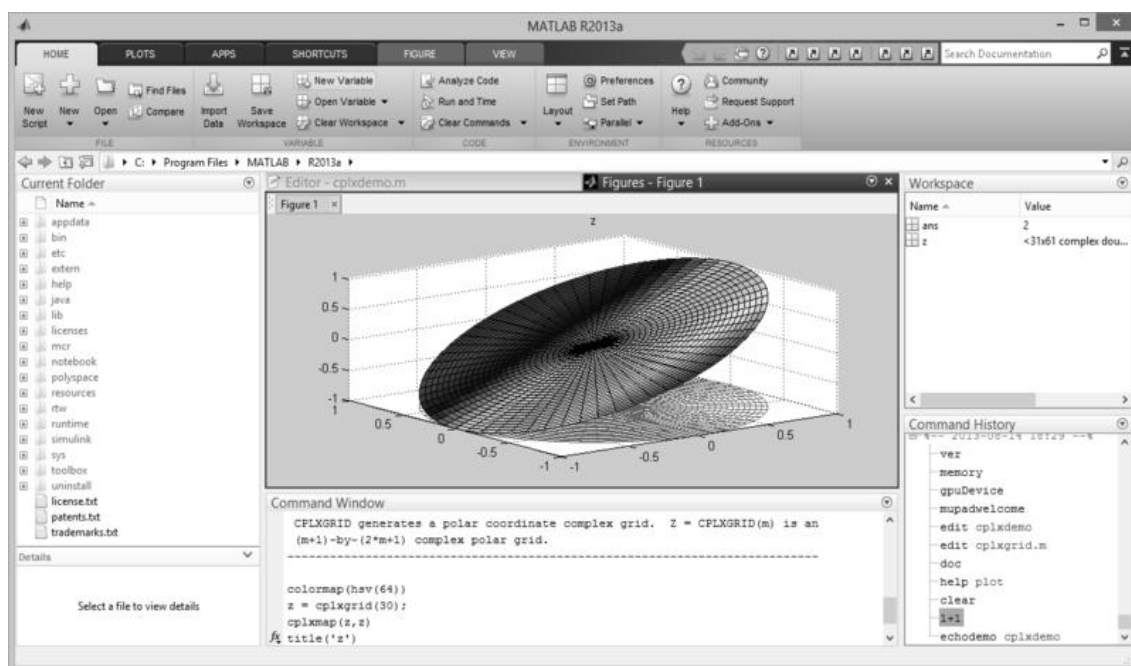


Рис. 1.9.4. Інтерфейс СКМ MATLAB версії 2013 року

РОЗДІЛ 2

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Практикум 1

Методологічні питання моделювання процесів і систем

Практикум 1 присвячено основним методологічним питанням моделювання процесів і систем. Зміст її у вигляді слайдів презентації наведено в додатку А.

Практикум 2

Задачі, які приводять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь

1. Математичні моделі фізики.
 - 1.1. Одновимірний рух класичної частинки.
 - 1.2. Типова задача електростатики.
2. Моделі екології та біофізики.
 - 2.1. Моделі динаміки популяцій: ряд Фібоначчі, логістична модель Ферхюльста.
 - 2.2. Математична модель коливань азотистих основ ДНК.

1 Математичні моделі фізики

1.1. Одновимірний рух класичної частинки

Розглянемо рух частинки маси m уздовж осі Ox під дією деякої сили, яка залежить лише від часу $F(t)$. Другий закон Ньютона, який є основним законом класичної механіки, дозволяє записати просте диференціальне рівняння (закон) руху такої частинки:

```
> restart;  
Newton:=m*diff(x(t),t,t)=F(t);
```

$$Newton := m\ddot{x}(t) = F(t) . \quad (2.2.1)$$

Припустимо, що маса частинки є одиничною, а сила залежить від часу по такому закону:

```
> Typesetting:=-RuleAssistant();  
> m:=1;  
F(t):=1e3*exp(-0.5*t)*sin(2*Pi*t);
```

$$m := 1, \\ F(t) := 1000. e^{-0.5t} \sin(2\pi t). \quad (2.2.2)$$

Підставимо (2.2.2) у (2.2.1) та вирішимо рівняння взагалі:

| > Newton;

$$\ddot{x}(t) = 1000. e^{-0.5t} \sin(2\pi t), \quad (2.2.3)$$

| > ans_gen:=collect(dsolve(Newton),
| [exp(-2*t), _C1, _C2, sin, t]);

$$ans_gen := x(t) = _C1 t + _C2 + \frac{\left(-64000 \pi^2 e^{-\frac{t}{2}} + 4000 e^{-\frac{t}{2}}\right) \sin(2\pi t)}{256 \pi^4 + 32 \pi^2 + 1}. \quad (2.2.4)$$

$$+ \frac{32000 \pi e^{-\frac{t}{2}} \cos(2\pi t)}{256 \pi^4 + 32 \pi^2 + 1}$$

У загальному рішенні (2.2.4), яке має бути в диференціальному рівнянні другого порядку, фігурує дві невизначені константи інтегрування $_C1$, $_C2$. Таким чином, конкретний закон руху можна визначити лише сформулювавши задачу Коші, тобто вказавши початкові умови: початкові позицію та швидкість частинки. Припустимо, що існували такі початкові умови:

| > ic:=x(0)=0,D(x)(0)=-125;

$$ic := x(0) = 0, D(x)(0) = -125. \quad (2.2.5)$$

Тоді рішення (2.2.4) конкретизується до вигляду:

| > ans:=collect(simplify(dsolve({Newton, ic}, x(t))),
| [exp,sin,t]);

$$ans := x(t) = \left(\frac{125 (-512 \pi^2 + 32) \sin(2\pi t)}{(16 \pi^2 + 1)^2} \right. \quad (2.2.6)$$

$$+ \left. \frac{32000 \cos(2\pi t) \pi}{(16 \pi^2 + 1)^2} \right) e^{-\frac{t}{2}} \\ + \frac{125 (-256 \pi^4 + 1024 \pi^3 - 32 \pi^2 + 64 \pi - 1) t}{(16 \pi^2 + 1)^2} - \frac{32000 \pi}{(16 \pi^2 + 1)^2}$$

| > plot(rhs(ans), t=0..4, view=[0..4,-20..130],
| thickness=3, gridlines=true, font=[Arial,14],
| labelfont=[Arial,14], labels=[t,x(t)], labeldirections
| = ["horizontal", "vertical"], title= `Рис.1. Закон
| руху частинки`, tickmarks=[5,7]);

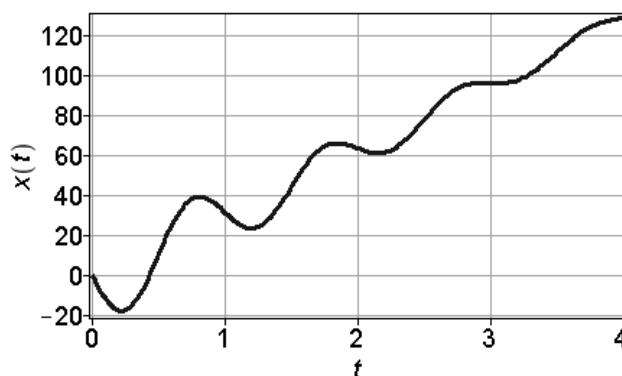


Рис. 2.2.1. Закон руху частинки

Лише після вирішення задачі Коші (2.2.4), (2.2.5) можна встановити конкретний вигляд закону руху для частинки (рис. 2.2.1).

1.2. Типова задача електростатики

```
> restart;
with(Physics[Vectors]):
```

Розглянемо задачу розрахунку напруженості електричного поля для безперервного об'ємного розподілу заряду, який задається гаусівською функцією густини з центральною симетрією. Це означає, що у сферичній системі координат густина заряду залежить лише від однієї координати r – відстані до початку координат, і не залежить від кутових координат θ , ϕ .

```
> sigma:=Q*exp(-r^2/(2*a^2))/(sqrt(2*Pi)*a^3);
```

$$\sigma := \frac{Q e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \sqrt{2}}{2 \sqrt{\pi} a^3}. \quad (2.2.7)$$

Зобразимо залежність (1.2.2) для певного набору параметрів

```
> plot(eval(sigma, [Q=10,a=3]), r=0..15, thickness=3,
gridlines=true, font=[Arial,14], tickmarks=[5,4],
axes=boxed, filled=true, color=blue,
labels=[r,'sigma'(r)], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=["horizontal", "vertical"],
caption=`Рис. 2. Гаусівський розподіл \n густини
заряду`);
```

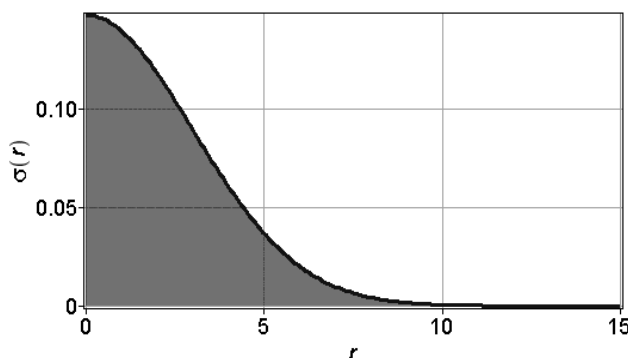


Рис. 2.2.2. Гаусівський розподіл густини заряду

Вектор напруженості електричного поля, яке створюється зарядом з густиною (2.2.7), також залежить лише від однієї радіальної координати і спрямований уздовж радіального орту:

```
> E_:=E(r)*_r;
Identify(E_); # Вектор розпізнаний як належний до
сферичної системи координат (3)
```

$$\vec{E} := E(r) \hat{r}, \quad (2.2.8)$$

Одне з рівнянь системи рівнянь Максвелла пов'язує між собою дивергенцію вектора напруженості та густину заряду диференціальним рівнянням першого порядку:

```
> Eq:=Divergence(E_)=sigma/epsilon; # Дивергенція
автоматично обчислюється у сферичній системі координат
```

$$Eq := \frac{\left(\frac{d}{dr} E(r) \right) r + 2 E(r)}{r} = \frac{Q e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \sqrt{2}}{2 \sqrt{\pi} a^3 \epsilon}, \quad (2.2.9)$$

де ϵ – діелектрична проникність середовища. В якості початкової умови приймемо умову:

```
> ic:=E(0)=0;
```

$$ic := E(0) = 0. \quad (2.2.10)$$

Тоді рішення диференціального рівняння (2.2.9) матиме такий вигляд:

```
> ans:=dsolve({Eq,ic}, E(r));
```

$$ans := E(r) = -\frac{Q \sqrt{2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}}{2 r \sqrt{\pi} a \epsilon} + \frac{Q \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2} r}{2 a}\right)}{2 r^2 \epsilon}, \quad (2.2.11)$$

де $\operatorname{erf}(z)$ – спеціальна функція, так званий інтеграл помилок. Оцінемо рішення (2.2.11) для модельних параметрів:

```
> E:=eval(rhs(ans), [_C1=0, a=3, epsilon=1, Q=10]):
```

І побудуємо його графік:

```
> plot(E, r=0..25, thickness=3, gridlines=true,
font=[Arial,14], tickmarks=[5,4], axes=boxed,
color=blue, labels=[r,'E'(r)], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=["horizontal", "vertical"],
caption=`Рис.3 Напруженість електричного поля`);
```

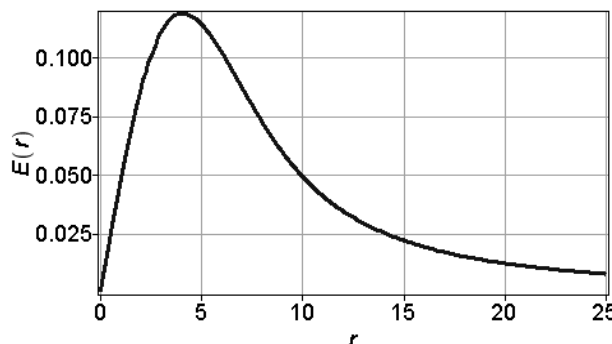


Рис. 2.2.3. Напруженість електричного поля

2 Моделі екології та біофізики

2.1. Моделі динаміки популяцій: ряд Фібоначчі, логістична модель Ферхюльста

Перша писемна згадка про математичну модель динаміки популяції кролів відноситься до 1202 року [9]. Італійський математик Леонардо Фібоначчі в трактаті «Liber abaci» сформулював таку задачу:

«Дехто вирощує кролів у замкненому загоні. Скільки кролів народжується щорічно від однієї пари, якщо кролі починають народжувати з другого місяця життя і народжують щомісяця іншу пару кролів?».

Рішенням задачі є ряд чисел:

```
> restart;
> Fi:=[1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,273,377];
    Fi := [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 273, 377] . (2.2.12)
```

У ряді Фібоначчі кожен наступний фактор є сумою двох своїх попередників, наприклад, $34 = 21 + 13$. Перші два числа ряду (2.2.12) описують процес розмноження у перші два місяці, наступні числа – кількість пар кролів у наступні 12 місяців.

```
> plots[listplot](Fi, color=violet, gridlines=true,
axes=boxed, font=[Arial,14], style=point,
symbol=solidcircle, symbolsize=24, labels=[n,'Fi'(n)],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=["horizontal",
"vertical"], caption=`Рис. 4. Динаміка популяції
кролів \n за Фібоначчі`);
```

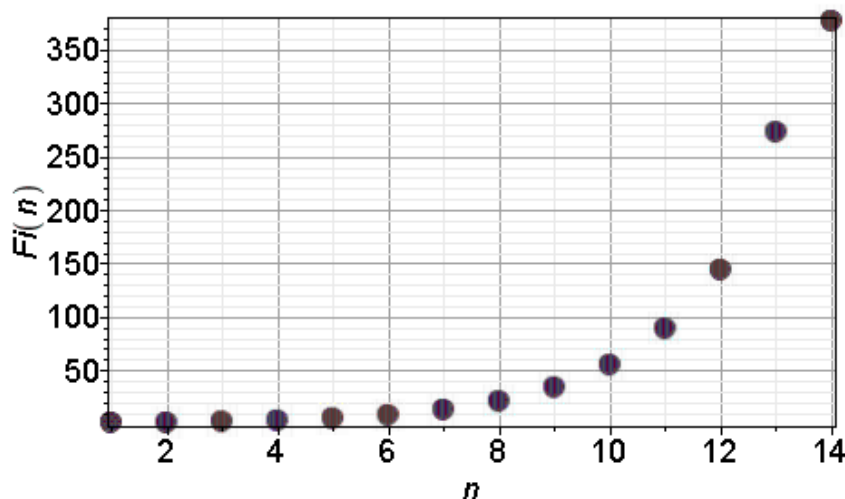


Рис. 2.2.4. Динаміка популяції кролів за Фібоначчі

Наступною всесвітньо відомою моделлю динаміки популяцій стала модель Томаса Роберта Мальтуса, запропонована у 1782 році («Про зростання народонаселення»). Мальтус описав її диференціальним рівнянням першого порядку:

```
> de_M:=diff(x(t),t)=r*x(t);
icM:=x(0)=x[0];
```

$$\begin{aligned} de_M &:= \dot{x}(t) = r x(t) , \\ icM &:= x(0) = x_0 . \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Рішенням задачі Мальтуса є необмежене експоненціальне зростання популяції:

$$\begin{aligned} &| > \text{res_M} := \text{dsolve}(\{de_M, icM\}) ; \\ &\text{res_M} &:= x(t) = x_0 e^{rt} . \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

У той же час зростання продуктів харчування за Мальтусом відбувається лише за лінійним законом, отже, невідворотно відстає від зростання популяції.

Чарльз Дарвін, дискутуючи з Мальтусом зауважив, що жодна популяція не розвивається безкінечно, завжди існують фактори, які обмежують її зростання.

Математичну модель з обмеженим зростанням популяції вперше запропонував Ферхюльст у 1848 році. Рівняння Мальтуса було узагальнено до вигляду:

$$\begin{aligned} &| > de_F := \text{diff}(x(t), t) = r * x(t) * (1 - x(t) / K) ; \\ &de_F &:= \dot{x}(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) , \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} &| > \text{res_F} := \text{dsolve}(de_F) ; \\ &res_F &:= x(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt} \frac{C1}{K}} , \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

```
> plot(eval(rhs(res_F), [K=1, _C1=1, r=0.5]), t=-15..15,
thickness=3, gridlines=true, axes=boxed,
font=[Arial,14], tickmarks=[10,5],
labels=[t, 'res_F'(t)], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=["horizontal", "vertical"], caption =
`Рис. 5 Відносна чисельність популяції \n за
Ферхюльстом`);
```

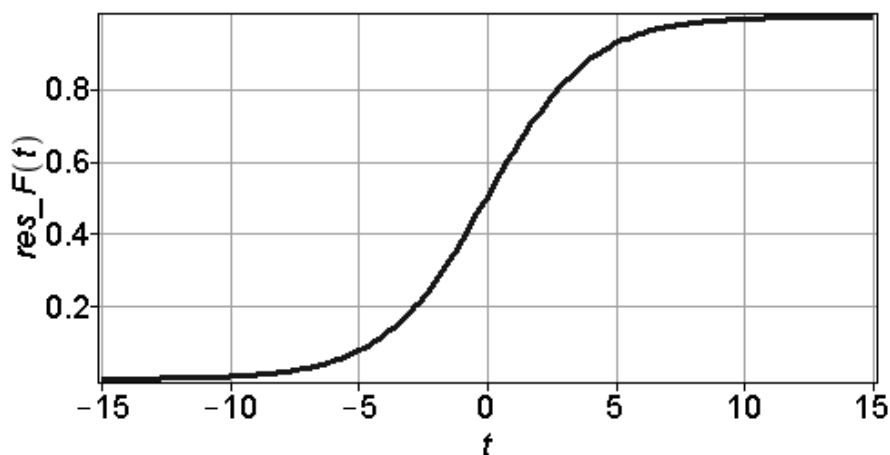


Рис. 2.2.5. Відносна чисельність популяції за Ферхюльстом

Модель Ферхюльста має дві важливі особливості:

- за малої чисельності популяція зростає в часі експоненціально;

- за більшої чисельності зростання популяції уповільнюється і виходить на певну межу $x(t) \rightarrow K, \text{ if } t \rightarrow \infty$. Ця величина (K) називається ємністю екологічної ніші для популяції.

На рис. 2.2.6 представлені експериментальні спостереження (точки) та логістична крива Ферхюльста, яка описує динаміку чисельності жука *Rhizopertha dominica* у 10-грамовій порції пшеничного збіжжя, відновлюваній щотижня [10].

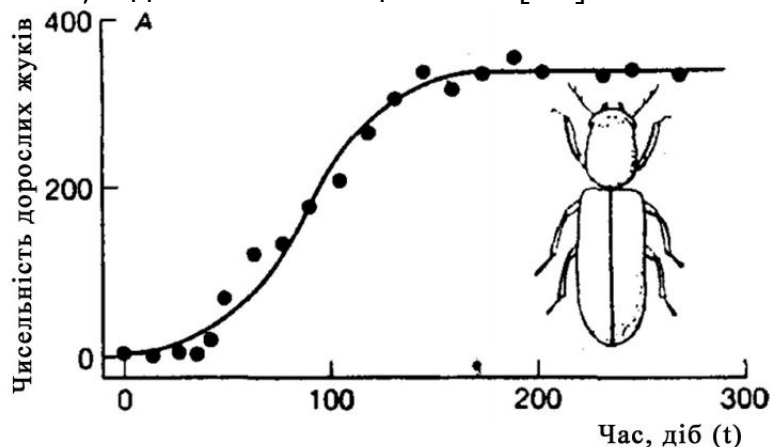


Рис. 2.2.6. Динаміка чисельності жука *Rhizopertha dominica* [10]

2.2. Математична модель коливань азотистих основ ДНК

Для опису коливань азотистих основ (А, Ц, Т, Г) навколо цукрово-фосфатних ланцюжків, на яких вони закріплені у ДНК, часто користуються механічною аналогією [11], показаною на рис. 2.2.7.

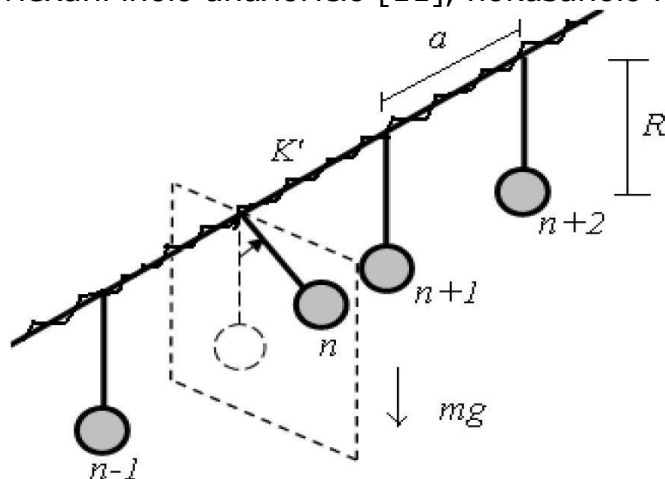


Рис. 2.2.7. Модель Скотта [11]

Модель Скотта (1969) являє собою горизонтальну нитку, на якій на рівній відстані один від одного закріплені маятники. Маятники можуть коливатися у площинах перпендикулярних до нитки, вони також пов'язані між собою пружинками, навитими на нитку. У межах моделі Скотта диференціальне рівняння, яке описує систему має такий вигляд:

```
> restart:
> des:= m*R^2*diff(phi(x,t),t,t)=-m*g*r*sin(phi(x,t))+
k^2*a^2*diff(phi(x,t),x,x);
```

$$des := m R^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) \right) = -m g r \sin(\phi(x, t)) + k^2 a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) \right), (2.2.17)$$

де $\phi(x, t)$ – функція, яка описує кути відхилення маятників від рівноваги, m – маси маятників, R – довжина підвісу, g – прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт жорсткості пружин, a – відстань між точками підвішування.

У випадку ДНК маятникам відповідають азотисті основи, нитці – цукрово-фосфатний ланцюжок, гравітаційному полю – взаємодія з паралельною ниткою (ланцюжком) ДНК. Тоді диференціальне рівняння (2.2.17) для ДНК отримає такий вигляд:

```
> de:=J*diff(phi(x,t),t,t)=-V*sin(phi(x,t))+
K^2*a^2*diff(phi(x,t),x,x);
```

$$de := J \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) \right) = -V \sin(\phi(x, t)) + K^2 a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) \right), (2.2.18)$$

де J – момент інерції азотистої основи, V – константа взаємодії з паралельним ланцюжком у ДНК, K – крутильна жорсткість цукрово-фосфатного ланцюжку, a – відстань поміж парами азотистих основ. Рівняння (2.2.18) є нелінійним і має назву рівняння синус-Гордона. Зробимо такі позначення:

```
> c:=sqrt(K*a^2/J);
d:=sqrt(K*a^2/V);
beta:=sqrt(1-v^2/c^2);
```

$$\begin{aligned} c &:= \sqrt{\frac{K a^2}{J}}, \\ d &:= \sqrt{\frac{K a^2}{V}}, \\ \beta &:= \sqrt{1 - \frac{v^2 J}{K a^2}}. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Тоді односолітонним рішенням (2.2.18) є такий вираз:

```
> ans:=phi(x,t)=4*arctan(exp(beta*(x-v*t)/d));
```

$$ans := \phi(x, t) = 4 \arctan \left(e^{\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2 J}{K a^2}} (-v t + x)}{\sqrt{\frac{K a^2}{V}}}} \right). \quad (2.2.20)$$

```
> phi:=eval(rhs(ans), [K=227e-20, J=e-47, v=209e-20,
a=3.4e-10, v=185]); # Параметри для А – основи з [11].
```

$$\phi := 4 \arctan \left(e^{-5.195027624 \cdot 10^{11} t + 2.808123040 \cdot 10^9 x} \right). \quad (2.2.21)$$

```
> plot3d(phi, x=-2e-9..6e-9, t=0..2e-11,
orientation=[130,65,0], font=[Arial,12],
tickmarks=[4,6,4], lightmodel=light2, view=[-2e-9..
6e-9,0..2e-11,0..2*Pi], labels=['x', 't', 'phi'],
labelfont=[Arial,12], caption='Рис. 8. Часово-
просторова еволюція кінку', view=[-2e-9..6e-9,
0..2e-11,0..2*Pi]);
```

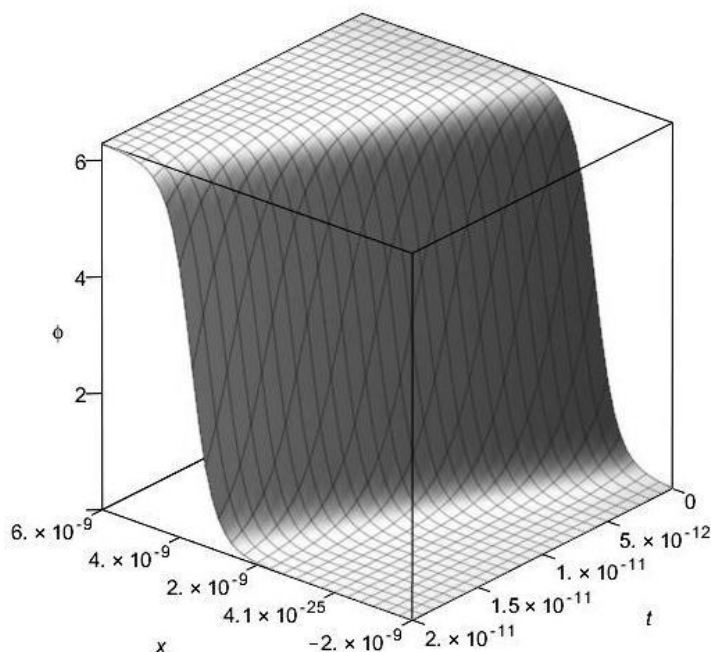


Рис. 2.2.8. Часово-просторова еволюція кінку

Зверніть увагу, кут відхилення змінюється на рис. 2.2.8 від 0 до 2π .

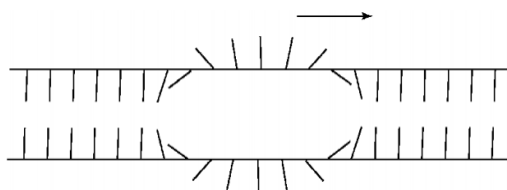


Рис. 2.2.9. Схема розплетення азотистих основ ДНК під впливом кінку [11]; напрям руху кінку показаний стрілкою

Густина енергії, яку переносить кінк дається виразом:

```
> rho:=4*beta^2*V/(cosh(beta*(x-v*t)/d))^2;
rho:=eval(rho, [K=227e-20, J=7607e-47, v=209e-20,
a=3.4e-10,v=185]);
```

$$\rho := \frac{4 \left(1 - \frac{v^2 J}{K a^2} \right) V}{\cosh \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2 J}{K a^2}} (-v t + x)}{\sqrt{\frac{K a^2}{V}}} \right)^2},$$

$$\rho := \frac{8.277057052 \cdot 10^{-18}}{\cosh\left(5.195027624 \cdot 10^{11} t - 2.808123040 \cdot 10^9 x\right)^2}. \quad (2.2.22)$$

```
> plot3d(rho, x=-2e-9..6e-9, t=0..2e-11,
orientation=[67,60,0], font=[Arial,12],
tickmarks=[4,6,4], lightmodel=light2, grid=[200,200],
labels=['x', 't', 'rho'], caption='Рис. 10. Густина
енергії кінку');
```

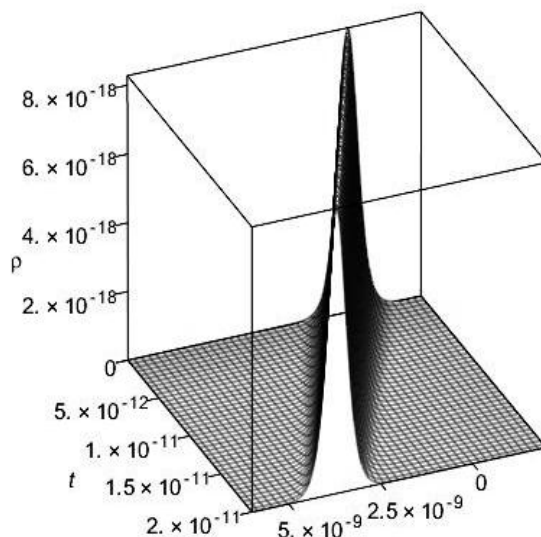


Рис. 2.2.10. Густина енергії кінку.

Практикум 3

Математичні моделі медицини та фармації

1. Математичні моделі медицини.
 - 1.1. Математична модель захворювання.
 - 1.2. Якісний аналіз моделі захворювання.
2. Фармакокінетичні моделі.
 - 2.1. Модель внутрішньосудинної інфузії лікарської речовини.

1 Математичні моделі медицини

Людина являє собою складну динамічну систему, елементи якої взаємопов'язані і реагують на зовнішнє середовище. Кожна система є сукупністю елементів (підсистем) поєднаних взаємодією та деякою взаємною залежністю.

У першому наближенні системи можна поділяти на:

- фізичні;
- технічні;
- адміністративні тощо.

Людина з таких позицій є безумовно фізичною системою. Через те, що в цій системі постійно відбуваються складні процеси життєдіяльності, вона є динамічною системою.

1.1. Математична модель захворювання

Вважатимемо, що головними діючим факторами інфекційного захворювання є такі:

- концентрація патогенних антигенів здатних розмножуватися – $V(t)$;
- концентрація антитіл, під якими розуміють елементи імунної системи здатні нейтралізувати антигени – $F(t)$;
- концентрація плазматичних клітин, які здатні продукувати та переносити антитіла (імунокомпетентні та імуноглобуліно продуценти), яка позначатиметься як – $C(t)$;
- відносна характеристика ураженого органу – $m(t)$.

-1- Перше рівняння системи описуватиме швидкість зміни антигенів в організмі пацієнта:

```
> restart: unprotect(gamma);
> deq1:= diff(V(t), t)=(beta-gamma*F(t))*V(t);
```

$$deq1 := \dot{V}(t) = (\beta - \gamma F(t)) V(t). \quad (2.3.1)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (2.3.1) описує процес розмноження патогенних антигенів (β – коефіцієнт розмноження), а другий – процес їх знищення захисними антитілами (коефіцієнт γ – характеризує ефективність такого знищення).

-2- Друге рівняння описує процес росту плазматичних клітин – носіїв та продуцентів захисних антитіл. Процес зміни кількості плазматичних клітин контролюється двома факторами:

- по-перше, під впливом антигенів та антитіл плазматичні клітини здатні каскадно розмножуватися (з певною затримкою в часі τ),
- по-друге, плазматичні клітини старіють та відмирають, хоча при цьому зберігається певний стабільний рівень їх концентрації в тілі людини C_0 .

```
> deq2:=diff(C(t), t)=alpha*F(t-tau)*V(t-tau)-
mu[c](C(t)-C0);
```

$$deq2 := \dot{C}(t) = \alpha F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C_0), \quad (2.3.2)$$

де коефіцієнт α – коефіцієнт ймовірності зустрічі «антиген-антитіло», τ – час формування каскаду плазматичних клітин, C_0 – рівноважна концентрація плазматичних клітин у здоровому організмі, μ_c – характеризує процес старіння клітин.

-3- Наступне рівняння описуватиме баланс антитіл, які реагують з антигенами. Воно має вигляд:

```
>deq3:=diff(F(t), t)=rho*C(t)-
(mu[f]+eta*gamma*V(t))*F(t);
```

$$deq3 := \dot{F}(t) = \rho C(t) - (\mu_f + \eta \gamma V(t)) F(t), \quad (2.3.3)$$

тут коефіцієнти: ρ – характеризує швидкість продукції антитіл плазматичними клітинами, μ_f – процес їх старіння, а η – кількість антитіл, потрібних для нейтралізації одного антигену.

-4- Попередні рівняння не враховують послаблення організму під час захворювання. Вважатимемо, що послаблення відповідних органів захисту організму пропорційне розмірам ураження антигенами головного органу-мішені. Припустимо, що M – характеристика здорового органу (маса, об'єм, або площа поверхні тощо), тоді M_1 :

$$m = 1 - \frac{M_1}{M}.$$

Динаміка параметра ураження може бути представлена рівнянням:

$$\begin{aligned} & \text{> deq4:=diff(m(t),t)=sigma*V(t)-mu[m]*m(t);} \\ & \text{deq4 := } \dot{m}(t) = \sigma V(t) - \mu_m m(t), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

де перший доданок правої частин описує ураження органу антигенами, а другий – його відновлення за рахунок відновлювальної реакції організму. Коефіцієнти σ , μ_m – характеризують швидкості цих процесів.

За умови сильного ураження органу-мішені ефективність продукції захисних антитіл спадає. Іншими словами коефіцієнт α у рівнянні (2.3.2), який характеризує ефективність генерації антитіл, повинен залежати від величини параметра m . Перепишемо рівняння (2.3.2) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \text{> deq2:=diff(C(t),t)=xi(m)*alpha*F(t-tau)*V(t-tau)-} \\ & \text{mu[c](C(t)-C0);} \\ & \text{deq2 := } \dot{C}(t) = \xi(m) \alpha F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c (C(t) - C_0), \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

де функція $\xi(m)$ схематично відображатиме зниження рівня продукції антитіл за умови критичного ураження органу-мішені. Достеменно вигляду цієї функції, тим більше, для конкретної хвороби ніхто не знає, тому апроксимуємо її функцією такого вигляду:

```
> xi(m):=piecewise(m<=m[cr],1, (1-m)/(1-m[cr]));
plot(eval(xi(m), m[cr]=0.525), m=0..1, 0..1.1,
axes=boxed, thickness=3, font=[Arial,14],
gridlines=true, labelfont=[Arial,14], labels=[t,x(t)],
tickmarks=[5,7], labeldirections=["horizontal",
"vertical"], caption=`Рис. 1. Падіння ефективності
\n генерації антитіл з ураженням \n органу мішені`);
```

$$\xi(m) := \begin{cases} 1 & m \leq m_{cr} \\ \frac{1-m}{1-m_{cr}} & otherwise \end{cases}.$$

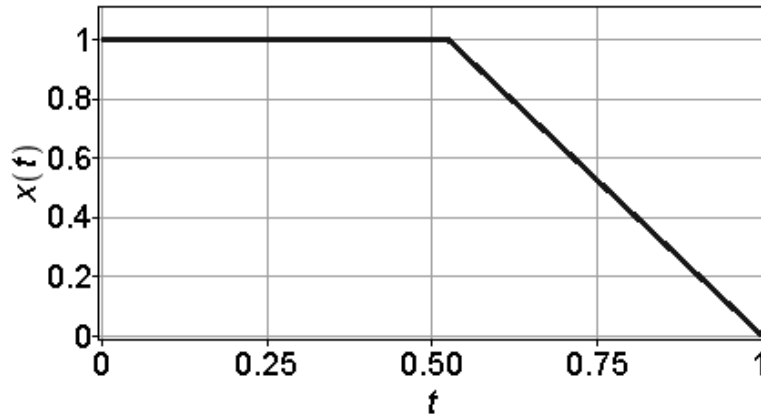


Рис. 2.3.1. Падіння ефективності генерації антитіл з ураженням органу-мішені

Іншими словами ми припускаємо, що до певного критичного ураження генерація антитіл не страждає, а після критичного значення ураження органу-мішені падає лінійно. Тоді у підсумку отримуємо таку систему з чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & \text{sys} := \text{deq1}, \text{deq2}, \text{deq3}, \text{deq4}; \\
 \text{sys} := & \dot{V}(t) = (\beta - \gamma F(t)) V(t), \dot{C}(t) = \\
 & \begin{cases} 1 & m \leq m_{cr} \\ \frac{1-m}{1-m_{cr}} & otherwise \end{cases} \alpha F(t-\tau) V(t-\tau) - \mu_c(C(t) \\
 & - C0), \dot{F}(t) = \rho C(t) - (\mu_f + \eta \gamma V(t)) F(t), \dot{m}(t) = \sigma V(t) \cdot (2.3.6) \\
 & - \mu_m m(t)
 \end{aligned}$$

яку потрібно доповнити чотирма початковими умовами:

$$\begin{aligned}
 & \text{ics} := V(0)=V0, F(0)=F0, C(0)=C0, m(0)=m0; \\
 & \text{ics} := V(0)=V0, F(0)=F0, C_0=C0, m(0)=m0. \quad (2.3.7)
 \end{aligned}$$

Задачу Коші, яку формують система рівнянь (2.3.6) та початкові умови (2.3.7) називають простою математичною моделлю захворювання [12]. Всі параметри моделі, зокрема з (2.3.7) та інші, вважаються не негативними.

1.2. Якісний аналіз моделі захворювання

1.2.1. Стаціонарне рішення моделі захворювання

Система (2.3.6) припускає стаціонарні рішення, які можна знайти прирівнюючи всі похідні до нуля [12]:

$$\begin{aligned}
 & \text{eq1} := \text{eval}(\text{rhs}(\text{deq1}), [V(t)=V, V(t-\tau)=V, F(t)=F, \\
 & F(t-\tau)=F, C(t)=C, m(t)=m])=0; \\
 & \text{eq2} := \text{eval}(\text{rhs}(\text{deq2}), [V(t)=V, V(t-\tau)=V, F(t)=F, \\
 & F(t-\tau)=F, C(t)=C, m(t)=m])=0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{eq3} := \text{eval}(\text{rhs}(\text{deq3}), [V(t)=V, V(t-\text{tau})=V, F(t)=F, \\
 & F(t-\text{tau})=F, C(t)=C, m(t)=m])=0; \\
 & \text{eq4} := \text{eval}(\text{rhs}(\text{deq4}), [V(t)=V, V(t-\text{tau})=V, F(t)=F, \\
 & F(t-\text{tau})=F, C(t)=C, m(t)=m])=0; \\
 & \text{eq1} := (-\gamma F + \beta) V = 0, \\
 & \text{eq2} := \begin{cases} 1 & m \leq m_{cr} \\ \frac{1-m}{1-m_{cr}} & \text{otherwise} \end{cases} \alpha F V - \mu_c (C - C0) = 0, \quad (2.3.8) \\
 & \text{eq3} := \rho C - (\eta \gamma V + \mu_f) F = 0, \\
 & \text{eq4} := \sigma V - \mu_m m = 0.
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (2.3.8) припускає тривіальний розв'язок:

$$\begin{aligned}
 & > \text{str} := \text{solve}(\{\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{eq4}\}, [V, C, F, m]); \\
 & \text{allvalues}(\text{str}[1, 2]); \\
 & \text{allvalues}(\text{str}[1, 3]); \\
 & \text{str} := \left[\left[V = 0, C = \frac{\text{RootOf}\left(\mu_c \left(-\frac{C0 \rho - \mu_f}{\rho}\right)\right) \mu_f}{\rho}, F \right], \right. \quad (2.3.9) \\
 & \quad \left. = \text{RootOf}\left(\mu_c \left(-\frac{C0 \rho - \mu_f}{\rho}\right)\right), m = 0 \right] \\
 & \quad C = C0 + \text{RootOf}(\mu_c(_Z)), \\
 & \quad F = \frac{\rho (C0 + \text{RootOf}(\mu_c(_Z)))}{\mu_f}. \\
 & > \text{str} := [V=0, C=C0, F=\rho*C0/\mu[f], m=0]; \\
 & \text{str} := \left[V = 0, C = C0, F = \frac{\rho C0}{\mu_f}, m = 0 \right]. \quad (2.3.10)
 \end{aligned}$$

Розв'язок (2.3.10) відповідає стану здорової людини: концентрація антигенів та ураження органу-мішені є нульовими $V = 0$, $m = 0$, тоді як концентрація клітин та антитіл відповідають рівноважним значенням: $C = C0$, $F = \frac{\rho \cdot C0}{\mu_f}$.

1.2.2. Імунний бар'єр

Розглянемо ситуацію, коли від рівноважних значень (2.3.10) дещо відхиляється лише концентрація патогенних антигенів: $V = \delta V > 0$. Іншими словами, припустимо, що організм інфікований малою дозою антигенів, тоді як решта показників відповідають стаціонарному рішення (2.3.10). Виявляється, що в такій ситуації можна оцінити «малість» дози антигенів нерівністю:

```
> delta*V<(mu[f]*gamma*rhs(str[3]) -  
mu[f]*beta)/(beta*eta*gamma);
```

$$\delta V < \frac{C_0 \rho \gamma - \mu_f \beta}{\beta \eta \gamma} . \quad (2.3.11)$$

Величина у правій частині нерівності (2.3.11) називається імунним бар'єром:

```
> V[cr]:=rhs(%);
```

$$V_{cr} := \frac{C_0 \rho \gamma - \mu_f \beta}{\beta \eta \gamma} . \quad (2.3.12)$$

Якщо доза антигенів не перевищує імунного бар'єру (2.3.12), то хвороба не може розвинути, оскільки антигени знищуються імунною системою ще до того, як уразять орган-мішень.

1.2.3. Базові типи динаміки захворювання

Розглянемо декілька базових типів динаміки захворювання в межах розвиненої моделі. Припустимо, що організм з деяких причин не виробляє антитіла специфічні до конкретного антигену, отже, в системі рівнянь (2.3.6) маємо: $F(t) = F_0 = 0$, а також $\rho = 0$. За таких умов перше рівняння системи (2.3.6) набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V$$

з очевидним експоненціальним розв'язком $V(t) = V_0 \cdot \exp(\beta t)$. Концентрація патогенних антигенів необмежено зростає в часі аж до летального випадку – смерті пацієнта.

Інший граничний випадок передбачає так звану сильну імунну відповідь на інфекцію. Початкова рівноважна концентрація специфічних антитіл в організмі F_0 є достатньою для знищення всіх збудників хвороби. Тоді в першому рівнянні системи (2.3.6) можна вважати $\gamma F(t) \approx \gamma F_0 \gg \beta$, це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma F_0 \cdot V(t)$$

з експоненціальним розв'язком вигляду $V(t) = V_0 \cdot \exp(-\delta F_0 \cdot t)$. Концентрація антигенів швидко спадає до значень, нижчих імунного бар'єру. Пацієнт одужує.

Власне, поміж цими двома граничними кривими повинні розташовуватися всі реально можливі криві для динаміки захворювання (рис. 2.3.2).

```
> plot([exp(t), exp(-t)], t=0..1, thickness=3,  
axes=boxed, tickmarks=[4,5], labels=['t', 'V(t)'],  
font=[Arial,14], gridlines=true, labelfont=[Arial,14],  
tickmarks=[5,7], labeldirections = ["horizontal",  
"vertical"], title=`Рис. 2. Межі для кривих  
\n динаміки захворювання`);
```

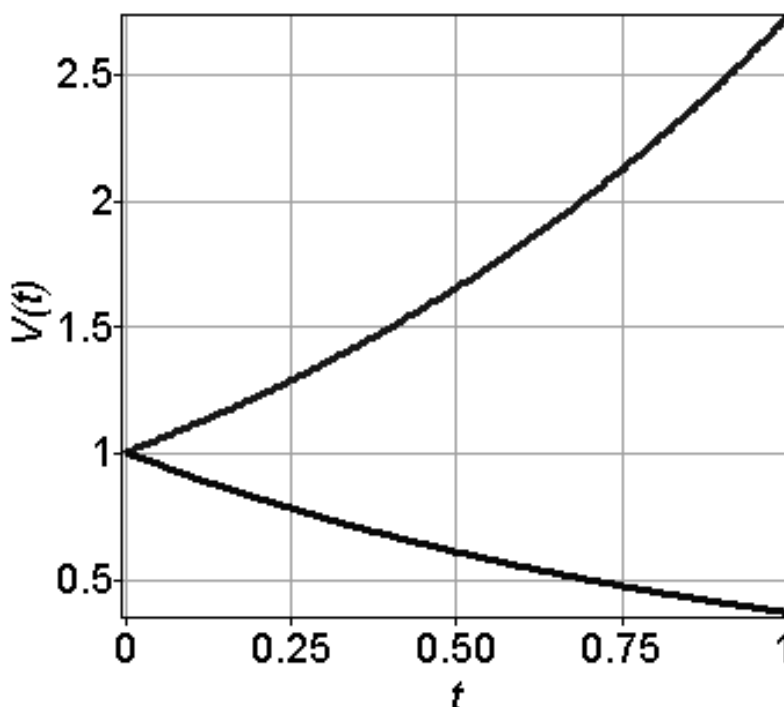


Рис. 2.3.2. Межі для кривих динаміки захворювання

Хронічне захворювання також є стаціонарним станом, отже описується системою рівнянь (2.3.8) з припущеннями, що $V > 0$, $m < m_{cr}$. За таких умов система (2.3.8) припускає рішення такого вигляду:

```
>chr:=[Vc=mu[c]*(mu[f]*beta-
mu[f]*gamma*rhs(str[3]))/(beta*(alpha*rho-
mu[c]*eta*gamma)), Cc=(alpha*mu[f]-
eta*mu[c]*gamma^2*C0)/(gamma*(alpha*rho-
mu[c]*eta*gamma)),
Fc=beta/gamma, mc=sigma*mu[c]*(mu[f]*beta-
mu[f]*gamma*rhs(str[3]))/(mu[m]*beta*(alpha*rho-
mu[c]*eta*gamma))];
```

$$chr := \left[V_c = \frac{\mu_c (-C_0 \rho \gamma + \mu_f \beta)}{\beta (-\mu_c \eta \gamma + \alpha \rho)}, C_c = \frac{-\eta \mu_c \gamma^2 C_0 + \alpha \mu_f}{\gamma (-\mu_c \eta \gamma + \alpha \rho)}, F_c = \frac{\beta}{\gamma}, m_c = \frac{\sigma \mu_c (-C_0 \rho \gamma + \mu_f \beta)}{\mu_m \beta (-\mu_c \eta \gamma + \alpha \rho)} \right] \quad (2.3.13)$$

На рис. 2.3.3 представлено результати числових розрахунків за моделлю (2.3.8).

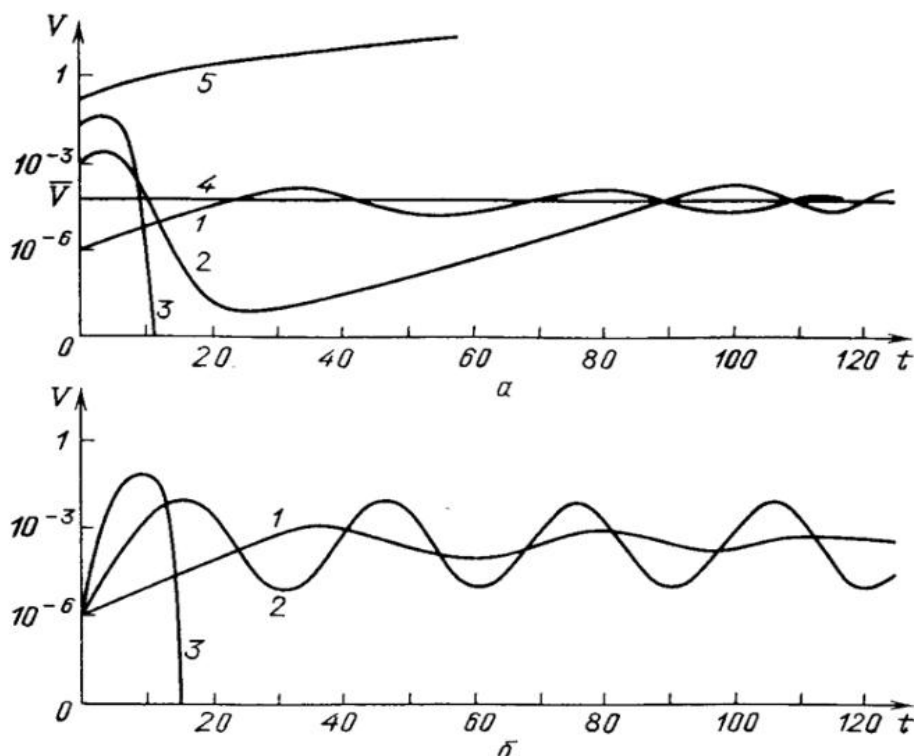


Рис. 2.3.3. Динаміка концентрації патогенних антигенів під час хронічної форми захворювання:
а – у залежності від початкової дози інфекції:
 $V_1 < V_2 < V_3 < V_4 = V_C < V_5$, крива 3 – одужання, крива 5 – летальний виник;
б – залежно від темпу розмноження антигену: $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, крива 3 – одужання

2 Фармакокінетичні моделі

Фармакокінетика вивчає процеси взаємодії лікарських речовин з організмом. Терапевтичний ефект звичайно залежить від концентрації речовини в органі і часу перебування в діючій концентрації. Завданням лікаря є оптимальне призначення ліків, тобто вибір дози, шляху і періодичності введення, котрі забезпечували б достатній терапевтичний ефект при мінімальній побічній дії. Тому методика введення препарату повинна бути суворо індивідуальною, тобто в моделі повинні фігурувати індивідуальні параметри конкретного хворого. Дані коефіцієнти для кожного хворого призначаються в клініці до початку лікування. Відомо, що концентрація препарату в органі залежить від таких факторів:

- перенесення препарату з крові до органа;
- перенесення препарату з органа в кров;
- виведення препарату з крові нирками;
- зв'язування препарату;
- руйнування препарату печінкою;
- швидкості інфузії препарату.

Урахування усіх можливих факторів ускладнює процес створення математичної моделі, тому треба вибирати найбільш суттєві фізіологічні фактори.

2.1. Модель внутрішньосудинної інфузії лікарської речовини

Нехай $K(t)$ – концентрація препарату в крові пацієнта [13], а $L(t)$ – концентрація в органі-мішені. Якщо швидкості перенесення препарату з крові до органу та з органу до крові позначити відповідно як a , g , а через q позначити швидкість подачі препарату в кров пацієнта через судину, то модель внутрішньосудинної інфузії можна представити у вигляді системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \text{> restart;} \\ & \text{> sys:=diff(K(t), t)=g+b*L(t)-(a+g)*K(t),} \\ & \text{diff(L(t), t)=a*K(t)-b*L(t);} \\ \text{sys} & := \dot{K}(t) = g + b L(t) - (a + g) K(t), \dot{L}(t) = a K(t) - b L(t). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Початкові умови є досить очевидними:

$$\begin{aligned} & \text{> ics:=K(0)=0, L(0)=0;} \\ & \text{ics} := K(0) = 0, L(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Система (2.3.14) вирішується, втім рішення є дещо громіздким на вигляд:

$$\begin{aligned} & \text{> ans:=dsolve({sys, ics}, [K(t), L(t)]);} \\ & \text{> ans[1];} \\ & K(t) = - \left(\left(-\frac{g}{2a} + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} \right. \right. \quad (2.3.16) \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2}}{2a} \right) a \left(\right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} a \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} b \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} g + a^2 + 2ab \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2ga + b^2 - 2bg + g^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(a + b + g + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2})t}{2} \right) e^{\left(\left(-\frac{g}{2a} \right. \right.} \\ & \quad \left. \left. + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2 \right) \right) t} + 1 - \left(\left(-\frac{g}{2a} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{b}{2a} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2}}{2a} \Bigg) \\
 & \quad \left(\sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} a \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} b \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} g + a^2 + 2ab \right. \\
 & \quad \left. + 2ga + b^2 - 2bg + g^2 \right) \\
 & \quad \left(\frac{-a - b - g + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2}}{2} t \right) \Bigg) / \left(2(a^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2) b \right), \\
 & | > \text{ans}[2]; \\
 & L(t) = \frac{1}{b} \left(- \left(e^{\frac{(-a - b - g + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2})t}{2}} \right. \right. \quad (2.3.17) \\
 & \quad \left. \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} a \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} b \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} g + a^2 + 2ab \right. \\
 & \quad \left. + 2ga + b^2 - 2bg + g^2 \right) a \Bigg) / \left(2(a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2) \right) \\
 & \quad - \left(e^{\frac{(a + b + g + \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2})t}{2}} \right. \\
 & \quad \left. a \left(-\sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} a - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} b \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sqrt{a^2 + 2ab + 2ga + b^2 - 2bg + g^2} g + a^2 + 2ab \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2ga + b^2 - 2bg + g^2 \right) \right) \Bigg) / \left(2(a^2 + 2ab + 2ga + b^2 \right. \\
 & \quad \left. - 2bg + g^2) \right) + a \Bigg).
 \end{aligned}$$

Утім, вирази (2.3.16) і (2.3.17) є правильним рішенням, що показує тестування:

```
> odetest(ans, sys);
```

0. (2.3.18)

Проведемо оцінки для набору модельних параметрів:

```
> res:=eval(ans, [a=0.5, b=1, g=2.5]);
```

$$res := \left\{ K(t) = -0.7041241450 e^{-3.224744872 t} + 1 - 0.2958758550 e^{-0.7752551285 t}, L(t) = -0.6582482905 e^{-0.7752551285 t} + 0.1582482904 e^{-3.224744872 t} + 0.5 \right\} \quad (2.3.19)$$

```
> plot([rhs(res[1]), rhs(res[2])], t=0..8, 0..1.1,
color=[red,blue], linestyle=[dash, solid],
thickness=3, axes=boxed, legend=['blood','organ'],
font=[Arial,14], gridlines=true, labelfont=[Arial,14],
labels=[t, C(t)], tickmarks=[5,7], labeldirections =
["horizontal", "vertical"], title='Рис. 4. Кінетика
концентрації ліків у крові та органі');
```

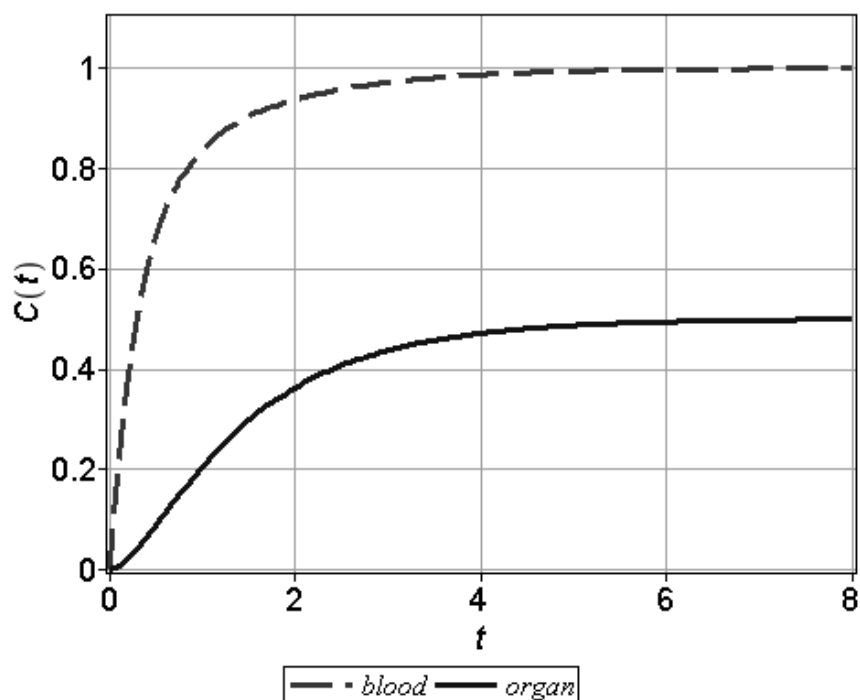


Рис. 2.3.4. Кінетика концентрації ліків у крові та органі

Графіки кінетики концентрації препарату в органі та крові (рис. 2.3.4) показують тенденцію до насичення через певний проміжок часу.

Лінійні диференціальні рівняння математичної фізики та системи таких рівнянь

1. Лінійні диференціальні рівняння математичної фізики.
 - 1.1. Хвильове рівняння.
 - 1.2. Рівняння теплопровідності (дифузії).
 - 1.3. Рівняння Лапласа.
2. Модель, задана системою диференціальних рівнянь.

1 Лінійні диференціальні рівняння математичної фізики

Дослідження різних явищ в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки приводить до математичних моделей реальних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь із частинними похідними чи деяких споріднених рівнянь, наприклад, інтегральних, інтегро-диференціальних, скінченно-різницевих, що розглядаються разом із деякими додатковими співвідношеннями, наприклад, початковими і граничними умовами. Сучасна математична фізика вивчає не лише методи розв'язання таких рівнянь, а й питання коректності постановки відповідних задач. Найбільш загальні результати одержані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, які традиційно називають рівняннями математичної фізики.

Традиційна класифікація таких рівнянь на гіперболічні, параболічні та еліптичні відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні. Для рівнянь різних типів по-різному ставляться основні задачі і часто застосовуються різні методи розв'язання.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних нижче типів.

- Одновимірне **хвильове** рівняння – гіперболічне:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

- Одновимірне рівняння **теплопровідності** – параболічне:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

- Двовимірне рівняння **Лапласа** – еліптичне:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1.1. Хвильове рівняння

```
> restart; with(PDEtools): assume(a::real,a>0);
> we:=diff(u(x,t),t$2)-a^2*diff(u(x,t),x$2)=0;
```

$$we := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0. \quad (2.4.1)$$

Загальне рішення одновимірного хвильового рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} &| > \text{pdsolve}(we, u(x, t)); \\ &u(x, t) = _F1(a \sim t + x) + _F2(a \sim t - x). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Загальне рішення (2.4.2) має форму суми двох хвиль, які розповсюджуються в протилежних напрямках: уздовж осі Ox та проти неї. Якщо задані початкові умови:

$$\begin{aligned} &| > \text{ics} := u(x, 0) = f(x), \quad D[2](u)(x, 0) = g(x); \\ &ics := u(x, 0) = f(x), \quad D_2(u)(x, 0) = g(x), \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

то рішення рівняння (2.4.1) може бути отримане в такій формі:

$$\begin{aligned} &| > \text{pdsolve}([we, ics], u(x, t)); \\ &u(x, t) = \frac{1}{2a} \left(f(-a \sim t + x) a \sim + f(a \sim t + x) a \sim - \int_0^{-a \sim t + x} g(xl) \cdot \right. \\ &\quad \left. x1 + \int_0^{a \sim t + x} g(xl) \cdot x1 \right) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Рішення задачі Коші у формі (2.4.4) відоме в математиці як формула д'Аламбера.

1.2. Рівняння теплопровідності (дифузії)

Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності. Таким самим за формою є також рівняння дифузії.

$$\begin{aligned} &| > \text{restart}; \\ &et := \text{diff}(u(x, t), t) = a^2 \text{diff}(u(x, t), x, x); \\ &et := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

де a – коефіцієнт теплопровідності. Зробимо заміну змінних [14]:

$$\begin{aligned} &| > \text{tr} := \{t = \tau, x = \xi \sqrt{\tau}, u(x, t) = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\tau}}\}; \\ &t = \tau, x = \xi \sqrt{\tau}, u(x, t) = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\tau}} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

У нових змінних рівняння отримує такий вигляд:

$$\begin{aligned} &| > \text{et1} := \text{PDEtools[dchange]}(tr, et, \text{simplify}); \\ &et1 := - \frac{\xi \left(\frac{d}{d\xi} f(\xi) \right) + f(\xi)}{2 \tau^{3/2}} = \frac{a^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi) \right)}{\tau^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Скорочуючи на множник $\tau^{3/2}$, запишемо звичайне диференціальне рівняння:

$$| > \text{et2} := \text{et1} * (\tau)^{(3/2)};$$

$$et2 := -\frac{\xi \left(\frac{d}{d\xi} f(\xi) \right)}{2} - \frac{f(\xi)}{2} = a^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi) \right). \quad (2.4.8)$$

Рішення (2.4.8) в Maple можна отримати стандартним шляхом:

| > sol:=simplify(dsolve(et2));

$$sol := f(\xi) = \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\frac{1}{2} \xi}{a} \right) _C1 + _C2 \right) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}. \quad (2.4.9)$$

Дійсність рішення та його першої похідної на безкінечності ($\xi \rightarrow \infty$) вимагає нульового значення константи $_C1$:

| > f:=eval(rhs(sol), _C1=0);

$$-\frac{\xi^2}{4a^2}, \quad (2.4.10)$$

$$f := _C2 e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}},$$

| > u:=unapply(eval(f, xi=x/sqrt(t))/sqrt(t), [x,t]);

$$u := (x, t) \mapsto \frac{e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}}{\sqrt{t}}. \quad (2.4.11)$$

Константа $_C2$ залежить від початкового розподілу температур. Припустимо, що це імпульсна діраківська функція:

| > u(x,0):=Dirac(x);

$$u(x, 0) := \delta(x). \quad (2.4.12)$$

Оскільки діраківський імпульс можна представити у вигляді:

| > Dirac(x)=limit(exp(-x^2/k)/sqrt(Pi*k), k=0);

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{k}}}{\sqrt{\pi k}}. \quad (2.4.13)$$

У такому разі:

| > limit(u(x,t), t=0)=limit(exp(-x^2/k)/sqrt(Pi*k), k=0);

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}}{\sqrt{t}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{k}}}{\sqrt{\pi k}}. \quad (2.4.14)$$

Звідки для константи $_C2$ отримуємо з (2.4.14) таке значення:

| > _C2:=2*a/sqrt(Pi);

$$_C2 := \frac{2a}{\sqrt{\pi}}, \quad (2.4.15)$$

| > u(x,t):=u(x,t);

$$u(x, t) := \frac{2 a e^{-\frac{x^2}{4 t a^2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} . \quad (2.4.16)$$

Покладемо коефіцієнт теплопровідності одиничним ($a=1$), і побудуємо анімований графік отриманого рішення:

```
> plots[animate](plot, [eval(u(x, t), a=1), x=-2..2,
y=-.1..12, axes=boxed, gridlines=true, thickness=2,
color=blue], t=0.1e-1..5, labels=["x", "u(x,t)"],
trace=3, frames=50, font=[Arial,14], title='',
labelfont=[Arial,14], labeldirections=["horizontal",
"vertical"], caption='Рис. 1. Анімовані рішення
рівняння \n теплопровідності з точкового джерела',);
```

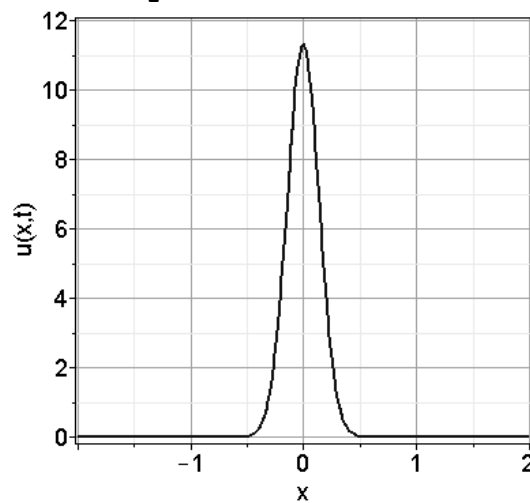


Рис. 2.4.1. Анімовані рішення рівняння теплопровідності з точкового джерела. Показаний момент часу $t = 0.01$ с

1.3. Рівняння Лапласа

Рівняння Лапласа зустрічається зокрема під час розрахунків потенціалу електромагнітного поля в області простору, де відсутні електричні заряди, або в задачах про стаціонарний розподіл температур.

Розглянемо, для прикладу, рішення рівняння Лапласа для кільця, яке визначається в полярних координатах нерівністю:

$$r_1 \leq r \leq r_2 .$$

У полярних координатах (r, θ) рівняння Лапласа виглядає так:

```
> restart;
le:=diff(r*diff(u(r,theta), r), r)/r+diff(u(r,theta),
theta$2)/r^2=0;
```

$$le := \frac{\frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) + r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) \right)}{r} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r, \theta)}{r^2} = 0 . \quad (2.4.17)$$

Оскільки симетрія задачі свідчить про незалежність шуканої функції від полярного кута θ , то маємо:

```
| > u(r, theta) := u(r) ;
```

$$u(r, \theta) := u(r) . \quad (2.4.18)$$

Диференціальне рівняння Лапласа отримує вигляд звичайного диференціального рівняння:

```
| > le1 := le*r ;
```

$$le1 := \frac{d}{dr} u(r) + r \left(\frac{d^2}{dr^2} u(r) \right) = 0 . \quad (2.4.19)$$

Запишемо граничні умови:

```
| > ic1 := u(r1)=0, u(r2)=4*sin(theta)^2 ;
```

$$ic1 := u(r1) = 0, u(r2) = 4 \sin(\theta)^2 . \quad (2.4.20)$$

```
| > ans := dsolve({le1, ic1}, u(r)) ;
```

$$ans := u(r) = -\frac{4 \sin(\theta)^2 \ln(r)}{\ln(r1) - \ln(r2)} + \frac{4 \sin(\theta)^2 \ln(r1)}{\ln(r1) - \ln(r2)} . \quad (2.4.21)$$

```
| > u := unapply(simplify(rhs(dsolve({le1, ic1}, u(r)))),  
r, theta) ;
```

$$u := (r, \theta) \mapsto -\frac{4 \sin(\theta)^2 (\ln(r) - \ln(r1))}{\ln(r1) - \ln(r2)} . \quad (2.4.22)$$

```
| > plot3d(eval(u(r, theta), [r1=2, r2=4]), r=2..4,  
theta=0..2*Pi, grid=[50,250], orientation=[-15,65,0],  
tickmarks=[3,6,6], font=[Arial,14], labels=['r',  
'theta', 'u(r, theta)'], labelfont=[Arial,14],  
labeldirections=["horizontal", "horizontal",  
"vertical"], caption=`Рис. 2. Рішення рівняння  
Лапласа на кільці`);
```

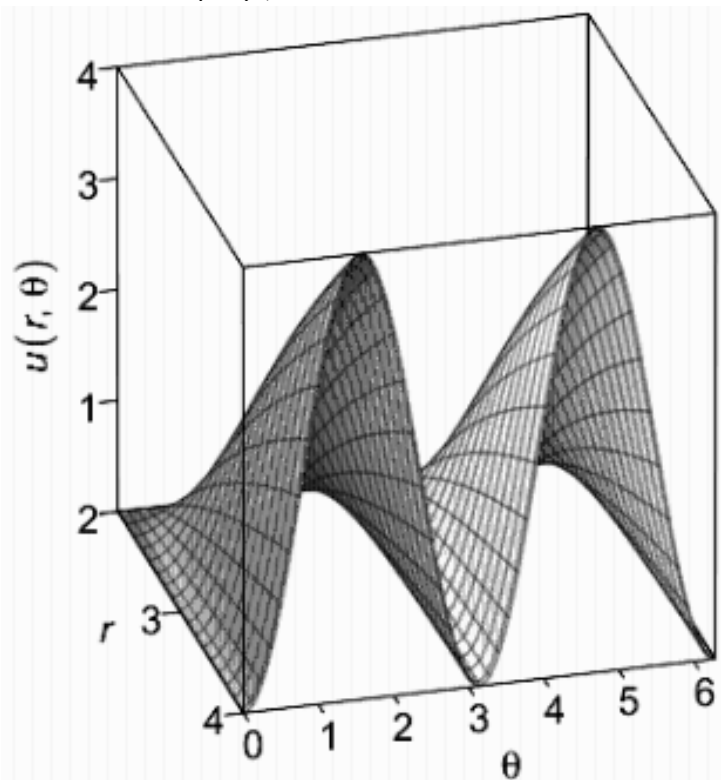


Рис. 2.4.2. Рішення рівняння Лапласа на кільці

2 Модель, задана системою диференціальних рівнянь

Розглянемо практичну модель подвійного зустрічного теплообмінника [15], схему якого наведено на рисунку:

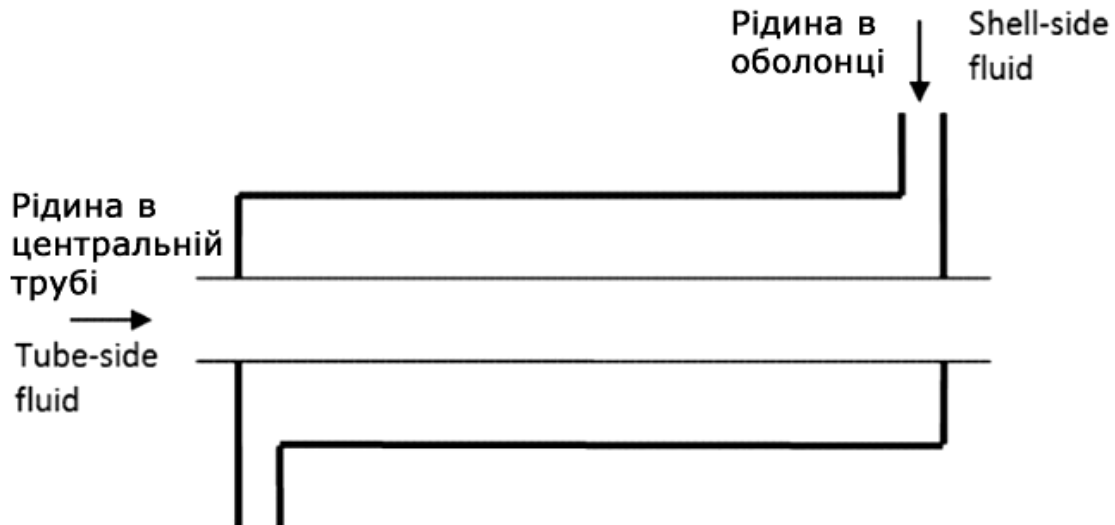


Рис. 2.4.3. Схема подвійного зустрічного теплообмінника

Система з трьох диференціальних рівнянь є математичною моделлю такого обмінника і дозволяє визначити:

- баланс тепла уздовж потоків рідини;
- баланс тепла уздовж стінок труби.

Передбачається, що теплообмінник є добре теплоізованим, а параметри: густини рідин, теплоємності, коефіцієнт теплопередачі, коефіцієнти теплопровідності, – є константами. Система диференціальних рівнянь у часткових похідних, яка описує теплообмінник, має вигляд як показано далі.

| > restart:

Рівняння балансу тепла на стінці труби враховує теплопередачу крізь стінку (третій доданок), а також тепловіддачу з обох боків центральної труби (два перших доданки):

$$\begin{aligned}
 & \text{> pde1} := (1/4) * \pi * (-Di^2 + Do^2) * Cp_w * \rho_w * (\text{diff}(Tw(x, t), t)) = Ut * \pi * Di * (Tt(x, t) - Tw(x, t)) - Us * \pi * Do * (Tw(x, t) - Ts(x, t)) + (1/4) * kw * \pi * (-Di^2 + Do^2) * (\text{diff}(Tw(x, t), x, x)); \\
 pde1 &:= \frac{\pi (-Di^2 + Do^2) Cp_w \rho_w \left(\frac{\partial}{\partial t} Tw(x, t) \right)}{4} \\
 &= Ut \pi Di (Tt(x, t) - Tw(x, t)) - Us \pi Do (Tw(x, t) - Ts(x, t)) + \frac{kw \pi (-Di^2 + Do^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Tw(x, t) \right)}{4}. \quad (2.4.23)
 \end{aligned}$$

Рівняння балансу тепла з боку центральної труби враховує тепло, яке поступає до рідини та тепловіддачу від стінки труби:

$$\begin{aligned}
 & \text{> pde2:= (1/4)*rhot*Cpt*Pi*Di^2*(diff(Tt(x,t), t))= \\
 & \quad -Cpt*Ft*(diff(Tt(x,t), x))-Ut*Pi*Di*(Tt(x,t)-Tw(x,t)); \\
 pde2 &:= \frac{rhot \, Cpt \, \pi \, Di^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} Tt(x, t) \right)}{4} = -Cpt \, Ft \left(\frac{\partial}{\partial x} Tt(x, t) \right) \cdot \quad (2.4.24) \\
 & \quad - Ut \, \pi \, Di \, (Tt(x, t) - Tw(x, t))
 \end{aligned}$$

Рівняння теплового балансу з боку оболонки враховує тепло, яке передає рідина, а також тепловіддачу стінки труби:

$$\begin{aligned}
 & \text{> pde3:= (1/4)*rhos*Cps*Pi*(Dis^2-Do^2)*(diff(Ts(x,t), t)) = Cps*Fs*(diff(Ts(x,t), x))+Us*Pi*Do*(Tw(x,t)-Ts(x,t)); \\
 pde3 &:= \frac{rhos \, Cps \, \pi \, (Dis^2 - Do^2) \left(\frac{\partial}{\partial t} Ts(x, t) \right)}{4} = Cps \, Fs \left(\frac{\partial}{\partial x} \right. \quad (2.4.25) \\
 & \quad \left. Ts(x, t) \right) + Us \, \pi \, Do \, (Tw(x, t) - Ts(x, t))
 \end{aligned}$$

Початкові та крайові умови для системи обрано такими:

$$\begin{aligned}
 & \text{> ibc:= Ts(x,0)=300, Ts(L,t)=300, Tt(x,0)=360,} \\
 & \quad \text{Tt(0,t)=360, Tw(x,0)=330, (D[1](Tw))(0,t)=0,} \\
 & \quad \text{(D[1](Tw))(L,t)=0;} \\
 ibc &:= Ts(x, 0) = 300, Ts(L, t) = 300, Tt(x, 0) = 360, Tt(0, t) = 360, \\
 & \quad Tw(x, 0) = 330, D_1(Tw)(0, t) = 0, D_1(Tw)(L, t) = 0 \quad (2.4.26)
 \end{aligned}$$

Параметри системи обрані наступними:

$$\begin{aligned}
 & \text{■ питомі теплоємності для рідини центральної труби, рідини} \\
 & \quad \text{оболонки та стінок труби відповідно:} \\
 & \text{> Cpt:=4085; Cps:=4186; Cpw:=380;} \\
 & \quad Cpt := 4085, \quad (2.4.27) \\
 & \quad Cps := 4186, \\
 & \quad Cpw := 380;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{■ густини рідин та стінки:} \\
 & \text{> rhot:=800; rhos:=1200; rhow:=8000;} \\
 & \quad rhot := 800, \quad (2.4.28) \\
 & \quad rhos := 1200, \\
 & \quad rhow := 8000;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{■ потоки рідин в одиницю часу:} \\
 & \text{> Ft:=1; Fs:=1;} \\
 & \quad Ft := 1, \quad (2.4.29) \\
 & \quad Fs := 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{■ коефіцієнти теплопередачі:} \\
 & \text{> Ut:=40000; Us:=40000;} \\
 & \quad Ut := 40000, \quad (2.4.30) \\
 & \quad Us := 40000;
 \end{aligned}$$

▪ теплопровідність стінки труби:
 | > **kw**:=109;

$$k_w := 109 ; \quad (2.4.31)$$

▪ довжина обмінника:
 | > **L**:=1;

$$L := 1 ; \quad (2.4.32)$$

▪ внутрішній та зовнішній діаметри центральної труби та внутрішній діаметр оболонки:
 | > **Di**:=0.5e-1; **Do**:=0.6e-1; **Dis**:=.1;

$$\begin{aligned} Di &:= 0.05 , \\ Do &:= 0.06 , \\ Dis &:= 0.1 . \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Підставимо параметри в рівняння (2.4.23)–(2.4.25):

| > **sys**:=**pde1**,**pde2**,**pde3**:

Вирішимо систему разом із початковими та крайовими умовами числовим методом:

| > **sol**:=**pdsolve**({**sys**}, {**ibc**}, **numeric**, **time**=**t**,
range=0..**L**);

$$\begin{aligned} sol &:= \text{module} (\\ &\quad \text{export } plot, plot3d, animate, value, settings; \\ &\quad \dots \\ &\text{end module} \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Зверніть увагу, рішення (2.4.34) є модулем, тобто колекцією команд, які можуть бути експортовані з тіла модуля на зовні. Наприклад, експортуємо з тіла модуля три графіки:

| > **p1**:=**sol**:-**plot**(**Tt**, **x**=.5***L**, **t** = 0..6, **axes**=**boxed**,
color=**black**, **legend**=["Рідина в трубі"],
font=[**Arial**, 12]):
p2:=**sol**:-**plot**(**Ts**, **x**=.5***L**, **t** = 0..6, **axes**=**boxed**,
color=**blue**, **legend**=["Рідина оболонки"],
font=[**Arial**, 12]):
p3:=**sol**:-**plot**(**Tw**, **x**=.5***L**, **t** = 0..6, **axes**=**boxed**,
color=**red**, **legend**=["Стінка труби"], **font**=[**Arial**, 12]):

І зведемо їх на одному графіку, який покаже залежність температур у точці на половині довжини обмінника від часу:

| > **plots**[**display**](**p1**, **p2**, **p3**, **labels**=["Час (s)",
"Температура (C)"], **thickness**=3, **numpoints**=500,
gridlines=**true**, **labeldirections**=[**horizontal**,**vertical**],
labelfont=[**Arial**,12], **font**=[**Arial**,12],
legendstyle=[**font**=["**Helvetica**", 10], **location**=**bottom**],
title = "Рис. 4. Температура середини обмінника",
titlefont = [**Helvetica**, 14, **Bold**]);

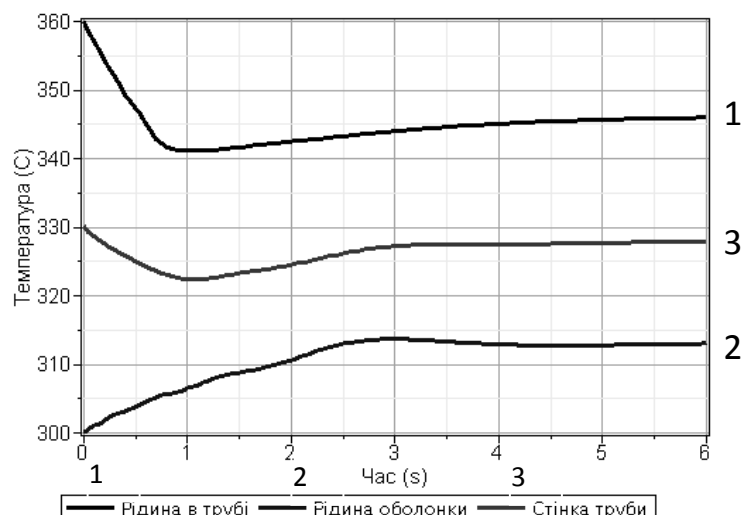


Рис. 2.4.4. Температура середини обмінника

Як видно з рисунку 2.4.4, температури рідин та стінки обмінника стабілізуються вже через декілька секунд після початку процесу.

Побудуємо також розподіли температур, тобто температурні профілі, уздовж обмінника:

```
> p1:=sol:-plot(Tt, t=6, x=0..L, axes=boxed,
color=black, legend=["Рідина в трубі"]):
p2:=sol:-plot(Ts, t=6, x=0..L, axes=boxed, color=blue,
legend=["Рідина оболонки"]):
p3:=sol:-plot(Tw, t=6, x=0..L, axes=boxed, color=red,
legend=["Стінка труби"]):
plots[display](p1, p2, p3, labels=["Відстань (м)",
"Температура (C)"], title="Рис. 5. Температурні профілі
уздовж обмінника", titlefont=[Helvetica, 14, Bold],
thickness=3, numpoints=500, gridlines=true,
labeldirections=[horizontal,vertical],
font=[Helvetica, 12], legendstyle=[font=["Helvetica", 10],
location=bottom]);
```

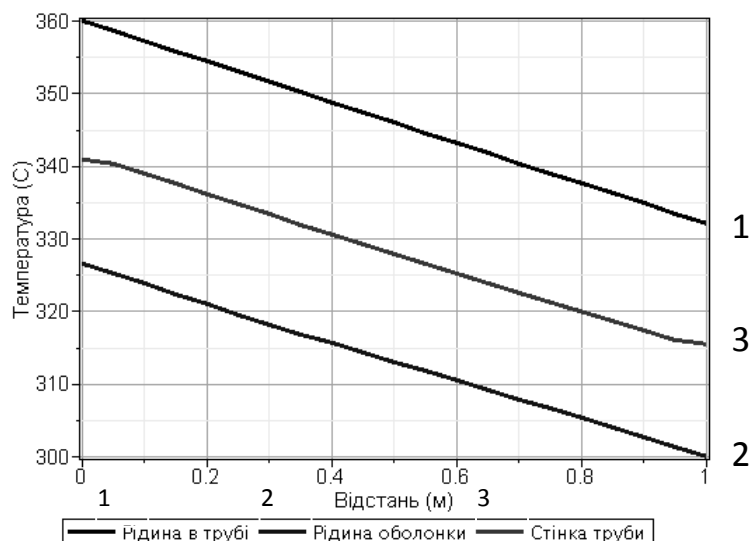


Рис. 2.4.5. Температурні профілі уздовж обмінника

Нелінійні диференціальні рівняння як моделі процесів та систем. Їх особливості

- 1.** Нелінійні системи та їх моделі.
 - 1.1.** Осцилятор Дуффінга.
 - 1.2.** Система рівнянь та аттрактор Лоренца.
- 2.** Нелінійні та відокремлені хвилі.
 - 2.1.** Лінійні та нелінійні хвилі.
 - 2.2.** Рівняння Кортевега-де-Вріза: кіноїдальні хвилі та відокремлені хвилі – солітони.

1 Нелінійні системи та їх моделі

Нелінійність є загальною властивістю динамічних систем, а їх лінійна поведінка – швидше виключення з правил. Зокрема всі фізичні системи фактично є нелінійними. Нелінійні системи можуть демонструвати досить складну поведінку на зовнішнє гармонічне збудження, у той час як реакція лінійної системи завжди є передбачуваними і також завжди є періодичним процесом на частоті зовнішнього збудження.

Нелінійні системи додатково схильні до двох протилежних тенденцій поведінки: з одного боку до хаотичної поведінки, а з іншого – до самоорганізації. Навіть слабо нелінійні системи здатні демонструвати цікаві та складні явища типу біфуркацій, перескакувань, субгармонічних та ультрагармонічних коливань, автоколивань, межових циклів та хаосу.

Загальновідомі такі ознаки нелінійності систем як-от [16]:

- порушення принципу суперпозиції;
- наявність на виході системи коливань із частотами, які відсутні в спектрі вхідного збудження;
- неізохронність – залежність частоти коливань від їх амплітуди;
- можливість реалізації декількох режимів коливань на фіксованій частоті зовнішнього збудження.

Зауважимо, що перелічені властивості проявляються не в усіх нелінійних системах. Найбільш розповсюдженим критерієм є перша з перерахованих вище ознак – порушення принципу суперпозиції. Аби виявити порушення принципу суперпозиції достатньо випробувати систему двома різними вхідними тестовими сигналами під час їх окремої та спільної дії. Якщо система є лінійною, то її реакція на суму тестових сигналів завжди дорівнює сумі реакцій на кожне з них.

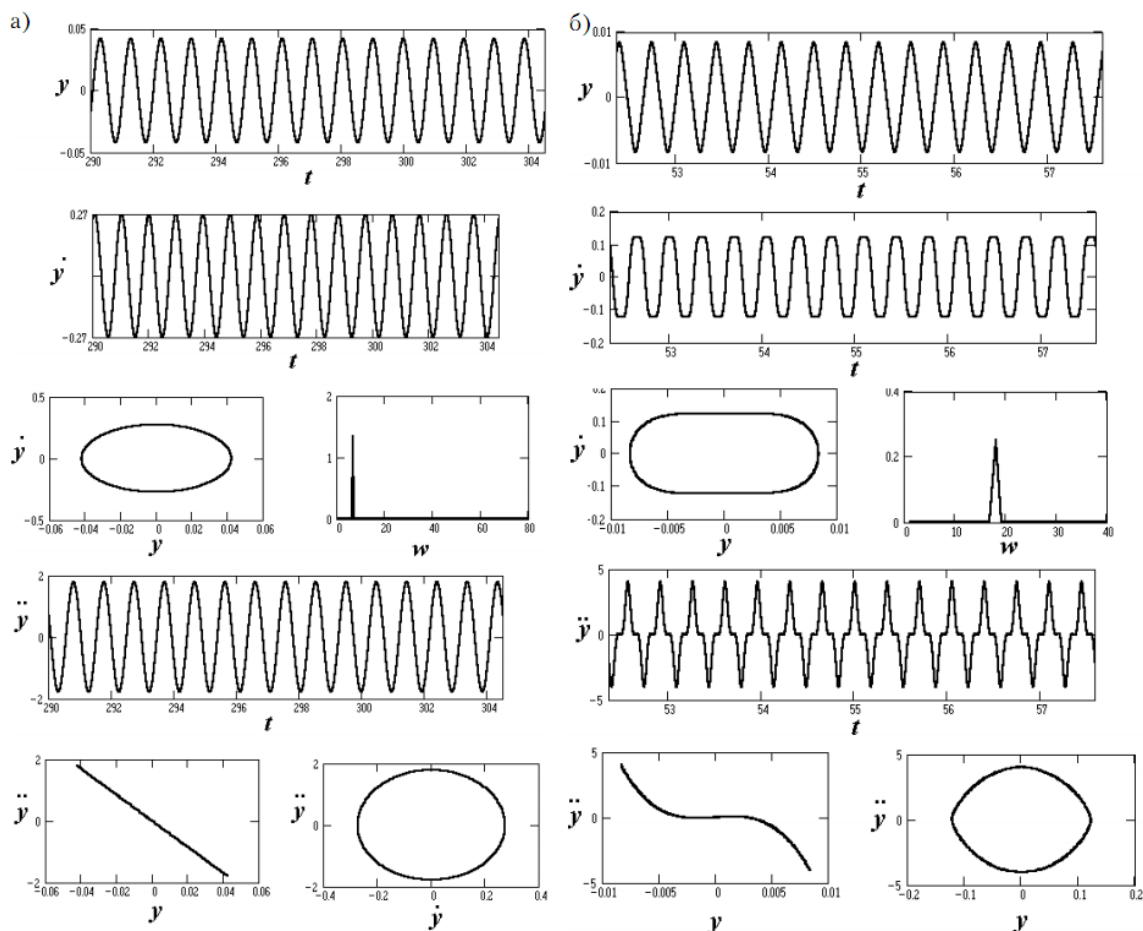


Рис. 2.5.1. Часові характеристики та фазові діаграми для двох систем [16]:
а) лінійної коливальної системи;
б) нелінійної коливальної системи

Як видно з рис. 2.5.1, часові характеристики та фазові діаграми для нелінійних систем суттєво відмінні від лінійних аналогів. Особливо це стосується акселерограм – графіків прискорення, а також фазових діаграм. Розглянемо два конкретні приклади нелінійних систем та їх математичних моделей.

1.1. Осцилятор Дуффінга

Осцилятор Дуффінга є простим прикладом нелінійної системи. Прості варіанти механічних систем, які описуються рівнянням Дуффінга показано на рис. 2.5.2. Утім, існують також електронні системи, які описуються тим самим рівнянням.

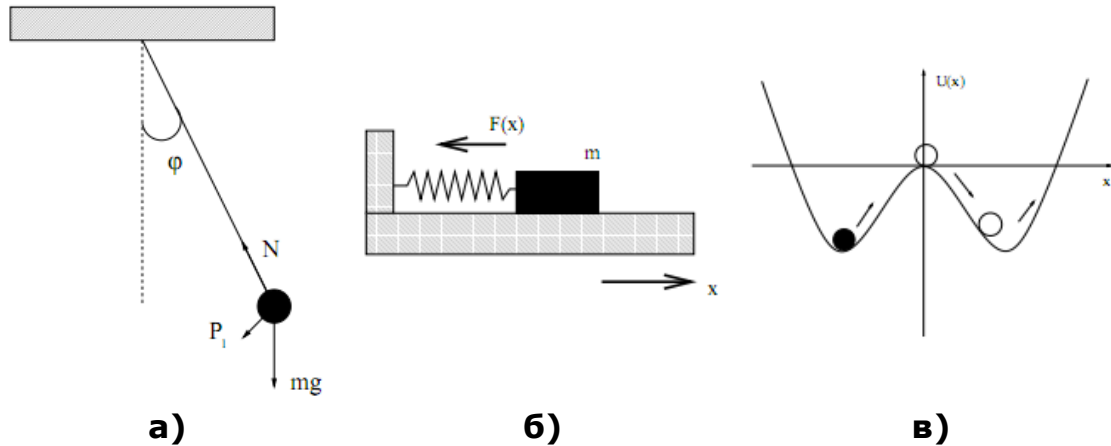


Рис. 2.5.2. Приклади механічних коливальних систем, які описуються рівняннями Дуффінга: а) математичний маятник за умови відносно невеликих кутів відхилення; б) вантаж на пружині з нелінійною жорсткістю $F(x)$; в) частинка, яка рухається в потенціальному полі з двома симетричними мінімумами (потенціальними ямами)

Рівняння для осцилятора Дуффінга має такий вигляд:

```
> restart: unprotect(gamma);
> duff:= diff(x(t),t$2) + alpha*diff(x(t),t) +
beta*x(t) + gamma*x(t)^3=0;
```

$$duff := \ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) + \gamma x(t)^3 = 0, \quad (2.5.1)$$

Рівняння Дуффінга (2.5.1) також можна записати у вигляді еквівалентної йому системи двох рівнянь першого порядку:

```
> sysd:= diff(x(t),t)=y(t), diff(y(t),
t)=-alpha*y(t)-beta*x(t)-gamma*x(t)^3;
```

$$sysd := \dot{x}(t) = y(t), \dot{y}(t) = -\alpha y(t) - \beta x(t) - \gamma x(t)^3. \quad (2.5.2)$$

З (2.5.2) видно, що розмірність фазового простору $(x(t), y(t))$ осцилятора $N=2$, а сам простір є площиною. Визначимо точки рівноваги осцилятора на цій площині з рішення рівнянь:

```
> eq1:=y(t)=0;
eq2:=-alpha*y(t)-beta*x(t)-gamma*x(t)^3=0;
s:=solve({eq1,eq2},[x(t),y(t)]);
```

$$eq1 := y(t) = 0, \quad (2.5.3)$$

$$eq2 := -\alpha y(t) - \beta x(t) - \gamma x(t)^3 = 0,$$

$$s := \left[[x(t) = 0, y(t) = 0], [x(t) = \text{RootOf}(\gamma Z^2 + \beta), y(t) = 0] \right].$$

Уточнимо значення коренів другого рішення (2.5.3):

```
> allvalues(s[2,1]);
```

$$x(t) = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, x(t) = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}. \quad (2.5.4)$$

Отже, взагалі можуть існувати або одна точка рівноваги за умови, що параметри β, γ одного знаку, і це точка $P_0: \{x=0, y=0\}$, або ж три точки рівноваги з додатковими за умо-

ви, що параметри β , γ мають різні знаки, причому симетричними відносно першої точками рівноваги $P_1: \left\{ x = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0 \right\}$ та $P_2: \left\{ x = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0 \right\}$.

Залежно від знаків та величин коефіцієнтів рівняння (2.5.3) характери цих трьох точок можуть змінюватися (табл. 2.5.1).

Таблиця 2.5.1

Точки рівно- ваги	Умови на коефіцієнти рівняння Дуффінга [17]			
	$\gamma > 0$		$\gamma < 0$	
	$\beta > 0$	$\beta < 0$	$\beta > 0$	$\beta < 0$
P_0	$\alpha < -2\sqrt{\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ – стійкий вузол	Сідлова точка за довільного значення та знаку параметра α	$\alpha < -2\sqrt{\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ – стійкий вузол	Сідлова точка задовіль- ного значення та знаку параметра α
P_1	відсутня	$\alpha < -2\sqrt{2\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{2\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий вузол	Сідлова точка за довільного значення та знака параметра α	відсутня
P_2	відсутня	$\alpha < -2\sqrt{2\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{2\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий вузол	Сідлова точка за довільного значення та знака параметра α	відсутня

Вирішимо числовим способом рівняння Дуффінга (2.5.1) з початковими умовами:

```

> duff1:=eval(duff, [alpha=0.3, beta=0.01,
gamma=0.4]);
ic1:=x(0)=15, D(x)(0)=0;
sysd1:=eval(sysd, [alpha=0.3, beta=0.01, gamma=0.4]);
ivs1:=x(0)=15, y(0)=0;

```

$$duff1 := \ddot{x}(t) + 0.3 \dot{x}(t) + 0.01 x(t) + 0.4 x(t)^3 = 0, \quad (2.5.5)$$

$$ic1 := x(0) = 15, D(x)(0) = 0,$$

$$sysd1 := \dot{x}(t) = y(t), \dot{y}(t) = -0.3 y(t) - 0.01 x(t) - 0.4 x(t)^3,$$

$$ivs1 := x(0) = 15, y(0) = 0.$$

```

> p1:=DEtools[DEplot](duff1, x(t), t=0..9*Pi,
[[ic1]],linecolor=blue, numpoints=300, labels=["t",
"x(t)"], labelfont=[HELVETICA,14], title=`Рис. 3а.
Осцилограма`):
p2:=DEtools[DEplot]([sysd1], [x(t), y(t)], t=0..9*Pi,
[[ivs1]], arrows=smalltwo, dirfield=[12,12],
color=magnitude[green, khaki], linecolor=blue,
numpoints=1500, axes=boxed, labels=["x", "y"],
labelfont=[HELVETICA,14], title=`Рис. 3б. Фазовий
портрет осцилятора Дуффінга`);

```

Відповідно до величин та знаків параметрів у виразі (2.5.5) маємо $(\gamma, \beta) > 0$, а також $\alpha > 2\sqrt{\beta}$, отже, згасаючі коливання осцилятора відбуваються навколо стійкого вузла на початку координат.

```

> r:=Array(1..2, [p1,p2]):
plots[display](r, font=[HELVETICA,14],
labeldirections= ["horizontal", "vertical"]);

```

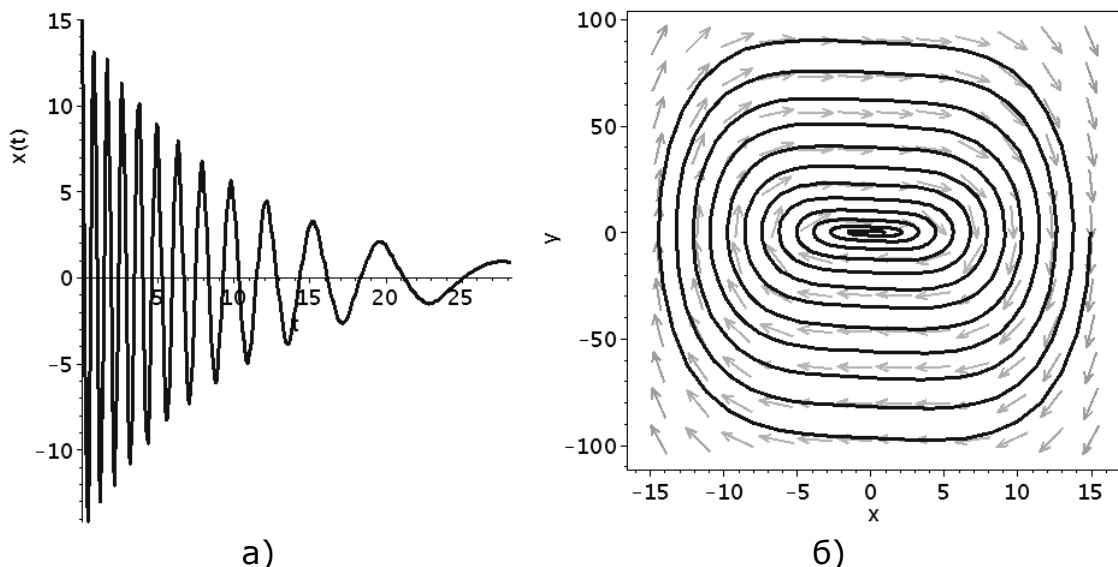


Рис. 2.5.3. Осцилограма (а) та фазовий портрет осцилятора Дуффінга (б)

Зверніть увагу: період, отже, й частота, згасаючих коливань явно залежать від амплітуди, іншими словами коливання осциля-

тора Дуффінга не є ізохронними. Фазовий портрет свідчить про відмінність коливань від гармонічних.

1.2. Система рівнянь та аттрактор Лоренца

Система Лоренца була побудована як модель шару рідини, який підігрівався знизу. Втім, зараз нас цікавитиме не її фізична інтерпретація, а математичні деталі поведінки.

```
> restart: with(plots): with(DEtools):
> lor:=diff(x(t),t)=sigma*(y(t)-x(t)),
diff(y(t),t)=x(t)*(r-z(t))-y(t),
diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t);
```

$$\begin{aligned} \text{lor} := \dot{x}(t) &= \sigma (y(t) - x(t)), \dot{y}(t) = x(t) (r - z(t)) - y(t), \dot{z}(t) \\ &= x(t) y(t) - b z(t) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Оберемо конкретні значення для коефіцієнтів системи, а також визначимо початкові умови:

```
> lor1:=eval(lor, [sigma=10, b=8/3, r=27]);
ic1:=x(0)=-3/10, y(0)=-1/10, z(0)=1/2;
```

$$\begin{aligned} \text{lor1} := \dot{x}(t) &= 10 y(t) - 10 x(t), \dot{y}(t) = x(t) (27 - z(t)) - y(t), \dot{z}(t) \\ &= x(t) y(t) - \frac{8 z(t)}{3} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

$$\text{ic1} := x(0) = -\frac{3}{10}, y(0) = -\frac{1}{10}, z(0) = \frac{1}{2}.$$

Вирішимо систему рівнянь Лоренца числовим методом:

```
> ans1:=dsolve([lor1,ic1], [x(t),y(t),z(t)],
type=numeric, method=rkf45, output=listprocedure);
```

$$\begin{aligned} \text{ans1} := [t = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, x(t) = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, y(t) = \\ \text{proc}(t) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

...

end proc, z(t) = proc(t) ... end proc]

Отримаємо осцилограми шуканих функцій:

```
> xt:=eval(x(t), ans1);
yt:=eval(y(t), ans1);
zt:=eval(z(t), ans1);
```

$$\begin{aligned} xt &:= \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, \\ yt &:= \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, \\ zt &:= \text{proc}(t) \dots \text{end proc}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Зобразимо отримані осцилограми графічно (розрахунки потребують певного часу).

```
> st:=time():
p1:=plot(xt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3, color=navy,
gridlines=true, tickmarks=[5,8], title=`Рис. 4а.
Осцилограма x(t)`):
p2:=plot(yt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3, color=red,
gridlines=true, tickmarks=[5,8], title=`Рис. 4б.
```

```

Осцилограма  $y(t)$  `):
p3:=plot(zt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3,
color=maroon, gridlines=true, tickmarks=[5,8],
title=`Рис. 4в. Осцилограма  $z(t)$ `):
tp:=time()-st;

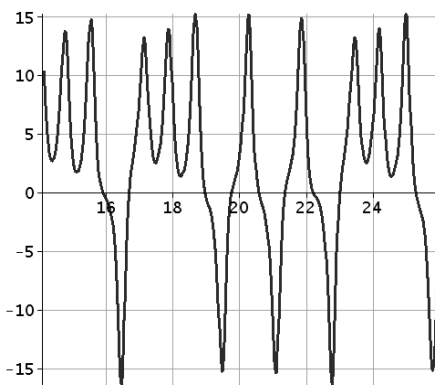
```

$$tp := 2.449, \quad (2.5.10)$$

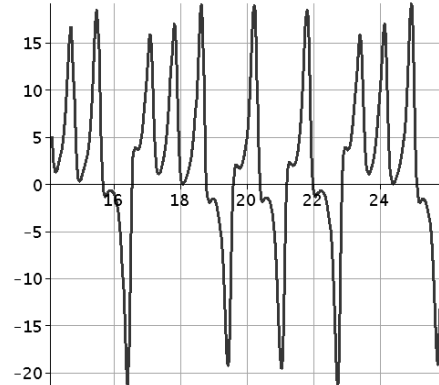
```

> A:=Array(1..3, [p1,p2,p3]):
display(A, font=[HELVETICA,14]);

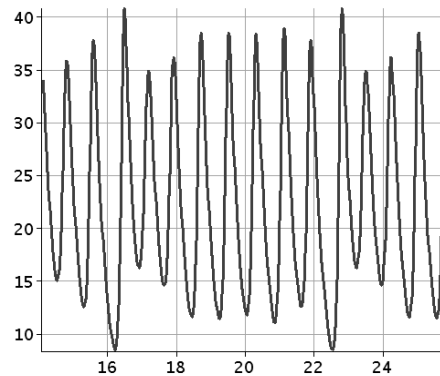
```



а)



б)



в)

Рис. 2.5.4. Осцилограми функцій:

а) $x(t)$, б) $y(t)$, в) $z(t)$

Як видно з рис. 2.5.4, осцилограми є негармонічними і з виразно хаотичними складовими, тобто не періодичні.

Зобразимо фазовий портрет системи. Якщо розглядати траєкторію, то видно, що вона є нерегулярною кривою, яка тяжіє до обмеженої області фазового простору, яку власне і називають **аттрактором Лоренца**. Траєкторія є блукаючою, причому вона робить один виток праворуч, потім декілька витків ліворуч, знов праворуч і так далі.

```

> G:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-55,65,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],

```

```
labelfont=[HELVETICA,14], caption=`Рис. 5. Фазовий
портрет системи`):
display(G, labeldirections=[horizontal, horizontal,
horizontal]);
```

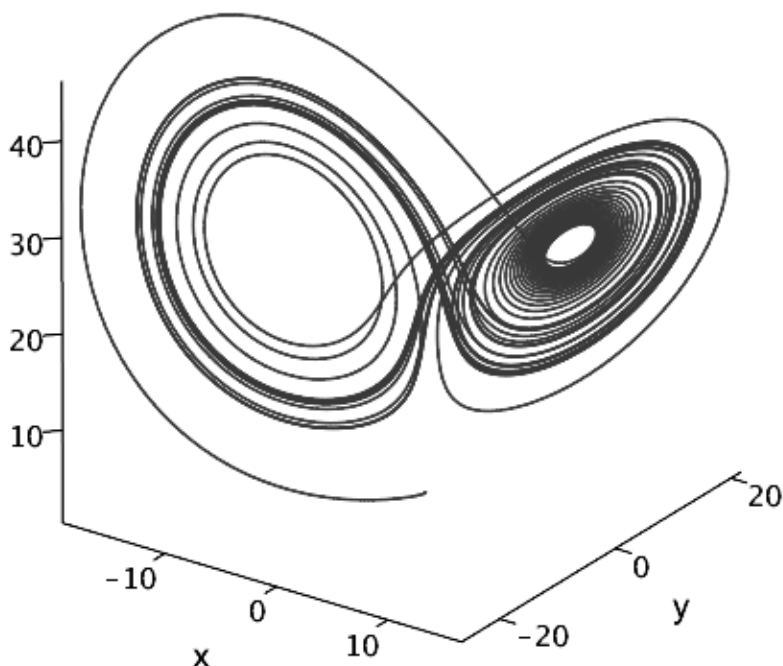


Рис. 2.5.5. Фазовий портрет системи

```
> g1:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-90,0,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],
labelfont=[HELVETICA,14], caption=`Рис. 6а. Проекція
аттрактора Лоренца \n на площину (x,y)`):
g2:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[0,90,0], axes=FRAME, font=[HELVETICA,12],
tickmarks=[4,4,5], labelfont=[HELVETICA,14],
caption=`Рис. 6б. Проекція аттрактора Лоренца \n на
площину (z,y)`):
g3:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-90,90,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],
labelfont=[HELVETICA,14], caption=`Рис. 6в. Проекція
аттрактора Лоренца \n на площину (z,x)`):
display(Array(1..3, [g1,g2,g3]));
```

Проекції аттрактора Лоренца на площини тривимірного фазового простору є нерегулярними орбітами навколо нестійких нерухомих точок потоку. Хаотизація коливань у системі Лоренца – явне свідчення її нелінійності.

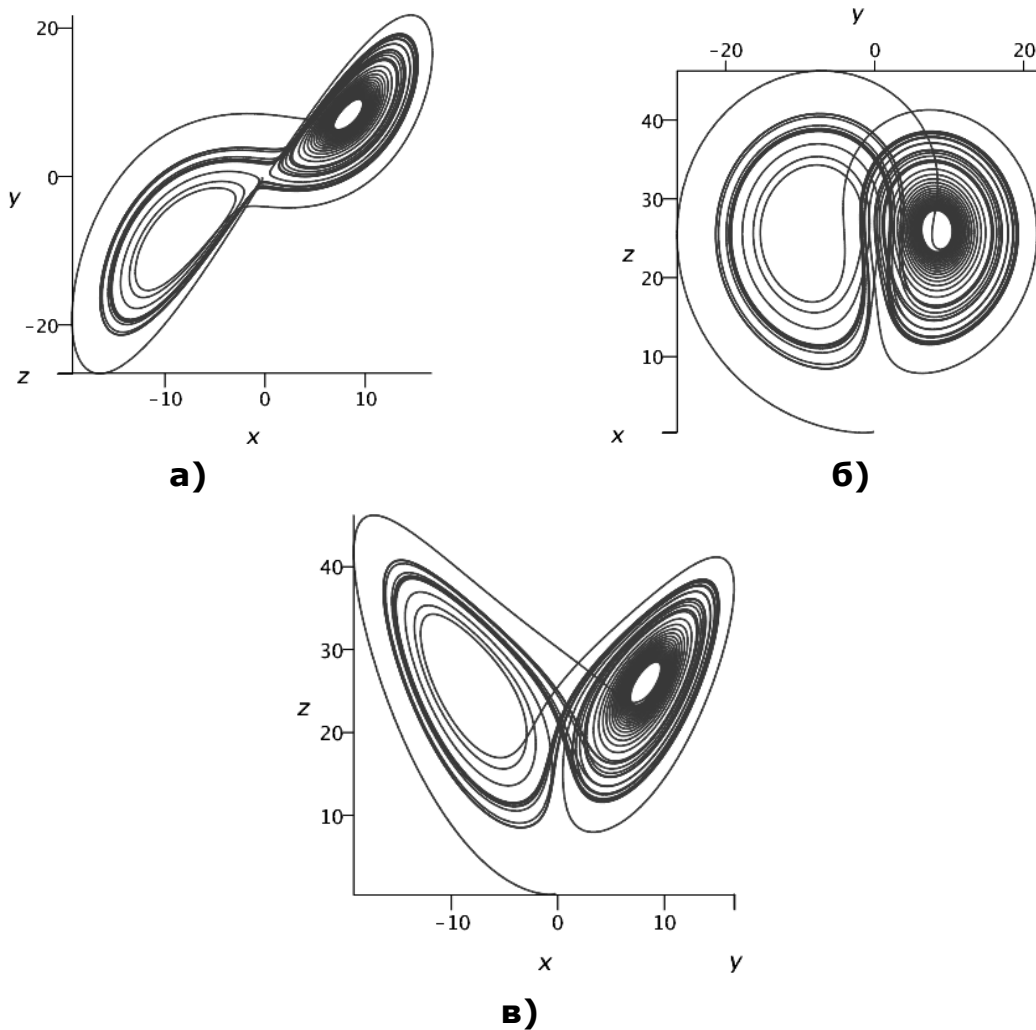


Рис. 2.5.6. Проекція аттрактора Лоренца на площини:
а) (x, y) , б) (z, y) , в) (z, x)

2 Нелінійні та відокремлені хвилі

2.1. Лінійні та нелінійні хвилі

Хвилею прийнято називати процес розповсюдження певного збудження, наприклад, коливання, від однієї точки простору до іншої. Механізм розповсюдження хвилі може бути різноманітним. Наприклад, електромагнітні хвилі здатні передаватися навіть у вакуумі, оскільки змінне електричне поле породжує змінне магнітне і навпаки, і для таких процесів навіть не потрібна участь середовища. Просте хвильове рівняння, яке описує розповсюдження хвиль різної природи, має вигляд [18]:

```
> restart;
> weq:=diff(u(x,t), t$2) = c^2*diff(u(x,t), x$2);
```

$$weq := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right), \quad (2.5.11)$$

Загальним рішенням такого рівняння є дві хвилі, які розповсюджуються в протилежних напрямках з однаковою за величиною, але протилежною за напрямом постійною швидкістю (c).

| > sol:=pdsolve(weq);

$$sol := u(x, t) = _F1(ct + x) + _F2(ct - x), \quad (2.5.12)$$

Рівняння (2.5.11) має одну надзвичайно важливу особливість: якщо взяти два довільних рішення цього рівняння (u_1, u_2), то будь-яка лінійна композиція цих двох рішень ($\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$) також є рішенням хвильового рівняння. Цей принцип суперпозиції рішень віддзеркалює лінійність рівняння (2.5.11) та лінійність його рішень – хвиль (2.5.12). Зокрема швидкість лінійної хвилі (2.5.12), не залежить від її амплітуди або координат: $c = const$.

Якщо розглядати хвилі на воді, то вони описуються диференціальними рівняннями гідродинаміки, які, як відомо, є не лінійними. Отже, в загальному випадку такі хвилі є нелінійними хвилями, зокрема такими, що не підкоряються принципу суперпозиції. Не завжди лінійними є також звукові хвилі. Наприклад, ще Дж. Рассел, перший спостерігач відокремленої хвилі на воді – солітону Рассела, відмічав, що потужний звук гарматного пострілу добігає до спостерігача швидше, ніж звуки команди на цей постріл. Це пояснюється тим, що швидкість звуку є залежною від його амплітуди і більш потужний звук з більшою амплітудою рухається швидше звуку з меншою амплітудою.

2.2. Рівняння Кортевега-де-Вріза: кіноїдальні хвилі та відокремлені хвилі – солітони

У 1895 році два датських вчених Дідерик Йоганнес Кортевег та Густав де-Вріз розглянули рівняння, якому підкоряються хвилі на воді, за умови відсутності вихрів та незмінної густини рідини [2]. Рівняння Кортевега-де-Вріза описує випадок відносно довгих хвиль на відносно неглибокій воді:

$$\frac{a}{h} \ll 1, \quad \frac{h}{\lambda} \ll 1,$$

де a , λ – амплітуда та довжина хвилі, тоді як h – глибина басейну.

Рівняння, отримане Кортевегом-де-Врізом має вигляд нелінійного диференціального рівняння третього порядку:

| > KdV:= diff(u(x,t),t) + 6*u(x,t)*diff(u(x,t),x) +
diff(u(x,t),t\$3)=0;

$$KdV := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + 6 u(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) = 0. \quad (2.5.13)$$

Нелінійність рівняння (2.5.13) зумовлена другим квадратичним по шуканій функції доданком. Рівняння (2.5.13) має відоме хвильове рішення, яке має назву **кіноїдальних хвиль** і задається спеціальною функцією – еліптичною функцією Якобі [19]. За деяких умов періодичне рішення типу кіноїдальних хвиль може

переходити (перетворюватися) у відокремлену хвилю – **солітон**. Отримаємо обидва ці рішення, які є рішеннями типу біжучих хвиль, спеціальною командою програмного пакету PDEtools [TWSolutions].

```
> sol:=PDEtools[TWSolutions](KdV, singsol=false,
functions=[sech, JacobiSN]);
```

$$sol := \left\{ u(x, t) = \frac{2 _C3^3 \operatorname{sech}(_C2 x + _C3 t + _C1)^2}{_C2} - \frac{_C3 (4 _C3^2 + 1)}{6 _C2} \right\}, \left\{ u(x, t) = \frac{2 _C1^2 _C4^3 \operatorname{sn}(_C3 x + _C4 t + _C2 _C1)^2}{_C3} + \frac{_C4 (4 _C1^2 _C4^2 + 4 _C4^2 - 1)}{6 _C3} \right\} \quad (2.5.14)$$

Та перевіримо їх на валідність:

```
> pdetest(sol[1], KdV);
pdetest(sol[2], KdV);
```

$$\begin{matrix} 0, \\ 0. \end{matrix} \quad (2.5.15)$$

Розглянемо перш за все друге рішення, яке вочевидь описує кіноїдальні хвилі, оскільки містить еліптичну функцію Якобі – $\operatorname{sn}(z)$. Покладемо константу $_C2=0$ і позначимо аргумент функції Якобі через $_C3x + _C4t = \xi$, тоді:

```
> cw:=factor(-2*\_C1^2*\_C4^3*JacobiSN(xi,
\_C1)^2/\_C3+\_C4*(4*\_C1^2*\_C4^2+4*\_C4^2-1)/(6*\_C3));
```

$$cw := -\frac{1}{6 _C3} (_C4 (12 _C1^2 _C4^2 \operatorname{sn}(\xi | _C1)^2 - 4 _C1^2 _C4^2 - 4 _C4^2 + 1)) \quad (2.5.16)$$

Далі можемо покласти константи $_C4=_C3=1$, оскільки їх значення визначають лише величину амплітуди хвилі, для нас зараз неважливу:

```
> cw1:=unapply(eval(cw, [_C1=k, _C3=1, _C4=sqrt(2)]),
xi, k);
```

$$cw1 := (\xi, k) \mapsto -\frac{\sqrt{2} (24 k^2 \operatorname{sn}(\xi | k)^2 - 8 k^2 - 7)}{6} \quad (2.5.17)$$

```
> g1:=plot(cw1(xi,1.5), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6а. k=1.5`, titlefont=[Arial,14]):
```

```
g2:=plot(cw1(xi,1.1), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6б. k=1.1`, titlefont=[Arial,14]):
g3:=plot(cw1(xi,1.001), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6в. k=1.001`, titlefont=[Arial,14]):
g4:=plot(cw1(xi,1), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6г. k=1, відокремлена хвиля`,
titlefont=[Arial,14]):
> B:=Array(1..4, [g1,g2,g3,g4]):
plots[display](B, font=[Arial,14]);
```

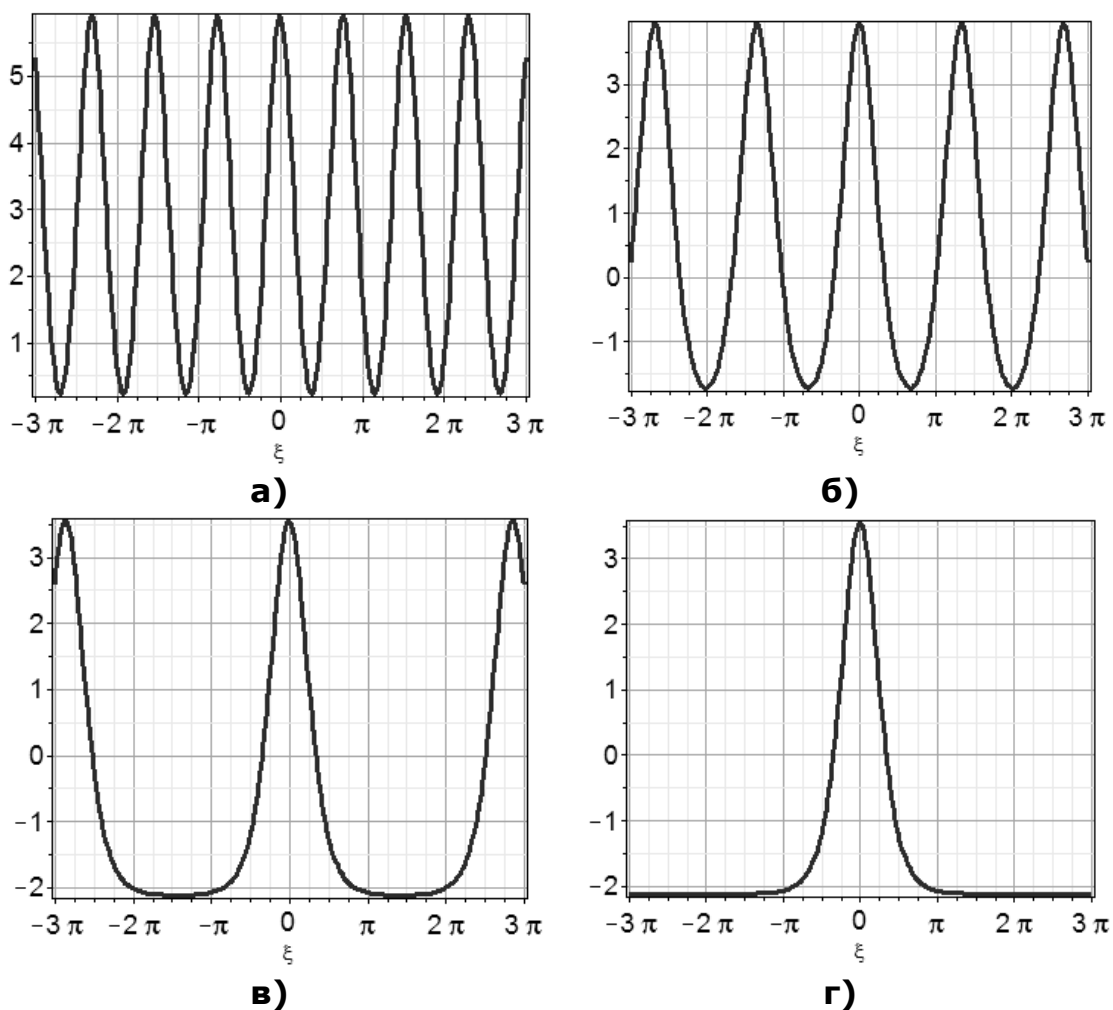


Рис. 2.5.7. Графіки кіноїдальних хвиль з періодами, залежними від параметра $_C1=k$: а) $k=1.5$; б) $k=1.1$; в) $k=1.001$; г) $k=1$ (відокремлена хвиля)

З графіків на рис. 2.5.7 можна побачити як поступово кіноїдальна хвиля перетворюється у відокремлену хвилю за умови $k \rightarrow 1$ (рис. 2.5.7.г).



Рис. 2.5.8. Бомбардувальники армії США недалеко від узбережжя Панами (фотографія 1933 року) летять над кіноїдальними хвилями на мілкій воді

Різкі гребені та дуже плоскі спади характерні саме для кіноїдальних хвиль (див. рис. 2.5.7.в). Тепер можна зобразити і перше рішення. Обираючи константи $_C1=0$, $_C2=_C3=1$, $_C2x + _C3t = \xi$, маємо:

$$sw1 := 2 \operatorname{sech}(\xi)^2 - \frac{5}{6}. \quad (2.5.18)$$

```
> plot(sw1, xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy,
title='Рис. 7. Відокремлена хвиля – солітон',
titlefont=[Arial,14], font=[Arial,14]);
```

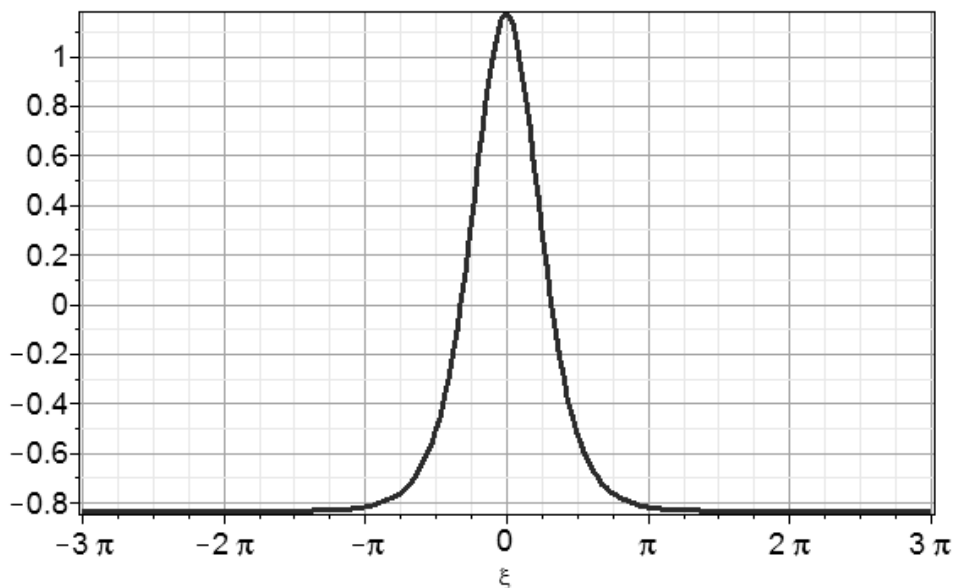


Рис. 2.5.9. Відокремлена хвиля – солітон

Знаходячи межу функції (2.5.17) за умови, що модуль еліптичної функції Якобі прямує до одиниці:

```
| > sol_1:=simplify(limit(cw1(xi,k), k=1));
```

$$sol_1 := -\frac{\sqrt{2} (3 \cosh(\xi)^2 - 8)}{2 \cosh(\xi)^2}. \quad (2.5.19)$$

Легко переконатися в тому, що вираз (2.5.19) можна представити у формі лінійної функції від квадрату гіперболічного секанса, як і вираз (2.5.18).

```
| > sol_2:=4*sqrt(2)*sech(xi)^2-3/sqrt(2);
```

$$sol_2 := 4\sqrt{2} \operatorname{sech}(\xi)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad (2.5.20)$$

```
| > simplify(sol_1-sol_2);
```

$$0. \quad (2.5.21)$$

Порівнюючи вирази (2.5.20) та (2.5.18), неважко переконатися, що вираз (2.5.18) є масштабованим та зсунутим виразом (2.2.20). Отже, солітонне рішення (2.5.18) дійсно можна отримати як граничний випадок періодичної кіноїдальної хвилі за умови, що її період не обмежено зростає. Окрім того, візуально порівнюючи форму кіноїдальної хвилі на рис. 2.5.7.г та солітону на рис. 2.5.9, можна переконатися в їх ідентичності.

Практикум 6

Математичні моделі технологічних та економічних процесів

1. Моделі технологічних процесів.
 - 1.1. Модель технологічного процесу перетікання рідини між двома резервуарами.
 - 1.2. Кабель між двома мачтами (опорами).
2. Математична модель для балансу попиту та пропозиції.

1 Моделі технологічних процесів

Комп'ютерне моделювання застосовують для оптимізації, проектування та дослідження реальних технологічних процесів або систем. У цьому процесі можна вирізнити декілька послідовних етапів (рис. 2.6.1).



Рис. 2.6.1. Схема організації математичного моделювання технологічного процесу

Власне, **етапи** моделювання технологічних процесів:

- 1) визначення об'єкта – встановлення меж, обмежень та індикаторів ефективності функціонування об'єкта;
- 2) формалізація об'єкта (побудова моделі) – перехід від реального об'єкта до деякої логічної схеми (абстрагування);
- 3) підготовка даних – відбір даних для побудови моделі та їх представлення у відповідній формі;
- 4) розробка моделюючого алгоритму та комп'ютерної програми;
- 5) оцінка адекватності моделі;
- 6) стратегічне планування – планування обчислювального експерименту;
- 7) тактичне планування – визначення деталей проведення експериментів;
- 8) проведення комп'ютерних експериментів;
- 9) інтерпретація – отримання висновків із результатів експериментів;
- 10) реалізація – практичне втілення результатів моделювання;
- 11) документування – реєстрація ходу втілення процесу та його результатів, а також ходу створення та використання моделі.

1.1. Модель технологічного процесу перетікання рідини між двома резервуарами

Змоделюємо технологічний процес перетікання рідини від одного великого резервуару до іншого через сполучний трубопровід під дією гравітаційної сили [20]. Потік рідини гальмується тертям у трубі, а рівень рідини в кожному із резервуарів коливається навколо деякого рівноважного рівня. Динаміка системи (рис. 2.6.2) повинна описуватися диференціальними рівняннями, які вирішуватимуться числовим способом.

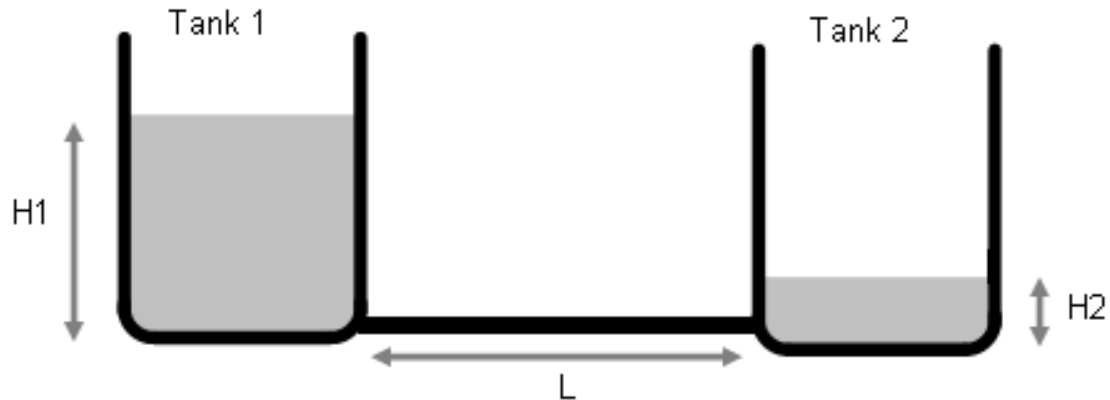


Рис. 2.6.2. Схема технологічного процесу та відповідні позначення:
H1, H2, L – рівні рідини та довжина труби [20]

> restart:

Визначимо фізичні параметри процесу:

```
> A1:=1.0: A2:=0.5: # Площі основ резервуарів
Dia:=0.3: L:=100: e:=1e-2: # Діаметр, довжина та
відносна шорсткість стінок труби
rho:=1e3: mu:=1e-3: # Густина та динамічна
в'язкість рідини
g:=9.81: # Прискорення вільного падіння
```

Подальша процедура задає коефіцієнт тертя як функцію числа Рейнольдса для потоку рідини. Це число визначає режим течії рідини: до критичного значення числа Рейнольдса режим можна вважати ламінарним, після того як число Рейнольдса стає вище критичного – потік стає турбулентним. Коефіцієнт тертя відповідно змінюється з режимом течії і розраховується за різними формулами. Припускається, що критичне значення числа Рейнольдса для досліджуваної рідини $Re_y = 2300$. Параметром процедури є об'ємний

потік рідини $Q(t) = \frac{dV}{dt}$.

```
> fric:= proc(Q) local Rey;
if not type(Q,numeric) then 'procname'(Q)
else
    Rey:=(4*Q*rho)/(mu*evalf(Pi)*Dia):
    if Rey<2300 then
        if Rey<>0 then 64/(Rey)
        else 0
        end if
    else
        1.325/(ln(e/(3.7*Dia)+5.74/(Rey^(0.9))))^(2))
    end if
end if
end proc;
```

```

fric := proc(Q)
  local Rey;
  if not type(Q, numeric) then
    'procname'(Q)
  else
    Rey := 4 * Q * rho / (mu * evalf(Pi) * Dia);
    if Rey < 2300 then
      if Rey < > 0 then 64 / Rey else 0 end if
    else
      1.325 / (ln(e / (3.7 * Dia) + 5.74 / Rey^0.9)^2)
    end if
  end if
end proc

```

(2.6.1)

Швидкості зміни рівнів рідини в обох резервуарах можна описати диференціальними рівняннями такого вигляду;

$$\begin{aligned}
 & \text{eq1} := \text{diff}(H1(t), t) = -Q(t) / A1; \\
 & \text{eq2} := \text{diff}(H2(t), t) = Q(t) / A2; \\
 & \text{eq1} := \dot{H1}(t) = -Q(t), \\
 & \text{eq2} := \dot{H2}(t) = 2.0000000000 Q(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.6.2}$$

Баланс рідини задається таким рівнянням:

$$\begin{aligned}
 & \text{eq3} := \text{diff}(Q(t), t) = \text{Pi} * \text{Dia}^2 * g * H1(t) / (4 * L) - \\
 & \quad \text{Pi} * \text{Dia}^2 * g * H2(t) / (4 * L) - \\
 & \quad 2 * \text{fric}(\text{abs}(Q(t))) * Q(t) * \text{abs}(Q(t)) / (\text{Pi} * \text{Dia}^3); \\
 & \text{eq3} := \dot{Q}(t) = 0.002207250000 \pi H1(t) - 0.002207250000 \pi H2(t) \\
 & \quad - \frac{74.07407408 \text{fric}(|Q(t)|) Q(t) |Q(t)|}{\pi}
 \end{aligned}
 \tag{2.6.3}$$

Запишемо також початкові умови для задачі:

$$\begin{aligned}
 & \text{ic} := Q(0) = 0, H1(0) = 1.5, H2(0) = 1.2; \\
 & \text{ic} := Q(0) = 0, H1(0) = 1.5, H2(0) = 1.2.
 \end{aligned}
 \tag{2.6.4}$$

Тепер можна вирішити модельну систему рівнянь з урахуванням початкових умов числовим методом:

$$\begin{aligned}
 & \text{res} := \text{dsolve}(\{\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}, \text{ic}\}, \{H1(t), H2(t), \\
 & \quad Q(t)\}, \text{numeric}, \text{output}=\text{listprocedure}, \text{known} = \text{fric}); \\
 & \text{res} := [t = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, H1(t) = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, H2(t) \\
 & \quad = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}, Q(t) = \text{proc}(t) \dots \text{end proc}]
 \end{aligned}
 \tag{2.6.5}$$

Випишемо окремі результати для шуканих функцій:

$$\begin{aligned}
 & \text{H1t} := \text{eval}(H1(t), \text{res}); \\
 & \text{H2t} := \text{eval}(H2(t), \text{res}); \\
 & \text{Qt} := \text{eval}(Q(t), \text{res}); \\
 & H1t := \text{proc}(t) \dots \text{end proc},
 \end{aligned}
 \tag{2.6.6}$$

```
H2t := proc(t) ... end proc ,
Qt := proc(t) ... end proc .
```

Побудуємо графіки згасаючих коливань для рівнів в обох резервуарах.

```
> plot([H1t, H2t], 0 .. 400, color=[blue,red],
thickness=3, legend=["Рівень в резервуарі №1", "Рівень
в резервуарі №2"], legendstyle=[font=[HELVETICA, 12]],
labels=["Час", "Рівні рідини"],
labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[HELVETICA, 14], gridlines=true, axes=boxed,
font=[Arial,14], title=`Рис. 1. Згасаючі коливання
рівнів у резервуарах`);
```

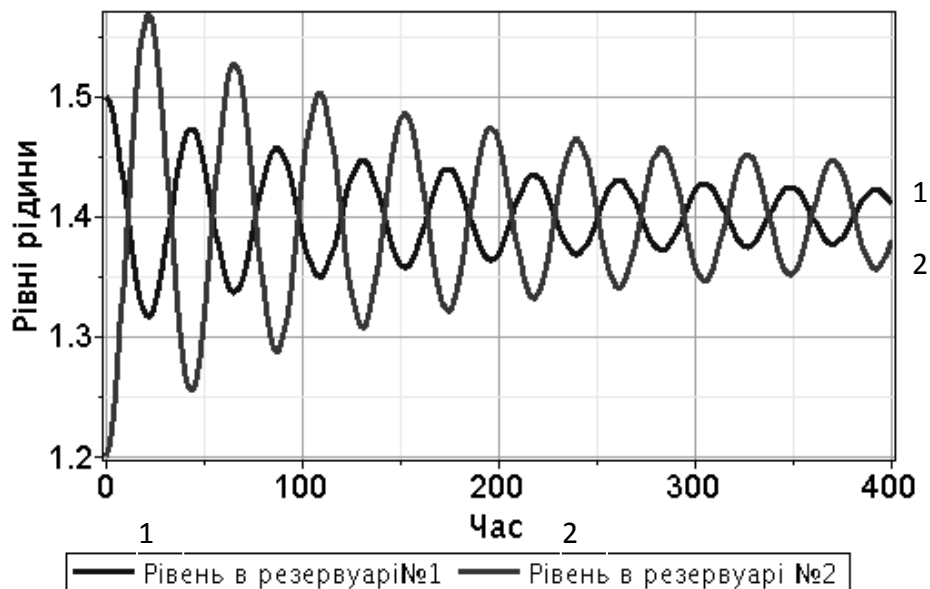


Рис. 2.6.3. Згасаючі коливання рівнів у резервуарах

Як видно з рис. 2.6.3, рівні рідини в резервуарах коливаються навколо асимптотичного спільного рівня 1.4, який встановлюється в кінці процесу протікання. Зауважимо, що коливання рівнів у різних резервуарах є протифазними один до одного.

```
> plot([H1t, Qt, .. 400], labels=["Рівень рідини в
резервуарі №1", "Об'ємний потік"],
labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[HELVETICA, 14], thickness=3,
font=[Arial,14], tickmarks=[4,5], color=red,
numpoints=1000, axes=boxed, gridlines=true,
title=`Рис. 2. Залежність потоку \n від рівня рідини в
резервуарі`);
```

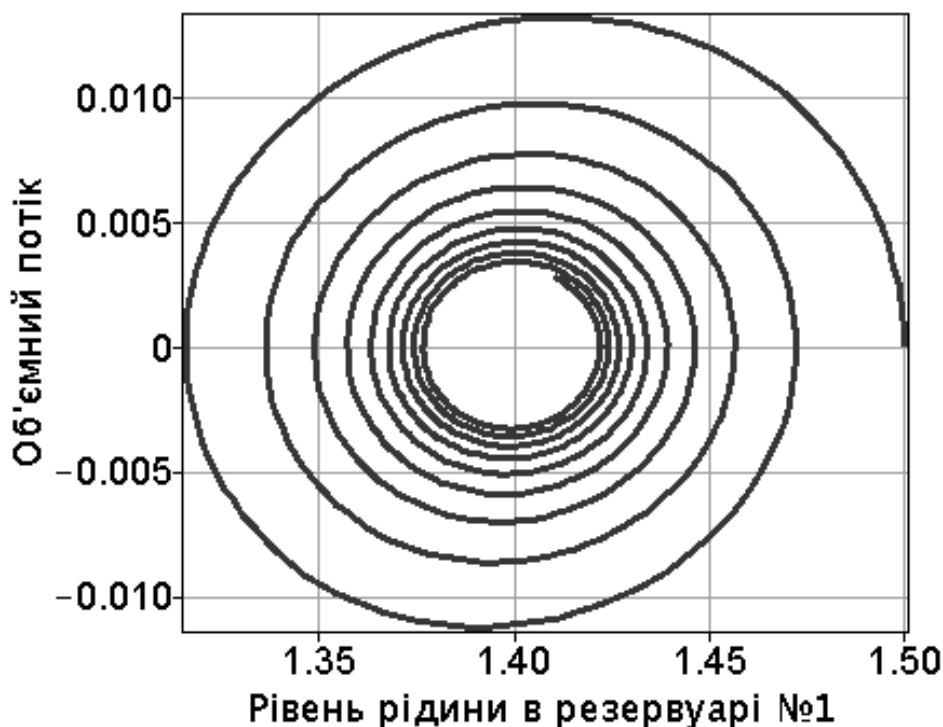


Рис. 2.6.4. Залежність потоку від рівня рідини в резервуарі

Інший графік показує фазовий портрет системи (рис. 2.6.4), тобто залежність об'ємного потоку від рівня рідини в першому резервуарі. Як видно з графіку, величина потоку коливається навколо нульового значення, а особливою точкою є точка $(0, 1.4)$ – точка вирівнювання рівнів рідини в резервуарах, а якій перетікання припиняється.

1.2. Кабель поміж двома мачтами (опорами)

Розглянемо процес налаштування кабелю поміж двома опорами (мачтами), приблизно так, як це показано на рис. 2.6.5.

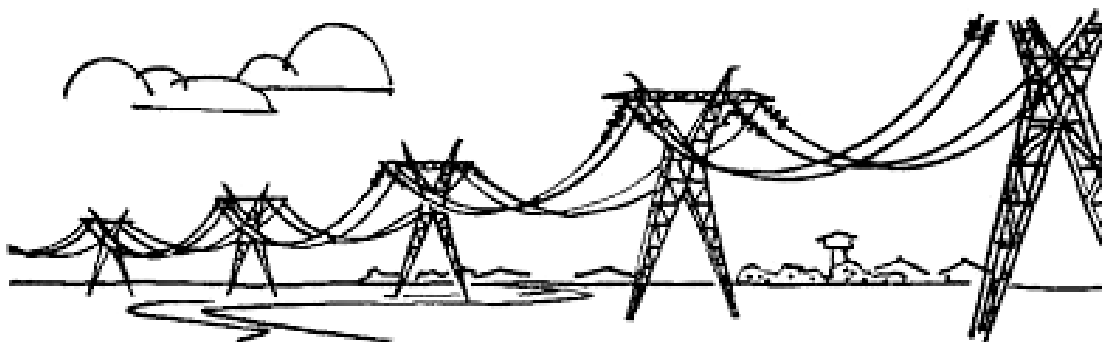


Рис. 2.6.5. Провисання електрокабелю поміж мачтами-опорами

Диференціальне рівняння, яким визначається геометрична форма кабелю закріпленого у двох точках, і який перебуває в однорідному полі сил тяжіння, має такий вигляд [21]:

```
> restart;
> deq:=diff(y(x),x$2)-a*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2)=0;
```

$$deq := y''(x) - a\sqrt{1 + y'(x)^2} = 0, \quad (2.6.7)$$

де $y(x)$ – шукана функція, яка задає профіль кабелю, отже й пот-

рібну його довжину, параметр $a = \frac{q(x,y)}{H}$ – враховує відношення

розрахованих на одиницю довжини кабелю компонентів навантажень, до горизонтальних сил, які діють на опори, зокрема параметр $q(x,y)$ водночас враховує вагу кабелю, вітрове навантаження, навантаження від налипання снігу, або льоду тощо. Зі зміною горизонтальних сил H змінюється також параметр a , отже, й довжина кабелю. Відстань між опорами, з одного боку, бажано збільшувати, тоді їх потрібно менше, що позитивно впливає на економічність, але з іншого боку провисання кабелю може стати надто великим, що змушуватиме робити такі опори вищими і, навпаки, погіршувати економічні показники.

Розглянемо для початку кабель поміж різновисокими опорами, що врахуємо у початкових умовах рівняння (2.6.7).

```
> ic1:=y(0)=1,y(1)=2; # Довжина прольоту прийнята
    рівною одиниці (L=1)
ic1 := y(0) = 1, y(1) = 2. (2.6.8)
```

Вирішимо рівняння (2.6.7) з початковими умовами (2.6.8):

```
> ans1:=dsolve({deq,ic1}, y(x));
```

$ans1 := y(x)$

$$= \frac{1}{a} \left(\cosh \left(a x + \ln \left(\text{RootOf} \left(\left((e^a)^2 - e^a \right) _Z^2 - 2 a e^a _Z - e^a + 1 \right) \right) \right) + \frac{1}{2 a (e^a - 1)} \left(- (e^a)^2 \text{RootOf} \left(\left((e^a)^2 - e^a \right) _Z^2 - 2 a e^a _Z - e^a + 1 \right) + 4 e^a a + \text{RootOf} \left(\left((e^a)^2 - e^a \right) _Z^2 - 2 a e^a _Z - e^a + 1 \right) - 2 a \right) \right). \quad (2.6.9)$$

Отримане рішення виглядає не дуже прозорим та зручним для аналізу, тому варто його спростити та конвертувати у функцію двох змінних:

```
> assume(a>0):
Y:=unapply(convert(rhs(ans1), radical), x, a);
```

$$\begin{aligned}
Y &:= (x, a) \\
&\mapsto \frac{1}{a} \left(\cosh \left(a x \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln \left(\frac{e^a a + \sqrt{(e^a)^2 a^2 + (e^a)^3 - 2 (e^a)^2 + e^a}}{e^a (e^a - 1)} \right) \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2 a (e^a - 1)} \left(\right. \\
&\quad \left. - \frac{e^a (e^a a + \sqrt{(e^a)^2 a^2 + (e^a)^3 - 2 (e^a)^2 + e^a})}{e^a - 1} + 4 e^a a \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e^a a + \sqrt{(e^a)^2 a^2 + (e^a)^3 - 2 (e^a)^2 + e^a}}{e^a (e^a - 1)} - 2 a \right) \right) . \quad (2.6.10)
\end{aligned}$$

Функція (2.6.10) все ще виглядає громіздкою, втім для конкретних значень параметра – вона значно спрощується:

```

| > evalf(Y(x, 1.5));
0.66666666667 cosh(1.5 x + 0.06780225218) + 0.3318003645 , (2.6.11)

```

і являє собою так звану ланцюгову лінію, яка задається гіперболічним косинусом. Ланцюгові лінії використовуються в розрахунках, пов'язаних з провисанням дротів, ланцюгів, транспортерних стрічок тощо. Форму кривої провисання вперше розглядав Г. Галілей (1638), який вважав її параболою. Справжня форма кривої знайдена Г. Лейбніцем, Я. Бернуллі, Х. Гюйгенсом, останній і запропонував термін «Ланцюгова лінія» (1690).

Знайдемо потрібну довжину кабелю, яка враховуватиме його провисання.

```

| > st:=time():
| assume(a>0):
| L_cab:=int(sqrt(1+(diff(Y(x,a), x))^2), x=0..1):
| time_int:=time()-st;
time_int := 33.087 . (2.6.12)

```

Як видно з (2.6.12), громіздкість виразу (2.6.10) потребує значного часу інтегрування.

```

| > plot(L_cab, a=0.01..2.5, 1.4..1.65, thickness=3,
| axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,14],
| labels=["a", "Відносна довжина кабелю"],
| labeldirections=[horizontal, vertical],
| labelfont=[Arial,14], title=`Рис. 3. Потрібна відносна
| довжина кабелю`);

```

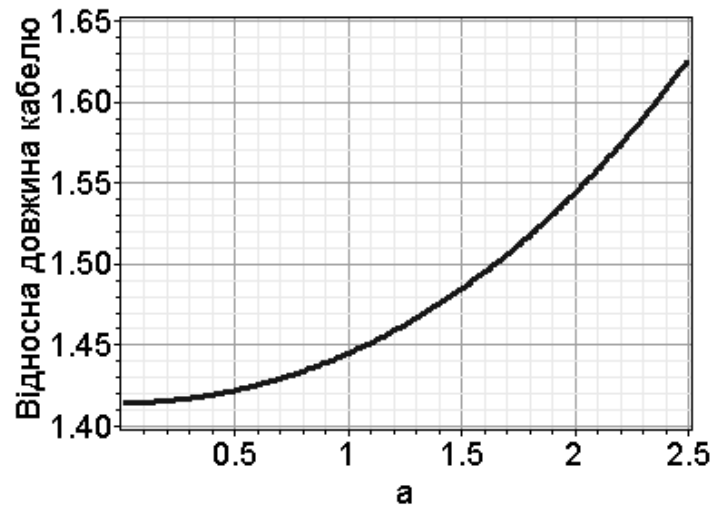


Рис. 2.6.6. Потрібна відносна довжина кабелю

Відносна довжина кабелю задається в одиницях довжини прольоту: наприклад, при значенні параметра $a=1$ довжина кабелю повинна бути приблизно на 45 % більшою, ніж довжина прольоту.

```
> plot([Y(x,1), Y(x,1.5), Y(x,2), Y(x,2.5)], x=0..1,
0.6..2, thickness=3, axes=boxed, gridlines=true,
font=[Arial,14], legend=["a=1","l=1.5","a=2","a=3"],
legendstyle=[font=[HELVETICA, 12]], col-
or=[violet,navy,khaki,red], title='Рис. 4.
Профілі кабелю між \n різновисокими опорами');
```

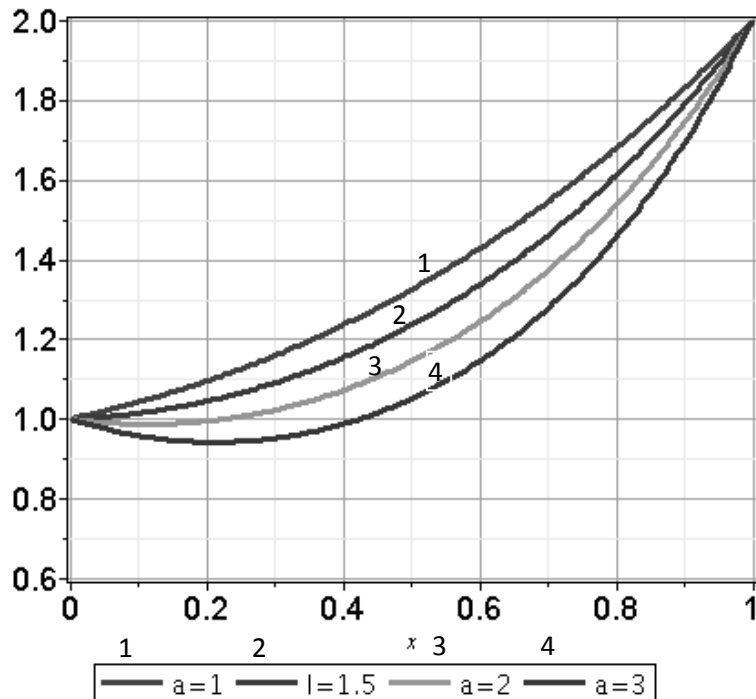


Рис. 2.6.7. Профілі кабелю між різновисокими опорами

Розглянемо тепер практично важливий випадок симетричних опор рівної висоти.

$$\begin{aligned} & \text{> ic2:=y(0)=1, y(1)=1;} \\ & \text{ic2 := y(0) = 1, y(1) = 1,} \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

$$\text{> ans2:=dsolve(\{deq,ic2\}, y(x));}$$

$$\begin{aligned} \text{ans2 := y(x) = } & \frac{\cosh\left(x a + \ln\left(\text{RootOf}\left(e^a Z^2 - 1\right)\right)\right)}{a} \\ & + \frac{-\text{RootOf}\left(e^a Z^2 - 1\right) e^a - \text{RootOf}\left(e^a Z^2 - 1\right) + 2 a}{2 a}, \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

$$\text{> u:=unapply(convert(rhs(ans2), radical), x, a);}$$

$$u := (x, a) \mapsto \frac{\cosh\left(x a - \frac{1}{2} a\right)}{a} + \frac{-\sqrt{\frac{1}{e^a}} e^a - \sqrt{\frac{1}{e^a}} + 2 a}{2 a}, \quad (2.6.15)$$

$$\text{> st2:=time();}$$

$$\text{assume(a>0);}$$

$$\text{L_cab2:=int(sqrt(1+(diff(u(x,a), x))^2), x=0..1);}$$

$$\text{time_int2:=time()-st2;}$$

$$L_{cab2} := \frac{e^{-\frac{a}{2}} (e^a - 1)}{a}, \quad (2.6.16)$$

$$\text{time_int2 := 0.156.}$$

$$\begin{aligned} & \text{> plot(L_cab2, a=0.01..3, thickness=3, axes=boxed,} \\ & \text{gridlines=true, font=[Arial,14], labels=["a",} \\ & \text{"Відносна довжина кабелю"], labeldirec-} \\ & \text{tions=[horizontal, vertical], labelfont=[Arial,14],} \\ & \text{title='Рис. 5. Потрібна відносна довжина кабелю');} \end{aligned}$$

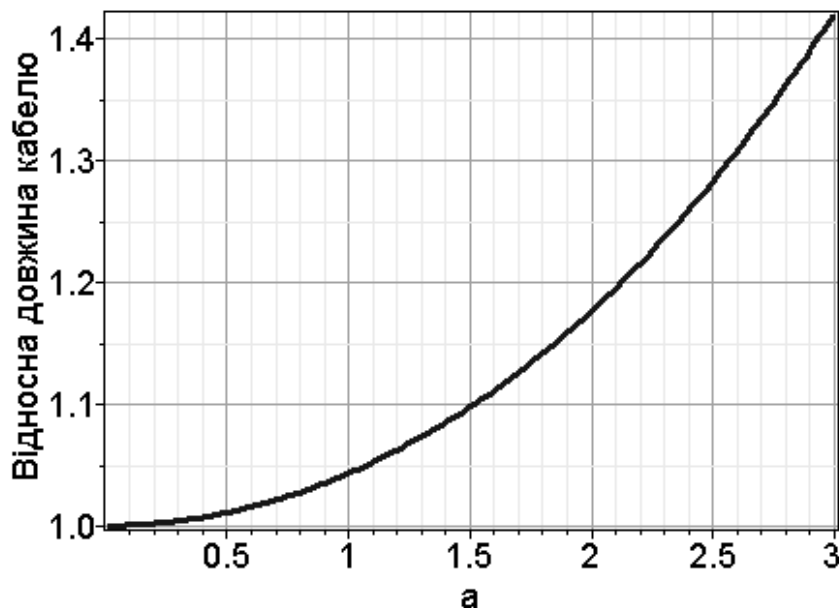


Рис. 2.6.8. Потрібна відносна довжина кабелю у випадку симетричних опор рівної висоти

```
> plot([u(x,1), u(x,1.5), u(x,2), u(x,2.5)], x=0..1,
thickness=3, axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,
14], legend=["a=1", "1=1.5", "a=2", "a=3"],
legendstyle=[font=[HELVETICA, 12]], col-
or=[violet,navy,khaki,red], title='Рис. 6.
Профілі кабелю між симетричними опорами');
```

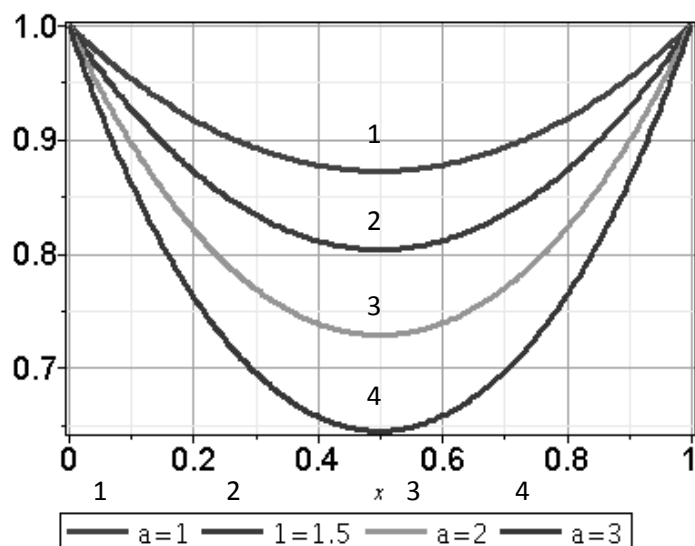


Рис. 2.6.9. Профілі кабелю між симетричними опорами

Перевернута ланцюгова лінія – ідеальна форма для арок. Однорідна арка у формі перевернутої ланцюгової лінії демонструє лише деформації стиску, але не зламу. Отже, така геометрична форма є ідеальною також для мостових прольотів.

2 Математична модель для балансу попиту та пропозиції

Розглянемо типову економічну модель формування ціни на товар в умовах балансу попиту та пропозиції [22]. Припустимо, що процеси попиту та пропозиції деякого товару визначаються такими диференціальними рівняннями:

```
> restart:
> dem:=2*diff(p(t),t,t)-diff(p(t),t)-p(t)+15;
# Попит на товар
sup:=3*diff(p(t),t,t)+diff(p(t),t)+p(t)+5;
# Пропозиція товару
```

$$\begin{aligned} dem &:= 2\ddot{p}(t) - \dot{p}(t) - p(t) + 15, \\ sup &:= 3\ddot{p}(t) + \dot{p}(t) + p(t) + 5, \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

де $p(t)$ – ціна товару, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція зміни ціни – негативна, або позитивна, залежно від того зменшується, чи зростає ціна з

часом), $\frac{d^2 p}{dx^2}$ – темп зміни ціни. Вважатимемо також, що відома стартова ціна товару, а також початкова пропозиція $sup(0) = S$.

```
| > ic:=p(0)=P;
```

$$ic := p(0) = P. \quad (2.6.18)$$

Застосуємо вимогу балансу поміж попитом та пропозицією і отримаємо диференціальне рівняння для цінових змін:

```
| > deq:=sup-dem=0;
```

$$deq := \ddot{p}(t) + 2\dot{p}(t) + 2p(t) - 10 = 0. \quad (2.6.19)$$

Тепер можна вирішити рівняння (2.6.19) з початковою умовою (2.6.18) та верифікувати отриманий розв'язок:

```
| > ans:=dsolve({deq,ic},p(t));# Розв'язок
```

$$ans := p(t) = e^{-t} \sin(t) _C2 + e^{-t} \cos(t) (P - 5) + 5. \quad (2.6.20)$$

```
| > odetest(ans,deq); # Верифікація
```

$$0. \quad (2.6.21)$$

Константу інтегрування $_C2$ визначимо таким шляхом: спочатку підставимо праву частину рішення (2.6.20) в рівняння для попиту (2.6.17):

```
| > s:=eval(sup,p(t)=rhs(ans));
```

$$s := -5 _C2 e^{-t} \cos(t) + 5 e^{-t} \sin(t) (P - 5) + 10. \quad (2.6.22)$$

А далі складемо рівняння для початкового попиту і вирішимо його відносно константи інтегрування:

```
| > eqw:=eval(s,t=0)=S;
```

```
| \_C2:=solve(eqw,\_C2);
```

$$eqw := -5 _C2 + 10 = S, \quad (2.6.23)$$

$$_C2 := -\frac{S}{5} + 2.$$

Підстановка (2.6.23) в праву частину рівняння (2.6.20) дає остаточну відповідь для ціни як функції часу та двох параметрів: стартової ціни та початкового попиту.

```
| > pt:=unapply(rhs(ans),t,P,S);
```

$$pt := (t, P, S) \mapsto e^{-t} \sin(t) \left(-\frac{S}{5} + 2 \right) + e^{-t} \cos(t) (P - 5) + 5. \quad (2.6.24)$$

З вигляду функції ціни (2.6.24) видно, що з часом ціна асимптотично прямує до збалансованого значення, незалежно від стартової ціни та початкового попиту.

```
| > p(infinity):=limit(pt(t,P,S), t=infinity);
```

$$p(\infty) := 5. \quad (2.6.25)$$

Зобразимо функцію ціни (2.6.24) залежно від часу та стартової ціни за умови фіксованої початкової пропозиції.

```
| > plot([pt(t,6,9), pt(t,8,9), pt(t,10,9), 5], t=0..5,
| 4..10,thickness=3, color=[black,blue,red,khaki],
| axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,14],
| labels=["t", "Ціна"], labeldirections=[horizontal,
| vertical], labelfont=[Arial,14],
```

```
legend=["P=6","P=8","P=10","p(infinity)"],
legendstyle=[font=[HELVETICA, 12]], title=`Рис. 7.
Залежність ціни від часу \n та стартової ціни`);
```

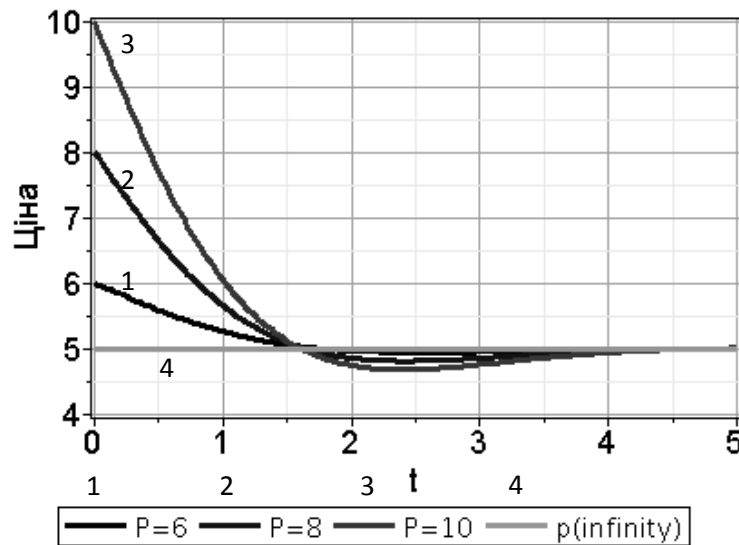


Рис. 2.6.10. Залежність ціни від часу та стартової ціни

А також залежності ціни від часу та початкового попиту за умови фіксованої стартової ціни:

```
> plot([pt(t,8,6), pt(t,8,10), pt(t,8,14), 5], t=0..5,
4..9,thickness=3, color=[black,blue,red,khaki],
axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,14],
labels=["t", "Ціна"], labeldirections=[horizontal,
vertical], labelfont=[Arial,14],
legend=["S=6","S=10","S=14","p(infinity)"],
title=`Рис. 8. Залежність ціни від часу \n та
початкової пропозиції`);
```

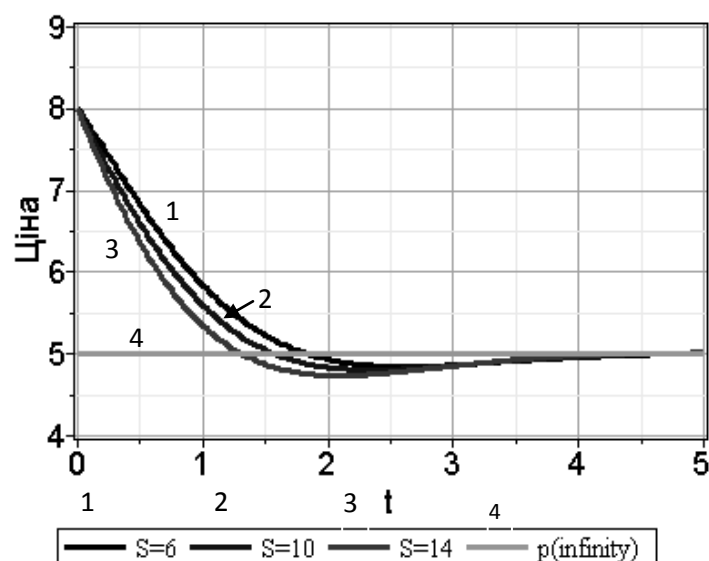


Рис. 2.6.11. Залежність ціни від часу та початкової пропозиції

З графіків на рис. 2.6.10 та рис. 2.6.11 можна зробити певні практичні висновки:

- 1) з часом ціна прямує до збалансованого значення незалежно від стартової ціни та початкової пропозиції;
- 2) у початковий період продаж ціна та тенденція її зміни дещо сильніше залежить від стартової ціни, аніж від початкової пропозиції;
- 3) чим вища початкова пропозиція та стартова ціна тим швидше спадає ціна з часом до збалансованого значення;
- 4) у певний момент часу ціна сягає мінімуму, який знаходиться дещо нижче збалансованого значення $p(\infty)$, причому цей мінімум тим нижчий, чим більша стартова ціна та початкова пропозиція.

```
> Digits:=3;
p_min1:=evalf(minimize(eval(pt(t,P,S), [P=10,S=12]),
t=0..5)); #Вищі стартова ціна та початкова пропозиція
```

$$Digits := 3, \quad (2.6.26)$$

$$p_{min1} := 4.64.$$

```
> p_min2:=evalf(minimize(eval(pt(t,P,S), [P=8,S=8]),
t=0..5)); # Нижчі стартова ціна та початкова
пропозиція
```

$$p_{min2} := 4.82. \quad (2.6.27)$$

Практикум 7

Модель релаксації ядерних спінових моментів як основа магніторезонансної томографії

1. Вступні зауваження.
2. Вектор ядерної намагніченості.
3. Спінова релаксація вектору намагніченості.
4. Основи методу спінового відлуння (spin-echo).

1 Вступні зауваження

Фізичною основою магніторезонансної томографії (МРТ) є явище ядерного магнітного резонансу (ЯМР). Це явище полягає в резонансному поглинанні зовнішнього електромагнітного випромінювання (в діапазоні радіочастот) системою ядерних магнітних спінових моментів, які перебувають і рухаються в постійному магнітному полі.

Ядра з непарною кількістю нуклонів, зокрема до таких відносяться ядра водню, які складаються з одного протону, мають

ненульовий спіновий магнітний момент. У відсутності магнітного поля ці магнітні моменти є неупорядкованими і мають довільні спрямування (рис. 2.7.1.а). За наявності зовнішнього магнітного поля спінові магнітні моменти ядер орієнтуються у двох можливих напрямках (рис. 2.7.1.б) та починають специфічний рух, який має назву Ларморової прецесії (рис. 2.7.1.в). Під час такої прецесії вектор спінового магнітного моменту обертається навколо напрямку зовнішнього магнітного поля з частотою, яка прямо пропорційна величині цього поля $\Omega_L = \gamma B$.

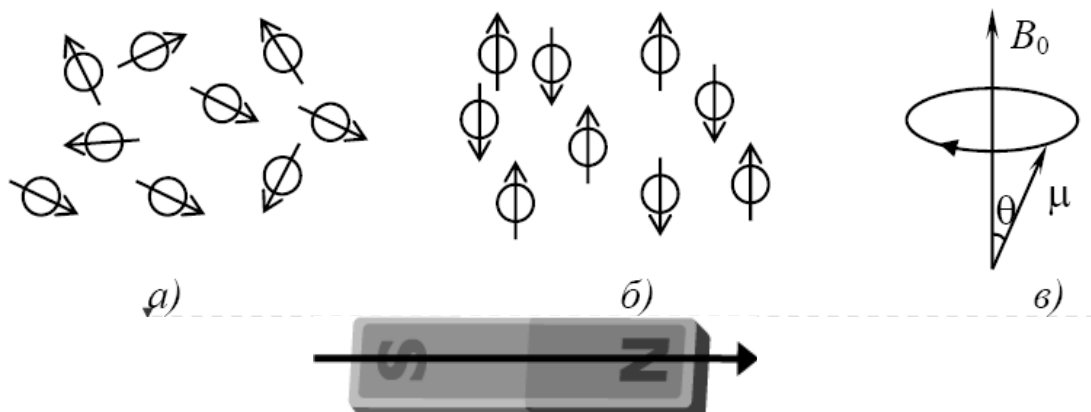


Рис. 2.7.1. Ядерні магнітні моменти у відсутності магнітного поля (а), та за наявності поля (б); прецесія ядерного спінового моменту (в)

Якщо частота електромагнітної хвилі, якою опромінюється система спінових моментів уміщена у магнітне поле, співпадає з частотою прецесії (частотою Лармора) виникає явище резонансного поглинання електромагнітної хвилі системою ядерних магнітних спінових моментів, тобто ЯМР. Таке поглинання, або випромінювання, кванту електромагнітного поля супроводжується зміною орієнтації спінового магнітного моменту на протилежну.

2 Вектор ядерної намагніченості

Розглянемо велику систему, яка складається з величезної кількості ядерних спінових магнітних моментів – ансамблю спінів [23]. Якщо такий ансамбль складається переважно з протонів (ядер водню), як це найчастіше й буває у практиці магніторезонансної томографії, то кожен з протонів може мати лише конуси прецесії. Отже, поздовжня компонента спінового магнітного моменту μ_z може бути зорієнтована або по полю, або проти магнітного поля. Введемо у розгляд сумарний магнітний момент протонів, як векторну суму:

$$\vec{M} = \sum_k^{N \rightarrow \infty} \vec{\mu}_{t,k}, \quad (2.7.1)$$

де індексом $k=1,2,\dots,N \rightarrow \infty$ нумеруються протони, тобто спінові моменти. На перший погляд здається, що вектор намагніченості $\vec{M}$ є нульовим у силу симетрії, оскільки рівна кількість спінових магнітних моментів розташована як по полю, так і проти поля.

Утім так було б лише у випадку однакових енергій цих двох можливих станів. Взаємодія магнітних моментів із зовнішнім полем, так званий квантовий ефект Зеємана, – призводить до того, що ці дві енергії відрізняються на величину $\hbar\Omega_L = \hbar\gamma B$, причому трохи меншою є енергія спінових моментів, зорієнтованих по полю.

Отже, за формулою розподілу Больцмана, таких спінових моментів n_1 трохи більше ніж спінових моментів зорієнтованих проти поля $n_2 = N - n_1$:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{\hbar\gamma B}{k_0 T}} > 1, \quad (2.7.2)$$

де $\hbar$, k_0 , T – відповідно константи Дірака-Планка, Больцмана та абсолютна температура системи. За умов $T = 298\text{ K}$, $B = 1\text{ T}$,

$\gamma = 42.57 \cdot 10^6 \frac{\text{Hz}}{\text{T}}$, відношення (2.7.2) дорівнює приблизно

1.000003, тобто з кожного мільйону протонів кількість протонів, які прецесують по полю, лише на три протони більше, аніж кількість протонів, які прецесують проти поля [23]. Як наслідок (2.7.2) вектор намагніченості $\vec{M}$ системи хоча й малий, але ненульовий, і спрямований по напрямку головного магнітного поля – так званий ядерний парамагнетизм:

$$\vec{M} = \chi \vec{B}, \quad (2.7.3)$$

де χ – так званий коефіцієнт ядерної парамагнітної сприйнятливості. Власне вся МР-томографія заснована на відмінності цього коефіцієнту від нуля, отже на несиметричності розподілу ядерних спінових моментів за двома можливими орієнтаціями.

Зобразимо цю асиметрію наочно у вигляді функції від температури системи та величини зовнішнього магнітного поля.

```
> restart:
> plot3d([exp(1.055e-34*42.57e6*B/(1.38e-23*T))],
B=0..21, T=78..303, axes=framed, shading=[zhue],
style=[wireframe], orientation=[-150,55,0],
style=patch, grid=[20,20], font=[Arial,11],
labels=["B", "T", "Співвідношення спінів"],
labeldirections=[horizontal, horizontal, vertical],
labelfont=[HELVETICA, 12], title=`Рис.2. Залежність
співвідношення спінів \n з різними орієнтаціями \n від
магнітного поля і температури`,titlefont=[Arial,14]);
```

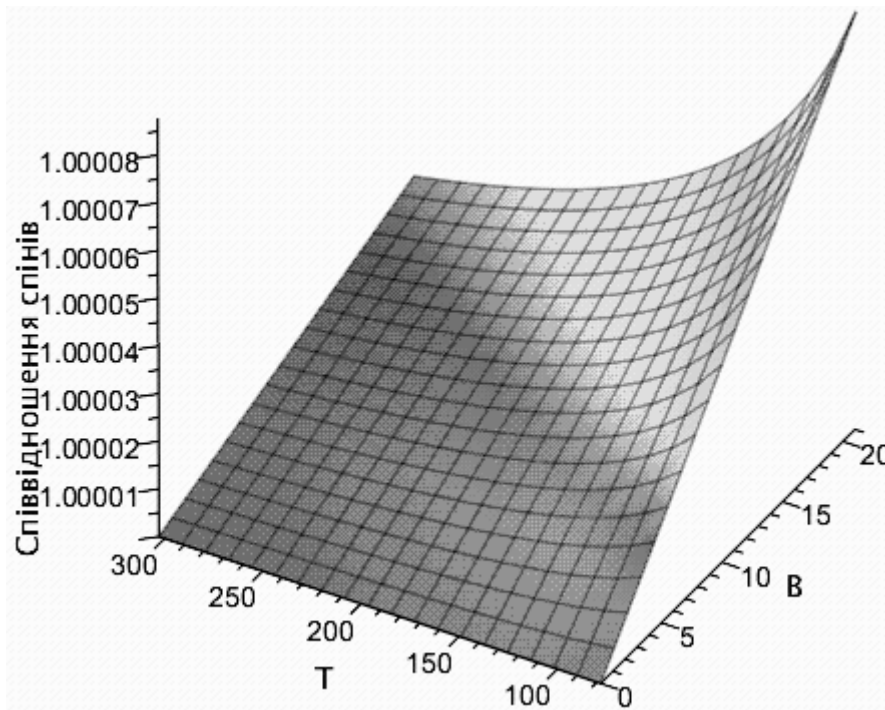


Рис. 2.7.2. Залежність співвідношення спінів з різними орієнтаціями від магнітного поля і температури

Як видно з рис. 2.7.2, відносна кількість спінів з орієнтацією по полю дещо зростає з магнітним полем та температурою. Разом із тим зростає і вектор намагніченості системи ядерних спінів, як це видно з виразів (2.7.1) і (2.7.2).

3 Спінова релаксація вектору намагніченості

Припустимо, що в момент часу $t = 0$ різко змінюється напрям головного магнітного поля: $B_0 \rightarrow B_z$, причому новий напрям поля співпадає з віссю Oz , а кут поміж старим та новим напрямом поля дорівнює ϕ . Отже, в момент часу $t = 0$ вектор намагніченості дорівнює $\vec{M}(0) = \chi \vec{B}_0$, у той час як при $t \rightarrow \infty$ матимемо $\vec{M}_z = \chi \vec{B}_z$. Залежність вектору намагніченості від часу дається феноменологічним векторним рівнянням Блоха [23]:

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = \gamma [\vec{M}(t) \times \vec{B}_z] - \frac{M_z(t) - \chi B_z}{T_1} \vec{e}_z - \frac{M_x(t) \vec{e}_x + M_y(t) \vec{e}_y}{T_2}, \quad (2.7.4)$$

де T_1, T_2 – певні константи з розмірністю часу, так звані характерні часи релаксації, відповідно T_1 – поздовжньої та T_2 – поперечної релаксації; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – одиничні орти уздовж відповідних осей координат.

У рівнянні Блоха (2.7.4) перший фактор у правій частині описує Ларморову прецесію вектору намагніченості навколо напрямку

магнітного поля, а решта складових – враховує процеси релаксації збудженої системи, її переходу в новий стан.

Запишемо рівняння Блоха у вигляді векторного диференціального рівняння:

```
> restart;
> with(Physics[Vectors]);
Setup(mathematicalnotation=true);
unprotect(gamma);
[&x, '+', '\', ChangeBasis, Component, Curl, DirectionalDiff,
Divergence, Gradient, Identify, Laplacian, \nabla, Norm, Setup, diff] , (2.7.5)
```

```
[mathematicalnotation = true] .
> M_:=Mx(t)*_i+My(t)*_j+Mz(t)*_k;
B_:=Bz*_k;

$$\vec{M} := Mx(t) \hat{i} + My(t) \hat{j} + Mz(t) \hat{k} , \quad (2.7.6)$$


$$\vec{B} := Bz \hat{k} .$$

```

```
> deq_:=diff(M_,t)-gamma*(M_&x B_)+(Mz(t)-
chi*Bz)*_k/T1+(Mx(t)*_i+My(t)*_j)/T2;

$$\vec{deq} := \hat{i} \left( -Bz \gamma My(t) + \dot{Mx}(t) + \frac{Mx(t)}{T2} \right) + \hat{j} \left( Bz \gamma Mx(t) + \right. \\ \left. \dot{My}(t) + \frac{My(t)}{T2} \right) + \hat{k} \left( \dot{Mz}(t) - \frac{\chi Bz}{T1} + \frac{Mz(t)}{T1} \right) . \quad (2.7.7)$$

```

Розпишемо векторне рівняння (2.7.7) у вигляді системи з трьох скалярних рівнянь, вирішених відносно перших похідних:

```
> sys:=isolate(Component(deq_,1), diff(Mx(t),t)),
isolate(Component(deq_,2), diff(My(t),t)),
isolate(Component(deq_,3), diff(Mz(t),t)));
sys := \dot{Mx}(t) = Bz \gamma My(t) - \frac{Mx(t)}{T2}, \dot{My}(t) = -Bz \gamma Mx(t) \\ - \frac{My(t)}{T2}, \dot{Mz}(t) = \frac{\chi Bz}{T1} - \frac{Mz(t)}{T1} . \quad (2.7.8)
```

Запишемо також початкові умови у вигляді:

```
> ics:=Mz(0)=M0*cos(theta),
Mx(0)=M0*sin(theta)*cos(phi),
My(0)=M0*sin(theta)*sin(phi);
ics := Mz(0) = M0 cos(\theta), Mx(0) = M0 sin(\theta) cos(\phi), My(0) \\ = M0 sin(\theta) sin(\phi) . \quad (2.7.9)
```

Нарешті вирішимо систему рівнянь Блоха (2.7.8) з початковими умовами (2.7.9):

```
> sol:=dsolve([sys,ics]);
```

$$\begin{aligned}
 sol := & \left\{ Mx(t) = e^{-\frac{t}{T_2}} \left(\cos(\gamma B_z t) M_0 \sin(\theta) \cos(\phi) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin(\gamma B_z t) M_0 \sin(\theta) \sin(\phi) \right), My(t) \right. \\
 & = e^{-\frac{t}{T_2}} \left(\cos(\gamma B_z t) M_0 \sin(\theta) \sin(\phi) \right. \\
 & \left. - \sin(\gamma B_z t) M_0 \sin(\theta) \cos(\phi) \right), Mz(t) = \chi B_z + e^{-\frac{t}{T_1}} \left(-\chi B_z \right. \\
 & \left. \left. + M_0 \cos(\theta) \right) \right\}
 \end{aligned} \quad . \quad (2.7.10)$$

Тепер неважко отримати поздовжню та поперечну відносно напрямку магнітного поля компоненти вектора намагніченості системи:

```

> Mn:=simplify(sqrt(rhs(sol[1])^2+rhs(sol[2])^2),
symbolic);# Нормальна компонента намагніченості
Mt:=collect(rhs(sol[3]),exp);# Поздовжня компонента
намагніченості

```

$$M_n := M_0 \sin(\theta) e^{-\frac{t}{T_2}}, \quad (2.7.11)$$

$$M_t := \chi B_z + e^{-\frac{t}{T_1}} (-\chi B_z + M_0 \cos(\theta)).$$

Таким чином нормальна компонента вектору намагніченості M_n обертається з частотою Лармора $\Omega_L = \gamma B_z$ одночасно експоненціально згасаючи з часом, як це видно з виразів (2.7.11).

У той же час поздовжня компонента M_t безперервно змінює своє значення від $M_0 \cdot \cos(\theta)$ до γB_z на інтервалі часу $t = (0, \infty)$. Як наслідок, кінець вектора намагніченості описує в просторі спіраль, подібну до представленої нижче. Параметри вектора спеціально підбрані такими:

$$M_0=1, \quad \Omega_L=1, \quad \theta=\frac{\pi}{2}, \quad \cos(\phi)=\sin(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{T_1}=0.08, \quad \frac{1}{T_2}=0.04, \\ \chi=1.$$

```

> M_x:=eval(rhs(sol[1]),
{M0=1,gamma=1,Bz=1,theta=Pi/2,phi=Pi/4,T1=1/0.04,T2=1/
0.04});
M_y:=eval(rhs(sol[2]),
{M0=1,gamma=1,Bz=1,theta=Pi/2,phi=Pi/4,T1=1/0.04,T2=1/
0.04});
M_z:=eval(rhs(sol[3]),
{M0=1,gamma=1,Bz=1,theta=Pi/2,phi=Pi/4,T1=1/0.08,T2=1/
0.04,chi=1});

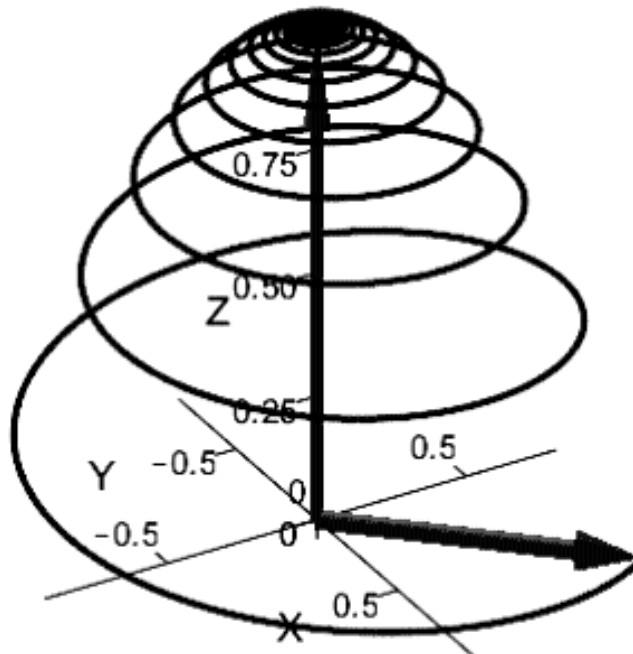
```

$$M_x := e^{-0.04000000000 t} \left(\frac{\cos(t) \sqrt{2}}{2} + \frac{\sin(t) \sqrt{2}}{2} \right), \quad (2.7.12)$$

$$M_y := e^{-0.04000000000 t} \left(\frac{\cos(t) \sqrt{2}}{2} - \frac{\sin(t) \sqrt{2}}{2} \right),$$

$$M_z := 1 - e^{-0.08000000000 t}.$$

```
> gr1:=plots[spacecurve]([M_x,M_y,M_z], t=0..100,
axes=normal, thickness=3, numpoints=2000,
orientation=[-30,60,0], color=blue, tickmarks=[4,4,5],
font=[Arial,12]):
gr2:=plots[arrow]([<sin(Pi/4),cos(Pi/4),0>, <0,0,1>],
width=0.04, color=[khaki,red]):
plots[display](gr1, gr2, labels=["X", "Y", "Z"],
labelfont=[Arial,14], caption=`Рис. 3. Траєкторія
(годограф) \n кінця вектору намагніченості`);
```



**Рис. 2.7.3. Траєкторія (годограф)
кінця вектора намагніченості**

На рис. 2.7.3 червоними стрілками показані початкова (в площині (x,y)) та кінцева позиція (уздовж осі Oz) вектору намагніченості $\vec{M}$. Зверніть увагу: прецесія спінової намагніченості навколо осі Oz поступово припиняється внаслідок асимптотичного експоненціального згасання поперечної компоненти. Як виникає з виразу (2.7.11):

```
> Limit(Mn, t=infinity)=limit(M_x, t=infinity);
```

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_0 \sin(\theta) e^{-\frac{t}{T_2}} = 0. \quad (2.7.13)$$

Оцінемо та візуалізуємо швидкість згасання прецесійного кута:

```
> Theta:=arccos(Mt/sqrt(Mn^2+Mt^2));
```

$$\Theta := \arccos \left(\frac{\left(\chi B_z + e^{-\frac{t}{T1}} (-\chi B_z + M0 \cos(\theta)) \right)}{\sqrt{\left(M0^2 \sin(\theta)^2 \left(e^{-\frac{t}{T2}} \right)^2 + \left(\chi B_z + e^{-\frac{t}{T1}} (-\chi B_z + M0 \cos(\theta)) \right)^2 \right)^{1/2}}} \right) \quad (2.7.14)$$

```
> Theta:=eval(Theta, [M0=1, gamma=1, Bz=1, theta=Pi/2,
phi=Pi/4, T1=1/0.08, T2=1/0.04, chi=1]);
Theta := arccos \left( \frac{1 - e^{-0.080000000000 t}}{\sqrt{(e^{-0.040000000000 t})^2 + (1 - e^{-0.080000000000 t})^2}} \right) \quad (2.7.15)
```

```
> plot(Theta*180/Pi, t=0..60, -90..90, gridlines=true,
axes=boxed, color=blue, thickness=3, coords=polar,
font=[Arial,12], labels=["Theta", "Theta"],
labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[Arial,14], caption=`Рис. 4. Згасання
прецесійного кута`);
```

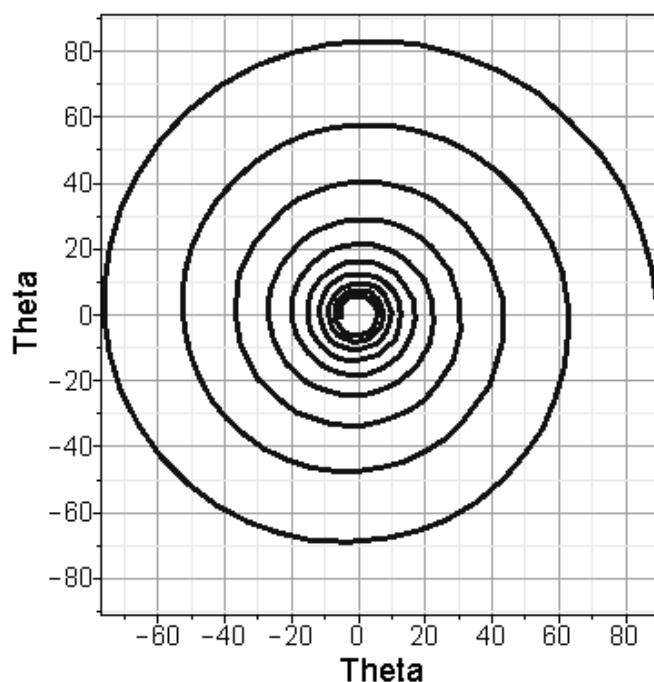


Рис. 2.7.4. Згасання прецесійного кута

Як видно з рис. 2.7.4, кут прецесії вектору намагніченості поступово зменшується від початкового значення $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ до нуля.

Втім, резонансне поглинання радіочастотного сигналу можливе лише доти, доки існує прецесія вектору ядерної намагніченості. Ансамбль протонів здатний випромінювати так званий **сигнал-**

відлуння лише за умови існування ненульового кута прецесії. Щоб отримати суттєвий сигнал-відлуння треба відхилити вектор намагніченості $\vec{M}(t)$ від напрямку магнітного поля (осі Oz), тоді зростає величина поперечної компоненти цього вектору $\vec{M}_n(t)$. Саме така технологія – основа вимірів ядерного магнітного резонансу (ЯМР) у речовині.

4 Основи методу спінового відлуння (spin-echo)

Конкретно виміри ЯМР-сигналів здійснюються за рахунок відхилення вектора $\vec{M}(t)$ досліджуваного об'єкта від напрямку основного магнітного поля послідовними радіочастотними імпульсами без змін головного магнітного поля $\vec{B}_z$.

Перший радіочастотний імпульс (РЧ-імпульс) резонансної частоти відхиляє вектор $\vec{M}(t)$ від напрямку головного магнітного поля на певний кут – кут нутації, пропорційний індукції радіочастотного магнітного поля B_1 та тривалості імпульсу τ :

$$\varphi = \gamma B_1 \tau = \Omega_n \tau. \quad (2.7.16)$$

Чим більше інтенсивність першого імпульсу, отже й величина B_1 , та тривалість імпульсу τ , тим більший і кут відхилення (нутації). Якщо кут нутації сягає $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то кажуть про « 90° -імпульс», або навіть про « 180° -імпульс» при відповідному куті відхилення.

Під дією « 90° -імпульсу» вектор намагніченості переходить у площину xOy , нормальну до напрямку головного магнітного поля $\vec{B}_z$. Після закінчення дії першого РЧ-імпульсу вектор ядерної намагніченості почне релаксаційну прецесію, як це показано вище на рис. 2.7.3 та рис. 2.7.4. Під час такої прецесії відбуватиметься випромінювання поглинутих електромагнітних квантів. Такий сигнал пропорційний $\vec{M}_n(t)$ – поперечній компоненті вектора ядерної намагніченості, і отримав скорочену назву **FID** (від англійського терміну Free Induction Decay). Типовий вигляд такого сигналу, як функції часу показаний на рис. 2.7.5, а його Фур'є-образи – на рис. 2.7.6.

$$\begin{aligned} & > \text{FID1} := \text{eval}(\text{Mn} * (\cos(t) - \sin(t)) / \sqrt{2}, \{M0=1, \text{theta}=\text{Pi}/2, T2=1/0.04\}); \\ & \text{FID2} := \text{eval}(\text{Mn} * (\cos(t) - \sin(t)) / \sqrt{2}, \{M0=1, \text{theta}=\text{Pi}/2, T2=1/0.08\}); \\ & \text{FID1} := \frac{e^{-0.04000000000 t} (\cos(t) - \sin(t)) \sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

$$FID2 := \frac{e^{-0.08000000000 t} (\cos(t) - \sin(t)) \sqrt{2}}{2}.$$

```
> plot([FID1, 0, exp(-0.04*t), -exp(-0.04*t)],
t=0..4/0.04, gridlines=true, thickness=[2,1,1,1],
color=[blue,red,navy,navy], linestyle=[1,4,4,4],
tickmarks=[5,8], axes=boxed,numpoints=1600,
font=[Arial,12], labels=["t", "Рівень FID-сигналу"],
labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[Arial,14], caption=`Рис. 5. FID1 сигнал`);
```

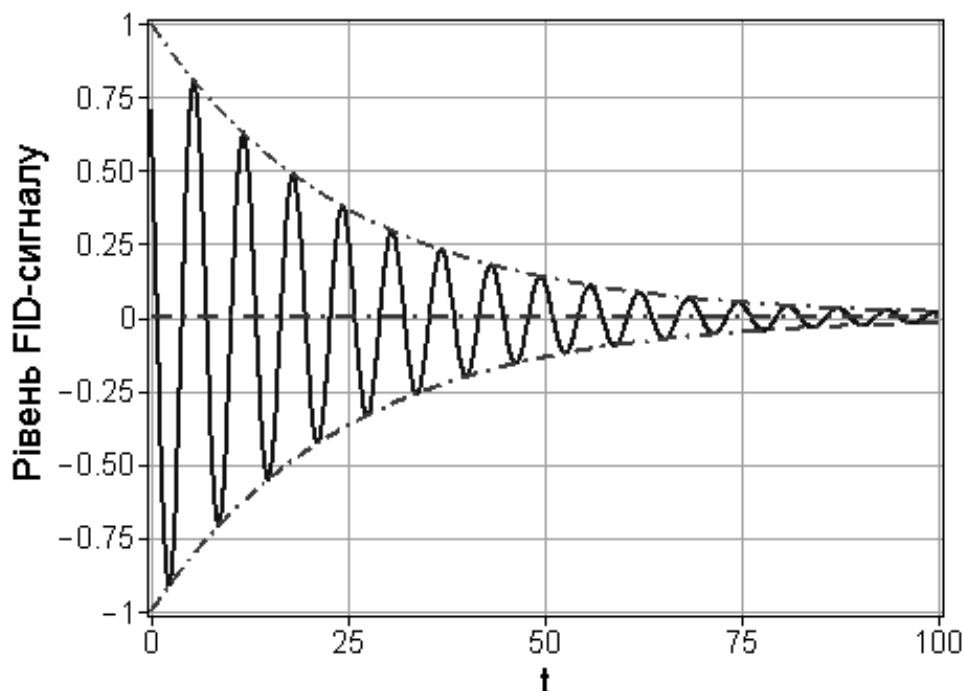


Рис. 2.7.5. FID1 сигнал

```
> fs1:=inttrans[fourierson](FID1, t, w):
fs2:=inttrans[fourierson](FID2, t, w):
fc1:=inttrans[fouriercos](FID1, t, w):
fc2:=inttrans[fouriercos](FID2, t, w):
> pa1:=plot([fs1, fc1], w=0..2, -9..9, gridlines=true,
color=[blue,red], thickness=[3,3], axes=boxed,
tickmarks=[5,10], font=[Arial,12], labels=["w", "Фур'є
образ FID-сигналу"], labeldirections=[horizontal,
vertical], labelfont=[Arial,14], title=`T2=25`,
caption=`Рис. 6а. Фур'є спектр FID1 сигналу`):
pa2:=plot([fs2, fc2], w=0..2, -9..9, gridlines=true,
color=[blue,red], thickness=[3,3], axes=boxed,
tickmarks=[5,10], font=[Arial,12], labels=["w", "Фур'є
образ FID-сигналу"], labeldirections=[horizontal,
vertical], labelfont=[Arial,14], title=`T2=12.5`,
caption=`Рис. 6б. Фур'є спектр FID2 сигналу`):
a:=array(1..2, [pa1,pa2]): plots[display](a);
```

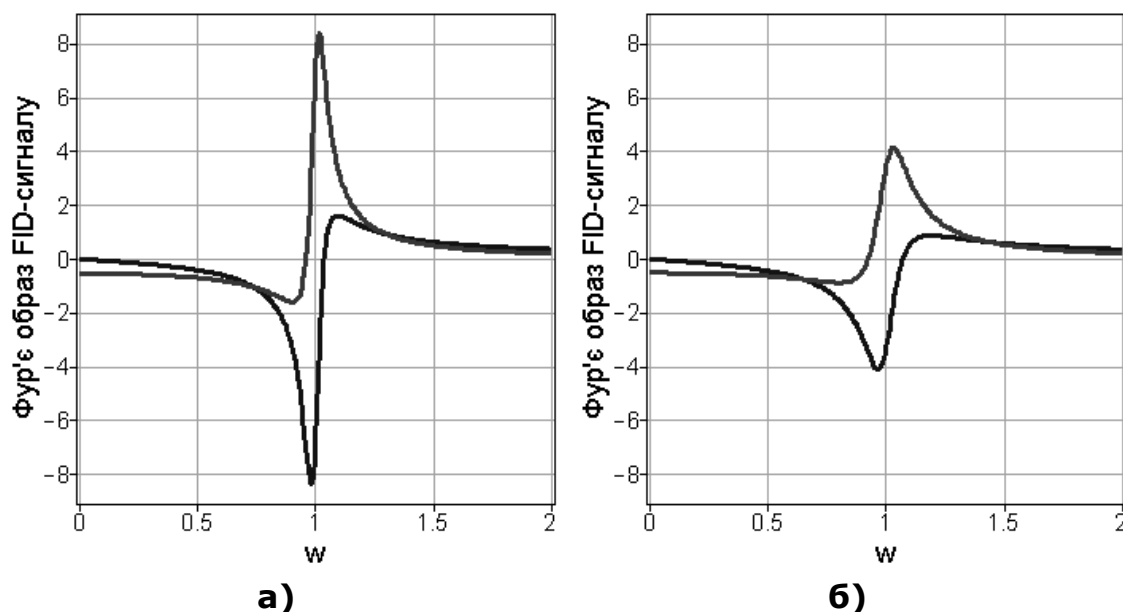


Рис. 2.7.6. Фур'є спектр:
а) FID1-сигнал, $T_2 = 25$;
б) FID2-сигнал, $T_2 = 12.5$

Різкі максимуми обох компонент Фур'є-образу FID-сигналу припадають на частоту Лармора $w = \Omega_L \approx 1$, як це видно з рис. 2.7.6. При цьому амплітуда та ширина резонансного піку суттєво залежні від часу спінової релаксації: чим менше час релаксації, тим відносно нижчий і відносно ширший такий пік, як це видно з порівняння рис. 2.7.6.а та рис. 2.7.6.б.

У початковий момент релаксаційної прецесії фази всіх спінових ядерних моментів системи однакові. Втім частоти релаксаційної прецесії дещо розрізняються для різних ядерних спінових моментів, хоча б тому, що головне магнітне поле неоднорідне і змінюється від точки до точки, існують також інші причини певної неоднаковості ларморових частот. Тому через певний час Δt фази прецесії $\Psi = \Omega_L \Delta t$ стають все більш відмінними для різних спінових ядерних моментів, відбувається так званий процес «розфазування».

Якщо тепер система збуджується другим, цього разу « 180° -імпульсом», то всі спінові моменти системи змінюють напрям у просторі на протилежний, тобто одномоментно змінюють фази на π , і починають обертатися в зворотному напрямі з тими самим ларморовими частотами. Отже, через той самий час Δt всі прецесуючі ядерні спінові моменти знов опиняться в одній і тій самій фазі. Так само, як одночасно опиняються на старті всі бігуни на стадіоні, якщо їх одномоментно розвернути на 180 градусів, зберігши їх швидкості, або просто запустивши відеозапис забігу в зворотньому напрямі.

Отже, через час Δt після закінчення дії другого « 180° -імпульсу» система ядерних спінових магнітних моментів опиняється в когерентному стані, в якому вона здатна випромінювати кількість резонансних електромагнітних квантів пропорційну квадрату кількості ядерних спінових моментів у зразку, тоді як у некогерентному стані система здатна випромінювати лише кількість квантів пропорційну числу ядерних спінових моментів. Когерентний електромагнітний сигнал від системи ядерних магнітних спінів називають **спіновим відлунням**, або відлунням Г. Хана, який першим спостерігав його експериментально в 1950 році.

РОЗДІЛ 3

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота 1

Приклади типових задач математичного моделювання в медицині

1. Проста модель енергетичного балансу серця.
2. Математична модель фармакокінетики: надходження ліків через крапельницю та їх елімінація.
3. Моделювання зонду фотоплетизмографа для досліджень стравоходу.

1 Проста модель енергетичного балансу серця

Для підтримання роботоздатності серце людини повинно витратити певну енергію. І цю саму енергію воно само собі поста-чає, виконуючи роботу з перекачування крові в організмі. З функціональної точки зору серце є насосом, який качає кров по суди-нах аж до капілярів включно, забезпечуючи організм власника, всі його тканин та органи, включно з самим собою, належним жив-ленням.

Серце не може зупинитися, інакше воно загине. Воно працює весь свій життєвий цикл, причому нервова система власника подає йому команди як працювати: інтенсивніше, чи помірніше. Цю команду представимо величиною функції управління u [24]: чим більше значення u , тим інтенсивніше працює серце. Серце може працювати, тобто скорочувати свої м'язи, за рахунок запасів енергії, які воно має. Ця ж енергія, хімічна енергія за своїм похо-дженням, потрібна йому для підтримання власної життєздатності – живлення своїх клітин. Запас енергії серця, який позначимо як W , поповнюється за рахунок прокачування через себе артеріальної крові, яка несе кисень та інші поживні речовини, аналогічно іншим органам тіла.

Припустимо, що величиною f позначена інтенсивність пов-них витрат енергії серця за одиницю часу, а через g – відповідно інтенсивність поповнення запасів енергії серця. Нехай величина a характеризує інтенсивність споживання енергії для підтримання життєдіяльності власне самого серця як органу. Тоді можна скласти таке диференціальне рівняння для швидкості змін енергії серця – рівняння енергетичного балансу серця:

```
> restart:
> ode_h:=diff(W(t),t)=g-f-a;# Точкою над символом
традиційно позначають першу похідну за часом
```

$$\text{ode_h} := \dot{W}(t) = g - f - a. \quad (3.1.1)$$

Інтенсивності f , g залежать від величин запасів та сигналів керування: $f = f(W, u)$, $g = g(W, u)$. Конкретний вигляд цих функцій нам невідомий, втім зараз він нам і не потрібний. Достатньо знати, що за умови $W=0$ вочевидь маємо $f(0, u) = g(0, u) = 0$. Окрім того, так само зрозуміло, що за умови $u=0$ теж маємо: $f(W, 0) = g(W, 0) = 0$. Разом із тим у певному діапазоні змінних W , u значення функцій f , g є позитивними, інакше серце просто не могло б працювати.

Згідно з балансовим рівнянням (3.1.1) за фіксованої величини команди управління u в залежності від знаку правої частини рівняння серце або накопичує енергію, якщо $g - f - a > 0$, або ж її витрачає. Цей факт графічно на площині змінних, так званій фазовій площині, або площині параметрів, показний і на рис. 3.1.1 (ліворуч).

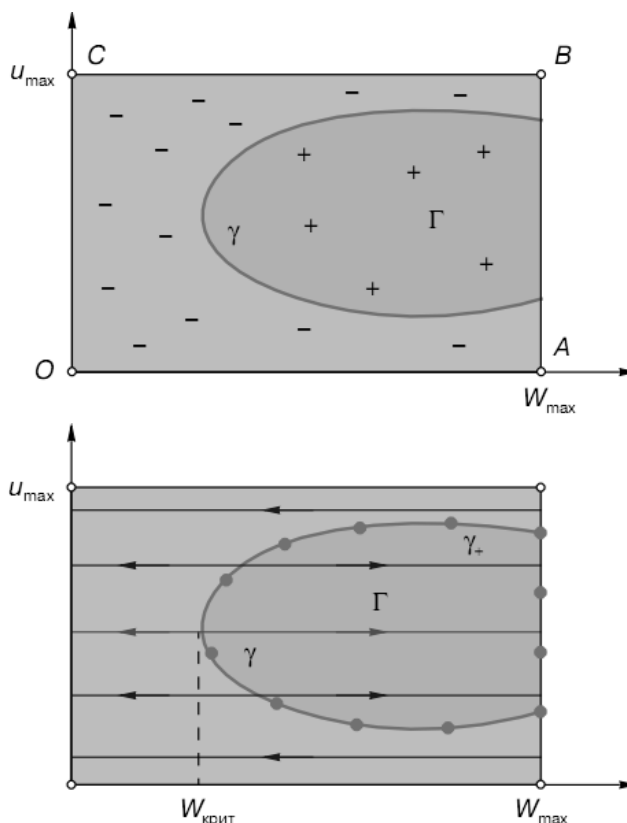


Рис. 3.1.1. Графічна модель енергетичного балансу серця [24]

Зрозуміло, що величини змінних W , u за змістом є позитивними величинами і не перевищують деяких максимальних значень $W_{\max}$, $u_{\max}$, які формують прямокутник можливих значень $OABC$ на

рис. 3.1.1. У певній області цього прямокутника Γ вираз у правій частині (3.1.1) є гарантовано позитивним: ця область виокремлена кольором на рисунку. На сторонах OA , BC цього прямокутника значення величин $f = g = 0$ і тому $g - f - a < 0$. Ця область на площині змінних виокремлена іншим кольором. Частини площини змінних, де знаки правої частини рівняння балансу (3.1.1) є різними, розділені певною кривою лінією γ , в точках якої права частина (3.1.1) обертається в нуль: $g - f - a = 0$.

Зобразимо тепер як може рухатися по площині точка $M(W, u)$ зафіксованого значення сигналу керування $u = const$ (рис. 3.1.1 праворуч). В області Γ , де знак правої частини рівняння (3.1.1) позитивний, запаси енергії серця зростають, а поза цією областю, навпаки, зменшуються. Під час роботи серця точка $M(W, u)$ зміщується в межах прямокутника, причому за умови її перебування в області Γ вона зміщується праворуч, тоді як за межами цієї області, навпаки, ліворуч, що показано на рисунку стрілками.

Угору, або вниз, зображувальна точка зміщуватиметься, якщо буде відповідно зростати, або слабшати сигнал керування з боку нервової системи u . За рахунок зміни величини сигналу керування u зображувальна точка $M(W, u)$ рухається за деякою траєкторією: при цьому зміна величини сигналу керування u може бути будь-якою, а зміна енергії серця W визначається рівнянням (3.1.1) і відбувається у напрямках визначених стрілками на графіковій рис. 3.1.1. Точка $M(W, u)$ може рухатися як у межах робочої області Γ , так і поза її межами, зокрема вона може вийти з робочої області внаслідок занадто великого, або занадто слабкого сигналу керування: тобто внаслідок надмірного форсування, або надмірного ослаблення роботи.

Тепер можна зробити висновок, що ані надмірне форсування, ані надмірне послаблення роботи не може бути надто тривалим. Інакше серце, рухаючись на площині змінних ліворуч, вийде за межі критичного значення запасів енергії $W_{крит}$ і надалі вже будь-яка зміна сигналу керування u не зможе повернути його в межі робочої області Γ . Простіше кажучи, в такому випадку серце загине, потрапивши в кінцевому підсумку на сторону прямокутника OC , де запас енергії нульовий.

Модель дозволяє зрозуміти, що відбувається з серцем під час детренування, старіння або інтоксикації. Наприклад, внаслідок старіння відбувається зменшення робочої області Γ та відповідне збільшення критичного значення запасів енергії $W_{крит}$. Як не дивно, але з віком серце повинно працювати більш інтенсивно, аби компенсувати такі зміни. Зрозуміло, що одночасно зменшуються також максимально припустимі навантаження. Зменшення робочої області серця з віком, детренуванням та інтоксикацією є всебічним, тому

воно веде до зменшення як максимальних навантажень, так і мінімальних, тобто перешкоджає повноцінному відпочинку серця.

Модель енергетичного балансу, яка дається рівнянням (3.1.1) та рис. 3.1.1, вочевидь є придатною не лише для серця, але також для живих істот, яким для життєдіяльності потрібно живлення та регулярна робота.

2 Математична модель фармакокінетики: надходження ліків через крапельницю та їх елімінація

Фармакокінетика – розділ медицини, який вивчає розподіл в організмі біологічно активних речовини, зокрема ліків, а також зміну їх концентрації в часі. Фармакокінетика поділяє організм людини на так звані **камери**. Фармакокінетична камера – це частина організму, в якій досліджуваний препарат розподілений більш-менш рівномірно. Сукупність процесів, які відповідальні за поступове зменшення концентрації біологічно активної речовини в організмі, називають **елімінацією**.

Розглянемо поступове надходження лікарського препарату в певну камеру організму із деякої зовнішньої ємності, так званого **депо** [25]. Такий випадок відповідає надходженню ліків наприклад з крапельниці через введену у вену голку (рис. 3.1.2).

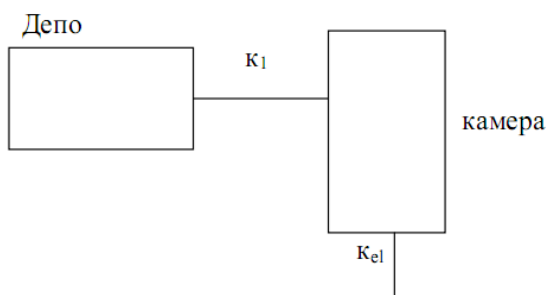


Рис. 3.1.2. Схема надходження ліків до камери з певного депо (крапельниці)

Процес надходження препарату в камеру з депо та його елімінацію опишемо моделлю лінійної кінетики. Система диференціальних рівнянь для опису схеми рис. 3.1.2 матиме такий вигляд:

```
> restart;
> sys_ode:=diff(M1(t),t)=-k1*M1(t),
diff(M(t),t)=k1*M1(t)-kel*M(t);
```

$$sys_ode := \dot{M}_1(t) = -k_1 M_1(t), \dot{M}(t) = k_1 M_1(t) - k_{el} M(t), \quad (3.1.2)$$

де $M1(t)$ – концентрація лікарської речовини в депо як функція часу, $M(t)$ – залежна від часу концентрація тієї ж речовини в камері, коефіцієнти $k1$, k – характеризують швидкості надходження речовини з депо до камери та елімінації з камери відповідно.

Отримаємо рішення першого з рівнянь (3.1.2) за допомогою команди ядра **dsolve**, враховуючи початкову умову:

$$\begin{aligned} & | > \text{ics1} := M1(0) = M01; \\ & \text{ics1} := M1(0) = M01, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} & | > \text{dsolve}(\{\text{sys_ode}[1], \text{ics1}\}); \\ & M1(t) = M01 e^{-k1 t}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Рішення (3.1.4) підставимо в друге рівняння (3.1.2) та запишемо початкові умови для концентрації в камері:

$$\begin{aligned} & | > \text{sys_ode}[2]: \\ & \text{de2} := \text{eval}(\%, [M1(t) = M01 * \exp(-k1 * t)]); \\ & \text{ics2} := M(0) = 0; \\ & \text{de2} := \dot{M}(t) = k1 M01 e^{-k1 t} - k1 e M(t), \\ & \text{ics2} := M(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Вирішимо задачу (3.1.5):

$$\begin{aligned} & | > M := \text{simplify}(\text{rhs}(\text{dsolve}(\{\text{de2}, \text{ics2}\}))); \\ & M := -\frac{M01 k1 (e^{-t(k1 - k1e)} - 1) e^{-k1e t}}{k1 - k1e}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

і побудуємо графік рішення (3.1.6) як функцію часу з підстановками деяких модельних параметрів.

$$\begin{aligned} & | > m1 := \text{eval}(M, [M01=1, k1=0.5, k1e=0.125]); \\ & m1 := -1.333333333 (e^{-0.375 t} - 1) e^{-0.125 t}. \\ & | > \text{plot}(m1, t=0..30, \text{thickness}=3, \text{gridlines}=\text{true}, \\ & \text{labels}=["t, год", "Концентрація препарату"], \\ & \text{labeldirections}=[\text{horizontal}, \text{vertical}], \\ & \text{labelfont}=[\text{Arial}, 14], \text{titlefont}=[\text{Arial}, 16], \\ & \text{axes}=\text{boxed}, \text{tickmarks}=[15, 12], \text{axesfont}=[\text{Arial}, 14], \\ & \text{title}=\text{'Зміна концентрації ліків у камері з часом'}); \end{aligned}$$

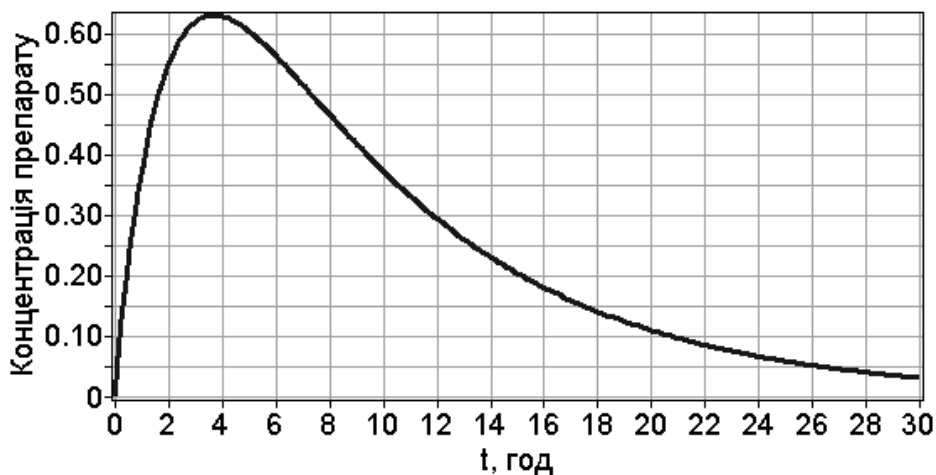


Рис. 3.1.3. Зміна концентрації ліків у камері з часом

Як видно з рис. 3.1.3, концентрація ліків, які поступають в організм з крапельниці, спочатку досить швидко зростає, потім сягає максимуму, і надалі повільно спадає.

3 Модель зонду фотоплетизмографа для досліджень стравоходу

Метод фотоплетизмографії (ФПГ) заснований на тому, що досліджувана тканина опромінюється монохроматичним світлом, тобто світлом з фіксованою довжиною хвилі, яке після проходження, або відбиття від тканини, потрапляє на фотодетектор, викликаючи зміни фотоструму. Експериментально встановлено, що інтенсивність світла відбитого, або пропущеного тканиною, залежить від ступеня її кровонаповнення. Завдяки тому що кров поглинає світло, а також і розсіює, значно інтенсивніше ніж оточуюча судини біологічна тканина, фотодетектор реєструє саме зміни вмісту крові в судинах.

На рис. 3.1.4 наведено схему зонду фотоплетизмографа, який працює з відбитим світлом, для вивчення змін об'єму стінок стравоходу зумовлених пульсаціями кровонаповнення відповідно джерела [26].

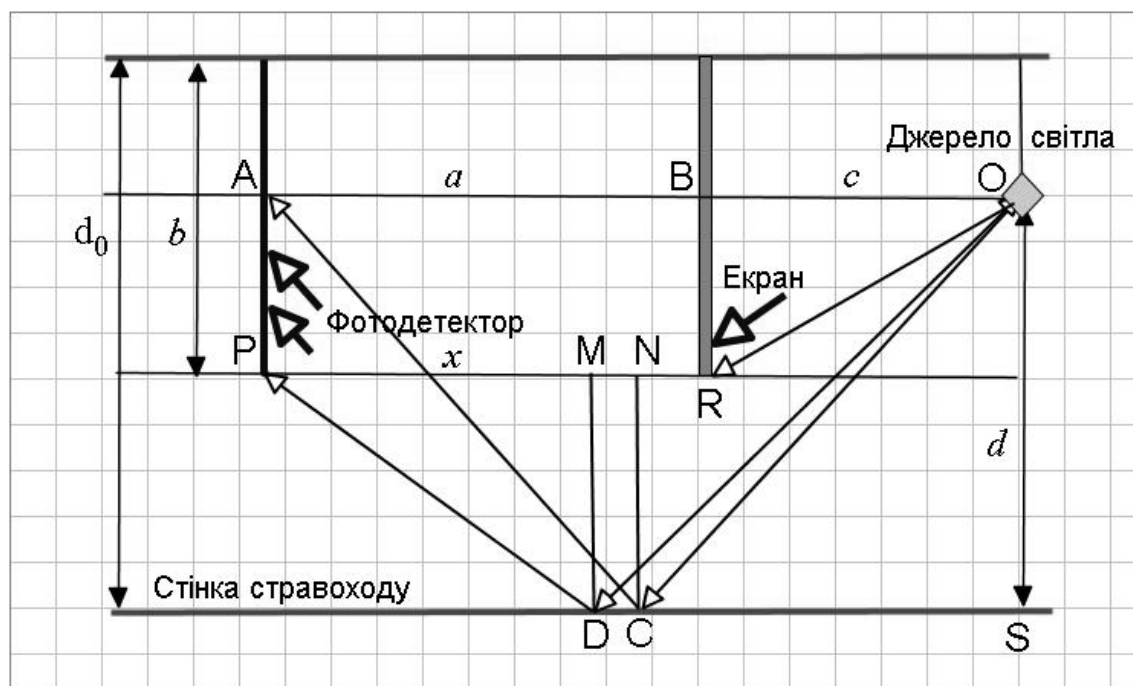


Рис. 3.1.4. Схема зонду фотоплетизмографа для досліджень стравоходу [26]

Основними припущеннями математичної моделі приладу є такі:

- вважатимемо, що джерело світла є точковим – точка O на рис. 3.1.4;

- пряма засвітка приймальної площини фотодетектора (лінія PA) виключена із застосуванням плоского і непрозорого тонкого екрану (лінія BR), причому екран вважається таким, що має нульову товщину, отже, фотодетектор засвічується лише відбитим від стінки стравоходу промінням (лінії DP , CA).

Необхідні для розрахунків геометричні параметри та їх пояснення наведені в таблиці 3.1.1.

Таблиця 3.1.1

Лінійні розмірні параметри та їх пояснення	Кутові параметри та їх пояснення
1) $a = AB$ – пряма відстань від фотодетектору до екрану; 2) b – діаметр зонду; 3) $c = BO$ – відстань від екрану до джерела світла; 4) $a + c = AO = f$ – пряма повна відстань від джерела до фотодетектору; 5) d – пряма відстань від джерела світла до опромінюваної стінки стравоходу; 6) $x = PM$ – відстань між точками; 7) d_0 – діаметр стравоходу;	8) $\alpha_1 = \angle OCN = \angle \frac{ACO}{2} = \angle COS$ – кут при вершині C трикутника OCN ; 9) $\alpha_2 = \angle ODM = \angle \frac{ODP}{2} = \angle DOS$ – кут при вершині D трикутника ODM ; 10) $\delta = \angle BOR$ – кут при вершині O трикутника ROB ; 11) $\theta = \alpha_2 = \alpha_1 = \angle DOC$ – кут при вершині O трикутника DOC – кут охоплення зонду.

З трикутника ACO для тангенсу кута α_1 маємо таке рівняння:

```
> restart;
> eq1:=tan(alpha[1])=f/(2*d);
```

$$eq1 := \tan(\alpha_1) = \frac{f}{2d}. \quad (3.1.7)$$

Його рішенням є такий вираз:

```
> alpha[1]:=solve(eq1,alpha[1]);
alpha[1]:=arctan(f,2*d);
```

$$\alpha_1 := \arctan\left(\frac{f}{2d}\right), \quad (3.1.8)$$

$$\alpha_1 := \arctan(f, 2d).$$

З трикутника BOR аналогічно отримуємо:

```
> eq2:=tan(delta)=b/(2*c);
delta:=solve(eq2,delta);
omega:=arctan(b,2*c);
```

$$eq2 := \tan(\delta) = \frac{b}{2c}, \quad (3.1.9)$$

$$\delta := \arctan\left(\frac{b}{2c}\right),$$

$$\omega := \arctan(b, 2c).$$

Для кута падіння α_2 з трикутника *PDO* отримуємо:

| > eq3:=tan(alpha[2])=x/(d-b/2);

$$eq3 := \tan(\alpha_2) = \frac{x}{d - \frac{b}{2}}. \quad (3.1.10)$$

З іншого трикутника *DOS* виникає, що:

| > eq4:=tan(alpha[2])=(f-x)/d;

$$eq4 := \tan(\alpha_2) = \frac{f-x}{d}. \quad (3.1.11)$$

Прирівняємо праві частин рівнянь (3.1.10) та (3.1.11) і вирішимо отримане рівняння відносно відстані x :

| > eq5:=rhs(eq4)=rhs(eq3);

| x:=solve(eq5,x);

$$eq5 := \frac{f-x}{d} = \frac{x}{d - \frac{b}{2}}, \quad (3.1.12)$$

$$x := \frac{f(-2d+b)}{-4d+b}.$$

Підставимо отримане значення відстані x в рівняння для кута α_2 (3.1.11):

| > simplify((f-x)/d);

| alpha[2]:=-simplify(arctan(2*f,b-4*d));

$$-\frac{2f}{-4d+b}, \quad (3.1.13)$$

$$\alpha_2 := -\arctan(2f, -4d+b).$$

Нарешті визначимо кут охоплення зонду θ :

| > theta:=alpha[2]-alpha[1];

$$\theta := -\arctan(2f, -4d+b) - \arctan(f, 2d). \quad (3.1.14)$$

Запишемо цей кут як функцію двох безрозмірних конструктивних параметрів: $u = \frac{f}{b}$, $w = \frac{d}{b}$, приведених до діаметра зонду.

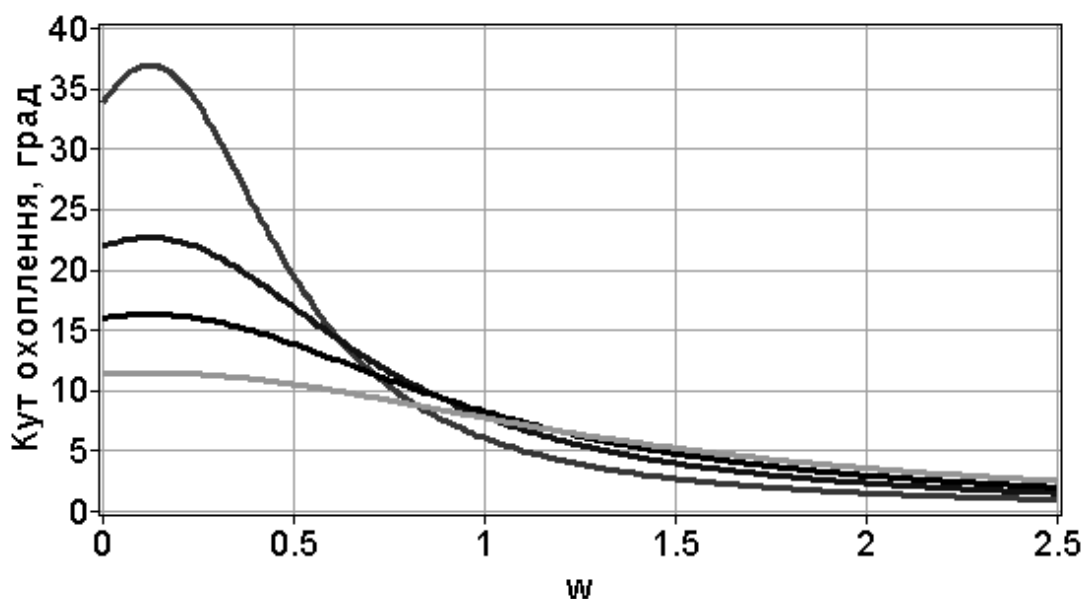
Перший із цих параметрів визначає безрозмірну відстань від джерела до фотодетектора, облічену в діаметрах зонду, друга – відносну відстань від джерела до стінки стравоходу, відлічену також у діаметрах зонду. За таких позначень кут охоплення є функцією двох введених безрозмірних параметрів:

| > theta:=unapply(arctan(2*u,4*w-1)-arctan(u,2*w), u, w);

$$\theta := (u, w) \mapsto \arctan(2u, 4w-1) - \arctan(u, 2w). \quad (3.1.15)$$

Зобразимо функцію кута охоплення θ (3.1.15) у її двовимірних проекціях.

```
> plot([theta(0.75,w)*180/Pi, theta(1.25,w)*180/Pi,
theta(1.75,w)*180/Pi, theta(2.5,w)*180/Pi], w=0..2.5,
0..40, axes=boxed, thickness=2,
color=[red,blue,black,khaki], gridlines=true,
thickness=3, font=[Arial,14],labeldirections=
[horizontal,vertical], labels=["w","Кут охоплення,
град"], labelfont=[HELVETICA, 14], tickmarks=[5,8],
caption=`Рис. 4. Кут охоплення зонду як функція
відносної відстані\n джерела світла до стінки
стравоходу при різних значеннях \n відстані джерела
світла до фотодетектора:\n w = 0.75, 1.25, 1.75, 2.5`);
```



**Рис. 3.1.5. Кут охоплення зонду θ як функція відносної відстані джерела світла до стінки стравоходу при різних значеннях відстані джерела світла до фотодетектора:
 $w = 0.75, 1.25, 1.75, 2.5$**

```
> plot([theta(u,1/2)*180/Pi, theta(u,2/3)*180/Pi,
theta(u,1.25)*180/Pi, theta(u,2)*180/Pi], u=0..2.5,
0..20, axes=boxed, thickness=2,
color=[red,blue,black,khaki], gridlines=true,
thickness=3, font=[Arial,14], labeldirections=
[horizontal,vertical], labels=["u","Кут
охоплення, град"], labelfont=[HELVETICA, 14],
tickmarks=[5,10], caption=`Рис. 5. Кут охоплення зонда
як функція відносної відстані\n джерела світла до стінки
стравоходу при різних \n значеннях відстані джерела до
стінки стравоходу :\n u = 0.5, 0.67, 1.25, 2`);
```

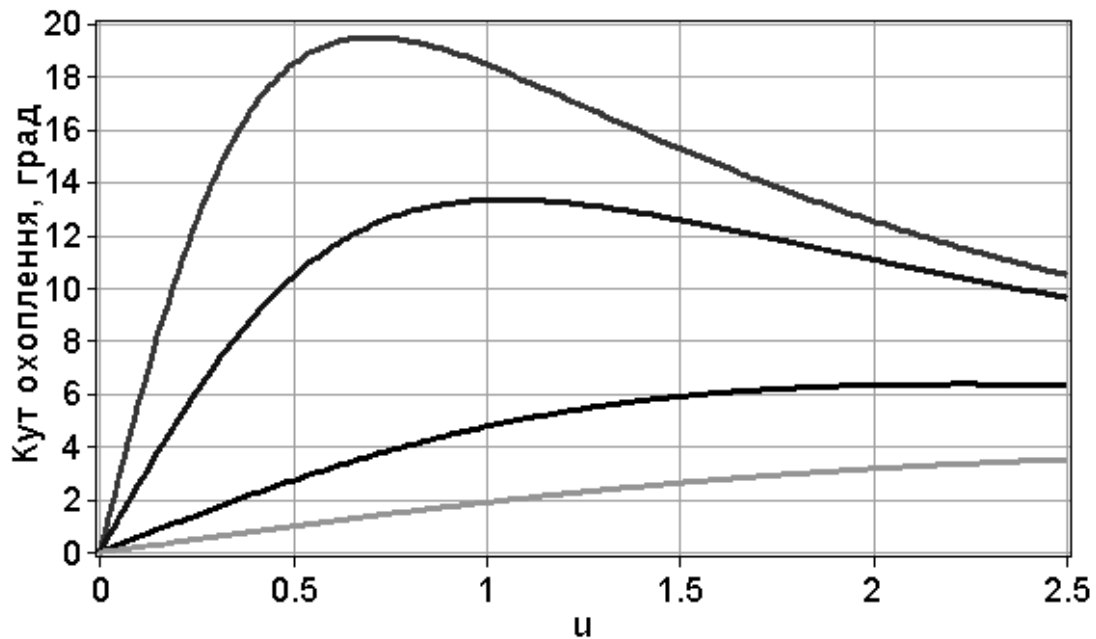


Рис. 3.1.5. Кут охоплення зонду θ як функція відносної відстані джерела світла до стінки стравоходу при різних значеннях відстані джерела світла до стінки стравоходу: $u = 0.5, 0.67, 1.25, 2.0$

Перевіримо метод розрахунків, обчислюючи кут охоплення θ за даними, наведеними у [26]: $f = 5$, $d = 5$ або $d = 10$, $b = 4$, звідки $u = 1.25$, $w = 1.25$ або $w = 2.5$. За таких умов оцінка кута охоплення дає такі значення:

$$\begin{aligned}
 & \text{> phi}[1] := \text{evalf}(\text{theta}(1.25, 1.25) * 180 / \text{Pi}); \\
 & \text{phi}[2] := \text{evalf}(\text{theta}(1.25, 2.5) * 180 / \text{Pi}); \\
 & \phi_1 := 5.440332026, \quad (3.1.16) \\
 & \phi_2 := 1.487867528,
 \end{aligned}$$

що дуже близько до наведених в [26] наближених результатів обчислень кутів охоплення: $\phi_1 = 5.445$ та $\phi_2 = 1.47$ град. відповідно.

Не оптимальний, як це видно з рис. 3.1.4 і рис. 3.1.5, вибір геометричних параметрів зонду в [26] зумовлює відносно малі кути охоплення зонду.

Засоби рішення диференціальних рівнянь у Maple

1. Засоби рішення звичайних диференціальних рівнянь у Maple.
2. Приклади вирішення диференціальних рівнянь та задач Коші.
 - 2.1. Модель хімічної кінетики.
 - 2.2. Моделювання вимушених коливань лінійного осцилятора.
 - 2.3. Автоколивання, рівняння Ван-дер Поля.

1 Засоби рішення звичайних диференціальних рівнянь у Maple

Основним оператором для рішення звичайних диференціальних рівнянь, так званих ODE, який входить в ядро Maple і не потребує спеціальної об'яви є команда **dsolve**. Її синтаксис може бути таким:

- `dsolve(ODE);`
- `dsolve(ODE, y(x), options);`
- `dsolve({ODE, ICs}, y(x), options).`

Параметри в дужках означають таке:

- ODE – звичайне диференціальне рівняння ODE або набір {}, чи перелік [] таких рівнянь;
- $y(x)$ – будь-яка невідома функція однієї змінної або набір {}, чи перелік [] таких функцій, які представляють шукані функції ODE;
- ICs – початкові умови у формулі $(a)=b$, $D(y)(c)=d$, ..., де {a, b, c, d} є константами по відношенню до незалежних змінних;
- options – необов'язкові опції, залежні від типу ODE задачі та використаного методу вирішення, наприклад `method=laplace`.

У якості прикладу визначимо просте диференціальне рівняння другого порядку.

```
> restart:
deq1:=diff(y(x), x$2)-2*y(x)-1=0;
```

$$deq1 := y''(x) - 2y(x) - 1 = 0. \quad (3.2.1)$$

Вирішимо рівняння (3.2.1), тобто знайдемо його загальне рішення:

```
> sol1:=dsolve(deq1, y(x));
```

$$sol1 := y(x) = e^{\sqrt{2} x} _C2 + e^{-\sqrt{2} x} _C1 - \frac{1}{2}. \quad (3.2.2)$$

Загальне рішення (3.2.2) насправді визначає безліч рішень, які відрізняються лише значеннями констант інтегрування $_C1$, $_C2$. Для виокремлення з безкінечного набору рішень деякого конкретного рішення визначимо для рівняння (3.2.1) початкові умови у вигляді:

```
> ics1:=y(0)=1, D(y)(0)=0; # Значення функції та її
першої похідної у точці x=0
```

$$ics1 := y(0) = 1, D(y)(0) = 0. \quad (3.2.3)$$

І знов застосуємо команду на вирішення, але вже з урахуванням початкових умов – вирішимо так звану задачу Коші:

```
> sol1:=dsolve({deq1, ics1}, y(x));
```

$$sol1 := y(x) = \frac{3 e^{\sqrt{2} x}}{4} + \frac{3 e^{-\sqrt{2} x}}{4} - \frac{1}{2}. \quad (3.2.4)$$

Вирішимо ту ж задачу Коші методом перетворень Лапласа:

```
> sol2:=dsolve({deq1, ics1}, y(x), method=laplace);
```

$$sol2 := y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3 \cosh(\sqrt{2} x)}{2}. \quad (3.2.5)$$

Рішення (3.2.4) та (3.2.5) на перший погляд розрізняються. Втім це одна і та сама функція в чому можна переконатися, застосовуючи тестування – команда **odetest**:

```
> odetest(sol1, [deq1, ics1]);
odetest(sol2, [deq1, ics1]);
```

$$\begin{aligned} & [0, 0, 0], \\ & [0, 0, 0]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Як видно з (3.2.6), обидві функції задовольняють вихідному диференціальному рівнянню, тобто є його рішеннями, записаними лише у різних формах.

Збудуємо графік рішення.

```
> plot(3*exp(sqrt(2)*x)*(1/4)+3*exp(-sqrt(2)*x)*(1/4)-
1/2, x=-6..6, 0..3500, thickness=3, gridlines=true,
font=[Arial,12], tickmarks=[7,7], labels=["x",
"y(x)"], labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[Arial,14]);
```

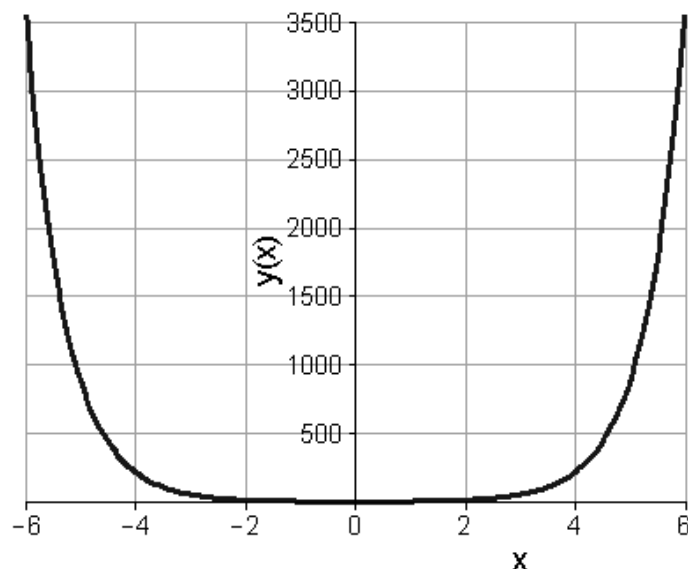


Рис. 3.2.1. Графік функції (3.2.4) – одного з рішень диференціального рівняння (3.2.1)

У тих випадках, коли застосовують числове рішення диференціального рівняння можна отримати графік такого рішення за допомогою таких опцій та команд:

```
> sol3:=dsolve({deq1,ics1}, y(x), numeric);
      sol3 := proc(x_rkf45) ... end proc .      (3.2.7)
```

Зверніть увагу, числове рішення задається у вигляді деякої процедури (3.2.7), що втім не заважає побудувати його графік так само, як це було можливо для аналітичного рішення (3.2.5), якщо скористатися командою **odeplot** з пакету команд **plots**.

```
> plots[odeplot](sol3, x=-6..6, thickness=3,
  gridlines=true, font=[Arial,12], labels=["x", "y(x)"],
  labeldirections=[horizontal, vertical],
  labelfont=[Arial,14]);
```

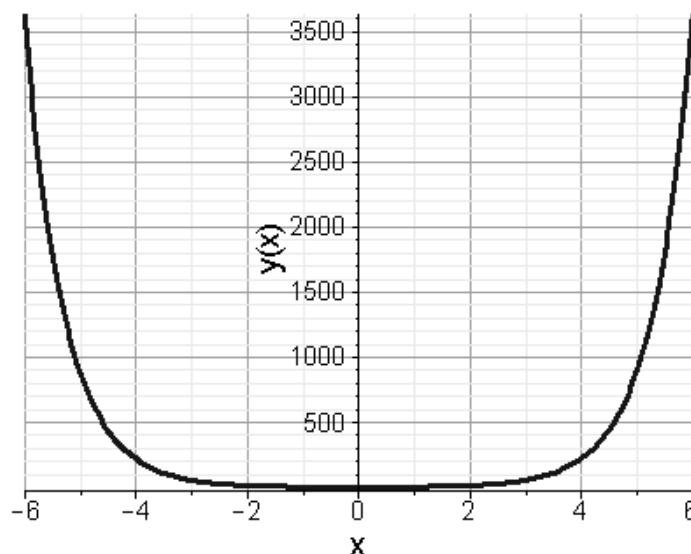


Рис. 3.2.2. Числове рішення диференціального рівняння (3.2.1)

Неважко помітити ідентичність двох графіків. Утім, команда `odeplot` працює лише з числовими рішеннями диференціальних рівнянь. Інша графічна команда **DEplot** з пакету **DEtools** дозволяє будувати графік рішення, не отримуючи попередньо самого рішення в будь-якій формі, аналітичній чи числовій, вказуючи лише саме рівняння та початкові умови. Скористуємось командою `DEplot` з пакету `DEtools`. Спочатку перепишемо початкові умови у вигляді переліку:

```
> ivs:=[y(0)=1, D(y)(0)=0];
      ivs := [y(0) = 1, D(y)(0) = 0].      (3.2.8)
> plot_s:=DEtools[DEplot](deq1, y(x), x=-6..6,
[ivs], linecolor=blue, thickness=3, font=[Arial,12]):
plots[display](plot_s, gridlines=true, labels=["x",
"y(x)"], labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[Arial,14]);
```

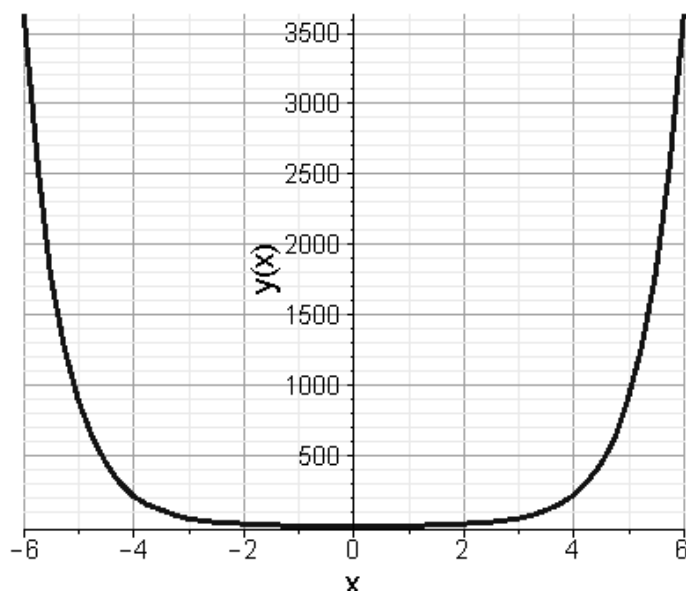


Рис. 3.2.3. Рішення диференціального рівняння (3.2.1) за допомогою графічної команди `DEplot`

Зрозуміло, що питання про те, яким саме способом будувати графік рішення диференціального рівняння, може вирішуватися з міркувань зручності користувача.

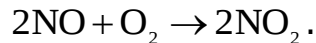
2 Приклади вирішення диференціальних рівнянь та задач Коші

2.1. Модель хімічної кінетики

Розглянемо диференціальне рівняння такого вигляду [27]:

```
> restart:
> ode1:=diff(c(t),t)=k*(a0-(c(t))^2)*(b0-c(t)/2);
      ode1 :=  $\dot{c}(t) = k \left( a_0 - c(t)^2 \right) \left( b_0 - \frac{c(t)}{2} \right).$       (3.2.9)
```

Рівняння (3.2.9) моделює кінетику хімічної реакції між двома речовинами з утворенням третьої. Зокрема, це може бути реакція утворення діоксиду азота шляхом окислення оксиду:



Для цієї реакції відомі значення констант: $k = 0.00713$, $a_0 = 4$, $b_0 = 1$. Підставимо ці значення в рівняння (3.2.9), а також запишемо початкову умову:

```
> ode1:=eval(ode1, [k=0.00713, a0=4, b0=1]);
```

$$\text{ode1} := \dot{c}(t) = 0.00713 \left(4 - c(t)^2 \right) \left(1 - \frac{c(t)}{2} \right). \quad (3.2.10)$$

```
> ics1:=c(0)=0; # Початкова концентрація на виході  
(концентрація діоксиду) є нульовою
```

$$\text{ics1} := c(0) = 0. \quad (3.2.11)$$

Далі, не вирішуючи задачі Коші (3.2.10) та (3.2.11) в аналітичному, або числовому вигляді, одразу побудуємо графік такого рішення за допомогою команди **DEtools[DEplot]**.

```
> plot_s:=DEtools[DEplot](ode1, c(t), t=0..500,  
[[ics1]], c=0..2.4, thickness=3, linecolor=black,  
font=[Arial,12], color=maroon, axes=boxed):  
plots[display](plot_s, labels=["t, sec.", "c(t)"],  
labeldirections=[horizontal, vertical],  
labelfont=[Arial,14]);
```

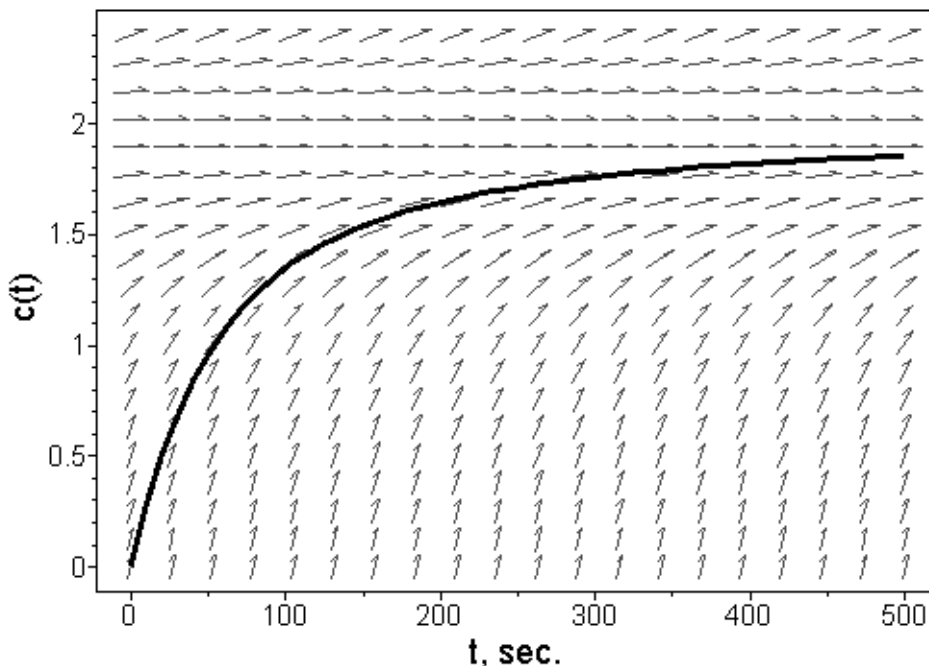


Рис. 3.2.4. Часова залежність концентрації діоксиду азота, розрахована за допомогою графічної команди DEplot

Така можливість є тим корисна, що аналітичне рішення (3.2.10) не вдається отримати, принаймні в явному вигляді [27], хоча в числовому вигляді таке рішення отримується без жодних проблем.

2.2. Моделювання вимушених коливань лінійного осцилятора

Розглянемо рівняння вимушених коливань для лінійного осцилятора в такому вигляді [28]:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\gamma \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos(\Omega t). \quad (3.2.12)$$

де $x(t)$ – зміщення від рівноважної позиції, ω_0 , Ω – відповідно частоти власних коливань та вимушуючої сили, f_0 – амплітуда вимушуючої сили, γ – коефіцієнт згасання (опору).

Запишемо рівняння (3.2.12) для лінійного осцилятора в припущенні, що рух є осцилюючим, тобто втрати на опір (згасання коливань) є відносно малими, тобто $\gamma < \omega_0$:

```
> restart;
> Eq:= diff(x(t),t,t)+ 2*gamma*diff(x(t),t)+
omega0^2*x(t)= f0*cos(Оmega*t);
assume(gamma<omega0); # Диференціальне рівняння
вимушених коливань лінійного осцилятора у припущенні
відносно малого коефіцієнту згасання
```

$$Eq := \ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos(\Omega t). \quad (3.2.13)$$

Загальним рішенням (3.2.13) є такий вираз:

```
> x_gen(t):=dsolve(Eq);
```

$$\begin{aligned} x_{gen}(t) := x(t) = & e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right) _C2 \\ & + e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right) _C1 \\ & + \frac{f_0 \left(2 \sin(\Omega t) \gamma \Omega - \cos(\Omega t) \Omega^2 + \cos(\Omega t) \omega_0^2 \right)}{\Omega^4 + 4 \Omega^2 \gamma^2 - 2 \Omega^2 \omega_0^2 + \omega_0^4} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

де $_C1$, $_C2$ – константи інтегрування. Зауважимо, що позитивність виразів під коренями у виразі (3.2.14) гарантується зробленим припущенням щодо малості згасання. Загальне рішення (3.2.14) можна представити як суму двох таких рішень:

```
> x_pr(t):=exp(-gamma*t)*sin(sqrt(-
gamma^2+omega0^2)*t)*_C2+ exp(-gamma*t)*cos(sqrt
(-gamma^2+omega0^2)*t)*_C1; # Перехідна (транзитивна)
частина рішення, яке згасає в часі
```

$$\begin{aligned} x_{pr}(t) := & e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right) _C2 \\ & + e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right) _C1 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

```
> x_reg(t):=f0*((-Omega^2+omega0^2)*cos(Оmega*t)+
2*gamma*Оmega*sin(Оmega*t))/(Omega^4+(-
2*omega0^2+4*gamma^2)*Omega^2+omega0^4); # Стаціонарні
коливання, які не згасають з часом
```

$$x_{reg}(t) := \frac{f_0 \left((-\Omega^2 + \omega_0^2) \cos(\Omega t) + 2 \sin(\Omega t) \gamma \Omega \right)}{\Omega^4 + (4 \gamma^2 - 2 \omega_0^2) \Omega^2 + \omega_0^4}. \quad (3.2.16)$$

Покажемо, що вираз (3.2.15) згасає з часом:

```
> Limit(x_pr(t), t=infinity)=limit(x_pr(t),  
t=infinity);
```

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right)_{C2} + e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} t\right)_{C1} \right) = 0. \quad (3.2.17)$$

Отже, частина рішення (3.2.15) описує так звані перехідні процеси в осцилюючій системі, тоді як вираз (3.2.16) – стаціонарні коливання. Розглянемо далі стаціонарні коливання – вираз (3.2.16). Цей вираз також можна представити сумою двох залежних від часу гармонічних факторів:

$$x_{reg}(t) = x_S(t) + x_C(t). \quad (3.2.18)$$

де перший фактор $x_S(t)$ змінюється з часом як синус, а другий $x_C(t)$ як косинус:

```
> x_S(t) := f0 * (2 * gamma * Omega * sin(Omega * t)) / (Omega^4 +  
(-2 * omega0^2 + 4 * gamma^2) * Omega^2 + omega0^4);  
x_C(t) := f0 * (-  
Omega^2 + omega0^2) * cos(Omega * t) / (Omega^4 +  
(-2 * omega0^2 + 4 * gamma^2) * Omega^2 + omega0^4);
```

$$x_S(t) := \frac{2 f_0 \sin(\Omega t) \gamma \Omega}{\Omega^4 + (4 \gamma^2 - 2 \omega_0^2) \Omega^2 + \omega_0^4}, \quad (3.2.19)$$

$$x_C(t) := \frac{f_0 (-\Omega^2 + \omega_0^2) \cos(\Omega t)}{\Omega^4 + (4 \gamma^2 - 2 \omega_0^2) \Omega^2 + \omega_0^4}.$$

Амплітуди гармонічних виразів (3.2.19) називають амплітудами абсорбції та дисипації відповідно:

```
> A_abs(Omega) := 2 * f0 * gamma * Omega / (omega0^4 +  
4 - 2 * omega0^2 * Omega^2 + 4 * Omega^2 * gamma^2 + Omega^4);  
A_dis(Omega) := f0 * (-Omega^2 + omega0^2) / (omega0^4 +  
4 - 2 * omega0^2 * Omega^2 + 4 * Omega^2 * gamma^2 + Omega^4);
```

$$A_{abs}(\Omega) := \frac{2 \gamma f_0 \Omega}{\Omega^4 + 4 \Omega^2 \gamma^2 - 2 \Omega^2 \omega_0^2 + \omega_0^4}, \quad (3.2.20)$$

$$A_{dis}(\Omega) := \frac{f_0 (-\Omega^2 + \omega_0^2)}{\Omega^4 + 4 \Omega^2 \gamma^2 - 2 \Omega^2 \omega_0^2 + \omega_0^4}.$$

Вираз (3.2.16) можна представити у тригонометричній формі:

$$x_{reg}(t) = A(\Omega) \cdot \cos(\Omega t + \phi(\Omega)), \quad (3.2.21)$$

де відповідно:

```
>
A(Omega):=simplify(sqrt((A_abs(Omega))^2+(A_dis(Omega)
)^2)); # Амплітуда стаціонарних вимушених коливань
phi(Omega):=arctan(-A_abs(Omega)/A_dis(Omega)); # Фаза
стаціонарних вимушених коливань
```

$$A(\Omega) := \sqrt{\frac{f\theta^2}{\Omega^4 + 4\Omega^2\gamma^2 - 2\Omega^2\omega\theta^2 + \omega\theta^4}}, \quad (3.2.22)$$

$$\phi(\Omega) := -\arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{-\Omega^2 + \omega\theta^2}\right).$$

Знайдемо похідну від амплітуди (3.2.22):

```
> diff(A(Omega), Omega);
```

$$-\left(f\theta^2(4\Omega^3 + 8\Omega\gamma^2 - 4\Omega\omega\theta^2)\right) /$$

$$\left(2\sqrt{\frac{f\theta^2}{\Omega^4 + 4\Omega^2\gamma^2 - 2\Omega^2\omega\theta^2 + \omega\theta^4}}(\Omega^4 + 4\Omega^2\gamma^2 - 2\Omega^2\omega\theta^2 + \omega\theta^4)^2\right) \quad (3.2.23)$$

З умови рівності похідної (3.2.23) нулю знайдемо точки екстремумів для амплітуди (3.2.22):

```
> res:=solve(diff(A(Omega), Omega)=0, Omega);
```

$$res := \left[0, \sqrt{-2\gamma^2 + \omega\theta^2}, -\sqrt{-2\gamma^2 + \omega\theta^2}\right]. \quad (3.2.24)$$

Позитивний корінь (3.2.24) звичайно називають резонансною частотою:

```
> omega_res:=res[2];
```

$$\omega_{res} := \sqrt{-2\gamma^2 + \omega\theta^2}. \quad (3.2.25)$$

Розглянемо амплітуду вимушених коливань у таких точках як-от: $\Omega = 0$, $\Omega = \omega_{res}$, $\Omega = \infty$:

```
> A(0):=eval(A(Omega), [Omega=0]);
A_res:=simplify(eval(A(Omega), [Omega=omega_res]));
A(infinity):=limit(A(Omega), Omega=infinity);
```

$$A(0) := \sqrt{\frac{f\theta^2}{\omega\theta^4}}, \quad (3.2.26)$$

$$A_{res} := \frac{\operatorname{csign}(f\theta) f\theta}{2\gamma\sqrt{-\gamma^2 + \omega\theta^2}},$$

$$A(\infty) := 0.$$

Задаємо деякі значення для параметрів осцилятора з метою побудувати відповідні графіки для амплітуд та фаз вимушених коливань:

```
> unprotect(gamma);
omega0:=0.75;
f0:=1;
gamma:=[0.05,0.075,0.1,0.125,0.15];

$$\omega_0 := 0.75, \quad (3.2.27)$$


$$f_0 := 1,$$


$$\gamma := [0.05, 0.075, 0.1, 0.125, 0.15].$$

```

```
> Omega_r:=seq(eval(sqrt(-2*gamma[i]^2+omega0^2)),
i=1..5); # Резонансні частоти згідно з виразом
(2.2.11)
```

```
Omega_r := 0.7466592262, 0.7424621202, 0.7365459931, . (3.2.28)
0.7288689869, 0.7193747285
```

Побудуємо послідовності амплітуд та фаз вимушених коливань для різних значень опору системи, визначених у (3.2.27).

```
> A(Omega):=seq(sqrt(f0^2/(omega0^4-2*omega0^2*Omega^2+4*Omega^2*gamma[i]^2+Omega^4)),
i=1..5):
> phi(Omega):= seq(-arctan(2*gamma[i]*Omega/
(-Omega^2+omega0^2)), i=1..5):
```

Зобразимо послідовності амплітуд та фаз вимушених коливань у системах із різними опором (згасанням) графічно.

```
> plot([A(Omega)], Omega=0..1.6, 0..14,
color=[red,blue,magenta,maroon, navy],
linestyle=[1,3,3,3,1], thickness=[3,2,2,2,3],
axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,12],
labels=['Omega', 'A('Omega')'], labeldirections=[horizontal, vertical], labelfont=[Arial,14],
caption='Залежність амплітуди від частоти');
```

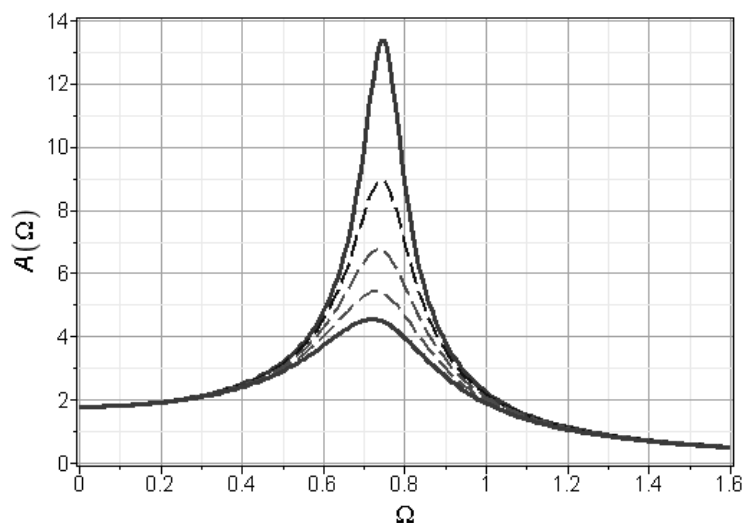


Рис. 3.2.5. Залежність амплітуди від частоти

Неважко помітити, що максимуми амплітуд припадають на резонансні частоти (3.2.28), причому максимальна амплітуда зростає для осциляторів із меншим згасанням – меншою силою опору.

```
> plot([phi(Omega)], Omega=0..1.6, -Pi/2..Pi/2,
color=[red,blue,magenta,maroon, navy],
linestyle=[1,3,3,3,1], thickness=[3,2,2,2,3],
axes=boxed, gridlines=true, font=[Arial,12],
labels=['Omega', 'phi'('Omega')], labeldirec-
tions=[horizontal, vertical], labelfont=[Arial,14],
caption='Залежність фази від частоти');
```

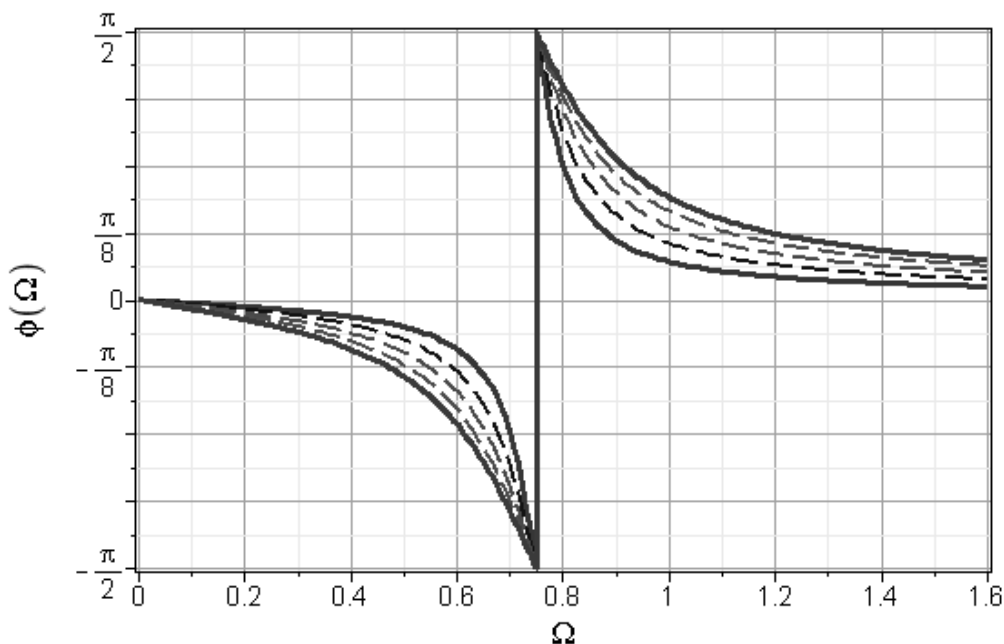


Рис. 3.2.6. Залежність фази від частоти

Зверніть увагу: фаза вимушених коливань стрибком змінюється на π (180°) під час проходження резонансної частоти.

2.3. Автоколивання, рівняння Ван-дер Поля

Сучасне визначення автоколивань є таким: автоколивання є незгасаючими коливаннями в нелінійній дисипативній системі, вигляд та властивості яких визначаються лише системою і не залежать від початкових умов. Ключовою тут є вимога незалежності автоколивань від початкових умов. Клас автоколивальних систем надзвичайно широкий:

- механічні годинники;
- радіотехнічні, електронні та квантові генератори електромагнітних коливань;
- духові та струнні музикальні інструменти;
- деякі хімічні реакції;
- певні процеси в біологічних популяціях та живих організмах тощо.

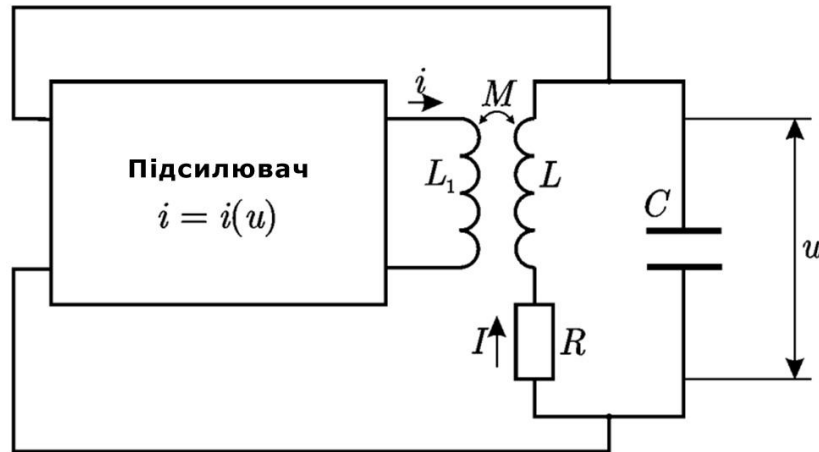


Рис. 3.2.7. Схема радіотехнічного генератора автоколиваний

На рис. 3.2.7 зображено схему генератора автоколиваний, яка складається з LRC коливального контуру, що має зворотній зв'язок через взаємну індукцію котушок L_1, L . Отримаємо з другого закону Кірхгофа для коливального контуру диференціальне рівняння, яке описує коливання в генераторі:

```
> restart;
```

```
> Kirchhoff:=L*diff(u(t), t, t)+R*diff(u(t),
```

```
t)+u(t)=M*diff(i(t), t);
```

$$Kirchhoff := L \ddot{u}(t) + R \dot{u}(t) + u(t) = M \dot{i}(t), \quad (3.2.29)$$

де $u(t)$ – напруга на конденсаторі, M – коефіцієнт взаємної індукції, решта символів позначені на рисунку. Припустимо, що вольт-амперна характеристика підсилювача є приблизно кубічно-поліноміальною:

```
> i(t):=g0*u(t)-g2*u(t)^3;
```

$$i(t) := g_0 u(t) - g_2 u(t)^3. \quad (3.2.30)$$

З урахуванням (3.2.30) рівняння (3.2.129) переходить у таку форму:

```
> Kirchhoff:=collect(Kirchhoff, diff(U(t), t),
```

```
factor);
```

$$Kirchhoff := L \ddot{u}(t) + R \dot{u}(t) + u(t) = -M \dot{u}(t) (3 u(t)^2 g_2 - g_0). \quad (3.2.31)$$

Або в такому еквівалентному вигляді:

```
> Kirchhoff:=L*(diff(u(t), t, t))+(R+3*M*g2*u(t)^
```

```
2-M*g0)*(diff(u(t), t))+u(t)=0;
```

$$Kirchhoff := L \ddot{u}(t) + (R + 3 M g_2 u(t)^2 - M g_0) \dot{u}(t) + u(t) = 0. \quad (3.2.32)$$

Умовою самозбудження генератору є умова від'ємного коефіцієнту згасання, тобто:

$$R + M(3g_2 \cdot u(t)^2 - g_0) < 0. \quad (3.2.33)$$

Вводячи такі позначення $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \tau = \omega_0 t,$

$x(\tau) = u \sqrt{3\omega_0 \cdot M \cdot g_2}$, можна привести рівняння (3.2.32) до вигляду:

```
> vdp:=diff(x(tau), tau, tau)-
(lambda-x(tau)^2)*diff(x(tau), tau)+x(tau)=0;
```

$$vdp := \frac{d^2}{d\tau^2} x(\tau) - (\lambda - x(\tau)^2) \left(\frac{d}{d\tau} x(\tau) \right) + x(\tau) = 0. \quad (3.2.34)$$

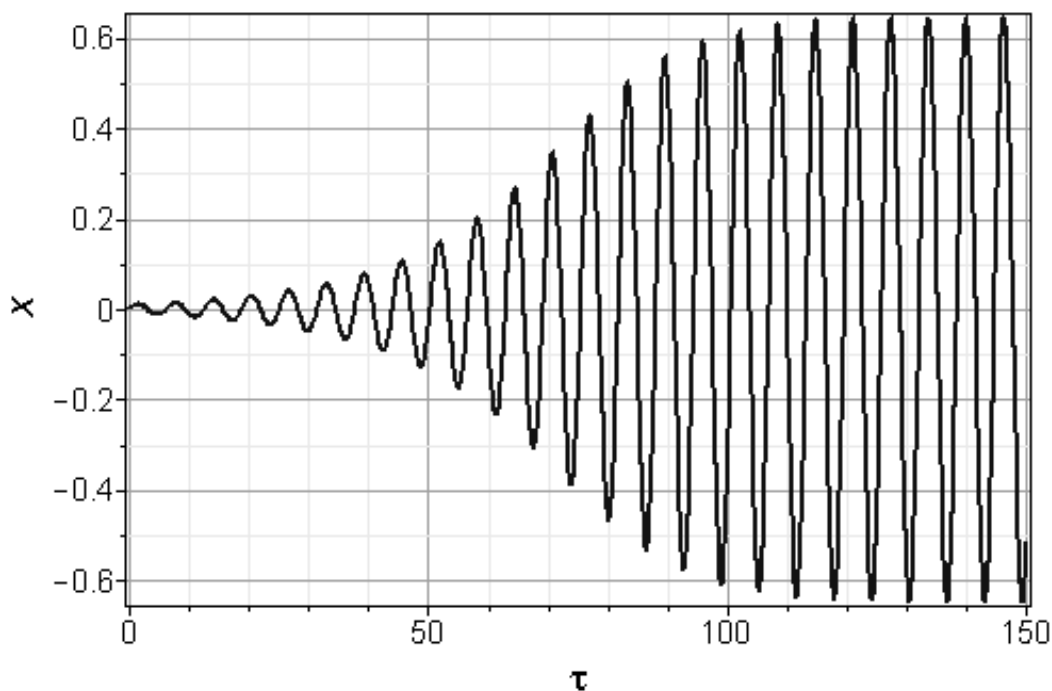
Розглянемо початкові умови, які передбачають нульову напругу і практично нульову швидкість її зміни:

```
> ics:=x(0)=0, D(x)(0)=1e-2;
ics := x(0) = 0, D(x)(0) = 0.01. \quad (3.2.35)
```

Вигляд рішення та фазового портрету рівняння (3.2.34) суттєво залежить від параметра λ . Розглянемо декілька різних значень цього параметра.

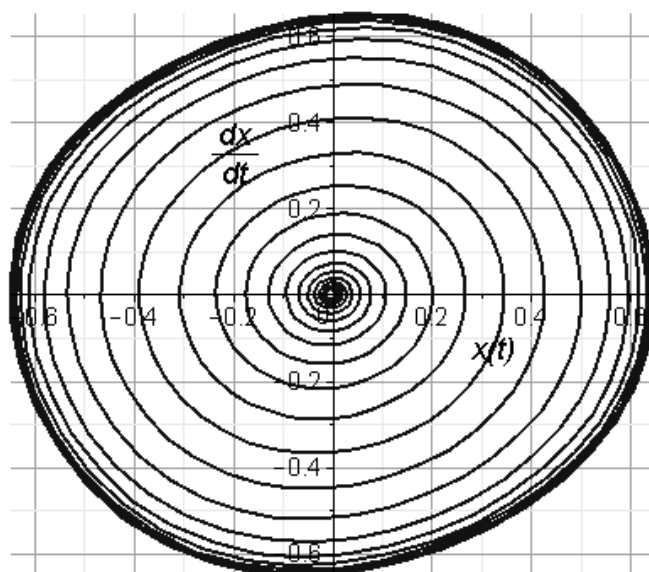
-1- $\lambda = 0.1$

```
> lambda:=0.1:
res:=dsolve({vdp,ics}, x(tau), type=numeric,
method=classical, output=listprocedure):
> plots[odeplot](res, [tau,x(tau)], 0..150,
numpoints=1000, thickness=2, axes=boxed, color=blue,
font=[Arial,12], gridlines=true, labels=['tau','x'],
labeldirections=[horizontal, vertical],
labelfont=[Arial,14]);
```



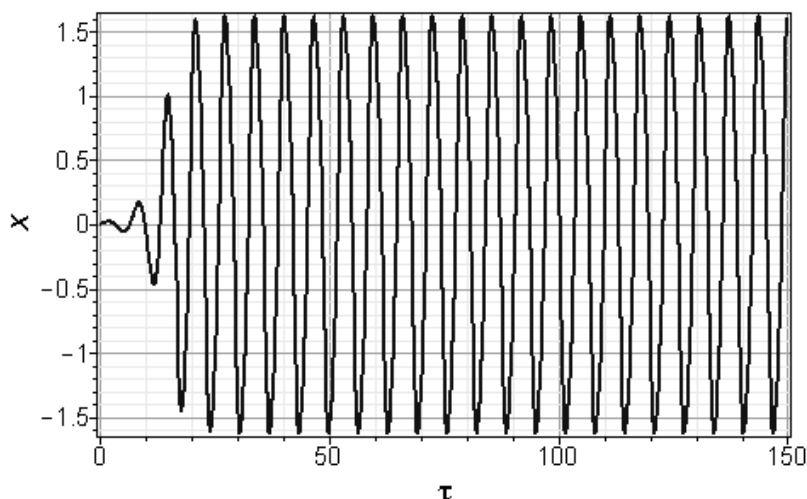
**Рис. 3.2.8. Графік $x(t)$ –
рішення рівняння (3.2.34) при $\lambda = 0.1$**

```
> plots[odeplot](res, [x(tau), D(x)(tau)], 0..150,
numpoints=1000, thickness=2, color=blue,
font=[Arial,12], gridlines=true, labels=['x(t)',
'dx/dt'], labeldirections=[horizontal, horizontal],
labelfont=[Arial,14]);
```

Рис. 3.2.9. Фазовий портрет рівняння (3.2.34) при $\lambda = 0.1$

-2- $\lambda = 0.65$

```
> lambda:=0.65:
res:=dsolve({vdp,ics}, x(tau), type=numeric,
method=classical, output=listprocedure):
> plots[odeplot](res, [tau,x(tau)], 0..150,
numpoints=1000, thickness=2, font=[Arial,12],
gridlines=true, axes=boxed, color=blue,
labels=['tau','x'], labeldirections=[horizontal,
vertical], labelfont=[Arial,14]);
```

Рис. 3.2.10. Графік $x(t)$ –
рішення рівняння (3.2.34) при $\lambda = 0.65$

```
> plots[odeplot](res, [x(tau),D(x)(tau)], 0..150,
numpoints=1000, thickness=2, font=[Arial,12],
gridlines=true, axes=normal, tickmarks=[8,6],
color=blue, labels=['x(t)','dx/dt'], labeldirections=
[horizontal, horizontal], labelfont=[Arial,14]);
```

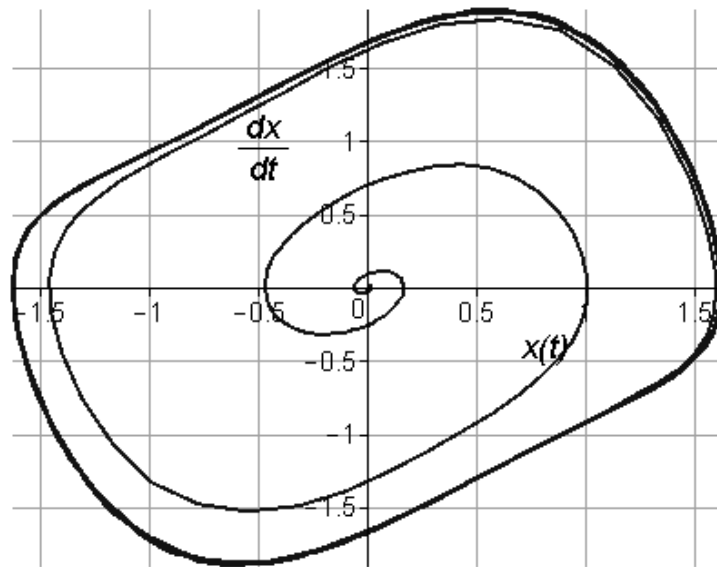


Рис. 3.2.11. Фазовий портрет рівняння (3.2.34) при $\lambda = 0.65$

-3- $\lambda = 5.0$

```
> lambda:=5.0:
res:=dsolve({vdp,ics}, x(tau), type=numeric,
method=classical, output=listprocedure):
> plots[odeplot](res, [tau,x(tau)], 0..50,
numpoints=1000, thickness=2, font=[Arial,12],
gridlines=true, axes=boxed, color=blue, la-
bels=[`tau`,`x`], labeldirections=[horizontal,
vertical], labelfont=[Arial,14]);
```

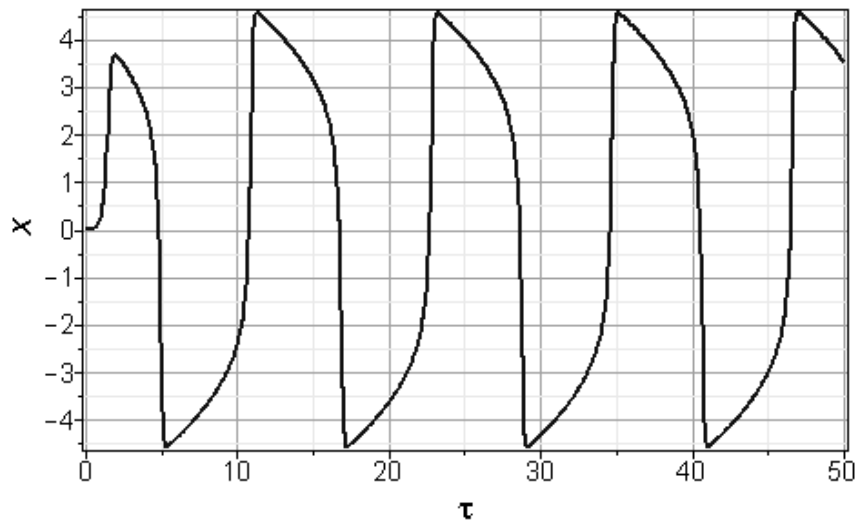


Рис. 3.2.12. Графік $x(t)$ –
рішення рівняння (3.2.34) при $\lambda = 5.0$

```
> plots[odeplot](res, [x(tau), D(x)(tau)], 0..50,
numpoints=1000, thickness=2, font=[Arial,12],
gridlines=true, axes=normal, tickmarks=[8,6],
color=blue, labels=[`x(t)`,'dx/dt'], labeldirections=
[horizontal, horizontal], labelfont=[Arial,14]);
```

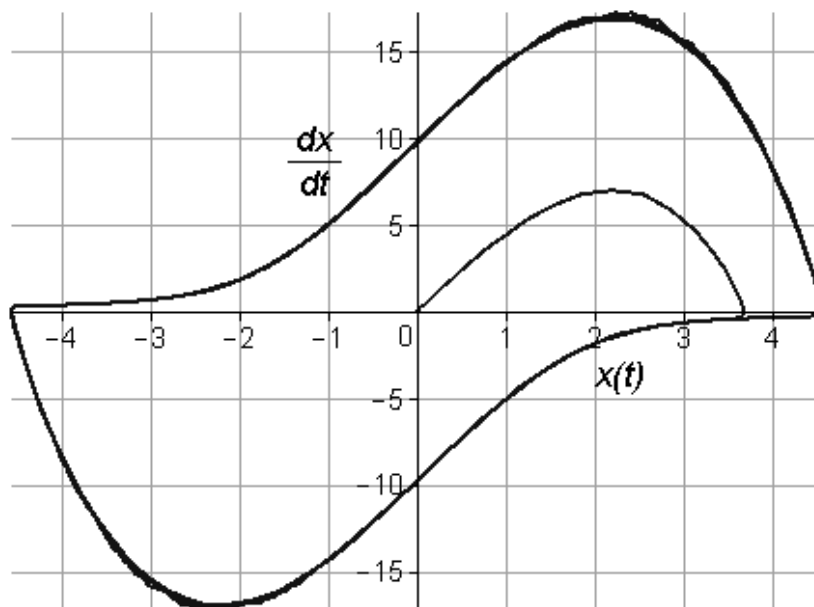


Рис. 3.2.13. Фазовий портрет рівняння (3.2.34) при $\lambda = 5.0$

Позитивні значення параметра λ відповідають умові самозбудження генератора, який залежно від величини цього параметра більш або менш швидко виходить у режим стаціонарних автоколивань.

Лабораторна робота 3

Системи диференціальних рівнянь та моделі на їх основі

1. Методика знаходження рішень систем диференціальних рівнянь у Maple.
2. Приклади моделей заданих системами диференціальних рівнянь.
 - 2.1. Приклади простих моделей, які описуються системами диференціальних рівнянь.
 - 2.2. Генератор Ван-дер Поля.

1 Методика знаходження рішень систем диференціальних рівнянь у Maple

Методика отримання рішень систем диференціальних рівнянь у Maple багато в чому схожа на методику вирішення окремих ODE. Синтаксис основної команди є таким:

`dsolve(ODE_sys, optional_1, optional_2,..)`

де

- ODE_sys – система ODE може також містити нерівності;
- options – необов'язкові опції, які подаються у певному порядку і описані нижче:
- **funcs** – набір {}, або перелік [] невідомих функцій, або їх імен;
- **explicit** – вимога організації наборів рішень, виникаючих у випадку нелінійних систем диференціальних рівнянь;
- **useInt** – вимога показу інтегралів у рішенні в пасивній формі замість спроб їх прямого інтегрування;
- **singsol=false** – відмова від обчислення сингулярних рішень для нелінійних систем;
- **mindim=N** – відмова від обчислення рішень із розмірністю меншою від вказаної.

У разі успіху у випадку лінійних систем команда **dsolve** повертає набір простих рішень із невідомими функціями незалежних змінних. Розглянемо такий простий приклад лінійної системи з двох диференціальних рівнянь для двох невідомих функцій часу:

```
> restart;
> ode_sys1:=[diff(x(t), t)=y(t), diff(y(t), t)=-x(t)];
ode_sys1 := [\dot{x}(t) = y(t), \dot{y}(t) = -x(t)]. (3.3.1)
```

```
> sol1:=dsolve(ode_sys1);
sol1 := {x(t) = _C1 sin(t) + _C2 cos(t), y(t) = _C1 cos(t) - _C2 sin(t)} (3.3.2)
```

Рішення системи диференціальних рівнянь (3.3.2) може бути перевірене (верифіковане) за допомогою команди:

```
> odetest(sol1, ode_sys1);
[0, 0]. (3.3.3)
```

Розглянемо тепер нелінійну систему з трьох рівнянь:

```
> ode_sys2:=[diff(f(t), t)=cos(f(t)), diff(g(t), t)=-f(t)^(1/2), diff(h(t), t, t)=g(t)/f(t)];
ode_sys2 := [\dot{f}(t) = \cos(f(t)), \dot{g}(t) = -\sqrt{f(t)}, \ddot{h}(t) = \frac{g(t)}{f(t)}]. (3.3.4)
```

```
> sol2:=dsolve(ode_sys2);
```

$$sol2 := \left[\left\{ f(t) = \arctan \left(\frac{e^{2t} C4^2 - 1}{e^{2t} C4^2 + 1}, \frac{2 e^t C4}{e^{2t} C4^2 + 1} \right) \right\}, \left\{ g(t) = \int -\sqrt{f(t)} dt + C3 \right\}, \left\{ h(t) = \iint \frac{g(t)}{f(t)} dt dt + C1 t + C2 \right\} \right] \quad (3.3.5)$$

У рішенні (3.3.5) функція $f(t)$ – задана як елементарна функція незалежного аргументу, тоді як функція $g(t)$ задана як вираз залежний від t та $f(t)$, а функція $h(t)$ як вираз від t , $f(t)$ та $g(t)$.

Отже, знаходження цих двох функцій у явному вигляді потребує додаткових зусиль, зокрема інтегрування відповідних виразів із (3.3.5). Утім і такий вигляд розв'язку може бути верифікований:

```
| > odetest(sol2, ode_sys2);
```

$$[0, 0, 0]. \quad (3.3.6)$$

Для отримання рішення системи (3.3.4) у більш зручній формі можна застосувати необов'язкову опцію **explicit**:

```
| > sol22:=dsolve(ode_sys2, explicit);
```

$$sol22 := \left\{ \begin{aligned} f(t) &= \arctan\left(\frac{e^{2t}C4^2 - 1}{e^{2t}C4^2 + 1}, \frac{2e^tC4}{e^{2t}C4^2 + 1}\right), g(t) = \\ &= -\sqrt{\arctan\left(\frac{e^{2t}C4^2 - 1}{e^{2t}C4^2 + 1}, \frac{2e^tC4}{e^{2t}C4^2 + 1}\right)} t + C3, h(t) = \\ &= \frac{-\sqrt{\arctan\left(\frac{e^{2t}C4^2 - 1}{e^{2t}C4^2 + 1}, \frac{2e^tC4}{e^{2t}C4^2 + 1}\right)} t + C3}{\arctan\left(\frac{e^{2t}C4^2 - 1}{e^{2t}C4^2 + 1}, \frac{2e^tC4}{e^{2t}C4^2 + 1}\right)} t t \\ &\quad + C1 t + C2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.7)$$

Порівнюючи рішення (3.3.7) та (3.3.5) можна побачити, що функція $g(t)$ тепер задається лише як функція часу, тоді як вираз для $h(t)$ все ще потребує подальшого подвійного інтегрування.

```
| > odetest(sol22, ode_sys2);
```

$$[0, 0, 0]. \quad (3.3.8)$$

Досвід підказує, що найбільш інформативними і не перевантаженими деталями математичними моделями є системи диференціальних рівнянь із двох-трьох рівнянь. Окрім того, системи, які складаються з двох рівнянь першого порядку еквівалентні одному диференціальному рівнянню другого порядку, а такі рівняння надзвичайно часто трапляються в моделях фізичних та технічних систем.

2 Приклади моделей, заданих системами диференціальних рівнянь

2.1. Приклади простих моделей, які описуються системами диференціальних рівнянь

Зосередимо увагу на системах, у яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих функцій. Приклад такої системи двох рівнянь першого порядку відносно двох невідомих функцій $x(t)$, $y(t)$ в загальному вигляді можна записати так:

$$f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \quad g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \quad (3.3.9)$$

де функції f , g вважаються відомими. Рішенням такої системи є пара функцій $x(t)$, $y(t)$ така, що після її підстановки в рівняння (3.3.9) ці рівняння обертаються в тотожність.

2.1.1. Приклад задачі механіки: подвійний осцилятор

Наведемо приклад системи рівнянь другого порядку з механіки. Для цього розглянемо частинку маси m , яка рухається у векторному силовому полі $\vec{F}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$, яке залежить від часу, координат та швидкостей. З другого закону Ньютона отримаємо систему з трьох скалярних диференціальних рівнянь такого вигляду:

```
> restart:
> Newton := [m*diff(x(t), t, t) = Fx(t, x, y, z,
diff(x(t), t), diff(y(t), t), diff(z(t), t)),
m*diff(y(t), t, t) = Fy(t, x, y, z,
diff(x(t), t), diff(y(t), t), diff(z(t), t)),
m*diff(z(t), t, t) = Fz(t, x, y, z,
diff(x(t), t), diff(y(t), t), diff(z(t), t))]; # Система
трьох диференціальних рівнянь другого порядку, яка
моделює рух частинки в силовому полі
```

$$Newton := [m \ddot{x}(t) = F_x(t, x, y, z, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), m \ddot{y}(t) = F_y(t, x, y, z, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), m \ddot{z}(t) = F_z(t, x, y, z, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))] \quad (3.3.10)$$

Розглянемо систему двох мас на двох пружинках, показану на рис. 3.3.1, де зовнішня сила $f(t)$ діє лише на друге тіло, а також відмічені позиції рівноваги для кожного з тіл.

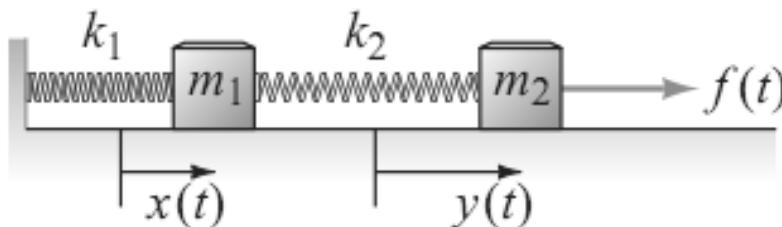


Рис. 3.3.1. Система тіл на пружині

На рис. 3.3.1 перша пружина розтягнена на $x(t)$, тоді як друга на $y(t) - x(t)$. Отже, з другого закону Ньютона маємо:

```

> restart:
> sys1:=m1*diff(x(t), t$2)=-k1*x(t)+k2*(y(t)-x(t)),
m2*diff(y(t), t$2)=-k2*(y(t)-x(t))+f(t);
sys1 := m1  $\ddot{x}(t) = -k1 x(t) + k2 (y(t) - x(t))$ , m2  $\ddot{y}(t) = -k2 (y(t) - x(t)) + f(t)$  . (3.3.11)

```

Загальне рішення системи (3.3.11) надзвичайно громіздке. Оцінимо його властивості для деяких числових параметрів та за нульових початкових умов:

```

> sys1:=eval(sys1,
[m1=2,m2=1,k1=4,k2=2,f(t)=40*sin(3*t)]);
sys1 := 2  $\ddot{x}(t) = -6 x(t) + 2 y(t)$ ,  $\ddot{y}(t) = -2 y(t) + 2 x(t) + 40 \sin(3 t)$  . (3.3.12)

```

```

> ics1:=x(0)=0, D(x)(0)=0, y(0)=0, D(y)(0)=0;
ics1 := x(0) = 0, D(x)(0) = 0, y(0) = 0, D(y)(0) = 0 . (3.3.13)

```

```

> sol1:=dsolve([sys1, ics1]);
sol1 := {x(t) = sin(3 t) + 5 sin(t) - 4 sin(2 t), y(t) = -6 sin(3 t) + 10 sin(t) + 4 sin(2 t)} . (3.3.14)

```

```

> odetest(sol1, sys1);
0 . (3.3.15)

```

Зобразимо рішення (3.3.14) графічно, користуючись можливостями команд **DEtools[DEplot]** та **plots[display]**.

```

> g1:=DEtools[DEplot]([sys1], [x(t), y(t)],
t=-5*Pi..5*Pi, [[x(0)=0, D(x)(0)=0, y(0)=0,
D(y)(0)=0]], linecolor=[red], scene=[t, x(t)],
numpoints=1000, thickness=3, title='',
font=[Arial,14]): # Побудова графіку функції x(t)
g2:=DEtools[DEplot]([sys1], [x(t), y(t)], t=-
5*Pi..5*Pi, [[x(0)=0, D(x)(0)=0, y(0)=0, D(y)(0)=0]],
linecolor=[blue], scene=[t, y(t)], numpoints=1000,
thickness=2, title='', font=[Arial,14], linestyle=3):
# Побудова графіку функції y(t)
> plots[display](g1, g2, axes=boxed, gridlines=true,
labels=["t", "x(t), y(t)"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical], title='Рис. 2.
Зміщення тіл m1,m2 як функції часу'); # Суцільною
лінію червоного кольору показане зміщення першого
тіла, пунктирною (синій колір) - другого тіла

```

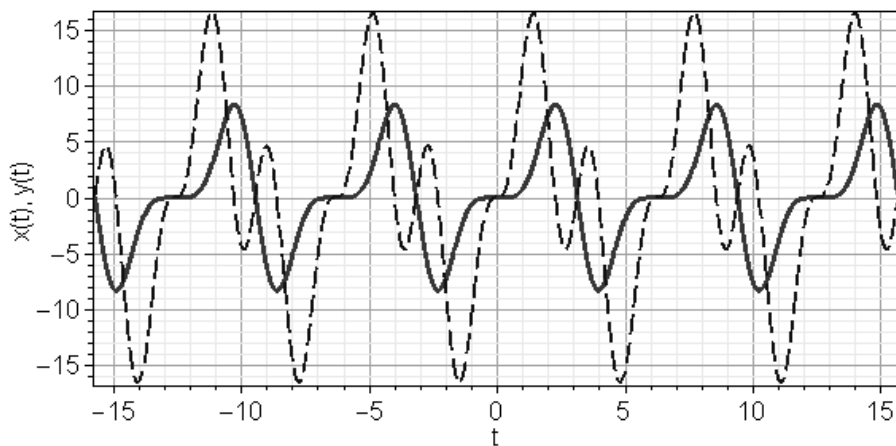


Рис. 3.3.2. Зміщення системи тіл m_1 та m_2 як функції часу

2.1.2. Модель простої гідросистеми

Розглянемо просту гідросистему з двох баків (резервуарів), які містять розчини солі різної концентрації і з'єднані так, як показано на рис. 3.3.3. Соляний розчин у кожному баку ретельно перемішується, отже, є практично однорідним.

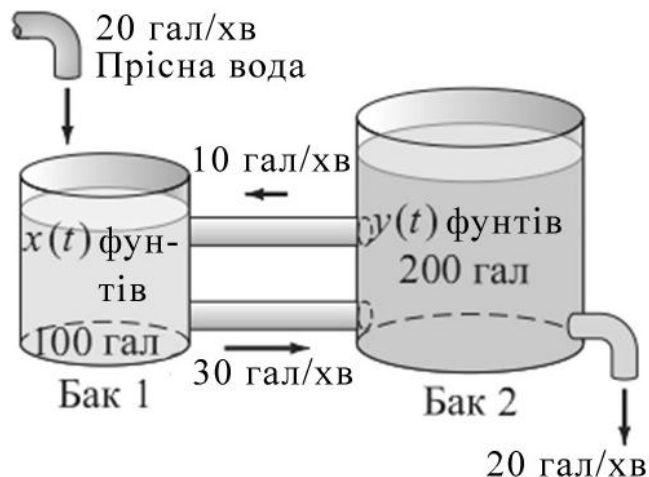


Рис. 3.3.3. Схема та параметри гідросистеми

Оскільки в систему поступає щохвилини 20 галонів води у перший бак, щохвилини в другий бак поступає така ж кількість розчину, і витікає стільки ж галонів соляного розчину з другого баку, то об'єми рідин у кожному з баків є незмінними (100 галонів та 200 галонів відповідно). Концентрація солі в кожному баці дорівнює $\frac{x(t)}{100}$ та $\frac{y(t)}{200}$ відповідно. Обчислимо швидкість зміни концентрації в кожному з баків і отримаємо систему з двох диференціальних рівнянь першого порядку такого вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{30x}{100} + \frac{10y}{200}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{30x}{100} - \frac{10y}{200} - \frac{20y}{200}. \quad (3.3.16)$$

Перепишемо систему рівнянь спростивши її:

```
> restart:
> sys2:=diff(x(t),t)=-0.3*x(t)+0.05*y(t),
diff(y(t),t)=0.3*x(t)-0.15*y(t);
sys2 :=  $\dot{x}(t) = -0.3 x(t) + 0.05 y(t), \dot{y}(t) = 0.3 x(t) - 0.15 y(t)$ . (3.3.17)
```

Задамо також певні початкові умови для концентрацій солі в баках, ці умови можна при нагоді й поміняти:

```
> ics2:=x(0)=0.12, y(0)=0.02;
ics2 :=  $x(0) = 0.12, y(0) = 0.02$ . (3.3.18)
```

Отримуємо рішення системи рівнянь (3.3.17) з урахуванням початкових концентрацій (3.3.18):

```
> sol2:=simplify(dsolve([sys2,ics2]));
```

$$sol2 := \left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{3 e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{50} - \frac{4 e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{825} \\ &+ \frac{3 e^{-\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{50} + \frac{4 e^{-\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{825}, y(t) \\ &= \frac{e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{44} + \frac{e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{100} \\ &- \frac{e^{-\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{44} + \frac{e^{-\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{100} \end{aligned} \right\} . (3.3.19)$$

Як завжди, графічне відображення аналітичного виразу (3.3.19) може бути корисним і наочним:

```
> gr1:=DEtools[DEplot]([sys2], [x(t), y(t)], t=0..20,
[[ics2]], linecolor=[red], scene=[t, x(t)],
thickness=3, title='', font=[Arial,14]): # Побудова
графіку функції x(t)
gr2:=DEtools[DEplot]([sys2], [x(t),y(t)], t=0..20,
[[ics2]], linecolor=[blue], scene=[t, y(t)],
thickness=3, title='', font=[Arial,14], linestyle=3):
# Побудова графіку функції y(t)
> plots[display](gr1,gr2,axes=boxed, gridlines=true,
labels=["t", "x(t), y(t)"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical], title='Рис. 4.
Зміни концентрації солі \n у баках як функції часу');
# Суцільною лінію червоного кольору показане зміщення
першого тіла, пунктирною (синій колір) - другого тіла
```

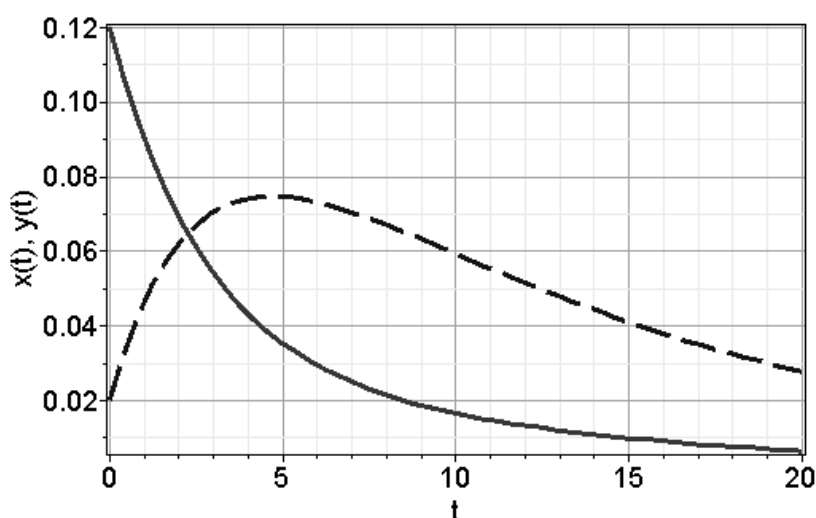


Рис. 3.3.4. Зміни концентрації солі в баках як функції часу

Із графіку на рис. 3.3.4 видно, що концентрація солі в першому бакові (суцільна червона крива) монотонно зменшується в часі, тоді як розчин, який витікає з другого баку приблизно до п'ятої хвилини збагачується сіллю, але потім також монотонно зменшує концентрацію солі.

Проточна вода потроху промиває обидва баки системи, в чому можна перекопати знайшовши асимптоти обох рішень системи (3.3.19) за умови $t \rightarrow \infty$, іншими словами знайдемо значення $x(\infty)$, $y(\infty)$:

$$\begin{aligned} & \text{> Limit(rhs(sol2[1]), t=infinity)=limit(rhs(sol2[1]),} \\ & \quad \text{t=infinity);} \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3 e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{50} - \frac{4 e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{825} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 e^{\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{50} + \frac{4 e^{\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{825} \right) = 0 \end{aligned} \quad , \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} & \text{> Limit(rhs(sol2[2]), t=infinity)=limit(rhs(sol2[2]),} \\ & \quad \text{t=infinity);} \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{44} + \frac{e^{\frac{(-9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{100} \right. \\ & \quad \left. - \frac{e^{\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}} \sqrt{33}}{44} + \frac{e^{\frac{(9 + \sqrt{33}) t}{40}}}{100} \right) = 0 \end{aligned} \quad . \quad (3.3.21)$$

Отже, через деякий більш довгий інтервал часу в систему на рис. 3.3.3 поступатиме і виходитиме з неї абсолютно чиста вода.

2.2. Генератор Ван-дер Поля

2.2.1. Теоретичні результати

Генератор Ван-дер-Поля [1] вже розглядався в попередній лабораторній роботі (див. п. 2.3). Тоді для його опису було отримане таке диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x(\tau) - (\lambda - x(\tau)^2) \left(\frac{d}{d\tau} x(\tau) \right) + x(\tau) = 0. \quad (3.3.22)$$

Знайдемо тепер еквівалентну цьому рівнянню систему з двох диференціальних рівнянь першого порядку стандартним шляхом:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = y(\tau) = P(x, y, \lambda). \quad (3.3.23)$$

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = (\lambda - x(\tau)^2)y(\tau) - x(\tau) = Q(x, y, \lambda). \quad (3.3.24)$$

Рівняння (3.3.23) системи рівнянь є просто позначенням для першої похідної від невідомої функції, а друге (3.3.24) – є рівнянням (3.3.22), яке записане з урахуванням введеного в рівнянні (3.3.23) позначення. Прирівнюючи нулю праві частини рівнянь (3.3.23) і (3.3.24), знаходимо координати особливої (критичної) точки на фазовій площині (x, y) , яка знаходиться на початку координат:

$$(x^0, y^0) = (0, 0). \quad (3.3.25)$$

Лінеаризуємо систему рівнянь (3.3.23)-(3.3.24), будуючи детермінант Якобі:

$$J(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial P(x^0, y^0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x^0, y^0)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x^0, y^0)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (3.3.26)$$

Власні значення матриці (3.3.26) визначають стійкість системи рівнянь Ван-дер Поля. Характеристичне рівняння матриці Якобі має простий вигляд:

$$\begin{aligned} & \text{> restart;} \\ & \text{eq} := -s * (\text{lambda} - s) + 1 = 0; \\ & \text{eq} := -s(\lambda - s) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Його рішення такі:

$$\begin{aligned} & \text{> s := solve(eq, s);} \\ & s := \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Розглянемо стійкість системи рівнянь (3.3.23)-(3.3.24) для різних діапазонів безрозмірного параметра λ :

- за умови $\lambda < -2$ обидва корені (3.3.28) – дійсні та від'ємні числа, особлива точка (3.3.25) являє собою стійкий вузол;
- за умови $-2 < \lambda < 0$ обидва корені є комплексно спряженими числами з від'ємною дійсною частиною, особлива точка (3.3.25) в такому випадку – стійкий фокус;
- за умови $0 < \lambda < 2$ обидва корені – комплексно спряжені числа з позитивною дійсною частиною, особлива точка (3.3.25) є нестійким фокусом;
- за умови $\lambda > 2$ обидва корені є дійсними та позитивними числами, особлива точка (3.3.25) є нестійким вузлом.

Зверніть увагу, що за умови $\lambda = 0$ виконується умова так званої **біфуркації** Андронова-Хопфа, через те, що обидва корені (3.3.28) стають суто уявними, тобто мають нульову дійсну частину, з різними знаками.

2.2.2. Числові експерименти з моделлю

Запишемо систему рівнянь (3.3.23)-(3.3.24) вхідною мовою Maple:

```
> restart:
> vdP:=diff(x(tau),tau)=y(tau),
diff(y(tau),tau)=(lambda-x(tau)^2)*y(tau)-x(tau);
vdP :=  $\frac{d}{d\tau} x(\tau) = y(\tau), \frac{d}{d\tau} y(\tau) = (\lambda - x(\tau)^2) y(\tau) - x(\tau)$ . (3.3.29)
```

```
> ivs:=x(0)=0, y(0)=1e-2; # Майже нульові початкові
умови
```

$$ivs := x(0) = 0, y(0) = 0.01. \quad (3.3.30)$$

Дослідимо рішення системи (3.3.23)-(3.3.24) та їх фазові портрети залежно від величини та знаку безрозмірного параметра λ , користуючись графічними можливостями команди DEtools [DEplot], яка не потребує аналітичного рішення нелінійної системи рівнянь.

Аперіодичний режим (відсутність коливань) $\lambda < -2$.

```
> lambda:=-2.1:
gr1:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=medium, size=magnitude, linecolor=blue,
scene=[tau,x(tau)], labels=['tau', x('tau')],
labelfont=[Arial,14], font=[Arial,14], title='van der
Pol oscillator, x(t)'):
gr2:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=curve, size=magnitude,
linecolor=blue, axes=boxed, labels=["x", "y"],
labelfont=[Arial,14], font=[Arial,14], title='van der
Pol oscillator, phase portrait'):
> r1:=array(1..2, [gr1,gr2]):
plots[display](r1, labeldirections=[horizontal,
vertical]);
```

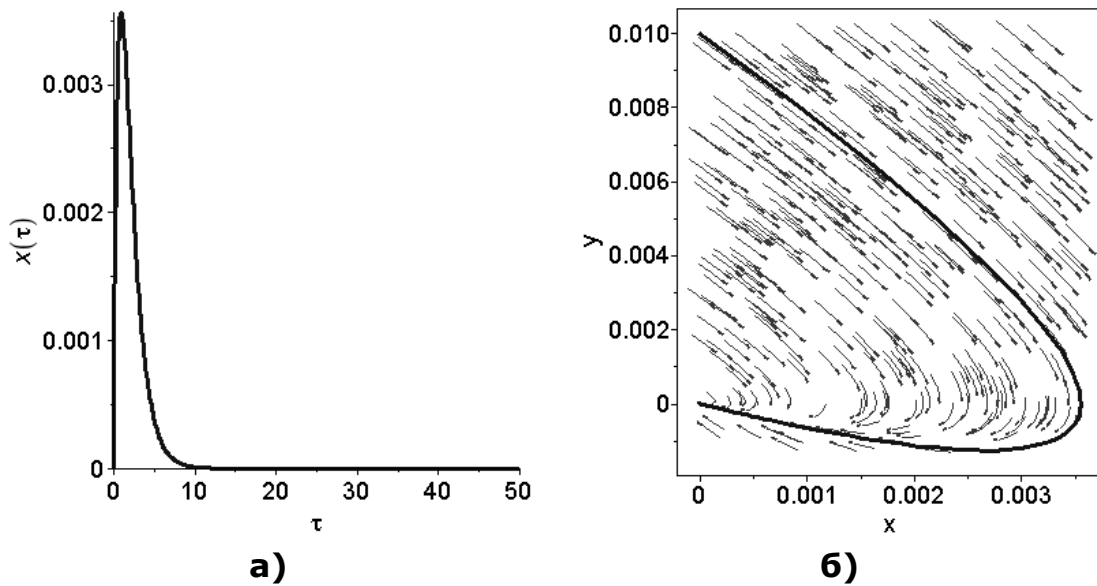


Рис. 3.3.5. Графік $x(\tau)$ (а) та фазовий портрет (б) коливань у генераторі Ван-дер Поля при $\lambda = -2.1$

За такого значення параметра $\lambda < 0$ умова самозбудження генератора не виконується і коливання в генераторі не виникають. Фазовий портрет демонструє аперіодичне наближення зображеної точки з початкової точки (3.3.30) з координатами $(0, 0.01)$ до стійкого вузлу з координатами $(0, 0)$.

Режим згасаючих коливань $-2 < \lambda < 0$.

```
> lambda:=-0.4:
gr1:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=medium, size = magnitude, linecolor=blue,
scene=[tau,x(tau)], font=[Arial,14], labels=['tau',
x('tau')], labelfont=[Arial,14], title='van der Pol
oscillator, x(t)'):
gr2:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=curve, size=magnitude, linecolor=blue,
axes=boxed, font=[Arial,14], labels=["x", "y"],
labelfont=[Arial,14], title='van der Pol oscillator,
phase portrait'):
> r1:=array(1..2,[gr1,gr2]):
plots[display](r1, labeldirections=[horizontal,
vertical]);
```

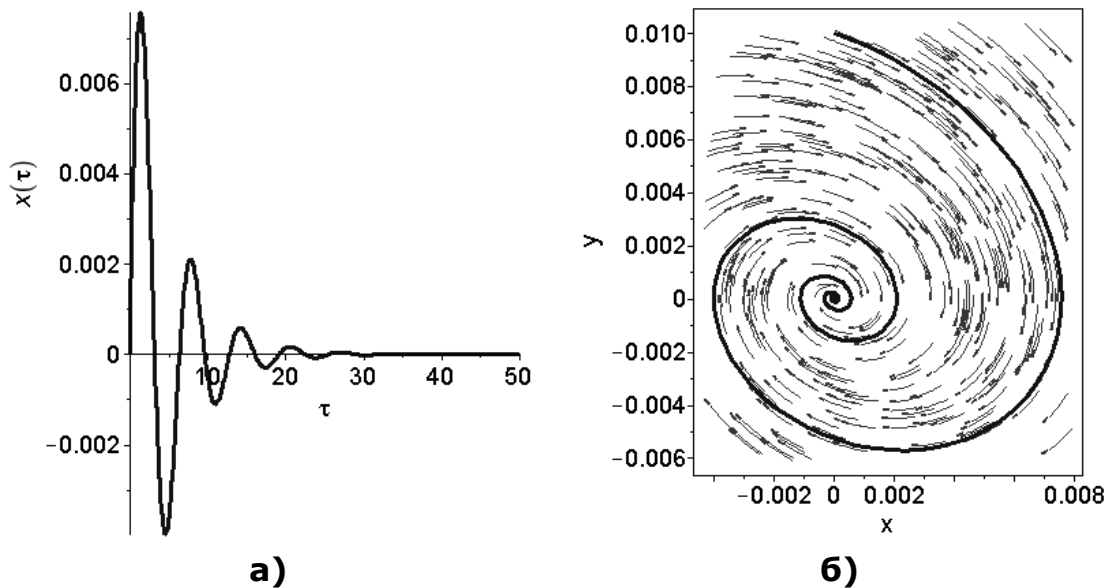


Рис. 3.3.6. Графік $x(\tau)$ (а) та фазовий портрет (б) коливань у генераторі Ван-дер Поля при $\lambda = -0.4$

У такому режимі умови самозбудження не виконуються і спостерігаються згасаючі коливання. Фазова траєкторія демонструє спіральну еволюцію системи з початкової точки до стійкого вузла в критичній точці $(0,0)$.

Точка біфуркації Андронова-Хопфа $\lambda = 0$.

```
> lambda:=0:
gr1:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=medium, size=magnitude, linecolor=blue,
scene=[tau,x(tau)], font=[Arial,14], labels=['tau',
x('tau')], labelfont=[Arial,14], title='van der Pol
oscillator, x(t)'):
gr2:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=curve, size=magnitude, linecolor=blue,
axes=boxed, font=[Arial,14], labels=["x", "y"],
labelfont=[Arial,14], title='van der Pol oscillator,
phase portrait'):
> r1:=array(1..2,[gr1,gr2]):
plots[display](r1, labeldirections=[horizontal,
vertical]);
```

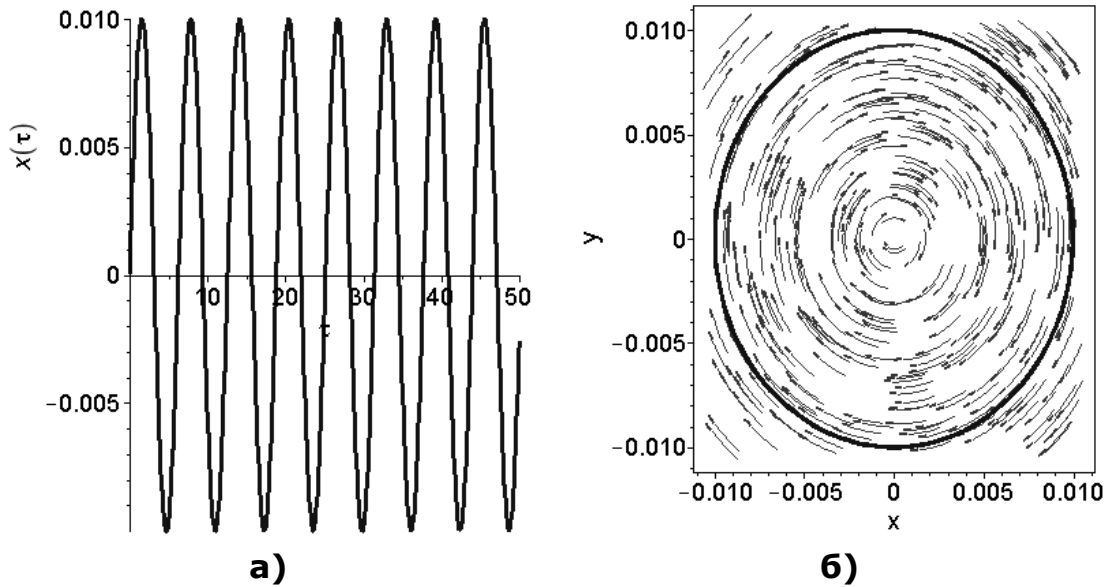


Рис. 3.3.7. Графік $x(\tau)$ (а) та фазовий портрет (б) коливань у генераторі Ван-дер Поля при $\lambda = 0$

Генератор збуджується і демонструє гармонічні незгасаючі коливання. Фазова траєкторія демонструє замкнений цикл у вигляді еліпсу з нестійким центром у критичній точці.

Режим м'якого збудження $0 < \lambda < 2$.

```
> lambda:=0.4:
gr1:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=medium, size=magnitude, linecolor=blue,
scene=[tau,x(tau)], font=[Arial,14], labels=['tau',
x('tau')], labelfont=[Arial,14], title='van der Pol
oscillator, x(t)'):
gr2:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau= 0.. 50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=curve, size=magnitude, linecolor=blue,
axes=boxed,font=[Arial,14], labels=["x", "y"],
labelfont=[Arial,14], title='van der Pol oscillator,
phase portrait'):
> r1:=array(1..2,[gr1,gr2]):
plots[display](r1, labeldirections=[horizontal,
vertical]);
```

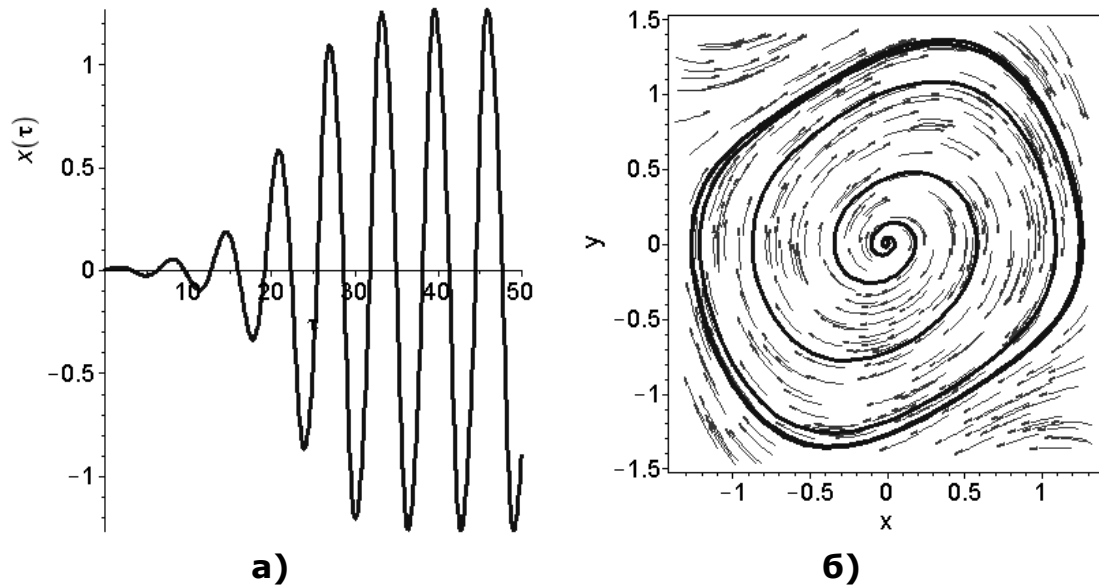


Рис. 3.3.8. Графік $x(\tau)$ (а) та фазовий портрет (б) коливань у генераторі Ван-дер Поля при $\lambda = 0.4$

У такому режимі генератор поступово збільшує амплітуду коливань аж до стаціонарної. В критичній точці – нестійкий фокус.

Жорстке збудження $\lambda > 2$.

```
> lambda:=3:
gr1:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=medium, size= magnitude, linecolor=blue,
scene=[tau,x(tau)], font=[Arial,14], labels=['tau',
x('tau')], labelfont=[Arial,14], title=`van der Pol
oscillator, x(t)`):
gr2:=DEtools[DEplot]([vdP], [x(tau),y(tau)],
tau=0..50, numpoints=505, [[ivs]], dirfield=400,
arrows=curve, size=magnitude, linecolor=blue,
axes=boxed, font=[Arial,14], labels=["x", "y"],
labelfont=[Arial,14], title=`van der Pol oscillator,
phase portrait`):
> r1:=array(1..2,[gr1,gr2]):
plots[display](r1, labeldirections=[horizontal,
vertical]);
```

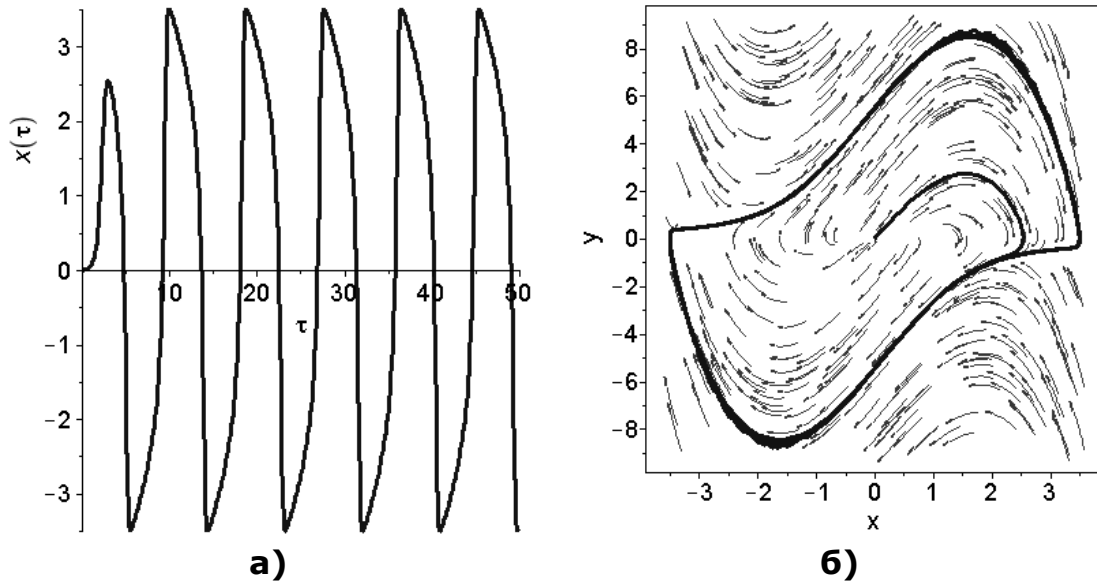


Рис. 3.3.9. Графік $x(\tau)$ (а) та фазовий портрет (б) коливань у генераторі Ван-дер Поля при $\lambda = 3$

Режим генерації негармонічних коливань. Замкнений цикл на фазовому портреті помітно відрізняється від еліпсу. В його центрі нестійкий вузол.

Лабораторна робота 4

Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних

1. Засоби розв'язків рівнянь у частинних похідних у Maple.
2. Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних.
 - 2.1. Деякі лінійні рівняння в частинних похідних математичної фізики.
 - 2.2. Розв'язки деяких диференціальних рівнянь математичної фізики.

1 Засоби розв'язків рівнянь у частинних похідних у Maple

Команда ядра **pdsolve** – призначена для відшукування рішень для диференціальних рівнянь у частинних похідних (**PDE** – partial differential equations), або систем таких рівнянь. Типовий синтаксис команди може бути мати такі варіанти:

- **pdsolve** (PDE, f, HINT=hint, INTEGRATE, build);

- **pdsolve** (PDE_system, funcs, HINT, other_options);
- **pdsolve** (PDE_or_PDE_system, series, conds, order=n, other_options);
- **pdsolve** (PDE_or_PDE_system, conds, type=numeric, other_options).

У дужках наступні параметри:

- PDE – диференціальне рівняння в частинних похідних можливо з початковими, та/або граничними умовами;
- f – невідома функція або набір, чи перелік невідомих функцій, якщо їх декілька;
- hint – (optional, необов'язкова опція) HINT=hint – вказівка щодо вирішення;
- INTEGRATE – (optional) включити автоматичне інтегрування наборів рівнянь звичайних диференціальних рівнянь, отриманих із використанням методу розділення змінних;
- build – (optional) намагатися знайти явний вигляд для невідомих функцій;
- PDE_system – система диференціальних рівнянь у частинних похідних;
- funcs – (optional) набір, або перелік функцій або їх імен;
- other_options – інші опції;
- PDE_or_PDE_system – рівняння, або система рівнянь у частинних похідних;
- conds – початкові або граничні умови;
- series – обчислити рішення у вигляді рядів t;
- type=numeric – знайти числове рішення.

Розглянемо в якості прикладу загальне рішення наступний приклад диференціального рівняння в частинних похідних.

```
> restart:
> pde1:= x*diff(f(x,y),y)-y*diff(f(x,y),x)=0;
      pde1 := x \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right) - y \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right) = 0. \quad (3.4.1)
```

```
> s1:=pdsolve(pde1);
      s1 := f(x,y) = _F1(x^2 + y^2). \quad (3.4.2)
```

Вираз (3.4.2) означає, що будь-яка функція ($_F$) аргументу $x^2 + y^2$ задовольняє рівнянню (3.4.1). Перевіримо це твердження спочатку для довільної функції, використовуючи команду **pdetest**:

```
> pdetest(s1,pde1);
      0. \quad (3.4.3)
```

А далі для деякої конкретної функції, обраної навмання:

```
> s11:=f(x,y)=exp(-sin(x^2+y^2)^2);
> pdetest(s11,pde1);
      s11 := f(x,y) = e^{-\sin(x^2 + y^2)^2}, \quad (3.4.4)
      0.
```

Як видно з верифікації (3.4.4), довільна функція аргументу $x^2 + y^2$ задовольняє рівнянню (3.4.1).

Інший приклад стосується диференціальних рівнянь із початковими (граничними) умовами. Розглянемо, наприклад, таке рівняння:

```
| > pde2:=diff(u(x,t), t)=kappa*(diff(u(x,t), x, x));
```

$$pde2 := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right), \quad (3.4.5)$$

де k – константа (сталий параметр). Припустимо, періодичні граничні умови такого вигляду:

```
| > bc2:=u(0,t)=0, u(1,t)=0;
```

$$bc2 := u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, \quad (3.4.6)$$

```
| > s2:=pdsolve([pde2,bc2]);
```

$$s2 := u(x, t) = _C2 \sin(\pi x _Z1) _C4 e^{-\kappa \pi^2 _Z1^2 t}, \quad (3.4.7)$$

де $_C2, _C4, _Z2$ – константи інтегрування. Покладемо їх рівними одиницям і отримаємо з (3.4.7) часткове рішення:

```
| > s21:=eval(s2,[_C2=1,_C4=1,_Z2=1]);
```

$$s21 := u(x, t) = \sin(\pi x _Z1) e^{-\kappa \pi^2 _Z1^2 t}. \quad (3.4.8)$$

Верифікуємо обидва рішення (3.4.7) та (3.4.8):

```
| > pdetest(s2,pde2);
```

```
| pdetest(s21,pde2);
```

$$\begin{matrix} 0, \\ 0. \end{matrix} \quad (3.4.9)$$

Обидва рішення задовольняють рівнянню (3.4.5).

Розглянемо ще типовий випадок, коли опція **build** дозволяє конкретизувати рішення:

```
| > pde3:=x^2*(diff(f(x,y), x))+y*(diff(f(x,y), y))+diff(f(x,y), x)=0;
```

$$pde3 := x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + y \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \quad (3.4.10)$$

```
| > pdsolve(pde3);
```

$$(f(x, y) = _F1(x) + _F2(y)) \&where \left[\left\{ \left(\frac{d}{dy} _F2(y) \right)^2 = -y \left(\frac{d}{dy} _F2(y) \right) - _C1, _F1'(x) = \frac{-_C1}{x^2 + 1} \right\} \right] \quad (3.4.11)$$

У виразі (3.4.11) вказано лише, що рішення є сумою двох функцій $_F1(x) + _F2(y)$, кожен з яких можна знайти вирішуючи додатково два звичайних диференціальних рівняння. Опція **build**

дозволяє уникнути цієї додаткової роботи і отримати загальне рішення (3.4.10):

```
| > pdsolve(pde3,build);
```

$$f(x, y) = -c_1 \arctan(x) + -C1 - \frac{y^2}{4} - \frac{y \sqrt{y^2 - 4 - c_1}}{4} + -c_1 \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 4 - c_1}\right) + -C2 \quad (3.4.12)$$

```
| > pdetest(% ,pde3); # Перевірка рішення показує його  
| валідність (3.4.12)
```

$$0 \quad (3.4.13)$$

2 Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних

2.1. Деякі лінійні рівняння в частинних похідних математичної фізики

Зосередимось на розгляді лінійних рівнянь другого порядку, які є найбільш поширеними математичними моделями як у математичній фізиці, так і в інших галузях. Найпростішими невідомими функціями в таких рівняннях є функції двох змінних $u(x, y)$, якими є координата x та час t . Задачі математичної фізики з функціями, де фігурує лише одна координата та час, звичайно називають одновимірними задачами.

Лінійне рівняння другого порядку, залежне від двох змінних, має такий типовий вигляд:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots, \quad (3.4.14)$$

де крапки позначають решту диференціального рівняння, в якій можуть фігурувати молодші похідні від невідомої функції $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$,

а також залежні від x , t , $u(x, y)$ доданки.

Залежно від знаку дискримінанта $D = B^2 - AC$, класифікуються рівняння другого порядку в заданій точці так:

I. $D = B^2 - AC > 0$ – гіперболічне рівняння.

II. $D = B^2 - AC < 0$ – еліптичне рівняння.

III. $D = B^2 - AC = 0$ – параболічне рівняння.

Передбачається, що в даній точці коефіцієнти A , B , C не рівні одночасно нулю. У разі, коли всі коефіцієнти A , B , C – сталі, рівняння має один і той же тип в усіх точках площини змінних x , t . У випадку, якщо коефіцієнти A , B , C неперервно залежать від змінних, множини точок, у яких дане рівняння є гіперболічного

(еліптичного) типу, утворює на площині відкриту область, що називається гіперболічною (еліптичною), а множина точок, в яких рівняння відноситься до параболічного типу, є замкнутою.

2.1.1. Рівняння теплопровідності (одновимірне)

Рівняння, яке описує розповсюдження тепла в однорідному одновимірному середовищі має такий вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.4.15)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності середовища, $u(x, t)$ – невідома функція, в даному прикладі – температура, залежна від координати x та часу t .

Задача Коші формулюється шляхом завдання початкового розподілу температур $u(x, 0) = f(x)$, де $f(x)$ – відома функція.

Аналогічне рівняння використовують для явища дифузії (масопереносу, або переносу частинок) із заміною коефіцієнта теплопровідності на коефіцієнт дифузії. Функція $u(x, t)$ в такому випадку описує залежність концентрації від координат та часу.

2.1.2. Хвильове рівняння

Рівняння для розповсюдження хвилі довільної природи уздовж одного просторового напрямку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.4.16)$$

де c – швидкість розповсюдження хвилі. Задача Коші формується завданням початкового розподілу для невідомої функції та її похідної:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x). \quad (3.4.17)$$

2.1.3. Рівняння Діма

Рівняння, яке отримав Henry Dym для опису одновимірного руху солітона – відокремленої хвилі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (3.4.18)$$

2.1.4. Рівняння Гінзбурга-Ландау

Використовується в теорії надпровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q |u|^2 u = i\gamma u, \quad (3.4.19)$$

де p, q, γ – константи, а $i^2 = -1$.

2.1.5. Рівняння Шредінгера

У випадку одновимірного руху квантової частинки маси m має такий вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x, t) \cdot \Psi, \quad (3.4.20)$$

де $\hbar$ – константа Дірака-Планка, $\Psi(x, t)$ – хвильова функція частинки, $U(x, t)$ – потенціальна енергія силового поля, в якому рухається частинка.

2.2. Розв'язки деяких диференціальних рівнянь математичної фізики

2.2.1. Розв'язки деяких диференціальних рівнянь математичної фізики

Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності (3.4.15) у вигляді [29]:

```
> restart:
```

```
pde:=diff(u(x,t),t)-kappa*diff(u(x,t),x,x)=0;
```

$$pde := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0. \quad (3.4.21)$$

Оскільки $A=\kappa$, $B=C=0$, то детермінант $D=B^2-AC=0$, і тому рівняння (3.4.21) слід віднести до параболічних. Оберемо граничні умови у вигляді:

```
> ics:=u(0,t)=0, u(1,t)=0; # Температура на кінцях  
інтервалу підтримується незмінною
```

$$ics := u(0, t) = 0, u(1, t) = 0. \quad (3.4.22)$$

Початкові умови, а саме розподіл температур по інтервалу в момент $t=0$, оберемо у вигляді деякої функції:

```
> bc:=u(x,0)=40*x^3*(1-x)^2;  
plot(rhs(bc), x=0..1, thickness=3, gridlines=true,  
font=[Arial,14], axes=boxed, tickmarks=[5,3],  
labels=["x", " u ( x,0 )"], labelfont=[Arial,14],  
labeldirections=[horizontal, vertical], caption="Рис. 1  
Початковий розподіл температури");
```

$$bc := u(x, 0) = 40 x^3 (1 - x)^2.$$

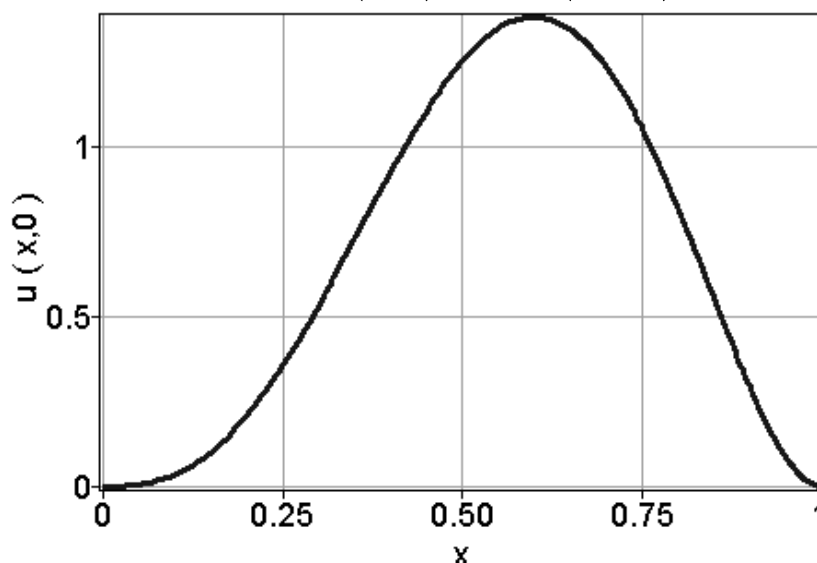


Рис. 3.4.1. Початковий розподіл температури

Розв'язок задачі Коші знайдемо засобами Maple:

```
> ans:=pdsolve([pde,ics,bc]);
```

$$ans := u(x, t) = \sum_{Zl=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^5 Zl^5} \left(160 \left((-1)^{-Zl} \pi^2 Zl^2 + 36 (-1)^{1+Zl} - 24 \right) \sin(\pi Zl x) e^{-\kappa \pi^2 Zl^2 t} \right). \quad (3.4.23)$$

Рішення (3.4.23) є валідним, що показує перевірка:

```
> pdetest(ans,pde);
```

$$0. \quad (3.4.24)$$

Безкінечний ряд (3.4.23) доволі швидко сходиться, тому для прискорення розрахунків варто обмежитися декількома першими його доданками. Врахуємо, скажімо, п'ять перших доданків, їх число завжди можна змінити. Коефіцієнт теплопровідності для спрощення покладемо рівним одиниці $\kappa=1$.

```
> u:=unapply(160*sum((-1)^n*Pi^2*n^2+36*(-1)^(1+n)-24)*sin(Pi*n*x)*exp(-Pi^2*n^2*t)/n^5, n=1..5)/Pi^5, x, t); # Наближений вираз для розв'язку рівняння теплопровідності у вигляді обмеженої суми
```

$$u := (x, t) \mapsto \frac{1}{\pi^5} \left(160 \left((-\pi^2 + 12) \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t} + \frac{(4\pi^2 - 60) \sin(2\pi x) e^{-4\pi^2 t}}{32} + \frac{(-9\pi^2 + 12) \sin(3\pi x) e^{-9\pi^2 t}}{243} + \frac{(16\pi^2 - 60) \sin(4\pi x) e^{-16\pi^2 t}}{1024} + \frac{(-25\pi^2 + 12) \sin(5\pi x) e^{-25\pi^2 t}}{3125} \right) \right) \quad (3.4.25)$$

Зобразимо наближений розв'язок (3.4.25) графічно.

```
> plot3d(u(x,t), x=0..1, t=0..0.25, axes=framed, font=[Arial,14], tickmarks=[3,3,6], orientation=[-120,75, 0], labels=["x", "t", "u ( x,t )"], labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal, horizontal, vertical], caption="Рис. 2. Часово-просторова еволюція температури");
```

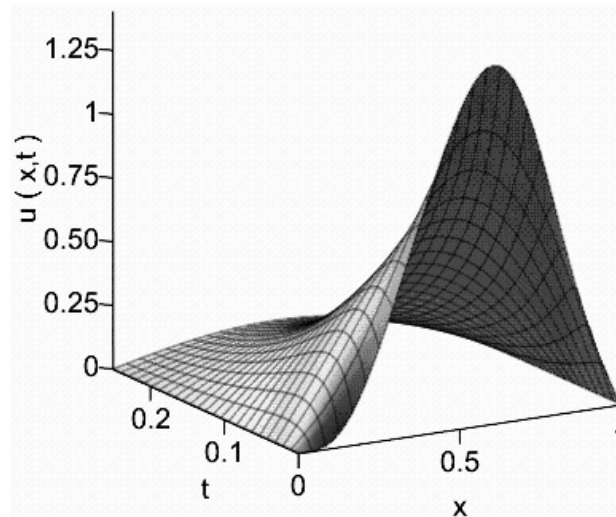


Рис. 3.4.2. Часово-просторова еволюція температури

Наступний графік демонструє розподіли температур по інтервалу в послідовні моменти часу.

```
> U:=seq(u(x,0.05*n), n=0..5):
plot([U], x=0..1, thickness=3,
color=[red,coral,black,maroon,blue,navy],
linestyle=[dot,solid,dot,solid,dot,solid],
gridlines=true, axes=boxed, font=[Arial,14],
legend=["t=0.05", "t=0.1", "t=0.15", "t=0.2",
"t=0.25", "t=0.3"], legendstyle=[font=[Arial,12]],
labels=["x", "u ( x, 0.05*n )"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical]);
```

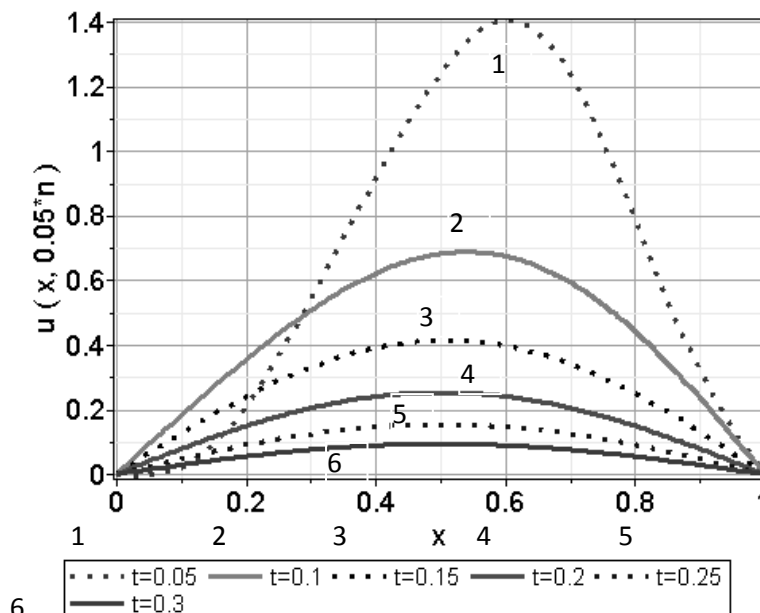


Рис. 3.4.3. Розподіл температур у послідовні моменти часу

Початковий розподіл температур з часом «розпливається» за рахунок відводу тепла через кінці інтервалу. Це можна побачити наочно за допомогою анімації попереднього рисунку:

```
> plots[animate](plot, [u(x,t),x=0..1], t=0..0.4,
frames=40, axes=boxed, font=[Arial,14], thickness=3,
gridlines=true, trace=5, title="", labels=["x",
"u ( x,t )"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical]);
```

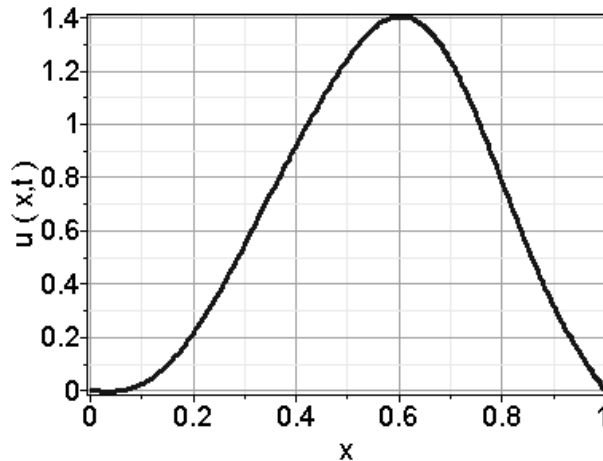


Рис. 3.4.4. Розподіл температур у початковий момент часу $t = 0$

Для перегляду анімації в середовищі Maple, необхідно клацнути по графіку, після чого активується панель інструментів з анімацією, і натиснути на кнопку запуску.

2.2.2. Приклад розв'язку гіперболічного хвильового рівняння

Розглянемо одновимірне хвильове рівняння:

```
> restart:
> pde:=diff(u(x,t),t,t)=c^2*diff(u(x,t),x,x);
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right). \quad (3.4.26)$$

Дискримінант для цього рівняння додатній: $D = B^2 - AC > 0$, оскільки $A = c^2$, $B = 0$, $C = -1$. Отже, хвильове рівняння (3.4.26) є рівнянням гіперболічного типу.

Для поперечних хвиль, наприклад, в еластичній струні швидкість хвиль $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, де T – сила напруження струни, μ – питома

маса одиниці довжини. Для поздовжньої хвилі в стрижні $c^2 = \frac{gE}{\rho}$,

де g – прискорення вільного падіння, E – модуль Юнга, ρ – густина матеріалу, з якого зроблений стрижень.

Припустимо, що (3.4.26) є рівнянням поперечної хвилі коливань пружної струни одиничної довжини $L=1$. Граничними умовами є умови фіксованих кінців такої струни:

```
> bc:=u(0,t)=0, u(1,t)=0;
      bc := u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 .
```

(3.4.27)

Початкова форма струни задається деякою функцією $u(x,0)=f(x)$, припустимо, наступного вигляду:

```
> f(x):=piecewise(0<=x and x<=1/4, -x/10, x>1/4 and
x<=1, -1/30+x/30);
```

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{x}{10} & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{30} + \frac{x}{30} & \frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases}.$$

```
plot(f(x), x=0..1, thickness=2, gridlines=true,
axes=boxed, font=[Arial,14], tickmarks=[5,5],
labels=["x","f ( x )"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical] ],
caption="Рис. 5. Несиметричне трикутне збудження з
амплітудою в 2.5 мм");
```

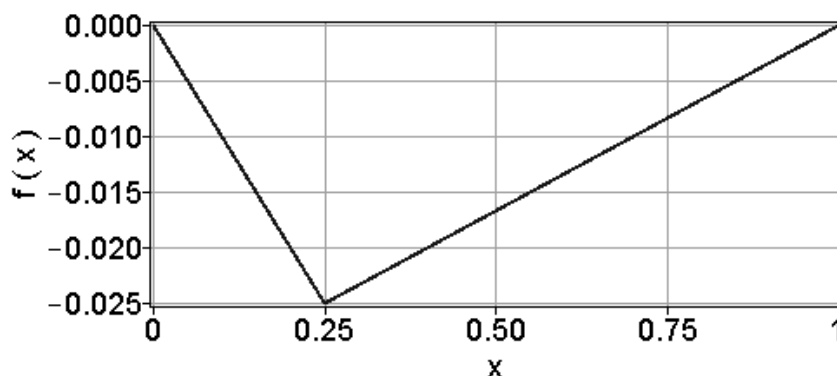


Рис. 3.4.5. Несиметричне трикутне збудження з амплітудою 2.5 мм

Тоді початкові умови можна задати виразом:

```
> ics:=u(x,0)=f(x), D[2](u)(x,0)=0;
```

$$ics := u(x, 0) = \begin{cases} -\frac{x}{10} & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{30} + \frac{x}{30} & \frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases}, D_2(u)(x, 0) = 0. \quad (3.4.28)$$

Для спрощення розрахунків та аналізу покладемо швидкість хвилі одиничною $c=1$.

```
> pde1:=eval(pde,c=1);
```

$$pde1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (3.4.29)$$

Отримаємо та верифікуємо розв'язки сформульованої задачі Коші методами Maple:

```
> ans:=pdsolve([pde1,ics,bc]);
pdetest(ans,pde1);
```

$$ans := u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \sin(\pi n x) \cos(\pi n t)}{15 \pi^2 n^2}, \quad (3.4.30)$$

Обмежимо безкінечну суму в точному рішенні (3.4.30), припустимо, першими дванадцятьма доданками:

```
> u:=unapply((-
4/(15*Pi^2))*sum(sin(Pi*n/4)*sin(Pi*n*x)*cos(Pi*n*t)/n
^2,n=1..12),x,t):
> plot3d(u(x,t), x=0..1, t=0..7, axes=framed,
font=[Arial,14], tickmarks=[3,3,6], orientation=
[-20,75,0],labels=["x", "t", "u ( x,t )"],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
horizontal, vertical], caption="Рис. 6.
Часово-просторова еволюція хвилі");
```

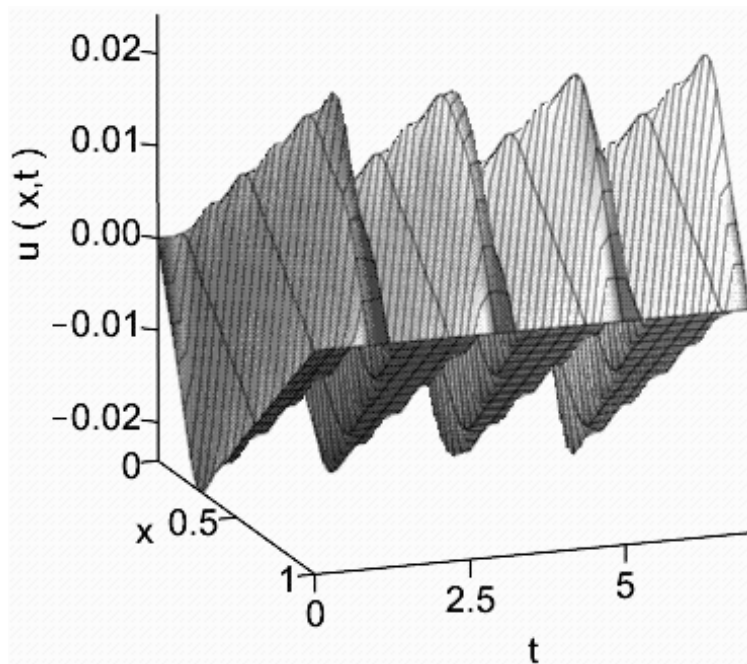


Рис. 3.4.6. Часово-просторова еволюція хвилі

Більш наочне уявлення про поперечні коливання струни, її профіль у послідовні моменти часу та форму хвилі може дати анімація розв'язку (3.4.30).

```
> plots[animate](plot, [u(x,t), x=0..1], t=0..3.5,
frames=70, axes=boxed, font=[Arial,14], thickness=3,
gridlines=true, title="", labels=["x","u ( x,t )"],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
vertical], title=`Хвиля поперечних коливань струни`);
```

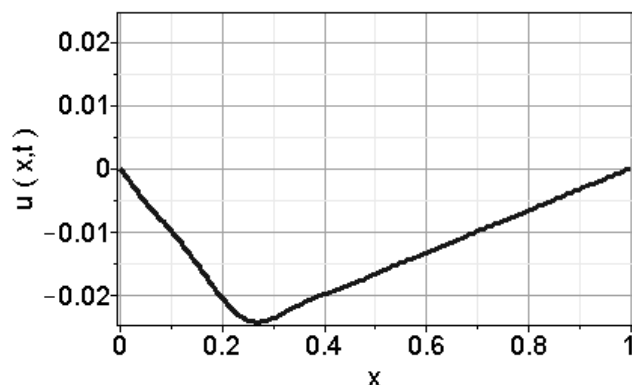


Рис. 3.4.6. Хвиля поперечних коливань струни у початковий момент часу $t = 0$

Лабораторна робота 5

Рівняння Нав'є-Стокса: течія Пуазейля

1. Засоби програмного підпаketу Physics[Vectors].
2. Рівняння Нав'є-Стокса та Нав'є в моделях гемодинаміки.
3. Течія Пуазейля та закон Хагена-Пуазейля.
 - 3.1. Течія Пуазейля.
 - 3.2. Закон Хагена-Пуазейля.

1 Засоби програмного підпаketу Physics[Vectors]

Підпаket програм **Physics[Vectors]** є частиною більш об'ємного паketу **Physics**, призначеного для роботи фахівців із фізики. Підпаket програм базується на алгебраїчному представленні абстрактних векторів та векторних функцій, як «не прив'язаних» до певної системи координат, так і заданих у декартовій, циліндричній або сферичній системах координат. Отже, програми підпаketу дозволяють працювати як з абстрактними векторами, так і з векторами в межах однієї з трьох систем координат.

Для трьох зазначених вище систем координат прийняті наступні позначення.

Для одиничних векторів-ортів:

- $(_i, _j, _k)$ – декартові одиничні вектори (орти);
- $(_r, _φ, _k)$ – циліндричні орти;
- $(_r, _θ, _φ)$ – сферичні орти.

Для координат точки:

- (x, y, z) – декартові координати точки;
- $(ρ, φ, z)$ – циліндричні координати;
- $(r, θ, φ)$ – сферичні координати.

Якщо підпакет завантажений у стандартному графічному інтерфейсі уведенням команди **Physics[Setup](mathematicalnotation=true)**, вектори та орти відображаються в рядках виводу результатів відповідно зі стрілками та капелюшками над символами, як це прийнято у фізичних обчисленнях. Диференціально-векторні оператори, такі як (Nabla, Laplacian, etc.) також мають традиційне символічне позначення – трикутник вістрям донизу, як у фізичних джерелах. Підпакет містить такі команди:

- &x;
- +;
- . (команда у вигляді крапки);
- ChangeBasis;
- Component;
- Curl;
- DirectionalDiff;
- Divergence;
- Gradient;
- Identify;
- Laplacian;
- Nabla;
- Norm;
- Setup;
- diff.

Перші три команди дозволяють отримувати векторний добуток векторів, суму та різницю, а також скалярний добуток відповідно. Сутність решти команд зрозуміла з їх імен.

```
| > restart;
```

```
| > with(Physics[Vectors]);
```

[&x, '+', '.', ChangeBasis, Component, Curl, DirectionalDiff,
Divergence, Gradient, Identify, Laplacian, ∇, Norm, Setup, diff] , (3.5.1)

```
| > Setup(mathematicalnotation=true);
```

[mathematicalnotation = true] . (3.5.2)

Задамо вектори у двох різних системах координат:

```
| > A_:=f1(x,y,z)*_i+y^2*_j+f3(x,y)*_k;
```

$$\vec{A} := f1(x, y, z) \hat{i} + y^2 \hat{j} + f3(x, y) \hat{k} . \quad (3.5.3)$$

```
| > Identify(A_); # Цей вектор належить до першої
```

(декартової системи координат) 1 . (3.5.4)

```
| > B_:=3*_rho+rho^2*_phi+sin(z)*_k;
```

Identify(B_); # Вектор ідентифіковано як належний до
циліндричної системи

$$\vec{B} := \rho^2 \hat{\phi} + 3 \hat{\rho} + \sin(z) \hat{k} , \quad (3.5.5)$$

2 .

```
| > Curl(B_);
```

$$\begin{aligned} & \text{Divergence}(\mathbf{B}_-); \\ & \text{Divergence}(\mathbf{A}_-); \\ & \text{Identify}(\text{Divergence}(\mathbf{A}_-)); \# \text{ Скаляр} \\ & \quad 3 \rho \hat{k}, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\rho} + \cos(z), \\ & \frac{\partial}{\partial x} f l(x, y, z) + 2 y, \\ & 0. \\ & > \% \text{Laplacian}(\mathbf{B}_-); \# \text{ Пасивна форма команди -} \\ & \quad \text{записується, але не виконується} \\ & \text{Laplacian}(\mathbf{B}_-); \# \text{ Активна (виконувана) форма команди} \\ & \quad \nabla^2(\rho^2 \hat{\phi} + 3 \hat{\rho} + \sin(z) \hat{k}), \\ & \quad - \frac{3 \hat{\rho}}{\rho^2} + 3 \hat{\phi} - \sin(z) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} & > \text{Norm}(\mathbf{A}_-); \\ & \text{Norm}(\mathbf{B}_-); \\ & \quad \sqrt{f l(x, y, z)^2 + y^4 + f 3(x, y)^2}, \\ & \quad \sqrt{9 + \rho^4 + \sin(z)^2}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

2 Рівняння Нав'є-Стокса та Нав'є в моделях гемодинаміки

Рівняння Нав'є-Стокса, названі на честь Клода-Луї Нав'є (Франція) та Габріеля Стокса (Англія), описують течію в'язкої, стискуваної рідини або газу. Ці рівняння виникають при застосуванні другого закону Ньютона до руху рідини, і у векторному, не проєктованому в певну систему координат вигляді, можуть бути записані так:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} \right) - \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \cdot \nabla (\nabla, \vec{v}) + \nabla P = 0, \quad (3.5.9)$$

де $\vec{v}(\vec{r}, t)$ – поле швидкостей потоку; ρ – густина рідини; η, ζ – коефіцієнти, які характеризують в'язкість рідини; $P(\vec{r}, t)$ – поле тисків у рідині; $\nabla, \nabla^2 = \Delta$ – диференціальні оператори набла та Лапласа відповідно.

Рівняння (3.5.9) містять 5 невідомих: три компоненти вектора швидкості $\vec{v}(\vec{r}, t)$, тиск $P(\vec{r}, t)$ та густина рідини ρ . Теж саме векторне рівняння (3.5.9) містить лише три скалярні рівняння, якщо записати його в тій, чи іншій системі координат. Тому рівняння (3.5.9) звичайно розглядають в системі з рівнянням безперервності у формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}). \quad (3.5.10)$$

Система рівнянь (3.5.9)-(3.5.10) є теоретичною основою гемодинаміки – прикладного розділу гідродинаміки, який вивчає течію крові в живих організмах. Більшість гемодинамічних моделей розглядають кров як рідину, яка практично не стискається [30], тобто

$\rho = \text{const}$, звідки виникає, що $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, отже, й наступне:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) = (\nabla, \vec{v}) = 0. \quad (3.5.11)$$

Умова (3.5.11) спрощує рівняння (3.5.9) для рідини, що не стискається, до такого виразу:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} \right) - \eta \nabla^2 \vec{v} + \nabla P = 0, \quad (3.5.12)$$

який отримав назву **рівняння Нав'є**. Рішення системи рівнянь (3.5.9)-(3.5.10) або (3.5.12), які описують течії в'язкої рідини аналітичними методами, знайти в загальному випадку неможливо. Лише у разі деяких найпростіших видів течій ці рівняння мають відомі аналітичні розв'язки. Задачі, котрі мають практичне значення, звичайно розв'язуються за допомогою наближених чисельних методів на комп'ютерах.

Складнощі аналітичного рішення цих рівнянь переважно зумовлені нелінійним фактором $(\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v}$ у рівняннях Нав'є-Стокса та Нав'є, який часто називається конвективним прискоренням потоку.

Конвективне прискорення потоку рідини, яке також називають ефектом Бернуллі, не пов'язане з явною залежністю вектора швидкості течії від часу. Конвективне прискорення виникає за рахунок суто геометричних причин у місцях, де потік звужується (так звані конфузори), або розширюється (дифузори). Звужуючись у конфузорах, тобто зменшуючи площу свого перетину, потік прискорюється, і при цьому тиск зменшується. У дифузорах потік, навпаки, уповільнюється, а тиск в ньому зростає.

Конвективне прискорення можна переписати в такому вигляді:

$$(\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} = \frac{\nabla(\vec{v}, \vec{v})}{2} + [\operatorname{curl}(\vec{v}) \times \vec{v}]. \quad (3.5.13)$$

3 Течія Пуазейля та закон Хагена-Пуазейля

Ініціювати рух в'язкої рідини можна такими двома способами:

1. За рахунок зовнішніх сил (об'ємних сил або сил тиску), наприклад, створивши перепад тиску на кінцях горизонтальної трубки або виводячи трубку з горизонтального положення у вертикальне і використовуючи сили тяжіння.
2. За рахунок зміщення стінки судини, яка обмежує рідину.

3.1. Течія Пуазейля

Стаціонарна течія, викликана зовнішніми силами тиску, називається течією Пуазейля, а течія, викликана переміщенням стінок провідного каналу, – течією Куетта. Течію Пуазейля можна розглядати як просту модель для стаціонарної течії крові по кровоносних судинах, якщо нехтувати зміною їх перетинів (так званими пульсаціями) під час пропускання потоків крові [30]. Розглянемо кровоносну судину у вигляді циліндричного каналу постійного перерізу, як це показано на рис. 3.5.1. Необхідні позначення також показані на рисунку.

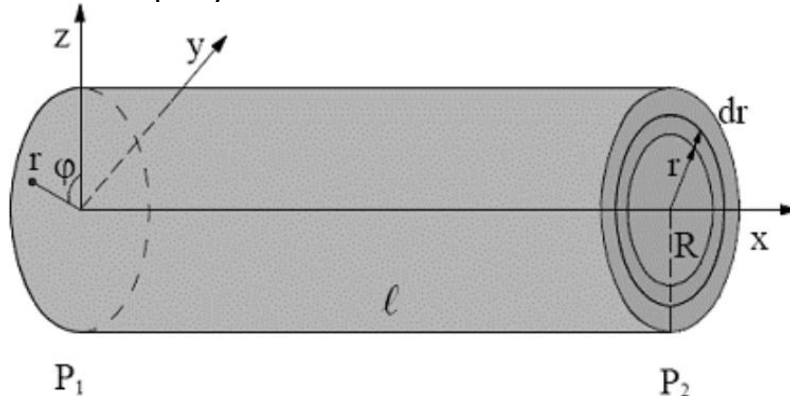


Рис. 3.5.1. Циліндричний канал радіусу R та системи координат. декартова (x, y, z) та циліндрична (ρ, ϕ, z) [31]. Вісь Oz циліндричної системи спрямована уздовж осі Ox декартової системи координат

Течія створюється і підтримується незмінним в часі перепадом тисків $P_1 > P_2$ поміж двома паралельними перерізами каналу:

```
> restart;
with(Physics[Vectors]);
Setup(mathematicalnotation=true);
[&x, '+', '.', ChangeBasis, Component, Curl, DirectionalDiff,
Divergence, Gradient, Identify, Laplacian, ∇, Norm, Setup, diff], (3.5.14)
[mathematicalnotation = true].
```

Надалі використовуємо циліндричну систему координат (ρ, ϕ, z) , причому, як вказано на рис. 3.5.1, вісь Oz циліндричної системи спрямована уздовж осі Ox декартової системи координат. Запишемо залежність поля тиску в каналі від координат:

```
> P:=unapply(P1+(P2-P1)*z/L, rho, phi, z); # Тиск
лінійно спадає уздовж каналу і не залежить від
радіальної та кутової координат (rho, phi)
```

$$P := (\rho, \phi, z) \mapsto P_1 + \frac{(P_2 - P_1)z}{L}, \quad (3.5.14)$$

де L – довжина каналу (судини).

Циліндрична симетрія каналу допускає лише один напрям для вектора швидкості потоку; напрям уздовж осі каналу, тобто

уздовж циліндричної осі Oz . Отже, вектор швидкості течії має лише одну компоненту, яка паралельна одиничному вектору-орту $\hat{k}$, проте її норма (модуль) v_z теоретично може залежати від кожної з трьох координат (ρ, ϕ, z) :

$$\begin{aligned} | > \mathbf{v_} := \mathbf{vz}(\rho, \phi, z) * \hat{k}; \\ \vec{v} &:= v_z(\rho, \phi, z) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Рівняння безперервності для течії рідини, яка не стискається, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} | > \text{Divergence}(\mathbf{v_}) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} v_z(\rho, \phi, z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

З виразу (3.5.16) виникає, що модуль швидкості v_z не залежить від координати z . З міркувань циліндричної симетрії також виникає, що він також не може залежати від кутової координати ϕ . Отже, модуль швидкості залежний лише від радіальної координати ρ :

$$\begin{aligned} | > \mathbf{v_} := \mathbf{vz}(\rho) * \hat{k}; \\ \vec{v} &:= v_z(\rho) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

За таких умов конвективне прискорення – нелінійний фактор у рівнянні Нав'є, обертається в нуль, що можна перевірити безпосередньо, застосовуючи формулу (3.5.13) до вектору швидкості (3.5.17):

$$\begin{aligned} | > \% \text{Nabla}(\mathbf{v_} \cdot \mathbf{v_}) / 2 + (\% \text{Curl}(\mathbf{v_}) \&\mathbf{x} \mathbf{v_}) = \\ &\text{Nabla}(\mathbf{v_} \cdot \mathbf{v_}) / 2 + (\text{Curl}(\mathbf{v_}) \&\mathbf{x} \mathbf{v_}); \\ \frac{\nabla v_z(\rho)^2}{2} + v_z(\rho) ((\nabla \times (v_z(\rho) \hat{k})) \times \hat{k}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Найстарша похідна від вектору швидкості у рівнянні Нав'є в циліндричній системі координат матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} | > -\% \text{Laplacian}(\mathbf{v_}) = -\text{Laplacian}(\mathbf{v_}); \\ -\nabla^2(v_z(\rho) \hat{k}) &= -\frac{\hat{k} \left(\left(\frac{d^2}{d\rho^2} v_z(\rho) \right) \rho + \frac{d}{d\rho} v_z(\rho) \right)}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

і очевидний напрям уздовж осі каналу, тобто уздовж одиничного вектору-орту $\hat{k}$. З урахуванням умови стаціонарності течії, що передбачає $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, можемо тепер записати рівняння Нав'є у такому вигляді:

$$\begin{aligned} | > \text{Navier} := \eta * \text{Laplacian}(\mathbf{v_}) = \text{Gradient}(P(\rho, \phi, z)); \\ \text{Navier} &:= \frac{\eta \hat{k} \left(\left(\frac{d^2}{d\rho^2} v_z(\rho) \right) \rho + \frac{d}{d\rho} v_z(\rho) \right)}{\rho} = -\frac{(-P_2 + P_1) \hat{k}}{L}. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

З очевидною початковою умовою нульової швидкості потоку на стінках каналу:

| > ics:=vz(R)=0;

$$ics := vz(R) = 0, \quad (3.5.21)$$

отримаємо рішення поставленої задачі Коші (3.5.20), (3.5.21):

| > ans:=dsolve({Navier,ics}, vz(rho));

$$ans := vz(\rho) = \frac{\rho^2 P2}{4 L \eta} - \frac{\rho^2 P1}{4 L \eta} + _C1 \ln(\rho) - _C1 \ln(R) + \frac{R^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L} \quad (3.5.22)$$

Виходячи з фінітності (обмеженості) величини швидкості, необхідно покласти в (3.5.22) $_C1=0$. Інакше одна зі складових рішення прямуватиме до нескінченості $_C1 \cdot \ln(\rho) \rightarrow -\infty$, коли ρ прямуватиме до нуля ($\rho \rightarrow 0$). Отже, після такої підстановки маємо для залежності швидкості потоку від радіальної координати:

| > v:=eval((rhs(ans)), _C1=0);

$$v := \frac{\rho^2 P2}{4 L \eta} - \frac{\rho^2 P1}{4 L \eta} + \frac{R^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L} \quad (3.5.23)$$

Або у спрощеній формі:

| > v:=simplify(factor(v));

$$v := \frac{(-P2 + P1) (R^2 - \rho^2)}{4 \eta L} \quad (3.5.24)$$

З (3.5.24) видно, що швидкість прямо пропорційна перепаду тиску в каналі і обернено пропорційна його довжині та коефіцієнту в'язкості рідини. Параболічна залежність швидкості течії Пуазейля від радіальної координати $v(\rho)$ виникає з виразу (3.5.24). Профіль течії показаний на рис. 3.5.2. Максимальна швидкість спостерігається на осі каналу.

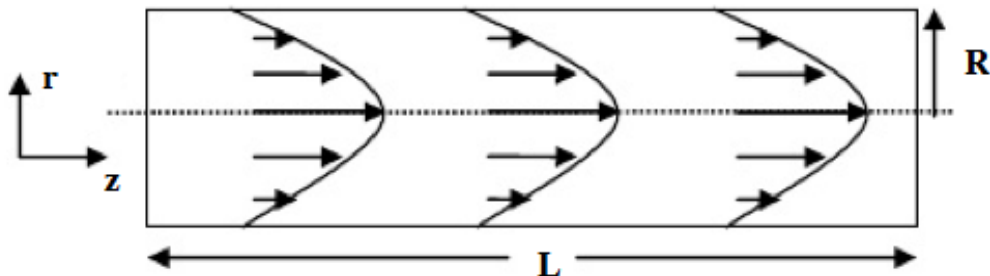


Рис. 3.5.2. Параболічні профілі течії Пуазейля

Зауважимо, що течія Пуазейля має ненульовий ротор швидкості:

| > rot_v:=simplify(Curl(v*_k));

$$rot_v := \frac{(-P2 + P1) \rho \hat{\phi}}{2 \eta L} \quad (3.5.25)$$

Вектор ротору поля швидкостей (3.5.25) спрямований уздовж орту $\vec{\phi}$, тобто по дотичній до контуру кругового перетину каналу. Ненульовий ротор означає ненульову циркуляцію за відповідним контуром.

Максимальна швидкість потоку спостерігається на осі каналу:

| > $v_max := eval(v, rho=0)$;

$$v_max := \frac{R^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L} . \quad (3.5.26)$$

3.2. Закон Хагена-Пуазейля

Обчислимо щосекундний об'єм рідини, яка тече крізь круговий поперечний перетин каналу. Для цього проінтегруємо швидкість потоку Пуазейля (3.5.24) крізь повний перетин каналу. В циліндричній системі координат елемент перетину каналу дається виразом:

$$dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi . \quad (3.5.27)$$

Отже, для об'ємного щосекундного потоку рідини матимемо вираз у вигляді подвійного інтегралу:

| > $Q := Int(Int(v * rho, rho=0..R), phi=0..2*Pi)$;

$$Q := \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-P2 + P1) (R^2 - \rho^2) \rho}{4 \eta L} d\rho d\phi . \quad (3.5.28)$$

Виконаємо інтегрування і з інтегралу (3.5.28) матимемо:

| > $Q := simplify(value(Q))$;

$$Q := \frac{(-P2 + P1) R^4 \pi}{8 L \eta} . \quad (3.5.29)$$

Отриманий вираз (3.5.29) має назву закону Хагена-Пуазейля для щосекундного об'ємного розходу рідини під час стаціонарної течії у циліндричному каналі. Як видно з (3.5.29), він пропорційний четвертому ступеню радіусу каналу R та обернено пропорційний довжині судини L та коефіцієнту в'язкості рідини η .

Закон Хагена-Пуазейля можна використати для експериментального визначення коефіцієнту в'язкості рідини:

$$\eta = \frac{\pi(P1 - P2)R^4}{8QL} , \quad (3.5.30)$$

який можна знайти знаючи перепад тиску $(P1 - P2)$, довжину L та радіус труби R , а також об'ємний потік рідини Q , пропущений крізь канал за одиницю часу.

Варто нагадати, що цей закон має місце за умови ламінарної течії рідини у каналі з незмінною геометрією та за додаткової умови, що довжина каналу достатня і дозволяє розвинути в ньому саме ламінарній течії [31].

Критерієм ламінарності течії є так зване безрозмірне число Рейнольдса, яке дорівнює

$$Re = \frac{\rho v_{max} L}{\eta}. \quad (3.5.31)$$

Наприклад, для води критичне значення числа Рейнольдса приблизно дорівнює $Re_{cr} \approx 2300$. Якщо число Рейнольдса не перевищує критичного значення, течію рідини можна вважати ламінарною і користуватися законом Хагена-Пуазейля.

В'язкість крові помітно вища від в'язкості води, зокрема для кров'яної плазми удвічі, а для нормальної крові приблизно в 4 рази [30], тому хоча її густина лише незначно перевищує густину води, критичне значення числа Рейнольдса для крові помітно нижче, ніж у води. Вважається [30], що прояви турбулентності для кровотоку можливі вже за умови $Re_{cr} \approx 400$ (рис. 3.5.3).

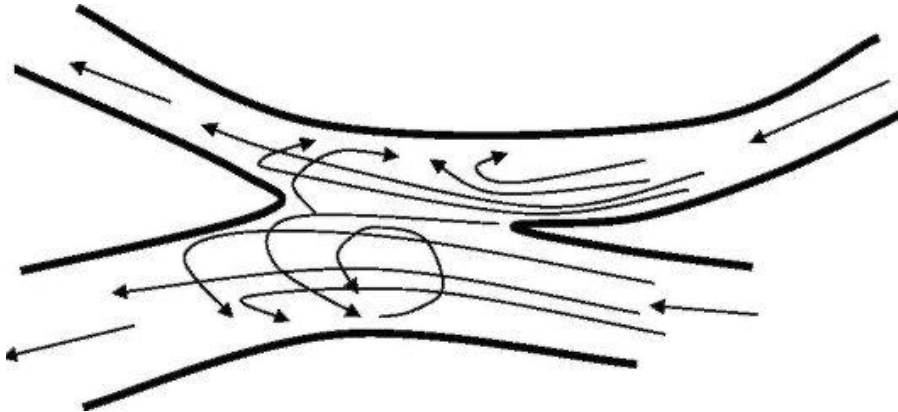


Рис. 3.5.3. Схема виникнення турбулентності потоку крові в судинному шунті

Лабораторна робота 6

Нелінійні моделі математичної фізики

1. Математична модель нелінійного фізичного маятника.
2. Солітони Кортевега-де-Вріза.
 - 2.1. Нелінійне рівняння Кортевега-де-Вріза та його солітонне рішення.
 - 2.2. Мультисолітонні рішення рівняння КдВ та взаємодія пари (дублету) солітонів.

1 Математична модель нелінійного математичного маятника

Фізичний маятник – тверде тіло довільної форми, яке під дією сили тяжіння здійснює коливання навколо нерухомої горизонталь-

ної осі (вісь Y на рис. 3.6.1), яка не проходить через центр маси тіла (точка C на рис. 3.6.1).

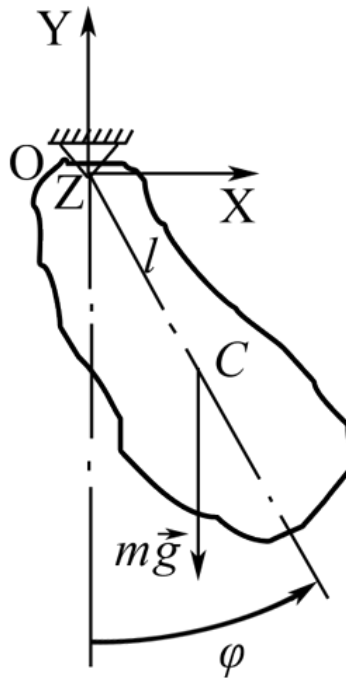


Рис. 3.6.1. Кінематика фізичного маятника

Нелінійні властивості фізичного маятника (ФМ) без урахування сил опору можна вивчити за математичною моделлю, яка описується наступним диференціальним рівнянням другого порядку [32]:

$$J\ddot{\phi} + mgl \cdot \sin(\phi) = 0, \quad (3.6.1)$$

де J – момент інерції ФМ відносно осі Z обертання маятника; m – маса маятника; l – відстань від центра мас C до осі обертання маятника; g – прискорення вільного падіння, ϕ – кут відхилення маятника від вертикалі.

Якщо ввести безрозмірний час $\tau = t \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \omega_0 t$, де ω_0 – власна частота коливань маятника, то рівняння (3.6.1) можна перевести у безрозмірний вигляд:

```
> restart;
> pm:=diff(phi(tau),tau$2)+sin(phi(tau))=0;
```

$$pm := \frac{d^2}{d\tau^2} \phi(\tau) + \sin(\phi(\tau)) = 0. \quad (3.6.2)$$

У якості початкових умов оберемо дві умови:

- маятник починає рухатися з позиції максимального відхилення від положення рівноваги ϕ_0 ;
- з нульовою кутовою швидкістю $\dot{\phi} = 0$:

```
> ic:=phi(0)=phi[0],D(phi)(0)=0;
```

$$ic := \phi(0) = \phi_0, D(\phi)(0) = 0. \quad (3.6.3)$$

Окрім того, паралельно корисно представити математичну модель (3.6.2) у вигляді системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} & \text{> sys:=diff(phi(tau), tau)=chi(tau),} \\ & \text{diff(chi(tau), tau)+sin(phi(tau))=0;} \\ \text{sys} & := \frac{d}{d\tau} \phi(\tau) = \chi(\tau), \frac{d}{d\tau} \chi(\tau) + \sin(\phi(\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Точний формальний розв'язок задачі Коші (3.6.2), (3.6.3) можна отримати засобами Maple:

$$\begin{aligned} & \text{> ans:=dsolve([pm, ic]);} \\ \text{ans} & := \phi(\tau) = \text{RootOf} \left(\begin{array}{c} \phi_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2 \cos(_a) - 2 \cos(\phi_0)}} \end{array} \begin{array}{c} -a + \tau \end{array} \right), \\ \phi(\tau) & = \text{RootOf} \left(\begin{array}{c} -Z \\ \frac{1}{\sqrt{2 \cos(_a) - 2 \cos(\phi_0)}} \end{array} \begin{array}{c} -a + \tau \end{array} \right) \end{array} \quad (3.6.5)$$

Два рішення (3.6.5) відрізняються лише знаками, оскільки межі інтегралів переставлені місцями і не виглядають надто прозоро. Зрештою з (3.6.5) можна зробити висновок, що розв'язку задачі нелінійного фізичного маятника в елементарних функціях не існує. Вираз (3.6.5) дає точний розв'язок у формі інтегрального рівняння.

Проте це не заважає побудувати графіки точного розв'язку засобами команди DEtools[DEplot]. Зобразимо зокрема графіки коливань для двох кутів: $\phi_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\phi_0 = \frac{179\pi}{180} = 179^\circ$.

```
> DEtools[DEplot](pm, phi(tau), tau=-6.25*Pi..6.25*Pi,
[[phi(0)=2*Pi/3, D(phi)(0)=0]], linestyle=dash,
linecolor=blue, numpoints=500):
DEtools[DEplot](pm, phi(tau), tau=-6.25*Pi..6.25*Pi,
[[phi(0)=179*Pi/180, D(phi)(0)=0]], linecolor=red):
> plots[display](%, %, gridlines=true, axes=boxed,
font=[Arial,14], labels=['tau', ' phi ( tau )'],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
vertical], caption=`Рис. 2. Залежність кутів
відхилення від часу`);
```

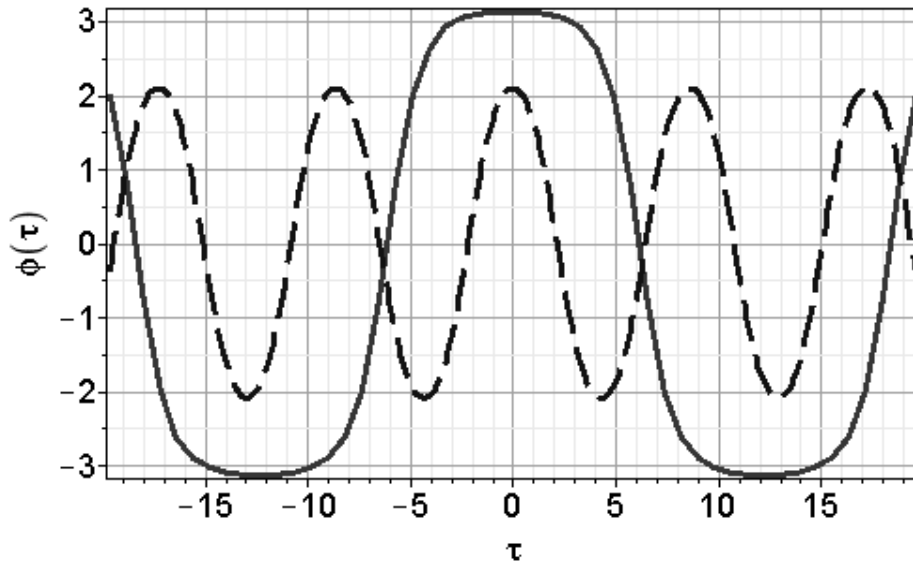


Рис. 3.6.2. Залежність кутів відхилення від часу

З графіків рис. 3.6.2 можна зробити такі висновки:

- періоди нелінійних коливань, отже, і їх частота, суттєво залежать від їх амплітуди ϕ_0 , зокрема період коливань з амплітудою в 179 град. в декілька разів більший від амплітуди коливань з амплітудою в 120 град;
- коливання з великими амплітудами відхилення істотно відрізняються за формою від гармонічних коливань, характерних для малих амплітуд.

Залежність безрозмірного періоду коливань від амплітуди, тобто відношення періоду нелінійних коливань T до періоду малих

коливань $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, дається такою формулою [32]:

```
> Tau:=(4/(2*Pi))*int(1/sqrt(1-
(sin(phi[0]/2))^2*sin(z)^2), z=0..Pi/2);
```

$$T := \frac{2 K\left(\sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right)\right)}{\pi}, \quad (3.6.6)$$

де $K(k)$ – спеціальна функція, так званий повний еліптичний інтеграл першого роду. Графік виразу (3.6.6) поданий нижче.

```
> plot([Tau,1], phi[0]=0..Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, font=[Arial,14],
color=[blue,red], linestyle=[1,4], labels=['phi[0]',
"Період"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical],
caption='Рис. 3. Залежність безрозмірного періоду
\n від амплітуди нелінійних коливань`');
```

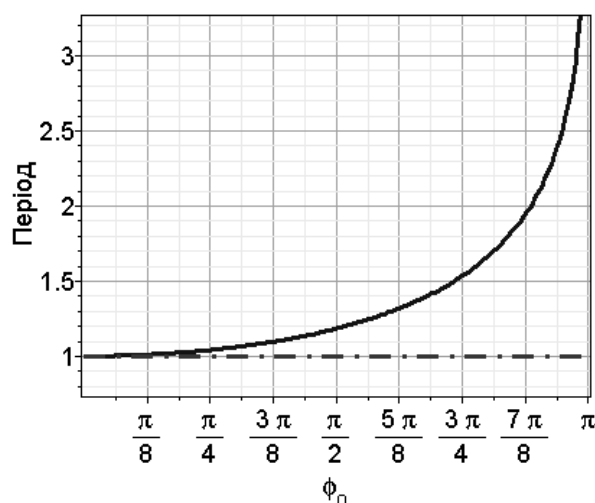


Рис. 3.6.3. Залежність безрозмірного періоду від амплітуди нелінійних коливань

Як видно з рис. 3.6.3, наприклад, період нелінійних коливань для амплітуди $\phi_0 = \frac{7\pi}{8}$ удвічі більший від періоду для малих коливань. Побудуємо також фазові портрети двох нелінійних коливань, показаних на рис. 3.6.2.

```
> DEtools[DEplot]([sys], [phi(tau), chi(tau)],
tau=-6*Pi..6*Pi, [[phi(0)=179*Pi/180,chi(0)=0]],
linecolor=red, numpoints=500):
DEtools[DEplot]([sys], [phi(tau), chi(tau)],
tau=-6*Pi..6*Pi, [[phi(0)=Pi/2, chi(0)=0]],
linecolor=blue, numpoints=500):
> plots[display](%, %, axes=boxed, font=[Arial,14],
labels=['phi', 'chi'], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical], caption=
[`Рис. 4. Фазові портрети двох \n нелінійних
коливань`]);
```

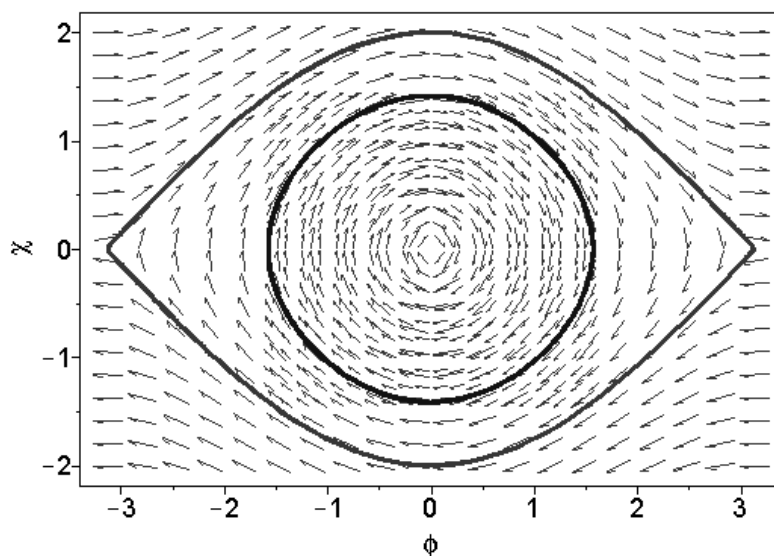


Рис. 3.6.4. Фазові портрети двох нелінійних коливань

Фазові портрети показують, що коливання з великою амплітудою суттєво негармонічні, оскільки їх фазова траєкторія помітно відрізняється від еліптичної.

2 Солітони Кортевега-де-Вріза

Існує декілька математичних моделей, для яких солітони є точним розв'язком, із яких найбільш популярними є такі три нелінійних диференціальних рівняння:

- 1) рівняння Кортевега-де Вріза (КдВ);
- 2) нелінійне рівняння Шредінгера (НУШ);
- 3) рівняння синус-Гордона (С-Г).

Розв'язки саме цих рівнянь утворюють три основних типи солітонів:

- солітони Кортевега-де Вріза – КдВ, або так звані акустичні солітони;
- солітони огибаючої – оптичні солітони;
- топологічні солітони – так звані кінки та анти-кінки.

2.1. Нелінійне рівняння Кортевега-де-Вріза та його солітонне рішення

Однією з найпростіших і найвідоміших моделей, які допускають існування солітонів у своїх рішеннях, є нелінійне диференціальне рівняння Кортевега-де-Вріза. Солітони КдВ, або так звані акустичні солітони, можливі в середовищах з дисперсією, коли швидкість хвилі в середовищі повинна залежати від її довжини, а також суттєвою нелінійністю.

```
> restart:
with(PDEtools): # Необхідні програмні пакети
> KdV:=diff(u(x,t),t) + 6*u(x,t)*diff(u(x,t),x) +
diff(u(x,t),x$3);
```

$$KdV := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + 6 u(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t). \quad (3.6.7)$$

Солітон є рухомою хвилею, тому доцільно шукати солітонні рішення рівняння (3.6.7) у вигляді рухомої хвилі із застосуванням таких функцій як гіперболічні секанс та косеканс, які описують його форму [33], [34]:

```
> TWSolutions(KdV, singsol=false,
functions=[sech,csch]);
```

$$\left\{ u(x, t) = 2 _C2^2 \operatorname{sech}(_C2 x + _C3 t + _C1)^2 - \frac{4 _C2^3 + _C3}{6 _C2} \right\},$$

$$\left\{ u(x, t) = -2 _C2^2 \operatorname{csch}(_C2 x + _C3 t + _C1)^2 - \frac{4 _C2^3 + _C3}{6 _C2} \right\} \quad . \quad (3.6.8)$$

Перевіримо, що (3.6.8) дійсно є рішенням рівняння (3.6.7) за допомогою підстановки функції (3.6.8) у рівняння (3.6.7), користуючись командою перевірки пакету PDEtools:

```
> pdetest(%[1], KdV);
pdetest(%%[2], KdV);
```

$$\begin{matrix} 0, \\ 0. \end{matrix} \quad (3.6.9)$$

Два отриманих рішення відповідають солітонам один із яких розповсюджується в напрямку осі Ox , а інший – у протилежному напрямі. Надалі розглядатимемо лише перший із них, оскільки їх властивості абсолютно тотожні, за виключенням знаку швидкості, який визначається напрямом руху:

```
> u(x,t) :=-
(1/6)*(_C3+4*_C2^3)/_C2+2*_C2^2*sech(_C1+_C2*x+_C3*t)^
2;
```

$$u(x, t) := 2_C2^2 \operatorname{sech}(_C2 x + _C3 t + _C1)^2 - \frac{4_C2^3 + _C3}{6_C2}. \quad (3.6.10)$$

Через те, що солітон є рухомою хвилею він мусить задовольняти хвильовому рівнянню, отже його фазова швидкість може бути обчислена через відношення других похідних від функції (3.6.10) за координатами та часом:

```
> simplify(diff(u(x,t), x$2)):
simplify(diff(u(x,t), t$2)):
v=-sqrt(%/%%, symbolic);
```

$$v = -\frac{C3}{C2}, \quad (3.6.11)$$

```
> u(x,t) :=factor(eval(u(x,t), _C3=-v*_C2));
```

$$u(x, t) := 2_C2^2 \operatorname{sech}(-v_C2 t + _C2 x + _C1)^2 - \frac{2_C2^2}{3} + \frac{v}{6}. \quad (3.6.12)$$

Незалежну від координат та часу частину рішення (3.6.12) звичайно покладають нульовою, хоча б тому, що вона визначає лише рівень відліку для функції $u(x, t)$. Отже:

```
> _C2=sqrt(v/4);
```

$$_C2 = \frac{\sqrt{v}}{2}, \quad (3.6.13)$$

```
> u(x,t) :=eval(u(x,t), _C2=sqrt(v/4));
```

$$u(x, t) := \frac{v \operatorname{sech}\left(-\frac{v^{3/2} t}{2} + \frac{\sqrt{v} x}{2} + _C1\right)^2}{2}. \quad (3.6.14)$$

Що до константи $_C1$, то її можна включити в координату або час у якості точки відліку, припустимо таким способом:

```
> _C1=-sqrt(v)*chi/2;
```

$$_C1 = -\frac{\sqrt{v} \chi}{2}, \quad (3.6.15)$$

```
> u(x,t) := eval(u(x,t), _C1=-sqrt(v)*chi/2);
```

$$u(x,t) := \frac{v \operatorname{sech}\left(\frac{v^{3/2}t}{2} - \frac{\sqrt{v}x}{2} + \frac{\sqrt{v}\chi}{2}\right)^2}{2}. \quad (3.6.16)$$

Або в дещо простішому вигляді з двома параметрами v , χ – швидкість та початок відліку координат:

```
> u:=unapply(simplify(v*(sech(sqrt(v)*(x-chi-v*t)/2))^2/2), x, t, v, chi);
```

$$u := (x, t, v, \chi) \mapsto \frac{v}{2 \cosh\left(\frac{\sqrt{v}(vt + \chi - x)}{2}\right)^2}. \quad (3.6.17)$$

Зобразимо функцію (3.6.17) з фіксованими модельними параметрами: $v=0.5$, $\chi=0$.

```
> plot3d(u(x,t,0.5,0), x=-12..12, t=-8..8,
axes=framed, projection=orthogonal,
orientation=[98,40,10], style=patch,
lightmodel=light3, grid=[48,32], font=[Arial,14],
labels=["x", "t", "u( x, t, 0.5, 0 )"],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
horizontal, vertical], caption="Рис. 5. Солітон КдВ:
часово-просторова форма");
```

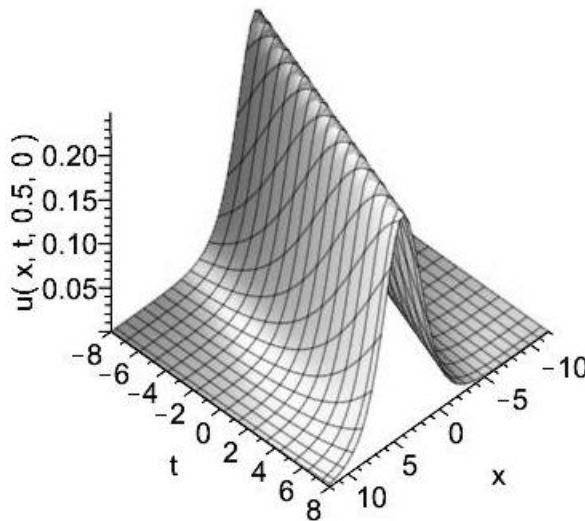
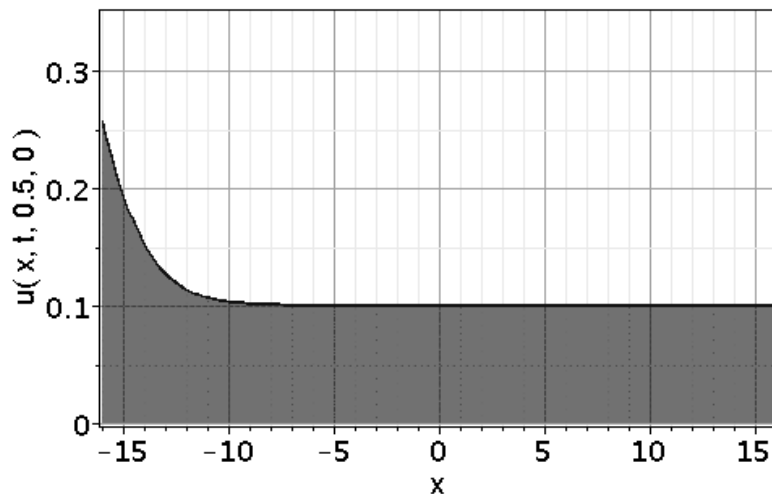


Рис. 3.6.5. Солітон КдВ: часово-просторова форма

А також у вигляді анімації, яка представляє рух солітону у часі на поверхні каналу, параметри ті ж самі, але їх можна змінювати, досліджуючи різні солітони.

```
> plots[animate](plot, [0.1+u(x,t,0.5,0), x=-16..16,
filled=true, gridlines=true, axes=boxed, color=blue],
t=-36..36, frames=36, title='', font=[Helvetica,14],
labels=["x", "u( x, t, 0.5, 0 )"], label-
font=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
vertical]); # caption="Рис. 6. Солітон у русі на
поверхні каналу"
```



**Рис. 3.6.6. Солітон у русі на поверхні каналу.
Показано перший кадр у початковий момент часу**

2.2. Мультісолітонні рішення рівняння КдВ та взаємодія пари (дублету) солітонів

Характерною особливістю рівняння КдВ є те, що воно припускає не лише прості солітонні рішення у вигляді окремого солітону, яке було розглянуте вище, але також мультісолітонні рішення у вигляді сукупності (мультиплету) пов'язаних між собою солітонів.

Розглянемо для прикладу солітонний дублет, тобто пару солітонів [33], [34]. Такий дублет у дублеті пов'язані між собою нелінійним способом. Солітонний дублет є точним аналітичним рішенням рівняння КдВ і має такий вигляд:

> restart:

```
sol2:=unapply (2* (v2-v1) * (v1*sech(sqrt(v1/2) *
(x-2*v1*t) )^2+v2*csch(sqrt(v2/2) *
(x-2*v2*t) )^2) / (sqrt(2*v1) *tanh(sqrt(v1/2) *
(x-2*v1*t) ) -sqrt(2*v2) *coth(sqrt(v2/2) *
(x-2*v2*t) ) )^2, v1, v2, x, t) ;
```

$$sol2 := (v1, v2, x, t) \mapsto \left(2 (v2 - v1) \left(v1 \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{v1} (-2 v1 t + x)}{2} \right)^2 + v2 \operatorname{csch} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{v2} (-2 v2 t + x)}{2} \right)^2 \right) \right) / \left(\sqrt{2} \sqrt{v1} \tanh \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{v1} (-2 v1 t + x)}{2} \right) - \sqrt{2} \sqrt{v2} \coth \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{v2} (-2 v2 t + x)}{2} \right) \right)^2, \quad (3.6.18)$$

де v_1, v_2 – швидкості кожного солітону з дублету, які пропорційні їх амплітудам, отже, чим швидшим є солітон тим він вищий і вузьчий. Покажемо просторову-часову еволюцію пари солітонів у дублеті графічно:

```
> plot3d(sol2(1/3,2/3,x,t), x=-20..20, t=-20..20,
axes=framed, grid=[200,200], orientation=[45,45,0],
font=[HELVETICA,14], lightmodel=`light4`, color=gold,
labels=["x", "t", "Амплітуда"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, horizontal, vertical],
title=`Рис. 7. Дублет солітонів: \n еволюція в часі та
просторі`);
```

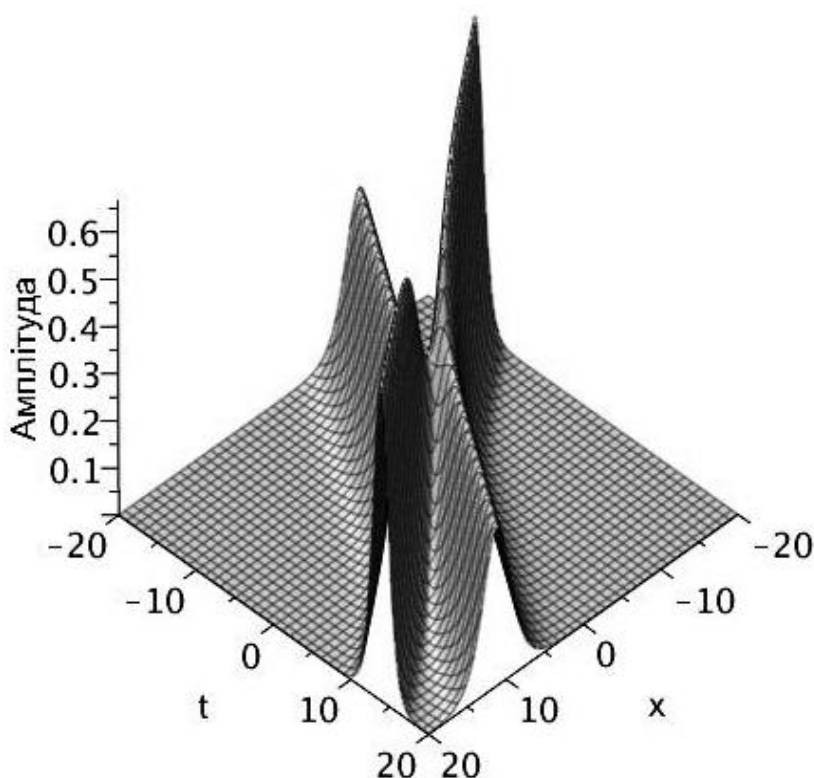
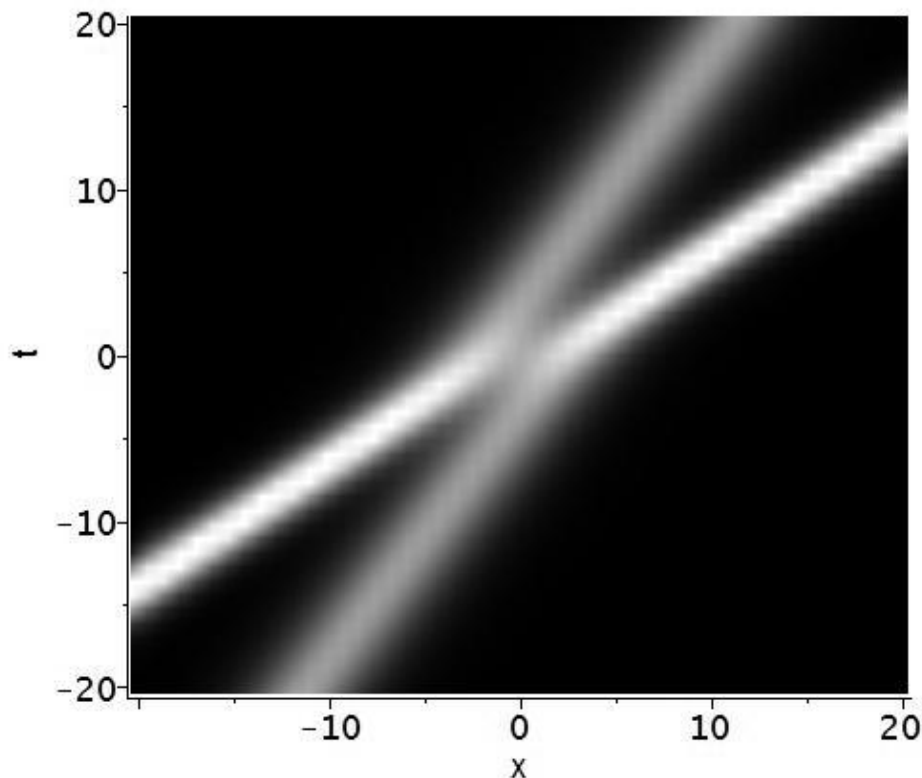


Рис. 3.6.7. Дублет солітонів: еволюція в часі та просторі

Інший погляд, так би мовити «згори» на еволюцію солітонного дублету дозволяють графіки густини, на яких світлішими виглядають вищі ділянки фігури на рис. 3.6.8, причому солітон із вищою амплітудою виглядає світлішим:

```
> plots[densityplot](sol2(1/3,2/3,x,t), x=-20..20,
t=-20..20, axes=framed, style=patchnogrid,
font=[HELVETICA,14], labels=["x", "t"],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
vertical], title="Рис. 8. Дублет солітонів:\n еволюція
та зіткнення в точці (0,0)");
```



**Рис. 3.6.8. Дублет солітонів:
еволюція та зіткнення в точці $(0,0)$**

Рис. 3.6.8 показує, що до моменту часу $t=0$ x -координати солітону з меншою амплітудою, який зображено темнішою та ширшою смугою, випереджають координати солітону з більшою амплітудою, він на рис. 3.6.8 світліший та вужчий. Отже, менший солітон випереджав більшого. Після зіткнення солітонів у точці $(x,t)=(0,0)$ солітони міняються місцями: тепер уже більший солітон випереджає меншого.

Зверніть увагу, лінії, які зображують солітони, після зіткнення не є прямим продовженням їх же ліній до зіткнення, спостерігається візуально помітне зміщення. Втім, найбільш наочними завжди є анімації процесів. Розглянемо анімацію процесу зіткнення двох солітонів, представленого на рис. 3.6.8, та описаного вище:

```
> plots[animate](sol2(1/3,2/3,x,t), x=-50..50,
t=-30..30, frames=100, color=blue, thickness=3,
gridlines=true, numpoints=280, axes=boxed,
font=[HELVETICA,14], labels=["x", "Амплітуда"],
labelfont=[Arial,14], labeldirections=[horizontal,
vertical], title=`Рис. 9. Взаємодія двох солітонів у
дублеті`);
```

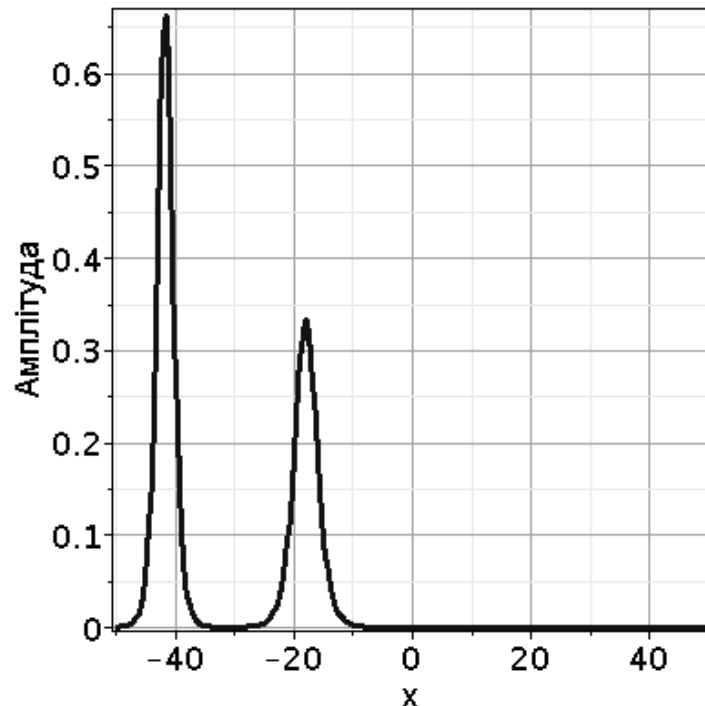


Рис. 3.6.9. Взаємодія двох солітонів у дуплеті.
(показано перший кадр у початковий момент часу)

Анімація рис. 3.6.9 ясно показує взаємодію двох солітонів: швидший солітон доганяє повільніший. Під час зіткнення вони «обмінюються амплітудами», передній солітон стає вищим та вужчим, а задній навпаки – нижчим та ширшим. Зверніть увагу, форма солітонів до і після зіткнення залишається однаковою. Лише безпосередньо в момент зіткнення обидва солітони формують об'єднаний комплекс. Ситуація дуже нагадує зіткнення двох пружних куль із різними імпульсами на більярдному столі.

Власна назва солітонів завдячує саме цій обставині – ці відокремлені хвилі під час зіткнень поведуться як частинки.

Лабораторна робота 7

Приклади економіко-математичних моделей

1. Приклади типових економіко-математичних задач.
 - 1.1. Задача про оптимальний розподіл капіталу.
 - 1.2. Коефіцієнт Джині та його обчислення.
2. Виробнича функція з прикладами застосування.
 - 2.1. Виробнича функція.
 - 2.2. Задача оптимального розподілу часу на роботу та дозвілля.

1 Приклади типових економіко-математичних задач

1.1. Задача про оптимальний розподіл капіталу

Є вільний капітал розміром 1 млрд грошових одиниць, який можна використати двома шляхами [22]:

- 1) розмістити у банку в якості депозиту під 20 % річних;
- 2) інвестувати у виробництво з ефективністю 40 %, причому виробничі затрати очікуються пропорційними квадрату обсягу інвестиції, при цьому прибуток оподатковується в розмірі $p\%$.

Питання полягає в тому, за яких значень оподаткування p частину капіталу стає вигідно інвестувати у виробництво. Принагідно важливо також встановити, яку саме частину капіталу слід інвестувати у виробництво, а яку покласти в банк під відсотки?

| > restart;

Припустимо, що $x \leq 1$ – доля стартового капіталу, яка інвестуватиметься, тоді решта $1-x$ кладеться у банк під 20 % річних. Цей депозит через рік складатиме такий капітал:

| > dep:=(1-x)*1.2;

$$dep := 1.2 - 1.2x. \quad (3.7.1)$$

Тоді як капітал, вкладений у виробництво з урахуванням виробничих витрат та оподаткування через рік складатиме:

| > man:=(1.4*x-a*x^2)*(1-p/100);

$$man := (1.4x - ax^2) \left(1 - \frac{p}{100}\right). \quad (3.7.2)$$

де a – деякий коефіцієнт пропорційності для виробничих витрат, який лежить у межах $0 < a < 0.4$, причому за більших значень цього коефіцієнта інвестиція вочевидь неефективна, бо виробничі витрати перевищать чистий прибуток.

Загальний капітал через рік складатиме:

| > cap:=collect(dep+man, x);

$$cap := 1.2 - a(1 - 0.01000000000p)x^2 + (0.2 - 0.01400000000p)x. \quad (3.7.3)$$

Відшукаємо значення x , яке забезпечує екстремальне значення виразу (3.7.3) за умови, що $0 \leq x \leq 1$.

| > eq:=diff(cap, x)=0;

| x_m:=solve(eq, x);

$$eq := -2.a(1 - 0.01000000000p)x + 0.2 - 0.01400000000p = 0, \quad (3.7.4)$$

$$x_m := \frac{0.1000000000(-100. + 7.p)}{a(-100. + p)}.$$

Оскільки це повинен бути максимум, друга похідна повинна бути від'ємною:

| > diff(cap, x\$2)<0;

$$-2.a(1 - 0.01000000000p) < 0, \quad (3.7.5)$$

що забезпечене при будь-якому позитивному значенні коефіцієнту $a > 0$.

```
| > x_m:=unapply(x_m, p, a);
```

$$x_m := (p, a) \mapsto \frac{0.1000000000 (-100. + 7.p)}{a (-100. + p)}. \quad (3.7.6)$$

Зауважимо, що незалежно від значення a вираз (3.7.6) має корінь для значення:

```
| > p_cr:=evalf(100/7);
```

$$p_{cr} := 14.28571429. \quad (3.7.7)$$

Якщо ставка оподаткування перевищує цю критичну межу, то інвестиції у виробництво стають економічно не вигідними, формально при цьому $x_m < 0$, і варто весь капітал класти в банк під відсотки. За меншої, ніж критична, ставки оподаткування певну частину капіталу варто інвестувати у виробництво.

Побудуємо послідовність значень величини x_m з виразу (3.7.6) для різних значень коефіцієнту виробничих витрат a :

```
| > X:=seq(x_m(p,0.05*n), n=1..8);
```

Далі створимо графіки побудованої послідовності, обмежившись лише тими значеннями її факторів, які потрапляють в інтервал $0 \leq x_m \leq 1$:

```
> plot([X,1,0], p=0..20, view=-0.2..1, axes=boxed,
thickness=2, gridlines=true, font=[Arial,14],
labels=['p', 'x_m'], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical],
tickmarks=[10,7], caption='Рис. 1. Залежність долі
капіталу, що інвестується \n у виробництво від
оподаткування при різних \n коефіцієнтах витрат
a=0.05..0.4');
```

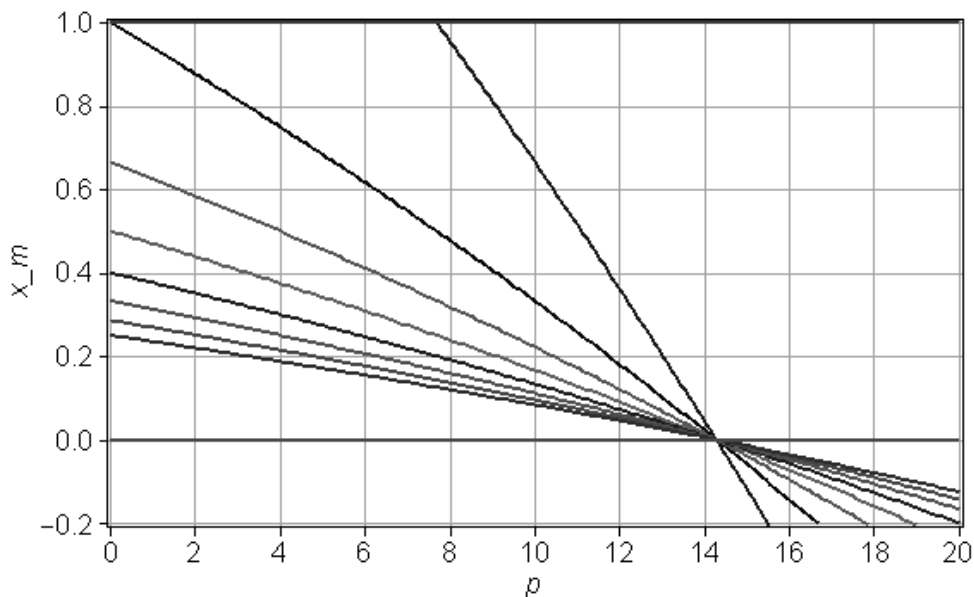


Рис. 3.7.1. Залежність долі капіталу, що інвестується у виробництво, від оподаткування при різних коефіцієнтах витрат $a = 0.05..0.4$

З графіку ясно видно, що всі криві на рис. 3.7.1 перетинаються в точці, яка є їх спільним нулем. Іншими словами всі члени послідовності мають спільний корінь, який визначений виразом (3.7.7). З графіків також видно, що чим меншими є виробничі витрати (коефіцієнт a), тим більшу долю капіталу варто вкладати у виробництво. Зокрема за умови ставки оподаткування нижче 7 % та норми виробничих витрат <0.055 можна інвестувати навіть весь стартовий капітал. Вираз (3.7.7) дозволяє розрахувати оптимальну долю інвестиційного капіталу за умов різного оподаткування p та норм виробничих витрат a . Зокрема для такого конкретного випадку як $p = 8$, $a = 0.1225$ маємо:

$$| > x_m(9, 0.12) ; \quad 0.3388278388 . \quad (3.7.8)$$

Тобто за таких умов інвестувати у виробництво найвигідніше приблизно третину стартового капіталу.

1.2. Коефіцієнт Джині та його обчислення

Коефіцієнт (індекс) Джині – показник нерівності розподілу серед населення деякої величини, наприклад, річних доходів. Коефіцієнт Джині може мати значення в інтервалі між 0 і 1, або ж від 0 до 100 %, причому 0 означає абсолютну рівність – розподілена величина приймає лише одне значення для всіх, а 1 позначає повну нерівність розподілу величини.

Найбільш відомим коефіцієнт Джині є як економічна міра нерівності доходів домогосподарств деякої країни чи регіону. Коефіцієнт Джині для доходів домогосподарств є найпопулярнішим показником економічної нерівності в кожній країні (рис. 3.7.2).

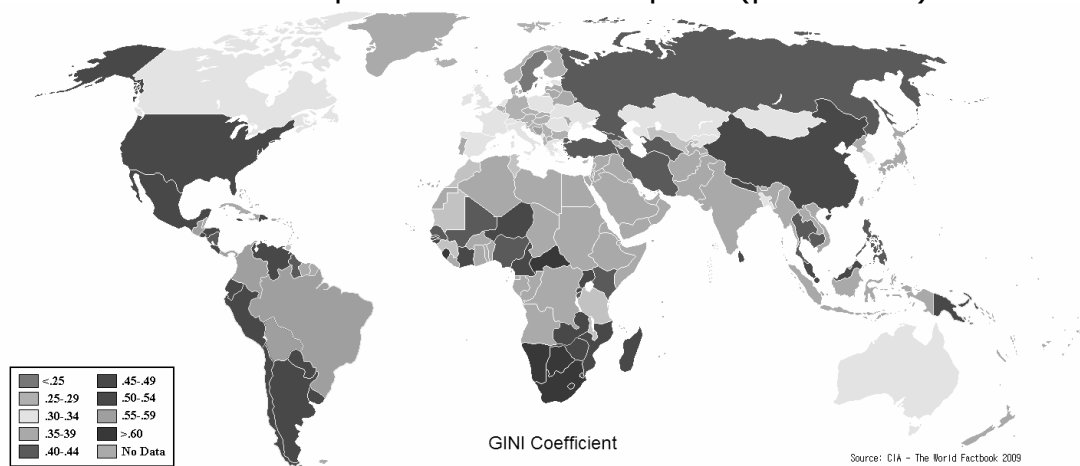


Рис. 3.7.2. Коефіцієнт Джині розподілу доходів для країн світу, згідно з даними 2009 року [22]

Коефіцієнт Джині найпростіше визначити за допомогою так званої кривої Лоренца [22], що зображує частку величини $y\%$, яка зосереджується на $x\%$ популяції з найменшим значенням цієї величини (рис. 3.7.3). Наприклад, для розподілу доходів точка

(30 %, 10 %) буде лежати на кривій Лоренца, якщо сукупний дохід 30 % найбідніших сімей рівний десяти процентам сукупного доходу усіх домогосподарств.

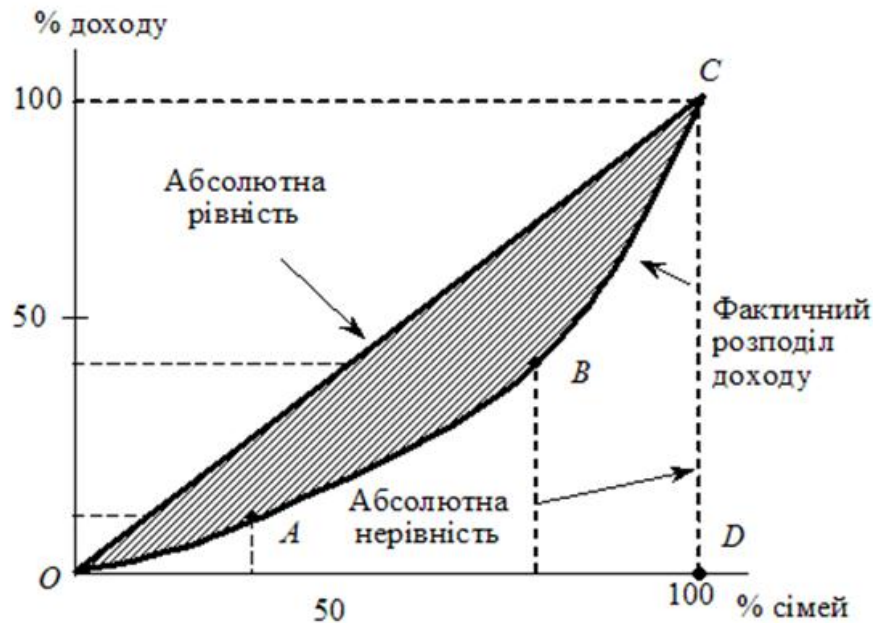


Рис. 3.7.3. Крива Лоренца (OABC)

Коефіцієнт Джині рівний відношенню площі області утвореної кривою Лоренца і прямою повної рівності (прямою під кутом 45°), тобто площі фігури OABC до площі трикутника ODC, утвореного прямою повної рівності і прямими $y=0$ та $x=1$. На рис. 3.7.3 перша область позначена сірою штриховкою. Якщо позначити площі відповідних фігур A і B, то можна записати формулу для коефіцієнта Джині у вигляді:

$$G = \frac{A}{A+B}. \quad (3.7.9)$$

Оскільки площа трикутника $A+B = \frac{1}{2}$, то також справедливі такі формули:

$$G = 2A = 1 - 2B. \quad (3.7.10)$$

Якщо весь дохід є рівномірно розподілений, то крива Лоренца збігається з прямою повної рівності і значення коефіцієнта Джині рівне нулю. Чим більшим є значення коефіцієнта Джині, тим нерівномірніше дохід розподілений серед домогосподарств певної країни.

Розглянемо деякий приклад. Припустимо, що для певної країни крива Лоренца може бути описана таким рівнянням:

```
> restart:
> y:=1-(1-x)^(0.5);
```

$$y := 1 - \sqrt{1-x}. \quad (3.7.11)$$

Зобразимо криву Лоренца та пряму повної рівності, виділивши площу під кривою Лоренца (фігура B) кольором:

```
> plot([y,x], x=0..1, view=0..1, color=[khaki,navy],
gridlines=true, axes=boxed, font=[Arial,14],
labels=["x", "y(x)"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical],
filled=[true,false], thickness=[2,2], caption="Рис. 4.
Крива Лоренца \n та площа під нею (B)");
```

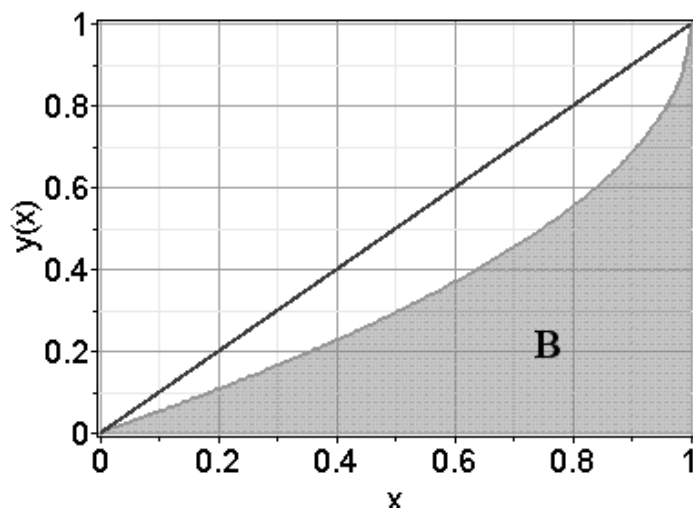


Рис. 3.7.4. Крива Лоренца та площа під нею (B)

Знаходимо площу під кривою Лоренца та коефіцієнт Джині:

```
> Int(y,x=0..1)=int(y, x=0..1);
B:=rhs(%);
```

$$\int_0^1 (1 - \sqrt{1-x}) dx = 0.3333333333, \quad (3.7.12)$$

$$B := 0.3333333333,$$

```
> G:=1-2*B;
```

$$G := 0.3333333334. \quad (3.7.13)$$

Коефіцієнт Джині (3.7.13) приблизно відповідає ситуації в Україні, як це виникає з рис. 3.7.2. Для порівняння, коефіцієнт Джині для Китаю у 2012 році складав 0.474, в Росії – 0.422, в США – 0.477.

Доволі часто характеристикою нерівності розподілу доходів серед населення слугує також відношення сукупних доходів 20 % найбагатшої частини населення до найбідніших 20 %. Визначимо цей показник.

```
> a:=int(y,x=0.8..1)/int(y,x=0..1); # Сукупна доля 20%
найбагатшого населення
b:=int(y,x=0..0.2)/int(y,x=0..1); # Сукупна доля 20%
найбіднішої верстви населення
g:=a/b; # Показник нерівності
```

$$a := 0.4211145618, \quad (3.7.13)$$

$$b := 0.03108350559,$$

$$g := 13.54784648.$$

Отже, найбагатшим 20 % суспільства належить приблизно 42 % сукупного річного доходу, тоді як найбіднішим 20 % населення – лише трохи більше 3 % такого доходу. Для розглянутої в нашому прикладі умовної країни відносний показник соціальної нерівності між цими соціальними групами є вищим від такого $g \approx 7$, який вважається граничним для виникнення надмірної соціальної напруги в суспільстві.

2 Виробнича функція з прикладами застосування

2.1. Виробнича функція

Виробнича функція (ВФ) – залежність між кількістю використаних у виробництві ресурсів (факторів виробництва) та обсягом виробленої продукції (або послуг) [35]. Виробничі функції застосовують для аналізу впливу різних факторів на обсяг випуску продукції на мікро- та макrorівнях економіки – від окремої фірми до народного господарства країни в цілому, тоді значенням ВФ є валовий національний продукт (ВВП) або валовий національний дохід (ВНД).

У якості ресурсів, тобто змінних ВФ, найчастіше використовують накопичений труд у формі виробничих фондів K -капіталу та справжній живий труд L , а економіка на макrorівні моделюється двофакторною нелінійною виробничою функцією X :

$$X = F(K, L), \quad (3.7.14)$$

яка стверджує, що випуск продукції є функцією від витрат ресурсів: фондів (капіталів) та праці. Замість загальної формули (3.7.14) в економічних аналізах найчастіше уживають два часткових випадки ВФ:

1. Мультиплікативна форма (МВФ) функції:

$$X = AK^\alpha L^\beta, \quad 0 < (\alpha, \beta) < 1; \quad (3.7.15)$$

2. ВФ Кобба-Дугласа:

$$X = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.7.16)$$

При цьому величину $\frac{X}{L}$ називають середньою ефективністю

праці, а $\frac{X}{K}$ – середньою віддачею фондів.

ВФ є неокласичною, якщо вона задана для всіх невід'ємних значень аргументів (K, L) , є безперервною функцією аргументів, яка має похідні потрібного порядку і відповідає трьом економічним вимогам:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0, \quad (3.7.17)$$

що означає неможливість виробництва без одного з ресурсів. Окрім того:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad (3.7.18)$$

що означає вимогу зростання виробництва за умови зростання ресурсів.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad (3.7.19)$$

що означає уповільнення зростання виробництва за умов збільшення лише одного ресурсу за фіксованої кількості іншого. Нескладно побачити, що ВФ типу (3.7.15), (3.7.16) є неокласичними.

2.2. Задача оптимального розподілу часу на роботу та дозвілля

2.2.1. Розподіл без урахування оподаткування

Припустимо, що повна кількість часу, якою ми диспонуємо, позначена через T , а кількість часу, яка присвячена дозвіллю – L . Тоді кількість часу, відведена на роботу, становить $h = T - L$ [36].

Заробітна плата за годину позначається w . Зауважимо, якщо людина працює h годин при заробітній платі за годину w , тоді дохід складатиме:

$$wh = w(T - L) = wT - wL.$$

Ми також вважаємо, що дохід від праці витрачається на споживання, зокрема й на дозвілля, тобто $wT - wL = P_c \cdot C$, де P_c – ціна споживання, а C – обсяг споживання. Покладемо для простоти ціну споживання одиничною $P_c = 1$, отже:

```
> restart;
> w*T-w*L-C=0;
```

$$-wL + wT - C = 0, \quad (3.7.20)$$

що просто означає, що бюджет повинен виконуватися і ніхто не може споживати більше, ніж зароблено. Тепер припустимо, що споживач має користь від обох ресурсів: як від роботи, так і від дозвілля, і ця користь задається виробничою функцією типа Кобба-Дугласа:

```
> U(C,L)=C^beta*L^(1-beta);
```

$$U(C, L) = C^\beta L^{1-\beta}, \quad (3.7.21)$$

яка може бути зображена графічно:

```
> plot3d(eval(C^beta*L^(1-beta), beta=0.5), C=0..800,
L=0..24, axes=framed, style=patchcontour,
color='Niagara Azure', contours = 12, font=[Arial,14],
orientation=[-30,45,0], labels=["Споживання",
"Дозвілля", "Користь"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, horizontal, vertical],
title='Рис. 5. Функція користі споживача \n від
споживання та дозвілля');
```

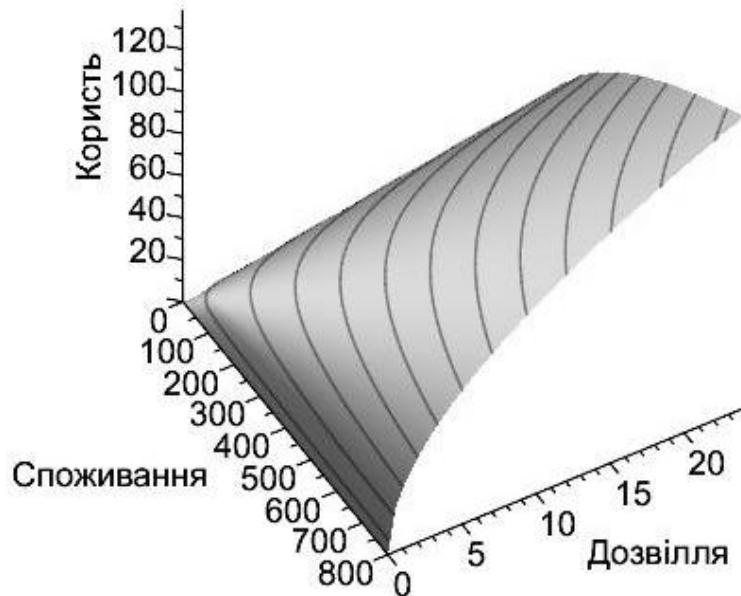


Рис. 3.7.5. Функція користі споживача від споживання та дозвілля

Заважимо, що уздовж контурів на рис. 3.7.5 значення функції користі є незмінними.

Поставимо таку задачу: максимізувати функцію користі споживача шляхом оптимального розподілу часу поміж роботою та дозвіллям. Задачу на умовний екстремум вирішуватимемо спочатку відомим з математики методом множника Лагранжа:

```
> restart;
con:=-L*w+T*w-C; # Умови
ob:=C^beta*L^(1-beta); # Цільова функція користі
LL:=con*lambda+ob; # Лагранжіан
```

$$\begin{aligned} con &:= -Lw + Tw - C, \\ ob &:= C^\beta L^{1-\beta}, \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

$$LL := (-Lw + Tw - C)\lambda + C^\beta L^{1-\beta}.$$

Умовами екстремуму лагранжіана є такі рівняння:

```
> eq1:=diff(LL,C)=0;
eq2:=diff(LL,L)=0;
```

$$\begin{aligned} eq1 &:= -\lambda + \frac{C^\beta \beta L^{1-\beta}}{C} = 0, \\ eq2 &:= -w\lambda + \frac{C^\beta L^{1-\beta} (1-\beta)}{L} = 0. \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

З відповідними рішеннями рівнянь (3.7.23) для множника Лагранжа λ :

```
> solve(eq1,lambda);
solve(eq2,lambda);
```

$$\frac{C^\beta \beta L^{1-\beta}}{C}, \quad (3.7.24)$$

$$-\frac{C^{\beta} L^{1-\beta} (-1 + \beta)}{L w},$$

які після прирівнювання формують рівняння:

```
> eq3:=%%=%%;
```

$$eq3 := -\frac{C^{\beta} L^{1-\beta} (-1 + \beta)}{L w} = \frac{C^{\beta} \beta L^{1-\beta}}{C}, \quad (3.7.25)$$

```
> C_1:=solve(eq3,C);
```

$$C_1 := -\frac{\beta L w}{-1 + \beta}. \quad (3.7.26)$$

Підставимо вираз (3.7.26) в умови нульового бюджету (3.7.22) поділеного на годинну заробітну платню w :

```
> eq4:=simplify(eval(con/w=0, [C=C_1]));
```

$$eq4 := \frac{T\beta + L - T}{-1 + \beta} = 0, \quad (3.7.27)$$

```
> L_opt:=solve(eq4, L); # Вираз для оптимальної  
кількості дозвілля
```

$$L_{opt} := -T (-1 + \beta), \quad (3.7.28)$$

```
> C_opt:=eval(C_1, [L=L_opt]);
```

$$C_{opt} := \beta T w. \quad (3.7.29)$$

Методами Maple та ж задача вирішується числовими алгоритмами, що демонструє код, наведений нижче.

```
> restart; with(Optimization);
```

```
[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize,  
NLPSolve, QPSolve]
```

```
> beta:=.5; w:=50; T:=24; # Числові параметри задачі  
(показник цільової функції, погодинна оплата праці та  
кількість годин на добу)
```

$$\beta := 0.5, \quad (3.7.30)$$

$$w := 50,$$

$$T := 24.$$

```
> U:=C^beta*L^(1-beta); # Цільова функція користі  
con:=-L*w+T*w-C; # Умова
```

$$U := \sqrt{C} \sqrt{L}, \quad (3.7.31)$$

$$con := -C - 50 L + 1200.$$

```
> Opt1:=evalf(Maximize(U, [con = 0]), 4);
```

```
# Максимізація цільової функції за умови (2.2.1.12)
```

$$Opt1 := [84.85, [C = 600.0, L = 12.]]. \quad (3.7.32)$$

З останньої операції можна побачити, що максимум функції користі споживача на рівні $U = 84.85$ забезпечує споживання розмірами 600 грошових одиниць та дозвілля протягом 12 годин на добу. Ті самі показники можна отримати і за формулами (3.7.28)-(3.7.29).

```
> C=evalf(w*T*beta, 4);
L=evalf((1-beta)*T, 3); # Розрахунки оптимального
споживання та дозвілля по формулах (3.7.28) та
(3.7.29)
```

$$\begin{aligned} C &= 600.0, \\ L &= 12.0. \end{aligned} \quad (3.7.33)$$

Зобразимо результати графічно:

```
> `Оптимальний обсяг споживання`=evalf(w*T*beta, 2);
`Оптимальний обсяг дозвілля`=evalf((1-beta)*T, 2);
v1:=plot(-L*w+T*w, L=0..35, color=blue, thickness=3):
v2:=plots[contourplot](C^beta*L^(1-beta), L=0..35,
C=0 ..1400, contours=60, color=khaki):
v3:=plots[textplot]([12, 600, "Лінія доходу та
оптимальна позиція"], align={ABOVE, RIGHT},
font=[Helvetica, bold, 12]):
v4:=plots[pointplot]([12, 600], axes=boxed,
symbol=solidcircle, symbolsize=20):
plots[display]({v1, v2, v3, v4}, labels=["Дозвілля",
"Споживання"], labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal, vertical],
font=[Helvetica, 14], view=[5..25, 50..1200],
tickmarks=[12,7], gridlines=true);
```

Оптимальний обсяг споживання = 600.

Оптимальний обсяг дозвілля = 12.

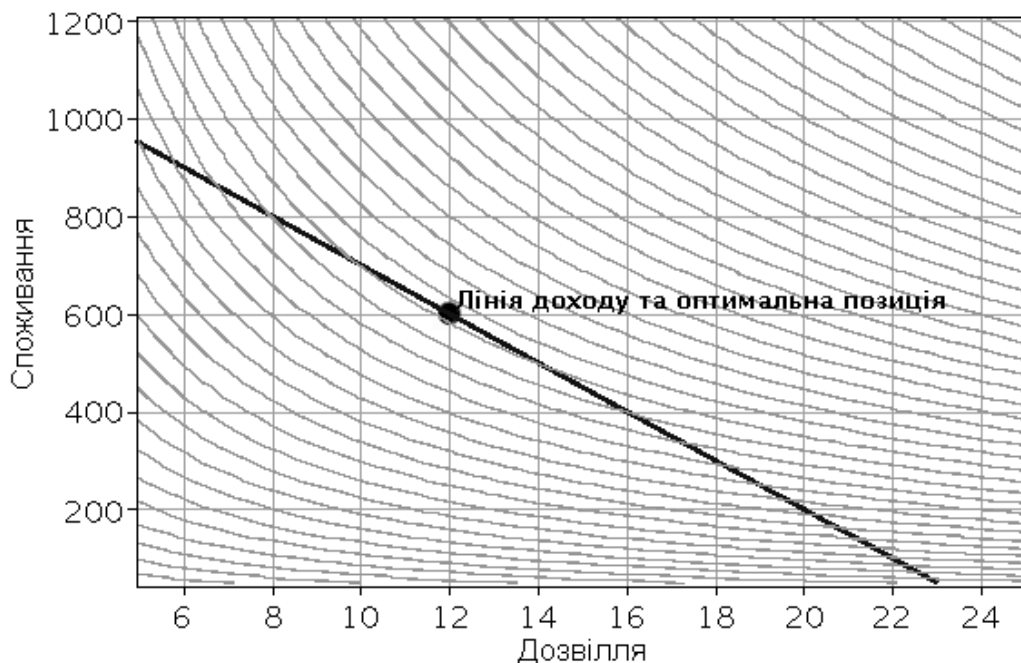


Рис. 3.7.6. Споживання та дозвілля, їх оптимізація

На рис. 3.7.6 контури показують різні значення цільової функції користі, точкою на лінії доходів показано оптимальний розподіл між роботою (12 год.) та дозвіллям (12 год.), який забезпечує обсяг споживання у 600 грошових одиниць на добу, з максимального значення функції користі $U = 84.85$.

2.2.2. Вплив податків на споживання та розподіл часу

Тепер врахуємо оподаткування [36]. Припустимо, що доля податків складає t з кожної грошової одиниці, іншими словами погодинна оплата з урахуванням податків складає тепер $w(1-t)$ грошових одиниць. Бюджетна умова з урахуванням податків виглядатиме так:

$$(1-t)wT - (1-t)wL = C. \quad (3.7.34)$$

Застосуємо програму оптимізації, поклавши долю податків у 40 %.

```
> restart:
with(Optimization); with(plots):
[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize,
NLPSolve, QPSolve]

> beta:=.5;
t:=.4;
w:=50;
T:=24;
U:=C^beta*L^(1-beta);
con:=(1-t)*w*T-C-(1-t)*w*L;
```

$$\begin{aligned} \beta &:= 0.5, \\ t &:= 0.4, \\ w &:= 50, \\ T &:= 24, \\ U &:= \sqrt{C} \sqrt{L}, \\ con &:= 720.0 - C - 30.0 L. \end{aligned} \quad (3.7.35)$$

```
> Opt2:=evalf(Maximize(U, [con = 0]), 2);
Opt2 := [66., [C=360., L=12.]]. \quad (3.7.36)
```

Як видно з (3.7.36), податки зменшують як обсяг споживання так і максимальне значення функції користі для споживача $U_2 = 66 < U_1 = 85$. Відобразимо це порівняння у вигляді графіків:

```
> "Оптимальне споживання з податками"=360;
"Оптимальне дозвілля з податками"=12;
v1:=plot(-L*w+T*w, L=0..35, color=navy, thickness=3):
v2:=contourplot(C^beta*L^(1-beta), L=0..35, C=0..1400,
contours=60, color=khaki):
v3:=textplot([12, 600, "Оптимальна позиція без
податків"], align={ABOVE, RIGHT}, font=[Helvetica,
bold, 12]):
v4:=pointplot({[12, 600]}, axes=boxed,
symbol=solidcircle, symbolsize=20, color=blue):
v5:= plot((1-t)*w*T-(1-t)*w*L, L=0..35, color=`Niagara
Burgundy`, thickness=3):
v6:=textplot([12, 360, "Оптимальна позиція з
податками"], align={ABOVE, RIGHT}, font=[Helvetica,
bold, 12]):
v7:=pointplot({[12, 360]}, axes=boxed,
```

```
symbol=solidcircle, symbolsize=20,color=red):
display({v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7},
labels=["Дозвілля", "Споживання"],
labelfont=[Arial,14],
labeldirections=[horizontal,vertical],
font=[Helvetica, 14], view=[5..25, 50..1200],
tickmarks=[12,7], gridlines=true);
```

"Оптимальне споживання з податками" = 360

"Оптимальне дозвілля з податками" = 12

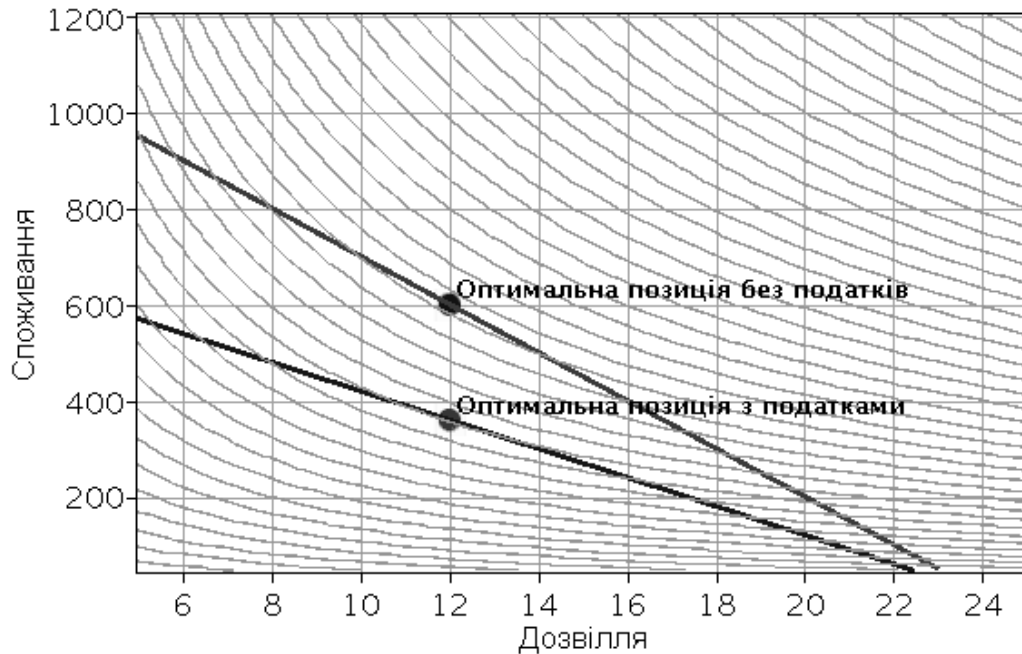


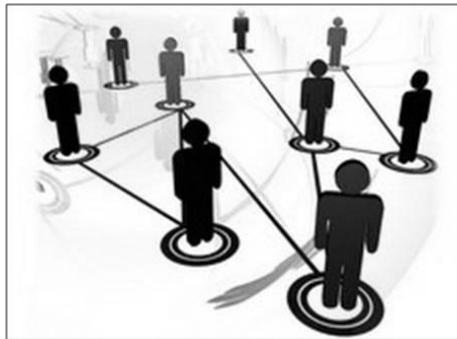
Рис. 3.7.7. Споживання та дозвілля з урахуванням податків, їх оптимізація

ДОДАТКИ

Додаток А

1

Методологічні питання моделювання процесів і систем



2

Моделювання

Методологічна основа моделювання полягає в упорядкуванні отриманої інформації щодо об'єктів, які існують поза нашою свідомістю і взаємодіють між собою та зовнішнім середовищем

Об'єкт (лат. *objectum* – предмет) – все те, на що може бути спрямована людська діяльність.

Гіпотеза – певне твердження, яке ґрунтується на невеликій кількості дослідів, або спостережень, чи на здогадках.

Аналогія – судження про певну часткову подібність об'єктів, яке може бути суттєвим, або не суттєвим.

Моделювання

Модель – (лат. *modulus* – міра) – це спрощена копія об'єкту-оригіналу яка забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу

Модель є системним відображенням оригіналу

Моделі – зручні для досліджень логічні схеми, побудовані на основі гіпотез та аналогій, для спрощення міркувань та логічних конструкцій, які дозволяють проводити досліді та уточнювати природу явищ

Модель є відображення – цільове, абстрактне або реальне, статичне, або динамічне, обмежене спрощене, наближене; має разом з безумовно-істинним також умовно-істинний і навіть не істинний зміст, який проявляється в процесі створення та практичного використання.

Моделювання

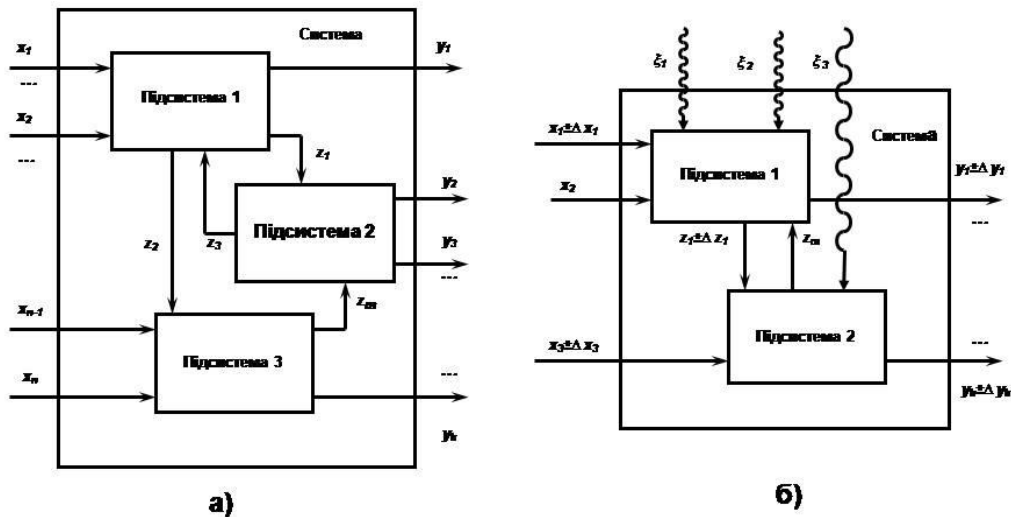
Моделювання – заміна одного об'єкту іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкту-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі шляхом проведення дослідів з останньою

Теорія моделювання – теорія заміни одних об'єктів (оригіналів) іншими об'єктами (моделями)

Однією з важливих характеристик моделі є її **адекватність**

Модель адекватна об'єкту, якщо результати моделювання підтверджуються і можуть бути основою для прогнозів поведінки технічних об'єктів, або процесів, в реальних умовах з прийнятною точністю, яка задовольняє **критерію адекватності**

Схеми моделей виробничих систем за наявності в них детермінованих (а) та стохастичних (б) процесів



Методи моделювання складних систем

повні, неповні, наближені

1. **Натурне моделювання** – дослід на об'єкті-оригіналі, який моделює сам себе в умовах такого дослідження.
2. **Фізичне моделювання** – дослід на спеціальних макетах, які зберігають природу явищ, але відтворюють їх в кількісно зміненому масштабі.
3. **Математичне моделювання** – використання моделей, за фізичною природою відмінних від об'єктів, що моделюються, але маючих подібний математичний опис.

Класифікація видів моделювання систем



1. **Детерміноване моделювання** – віддзеркалює детерміновані процеси за умов відсутності будь-яких випадкових впливів.
2. **Стохастичне моделювання** – відображає ймовірнісні процеси та події. У цьому випадку аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють статистичні характеристики.
3. **Статичне моделювання** – слугує для опису поведінки об'єкту у фіксований момент часу.
4. **Динамічне моделювання** – віддзеркалює поведінку об'єкту в залежності від часу.
5. **Дискретне моделювання** – призначене для опису процесів, які вважаються дискретними в часі.
6. **Безперервне моделювання** – дозволяє опис неперервних процесів.
7. **Дискретно-безперервне моделювання** – використовують для тих випадків, коли потрібно одночасно вивчити наявні в системі як дискретні та і неперервні процеси.

За умов **наочного моделювання** на основі уявлень про об'єкт створюються різноманітні наочні моделі, які презентують явища та процеси в об'єкті.

В основі **гіпотетичного моделювання** закладено гіпотезу щодо закономірностей процесу в реальному об'єкті, яка презентує рівень знань дослідника про об'єкт та ґрунтується на причинно-наслідкових зв'язках поміж вхідними та вихідними сигналами досліджуваного об'єкту. Гіпотетичне моделювання використовують тоді, коли знань про об'єкт недостатньо для побудови реальних моделей.

Аналогове моделювання базується на застосуванні різного рівня аналогій. Найвищим з них є повна аналогія, яка спостерігається лише для відносно простих об'єктів. З ускладненням об'єкту уживають аналогій нижчих рівнів, отже, аналогова модель віддзеркалює лише декілька, або навіть одну сторону функціонування об'єкту.

Макетування може бути корисним у випадках, коли процеси в реальному об'єкті не піддаються фізичному моделюванню, або може передувати застосуванню інших видів моделювання. У підвалинах побудови уявних макетів також лежать аналогії, втім такі, що базуються на причинно-наслідкових зв'язках між явищами та процесами в об'єкті.

Математичне моделювання

Є процесом встановлення відповідності певному реальному об'єктові деякого математичного опису, який називають математичною моделлю, а також дослідження такої моделі, яке дозволяє отримувати характеристики первинного об'єкту-оригіналу. Вигляд математичної моделі залежить як від природи реального об'єкту, так і від потрібної вірогідності та точності рішення задачі. Математична модель, як і кожна інша, описує об'єкт лише у межах певної точності.

Для **аналітичного моделювання** характерним є те, що процеси функціонування елементів системи записують у вигляді деяких функціональних співвідношень, наприклад, алгебраїчних, інтегро-диференціальних, у кінцевих різницях тощо, або логічних умов.

Методи вивчення аналітичної моделі:

- а) аналітичні**, коли намагаються в явному вигляді отримати залежності між шуканими характеристиками;
- б) числові**, коли не вміючи вирішувати рівнянь в загальному вигляді намагаються отримати числові результати при заданих початкових (граничних) умовах;
- в) якісні**, коли не маючи рішення в явному вигляді, можливо знайти деякі його властивості (наприклад, стійкість рішення, або його асимптоти).

Під час **імітаційного моделювання** реалізуючий модель алгоритм відтворює процес функціонування системи в часі, причому імітуються елементарні явища, які складають процес, зі збереженням їх логічної структури та послідовності проткання в часі, що дозволяє отримати інформацію щодо станів процесу в певні моменти часу, які дають можливість оцінити характеристики системи.

Переваги імітаційного моделювання

- ☐ Врахування як дискретних так і безперервних елементів
- ☐ Врахування нелінійності системи
- ☐ Врахування випадкових впливів
- ☐ Дозволяє аналізувати великі системи



Метод **статистичного моделювання** (метод статистичних випробувань, або метод Монте-Карло) – багатократне відтворення процесу шляхом «прогонів» імітаційної моделі на комп'ютері з наступною обробкою інформації для знаходження характеристик процесу.

Базові принципи побудови математичних моделей

**Системний
підхід**

**Класичний
підхід**

Система – сукупність певним способом впорядкованих елементів. Взаємно пов'язані між собою та оточуючим середовищем елементи поєднуються в єдине ціле за певними загальними ознаками.

Системний підхід до вивчення та опису технологічних процесів заснований на декомпозиції (розкладанні) системи на більш прості підсистеми, які взаємодіють між собою, з роздільним вивченням їх структури і функцій та наступним синтезом отриманих знань. Під час синтезу враховують виявлену ієрархію процесів по масштабах області дії, їх просторове розташування та часову послідовність, а також синергетичні ефекти, спільна дія яких перевершує просту суму окремих впливів.

Принципи системного підходу:

1. Пропорційно-послідовне просування по етапах та напрямках створення моделі.
2. Узгодження інформаційних, ресурсних, надійнісних та інших характеристик.
3. Вірне співвідношення окремих рівнів ієрархії в системі моделювання.
4. Цілісність ізольованих стадій побудови моделі.

Принцип класичного підходу:

1. До синтезу моделі - передбачає вивчення взаємозв'язків між окремими частинами моделі шляхом розгляду їх як відображення зв'язків між окремими підсистемами об'єкту.

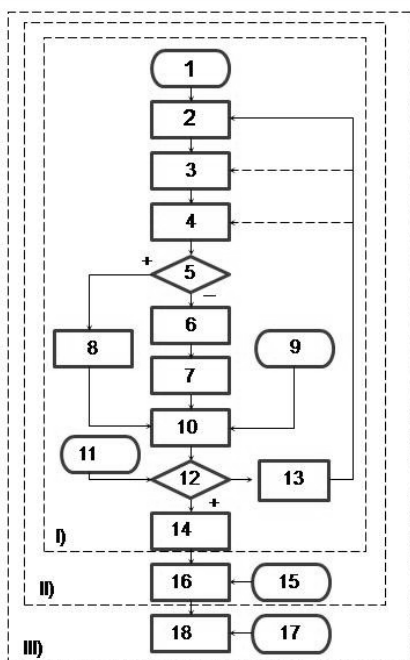
Атомний, або молекулярний рівень описує фізико-хімічні процеси мікрокінетики, які відбуваються в області масштабу відстаней поміж атомами (наномасштаби).

Рівень частинок малого об'єму описує процеси в масштабі окремих включень, фаз, структур.

Рівень робочої зони технологічного процесу описує процеси в областях з розмірами крупних агрегатів частинок, зон термічного впливу, деформації, дифузії, плавлення тощо. Цей рівень враховує характер руху потоків речовини та енергії.

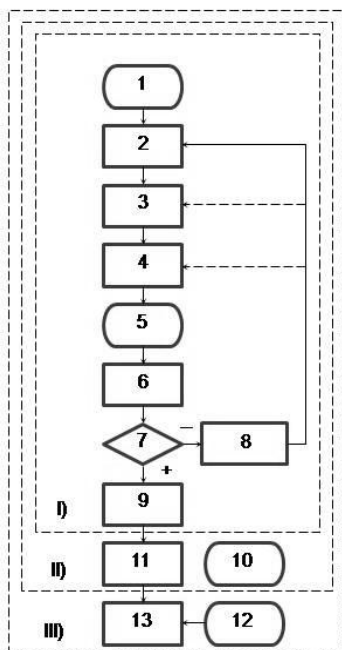
Рівень технологічної системи описує взаємне розташування та розміри робочих зон та елементів системи, послідовність технологічних операцій.

Схема побудови детермінованих моделей



- 1 – постановка задачі;
- 2 – побудова фізичної моделі;
- 3 – формулювання математичної моделі;
- 4 – розробка методу та алгоритму рішення;
- 5 – вибір методу або алгоритму;
- 6 – програмування та налагодження програми;
- 7 – вибір параметрів обчислювального процесу;
- 8 – аналітичний розв'язок задачі;
- 9 – дослідне визначення констант моделі;
- 10 – вирішення контрольних задач;
- 11 – контрольні експерименти на натурному об'єкті;
- 12 – перевірка адекватності моделі;
- 13 – коректування моделі;
- 14 – вивчення процесу за допомогою моделі;
- 15 – визначення цільової функції та обмежень;
- 16 – оптимізація процесу за допомогою моделі;
- 17 – експериментальна інформація засобів автоматизації;
- 18 – керування процесом за допомогою моделі;

Схема побудови стохастичних моделей



- 1 – постановка задачі;
- 2 – вибір факторів та параметрів;
- 3 – вибір виду моделі;
- 4 – планування експериментів;
- 5 – реалізація плану експериментів;
- 6 – побудова статистичної моделі;
- 7 – перевірка адекватності моделі;
- 8 – коректування моделі;
- 9 – вивчення процесу за допомогою моделі;
- 10 – визначення параметрів оптимізації та обмежень;
- 11 – оптимізація процесу за допомогою моделі;
- 12 – експериментальна інформація засобів автоматизації;
- 13 – керування процесом за допомогою моделі;

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Аналогія – 231
Атрактор Лоренца – 117, 118
Біфуркація – 185
Брахістохрона – 44
Брізер – 64
Вектор намагніченості – 140
Виробнича функція – 224
Виробничий процес – 67
Генератор Ван-дер-Поля – 19, 169, 182, 187, 188
Гідродинаміка – 53
Гіпотеза – 231
Густина яскравості – 45
 Лінійна – 45
Динамічна система – 9, 23, 92
Диференціальні рівняння – 9, 25
 У частинних похідних (PDE) – 9, 26, 49, 188
 Граничні умови – 51
 Початкові умови – 51
Звичайні (ODE) – 9, 25, 32, 160
Лапласа – 107
Лінійні – 46, 103
Лінійні, другого порядку – 31, 46, 191
Нелінійні – 56, 112, 212
Рішення в Maple – 160
Еліптична функція Якобі – 121, 122
Ефект Бернуллі – 55, 202
Ефект Зеємана – 140
Задача:
 Абея – 43
 Електростатики – 85
 Коші – 46, 84, 95, 104, 161, 163, 197, 205
 Оптимального розподілу капіталу – 219
 Оптимального розподілу часу – 225
 Фібоначчі – 87
Закон Хагена-Пуазейля – 206
Ідеальна рідина – 53
Ізокліна – 39, 40
Імунний бар'єр – 96
Інтегральне рівняння – 44, 43, 48
 Абея – 44
 Вольтерра – 46, 48
 Другого роду – 48
 Класифікація – 48
 Однорідні – 48
 Першого роду – 48
 Фредгольма – 46, 48
Інтерфейсна оболонка – 76
Кінк (біжуча хвиля) – 58, 91, 212
Коефіцієнт (індекс) Джині – 221
Коефіцієнт стискання – 53
Коливальний контур – 29
Коливання – 32
 Автоколивання – 24, 169
 Аперіодичний режим – 183
 Вимішені – 31, 32, 165
 Вільні – 31
 Гармонічні коливання – 32
 Згасаючі – 32, 116, 129, 184
 Класичної частинки (одновимірний) – 83
 Малі – 56
 Матеріальної точки – 30
 Нелінійні – 211
 Подвійного осцилятора (система тіл на пружині) – 177
Крайова задача – 51
Кут нутації – 147
Лінійна хімічна реакція – 40
Магнітний момент – 139
 Спіновий – 139
Математичний маятник – 50, 51, 207
Метод Монте-Карло – 20, 21, 236
Модель – 11, 67, 69, 232
 Дерево рішень – 16
 Детермінована – 238
 Економіко-математичні – 24
 Економічна – балансу попиту та пропозиції – 135
 Енергетичного балансу серця – 150
 Захворювання – 93
 Кабелю поміж двома опорами – 130
 Класифікація – 24
 Концептуальна – 22
 Лінійні – 25
 Лотка-Вольтера – 41
 Мальтуса – 87
 Математична – 12, 69
 Перетікання рідини – 126, 179
 Простої гідросистеми – 179
 Скотта – 89
 Стохастична – 238
 Структурна – 12
 Технологічного процесу – 126
 Уявна – 22
 Фармакокінетики – 99, 153
 Ферхюльста – 88
 Внутрішньосудинної інфузії – 100
 Формальна – 22
 Фотоплетизмографа (ФПГ) – 155
 Функціональна – 12
 Хімічної кінетики – 163
 Ходжкіна-Хакслі – 61
Моделювання – 10, 11, 232
 Аналітичне – 15, 17, 234, 235
 Безперервне – 234
 Виробничих процесів – 68
 Графо-аналітичне – 70

- Детерміноване – 15, 234
Динамічне – 15, 234
Дискретне – 15, 234
Імітаційне – 15, 19, 70, 234, 236
Комп'ютерне – 125
Математичне – 12, 68, 233, 234, 235
Методи – 233
Натурне – 233, 234
Підприємства – 65
Статистичне – 20, 236
Статичне – 15, 234
Стохастичне – 15, 234
Фізичне – 68, 233, 234
Напруженість електричного поля – 85
Нелінійні кристали – 64
Об'єкт – 231
Оператор Гамільторна – 53
Оптимізація – 74
Осцилятор Дуффінга – 113
Параметричне завдання кривої – 44
Перетворення Лапласа – 49, 161
Підприємство – 71
Поле напрямів – 39
Прецесія (Лармора) – 139
Резонанс – 34
Рівняння:
 Безперервності – 54, 201
 Бернуллі – 55
 Блоха – 141
 Бюргерса – 45, 57
 У частинних похідних – 188
 Ван-дер-Поля – 19, 169, 182
 Гіперболічні – 103, 191, 196
 Дифузійні – 103, 104
 Діма (солітону) – 192
 Дуффінга – 114
 Ейлера – 55
 Еліптичні – 103, 191
 Коливачь струни – 51
 Кортевега-де-Вріза (КдВ) – 61, 212, 215
 Кортевега-де-Вріза-Бюргерса – 58
 Лапласа – 103, 106
 Математичного маятника – 56
 Математичної фізики – 103, 191
 Нав'є – 54, 202, 204
 Нав'є-Стокса – 53, 54, 199, 201
 Параболічні – 103, 191
 Синус-Гордона – 64, 90, 212
 Стационарні – 103
 Струни – 196
 Теплового балансу (балансу тепла) – 108
 Теплопровідності – 52, 103, 104, 192, 193
 Ферхюльста – 19, 88
 Хвильове – 52, 103, 120, 192, 196
 Хопфа-Рімана – 49, 57
 Шредінгера – 51, 63, 192, 212
Рух в'язкої рідини – 202
Сигнал-відлуння – 145, 149
Синус Якобі – 57
Система автоматизованого проектування (САПР) – 75
Система комп'ютерної математики – 77
 Maple – 78, 160
 Mathcad – 76
 Mathematica – 80
 MATLAB – 80
Система:
 Нелінійна – 112
 Технологічна – 10, 67
Солітон – 58, 59, 62, 122, 192
 Акустичний – 61
 Дублет – 215
 Кортевега-де-Вріза (акустичний) – 62, 212
 Мультиплет – 215
 Оптичний – 63, 64, 212
 Рассела (відокремлена хвиля на воді) – 121, 124
 Топологічний – 212
Спінова релаксація – 141
Стационарний рух рідини – 54
Таутохрона – 44
Теплообмінник – 108
Технологічна операція – 10, 67
Технологічний процес – 10, 66, 126
Течія (потік):
 Куетта – 203
 Ламінарна – 116, 190, 206
 Пуазейля – 203, 205
 Стационарна – 24
 Турбулентна – 116, 191
Томографія – 47
 Комп'ютерна – 47
 Магніторезонансна (МРТ) – 138, 140
 Ядерного магнітного резонансу (ЯМР) – 138, 146
Фазова площа – 38
Фазова траєкторія (орбіта) – 38, 185
Фазовий портрет – 38, 116, 118, 130, 172, 173, 174, 184, 185, 186, 187, 188, 211
Фізичний маятник – 207
Фур'є образ – 146, 148
Хвиля – 120
 Біжуча – 58, 91
 Відокремлена, на воді – 121, 123, 192
 Кіноідальна – 121
 Лінійна – 120
 Пульсова – 63
 Світлова – 50
 Ударна – 50
Циклоїда – 44
Частота Лармора – 139, 143
Число Рейнольдса – 54
Ядерний парамагнетизм – 140
Ядро системи – 76
Яскравість світла – 45

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : [навчальний посібник] / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
2. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики : [учебное пособие] / Н. А. Кудряшов. – М. : МИФИ, 2008. – 352 с.
3. Drazin P. G. Solitons: an introduction / P. G. Drazin, R. S. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 229 p.
4. Sinkala Z. Soliton/exciton transport in proteins / Z. Sinkala // J. Theor. Biol. – 2006. – V. 4, № 241. – P. 919–927.
5. Волобуев Н. А. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками / Н. А. Волобуев // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 2. – С. 177–186.
6. Abbott B. C. The positive and negative heat associated with a nerve impulse / B. C. Abbott, A. V. Hill, J. V. Howarth // Proc. Royal Soc. London B. – 1958. – V. 148, № 931. – P. 149–187.
7. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли. – М. : Мир, 1983. – 400 с.
8. Налимов В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов. – М. : Наука, 1971. – 208 с.
9. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г. Ю. Ризниченко. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.
10. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – М. : Наука, 1985. – 165 с.
11. Якушевич Л. В. Динамические характеристики кинков и антикинков ДНК / Л. В. Якушевич, А. А. Рясика // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 11. – С. 209–217.
12. Марчук Г. И. Математические методы в иммунологии / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1991. – 304 с.
13. Чалий О. В. Медична і біологічна фізика. Практикум / О. В. Чалий, Б. Т. Агапов, Я. В. Цехмістер. – К. : «Книга плюс», 2003. – 217 с.
14. Тарасевич Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : [методические рекомендации] / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.
15. Maplesoft. Countercurrent Double Pipe Heat Exchanger [Електронний ресурс] / Maplesoft // Maplesoft. – 2011. – Режим доступу : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=119402>.

16. Волкова В. Э. Критерии идентификации нелинейных моделей динамических систем / В. Э. Волкова // *Металеві конструкції*. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 171–178.
17. Астахов В. В. Осциллятор Дуффинга : [учебное пособие для студентов вузов] / В. В. Астахов, С. А. Коблянский, А. В. Шабунин. – Саратов : СГУ, 2007. – 53 с.
18. Кадомцев Б. Б. Нелинейные волны / Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман // *Успехи физических наук*. – 1971. – Т. 103, Вип. 2. – С. 193–232.
19. Honglei Wang. Jacobi elliptic function solutions for the modified Korteweg–de Vries equation / Honglei Wang, Chunhuan Xiang // *Journal of King Saud University – Science*. – 2013. – V. 3, № 25. – P. 271–274.
20. Samir Khan. Interacting tank reservoirs [Электронный ресурс] / Samir Khan // Maplesoft. – 2006. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4828>.
21. Josef B. Kabel (Freileitung) zwischen zwei Masten [Электронный ресурс] / B. Josef // Maplesoft. – 2009. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=19290>.
22. Аршава О. О. Прикладні задачі з вищої математики для економічних спеціальностей : [навчально-методичний посібник] / О. О. Аршава, Н. Ю. Іохвідович, А. І. Кононенко. – Харків : ХДТУБА, 2011. – 71 с.
23. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений : [учебное пособие] / В. С. Сизиков. – СПб. : «Спец Лит», 1999. – 240 с.
24. Неймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в постижении мира / Ю. И. Неймарк // *Соросовский образовательный журнал*. – 1997. – № 3. – С. 139–143.
25. Марценюк В. П. Медична інформатика. Методи системного аналізу / В. П. Марценюк, Н. О. Кравець. – Тернопіль : Укрмедкнига, 2002. – 172 с.
26. Бердников А. В. Медицинские приборы, аппараты, системы и комплексы. Часть I. Технические методы и аппараты для экспресс-диагностики : [учебное пособие] / А. В. Бердников, М. В. Семко, Ю. А. Широкова. – Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004. – 176 с.
27. Stephen Lynch. Dynamical Systems with Applications using Maple / Stephen Lynch. – Basel : Birkhäuser, 2010. – 500 p.
28. Tikhonenko A. V. Theory of Oscillations. Part 4: Forced Oscillations and Resonance [Электронный ресурс] / A. V. Tikhonenko // Maplesoft. – 2003. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4742&view=html>.
29. Urroz G. E. Partial Differential Equations with SCILAB [Электронный ресурс] / G. E. Urroz // InfoClearinghouse.com. – 2001. – Режим доступа : http://www.tf.uns.ac.rs/~omorr/radovan_omorrjan_003_prII/s_examples/Scilab/Gilberto/scilab11.pdf.

30. Физиология человека: в 3-х т. : пер. с англ. / Х.-Ф. Ульмер ; ред. Р. Шмидт, Г. Тевс. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Мир, 1996. – Т. 3. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Мир, 1996. – 313 с.
31. Абрамян М. Г. Физические основы механики [Электронный ресурс] / М. Г. Абрамян // www.rau.am. – 2005. – Режим доступа : http://www.rau.am/fiz_osnovy_mexaniki/Lectons/L19/L19-6.htm.
32. Лазарев Ю. Ф. Вивчення нелінійних властивостей фізичного маятника. Цикл лабораторних робіт з дисципліни «Основи чутливих елементів систем орієнтації» / Ю. Ф. Лазарев. – Київ : НТУ «Київський політехнічний інститут», 2009. – 34 с.
33. Wang F. Demonstrating Soliton Interactions using 'pdsolve' [Електронний ресурс] / F. Wang // Maplesoft. – 2012. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=1733>.
34. Chuiko G. P. Generation and Interaction of Solitons [Електронний ресурс] / G. P. Chuiko, S. I. Shyan // Maplesoft. – 2012. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=141102&view=html>.
35. Громенко В. В. Математическая экономика : [учебно-практическое пособие] / В. В. Громенко. – М. : МЭСИ, 2004. – 100 с.
36. Davidson M. The Labour-Leisure Choice [Електронний ресурс] / M. Davidson // Maplesoft. – 2009. – Режим доступа : <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=19180>.
37. Здрок В. Системний підхід до дослідження виробничих процесів інформаційно-технологічних підприємств [Електронний ресурс] / В. Здрок, М. Черкес // Вісник Львівського університету. Серія екон. – 2008. – Вип. 39. – С. 174–180. – Режим доступа : http://www.lnu.edu.ua/faculty/ekonom/Visnyk_Ekonom/2008_39/30.pdf.

Навчальне видання

**Геннадій Петрович
ЧУЙКО**

**Ольга Василівна
ДВОРНИК**

**Ольга Миколаївна
ЯРЕМЧУК**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Редактор *О. Супрун*.
Технічний редактор, комп'ютерна верстка, дизайн обкладинки *А. Іщенко*.
Друк, фальцювальню-палітурні роботи *С. Волинець*.

Підп. до друку 24.11.2015.
Формат 60x84¹/₁₆. Папір офсет.
Гарнітура «Verdana». Друк різнограф.
Ум. друк. арк. 14,18. Обл.-вид. арк. 7,73.
Тираж 300 пр. Зам. № 4717.

Видавець і виготовлювач: ЧДУ ім. Петра Могили.
54003, м. Миколаїв, вул. 68 Десантників, 10.
Тел.: 8 (0512) 50-03-32, 8 (0512) 76-55-81, e-mail: vrector@chdu.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3460 від 10.04.2009 р.