МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. О. Капустян,
Г. А. Мажара,
І. Д. Фартушний

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 051 економіка

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти: *Кулик А. Б.,* к.ф-м.н. Доцент кафедри вищої математики Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

Ляшенко О. І. д.е.н., професок, завідувач кафедри економічної кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор Войтко С. В, д.е.н., професор, завідувач кафедри міжнародної економіки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 27.06.2022 р.)

Необхідно формувати систему знань, навичок та вмінь з методології, методики та інструментарію економіко-математичного моделювання економічних процесів функціонування та розвитку бізнес-структури на підставі використання новітніх комп'ютерних технологій та методів навчання: засвоєння теоретичних основ побудови економіко-математичних моделей і методів проведення модельних експериментів; формування знань про становлення, функціонування та розвиток систем підтримки прийняття управлінських рішень; набуття необхідних умінь у галузі побудови систем моделей та алгоритмів пошуку оптимальних управлінських рішень; набуття практичних навичок використання й адаптації сучасного інструментарію оптимізації управлінських рішень у визначеній предметній сфері; розширення вмінь і навичок студентів з ідентифікації, аналізу, дослідження перебігу економічних процесів у бізнес-структурі та формування доцільних управлінських рішень з її розвитку на підставі побудови різноманітних економіко-математичних моделей.

Навчальний підручник містить лекції, питання для самоперевірки, тестові та практичні завдання з розділів:

Розділ 1. Теорія споживання. Розділ 2. Теорія виробництва. Розділ 3. Моделі ринків і теорія загальної рівноваги. Розділ 4. Мікроекономіка невизначеності. Фінансові та страхові ринки. Розділ 5. Поведінкові аспекти моделювання економіки

Призначений для здобувачів ступеня бакалавр, за спеціальністю 051 економіка, буде також корисний здобувачам за спеціальностями 073 менеджмент та 075 маркетинг.

Рекомендований для студентів економічних спеціальностей закладів вищої освіти III-IV рівнів акредитації.

Реєстр. № П XX/XX-XXX. Обсяг 12,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. О. Капустян, Г.А. Мажара, І. Д. Фартушний
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

Вступ **5**

Розділ 1. Теорія споживання **9**

1.1. Простір товарів та відношення переваги 9

1.2. Загальна порядкова теорія споживчого вибору. Порядкові функції корисності. Теорема Дебре 21

1.3. Неокласична задача споживання. Модель споживання Стоуна: товари першої необхідності, вибору, розкоші. Дуальна задача споживання. Узагальнення неокласичної задачі споживання 33

1.4. Порівняльна статика споживання: основне рівняння теорії споживання. Рівняння Слуцького і класифікація товарів. Еластичність попиту та умови агрегації 45

1.5. Задачі та завдання для самостійного розв'язання 56

Контрольні запитання **63**

Розділ 2. Теорія виробництва **64**

2.1. Простір витрат і виробничі функції. Еластичність випуску та можливості заміщення витрат. Основні типи виробничих функцій. $\boldsymbol{CES}$-функції 64

2.2. Неокласична теорія поведінки однопродуктової фірми. Порівняльна статика фірми. Задачі максимізації випуску продукції та мінімізації видатків 77

2.3. Фірма в умовах монополії та монопсонії. Олігополія та олігопсонія. Моделі поведінки багатопродуктової фірми 90

2.4. Міжгалузева модель Лєонтьєва «витрати — випуск». Невід'ємні матриці. Продуктивність моделі Лєонтьєва. Порівняльна статика моделі Лєонтьєва 104

2.5. Задачі та завдання для самостійного розв'язання 115

Контрольні запитання **120**

Розділ 3. Моделі ринків і теорія загальної рівноваги. **122**

3.1. Найпростіші агреговані моделі ринкової економіки. Моделі вальрасівського типу. Умови існування рівноваги за Вальрасом за неокласичного підходу 122

3.2. Задачі та завдання для самостійного розв'язання 136

Контрольні запитання **139**

Розділ 4. Мікроекономіка невизначеності. Фінансові та страхові ринки. **141**

4.1. Припущення сподіваної корисності. Теорема фон Неймана — Моргенштерна. Поведінка агентів в умовах ризику: Міри Ерроу — Пратта уникання ризику. Застосування до задач страхування: попит на страхові послуги 141

4.2. Стохастична теорія фірми. Задача вибору портфеля з двох активів: ризикового та безпечного. Домашні господарства в умовах невизначеності: рішення про заощадження і споживання..... 155

4.3. Домашні господарства в умовах невизначеності: рішення про заощадження і споживання. Економіка інформації: асиметрія інформації, принцип «лимончиків», сигналізація, зворотна селекція. Ринок страхових послуг: поведінка страхових компаній 169

4.5. Оптимальні ступені перестрахування та обміну ризиками. Ринок банківсько-кредитних послуг 183

4.6. Потоки платежів. Ренти або ануїтети. Оцінювання вартості та дохідності облігацій та акцій. Страхування життя 199

4.7. Аналіз портфельних інвестицій. Модель Марковіца. Модель Тобіна. Модель Шарпа214

4.8. Задачі та завдання для самостійного розв’язання 227

Контрольні запитання **227**

Розділ 5. Поведінкові аспекти моделювання економіки **229**

5.1. Розв’язання задач класичної економіки на обмеженому ринку з елементами поведінкової економіки 229

5.2. Принцип часткової інформованості гравців та вплив на прийняття рішень 238

5.3. Аналіз впливу гіперболізованого дисконтування на прийняття рішень 244

5.4. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача у динамічному моделюванні 255

5.5. Задачі та завдання для самостійного розв’язання 262

Контрольні запитання **262**

Література..... 263

Вступ

Актуальність курсу «Моделювання економіки» зумовлена, зокрема, тим, що сучасна економічна теорія та практика потребують значного рівня формалізації. Для вивчення різних економічних процесів та явищ економісти використовують їхні спрощені формалізовані описи, що отримали назву економічних моделей.

У студентів необхідно формувати систему знань, навичок та вмінь з методології, методики та інструментарію економіко-математичного моделювання економічних процесів функціонування та розвитку бізнес-структури на підставі використання новітніх комп'ютерних технологій та методів навчання: засвоєння теоретичних основ побудови економіко-математичних моделей і методів проведення модельних експериментів; формування знань про становлення, функціонування та розвиток систем підтримки прийняття управлінських рішень; набуття необхідних умінь у галузі побудови систем моделей та алгоритмів пошуку оптимальних управлінських рішень; набуття практичних навичок використання й адаптації сучасного інструментарію оптимізації управлінських рішень у визначеній предметній сфері; розширення вмінь і навичок студентів з ідентифікації, аналізу, дослідження перебігу економічних процесів у бізнес-структурі та формування доцільних управлінських рішень з її розвитку на підставі побудови різноманітних економіко-математичних моделей.

Економічні системи, які вивчає сучасна економічна наука, важко піддаються дослідженню лише звичайними (вербальними) теоретичними методами. Прямий експеримент над ними майже неможливий. Ціна помилок і прорахунків велика, тому економіко-математичне моделювання є неминучою складовою науково-технічного прогресу.

Будуючи моделі, економісти виявляють суттєві чинники, що є важливими для досліджуваного економічного об'єкта, системи, процесу, та намагаються відхилити (не враховувати) деталі, котрі є несуттєвими для вирішення поставленої проблеми,

цілей дослідження. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об’єктів дає змогу оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати отримані результати в аналізі, прийнятті рішень, управлінні.

Як методологія та інструментарій економіко-математичне моделювання не підміняє собою ні математику, ні економічну теорію, ні фінанси, ані жодну з економічних дисциплін і не конкурує з ними. Навпаки, важко переоцінити його синтезуючу роль. Створення й застосування тріади «модель — алгоритм — програма» неможливе без опертя на різноманітні методи та підходи якісного (вербального) аналізу нелінійних економічних моделей, сучасних інформаційних систем і технологій. Економіко-математичне моделювання дає нові додаткові імпульси і стимули для розвитку економічної науки та її широкого практичного використання.

Мета дисципліни «Моделювання економіки» — формування знань з методології, методики та інструментарію побудови економіко-математичних моделей, їх аналізу та використання.

Завдання дисципліни — вивчення теорії та набуття практичних навичок, умінь щодо:

- теоретичних основ аналізу, моделювання і прогнозування розвитку економічних об’єктів і процесів на макро-, мезо- та мікроекономічному рівнях;
- інструментарію побудови економіко-математичних моделей для дослідження соціально-економічних процесів;
- методології оцінювання показників діяльності суб’єктів господарювання;
- застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач;

- виконувати міждисциплінарний аналіз соціально-економічних явищ і проблем в одній або декількох професійних сферах з урахуванням ризиків та можливих соціально-економічних наслідків;
- визначати числові та якісні характеристики поведінки економічних агентів для їх раціональної діяльності.

Предмет дисципліни — методологія, методи, процеси та інструментарій економіко-математичного моделювання на засадах системного аналізу.

Курс ґрунтується на засвоєних студентами дисциплінах: «Математика для економістів», «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці», «Прикладні задачі моделювання економічних процесів в умовах ризику». Курс передує вивченню дисциплін з моделювання трансформаційних соціально-економічних процесів, «Моделі економічної динаміки», підготовки дипломної роботи бакалавра.

Підручник складається з таких основних розділів:

Розділ 1. Теорія споживання.

Розділ 2. Теорія виробництва.

Розділ 3. Моделі ринків і теорія загальної рівноваги.

Розділ 4. Мікроекономіка невизначеності. Фінансові та страхові ринки.

Розділ 5. Поведінкові аспекти моделювання економіки.

Тематика дисципліни та матеріали, що викладені у цьому підручнику, розкриває лише основи величезної галузі знань, якою є економіко-математичне моделювання, що невпинно та стрімко розвивається як інтелектуальне ядро процесу інформатизації сучасної економіки.

Підручник містить матеріали, котрі сприятимуть самостійному вивченню дисципліни. У відповідних розділах подано вказівки до вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми дисципліни, посилання на джерела, наведено приклади із розв’язанням задач; питання та завдання для самоконтролю і перевірки знань; теми і питання для самостійного опрацювання, дискусій і рефератів. У підручнику подано також тематику практичних та семінарських занять, завдання й методичні вказівки до виконання комп’ютерних практикумів.

Розділ 1. Теорія споживання

1.1. Простір товарів та відношення переваги

Розглянемо деякі означення з економічної теорії.

Під *товаром* будемо розуміти споживче благо або послугу, що надійшли у продаж у певний час та у певному місці.

Під *споживачем* будемо розуміти групу індивідуумів (може й одного), які спільно розподіляють свій дохід на закупівлю товарів.

Головна проблема раціонального ведення господарства споживачем полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він має придбати за певний період за заданих цін та споживчого доходу. Математичні моделі подібної поведінки та результати їх аналізу й утворюють теорію особистого споживання.

Будемо вважати, що є скінченна кількість n наявних товарів, які мають властивість *кількісної вимірності.* Це припущення не є обмежувальним, оскільки в економіці завжди можна перейти до *цінового індексу* кількості будь-якого товару чи групи товарів. Така операція робить кількісно порівнянними (сумірними) усі якісно різні товари і дає можливість, якщо це потрібно, агрегувати товари в один *комплексний* (*складний*) товар. При цьому ціновий індекс деякого товару є ціною одиниці цього товару в певний базовий період часу; вектор таких цін

$$p \in R_+^n\colon p_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Вибір споживача характеризується *набором товарів* $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n$, тобто товари вважають *необмежено подільними*, а їх кількість невід'ємною. Тоді під *товарним простором* будемо розуміти множину векторів (наборів товарів) $X \in R_+^n$.

Вибір споживачем певного набору товарів залежить не тільки від його потреб, але і від його смаків. Він характеризується суб'єктивним *відношенням*

переваги, яке позначається через $\succeq$ і є парним порівнянням партій товарів (векторів). Запис $x \succeq y$, $x, y \in X$ означає, що споживач віддає перевагу набору товарів x перед набором товарів y ($x \succ y$) або вважає їх рівноцінними ($x \sim y$). У першому випадку говорять, що x *строго переважає* y, а у другому випадку говорять, що набори перебувають у відношенні *байдужості*. Тоді $x \succeq y$ означає, що набір x *нестрого переважає* набір y.

Відступ 1.1. *Деякі факти функціонального аналізу [8].*

• *Нехай X — довільна множина (вектори або функції). Множина всіх можливих пар $x, y \in X$ утворює декартовий добуток множини X самої на себе, що позначається як $X \times X$ (якщо X — простір товарів, то $X \times X$ є підможиною векторного простоу R^{2n}).*

Розглянемо на множині X однозначну функцію (метрику) ρ: $X \times X \to R^1_+$, яка задовольняє такі три аксіоми:

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall\ x,y \in X$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)\ \forall\ x,y,\ z \in X$ (аксіома трикутника).

Тоді пару (X,ρ) будемо називати метричним простором і позначати через $\boldsymbol{R}$. На множині X можна визначити різні метричні простори. Розглянемо деякі приклади.

1. На множині векторів із R^n визначимо метрику

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Справедливість перших двох аксіом очевидна. Покажемо, що виконується аксіома трикутника. Нерівність 3) з означення метрики буде мати вигляд

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}.$$

Покладемо $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$). Тоді $x_i - z_i = a_i + b_i$ й подана вище нерівність набуде вигляду

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Справді,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = (\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2})^2,$$

що і доводить нерівність трикутника.

Вище було використано нерівність Коші–Буняковського

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

яка є наслідком тотожності

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Такий метричний простір будемо називати евклідовим і позначати через $\boldsymbol{R^n}$.

2. На тій самій множині векторів із R^n визначимо метрику

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Справедливість усіх аксіом тут очевидна. Такий метричний простір будемо позначати через $\boldsymbol{R_1^n}$.

3. На тій самій множині векторів із R^n визначимо метрику

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Справедливість усіх аксіом тут очевидна. Такий метричний простір будемо позначати через $\boldsymbol{R_\infty^n}$.

Множину $B(x_0, r) = \{x \in R\colon \rho(x, x_0) < r\}$ ($B[x_0, r] = \{x \in R\colon \rho(x, x_0) \leq r$) будемо називати відкритою (замкнутою) кулею радіусом r у точці x_0. Відкриту кулю малого радіусу $r = \varepsilon$ із центром у точці x_0 будемо називати ε — околом точки x_0 і позначати $O_\varepsilon(x_0)$.

Множину $M \subset R$ будемо називати обмеженою, якщо її можна помістити в деяку кулю.

Точку $x \in R$ називають граничною для множини $M \subset R$, якщо будь-який її ε -окіл містить нескінченно багато точок із M.

Граничні точки множини M можемо визначити і через збіжність послідовностей $x_1, x_2, \ldots$ точок із $\boldsymbol{R}$.

Будемо говорити, що послідовність $\{\boldsymbol{x_i}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$ збігається до точки x , якщо $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ — натуральне число N_ε таке, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon\ \forall\ n > N_\varepsilon$, або

$$\lim_{n \to \infty\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

З означення збіжності випливає: якщо послідовність збігається до деякої точки, то 1) ця точка єдина; 2) будь-яка її підпослідовність збігається до тієї ж точки.

Множину $M \subset R$ будемо називати відкритою, якщо кожна її точка належить їй разом із деяким ε-околом.

Замикання множини $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{R}$ (позначають через $[M]$) складається із точок цієї множини та всіх її граничних точок. Множину $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{R}$ називають замкнутою, якщо $[M] = M$, або коли множина $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{M}$ (доповнення до множини M) відкрита.

Якщо метричний простір містить усі граничні точки збіжних послідовностей, то його називають повним.

Дві метрики ρ_1 та ρ_2 на множині X називають еквівалентними, якщо існують такі додатні числа $c_1,\ c_2$, що виконується нерівність

$$c_1\ \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2\ \rho_1(x, y).$$

Із вказаної нерівності випливає, що збіжність послідовності в одній метриці веде до її збіжності в іншій метриці. На множині векторів R^n усі метрики

еквівалентні.

Непорожня множина X утворює лінійний (векторний) простір, якщо вона задовольняє такі умови:

I. Для будь-яких двох елементів $x,\ y\ \in\ X$ однозначно визначений третій елемент $z\ \in\ X$, який називають їх сумою і позначають через $x\ +\ y$ і такий, що

1) $x\ +\ y\ =\ y\ +\ x$ (комутативність);

2) $x\ +\ (y\ +\ z)\ =\ (x\ +\ y)\ +\ z$ (асоціативність);

3) в X є елемент 0, для якого $x\ +\ 0\ =\ x\ \forall\ x\ \in\ X$ (існування нуля);

4) для будь-якого елемента $x\ \in\ X$ є такий елемент $-\ x\ \in\ X$, що $x\ +\ (-\ x)\ =\ 0$ (існування протилежного елемента).

II. Для будь-якого дійсного числа α і будь-якого елемента $x\ \in\ X$ однозначно визначений елемент $\alpha\ x \in\ X$, який називають добутком числа α на елемент $x\ \in\ X$ і такий, що

1) $\alpha\ (\beta\ x) =\ (\alpha\ \beta)\ x)$;

2) $1\ x\ =\ x$;

3) $(\alpha\ +\ \beta)\ x\ =\ \alpha\ x\ +\ \beta\ x$;

4) $\alpha\ (x\ +\ y)\ =\ \alpha\ x\ +\ \alpha\ y$.

Якщо на лінійному просторі X визначено метрику ρ, то відповідний простір буде лінійним метричним простором. •

Повернімось до відношення нестрогої переваги. Відомо, що досить загальним і добре розробленим є спосіб опису переваг на «мові» бінарних відношень.

Нехай X — довільна множина. *Бінарним відношенням* ϱ на множині X називають підмножину множини $X^2\ =\ X\ \times\ X$, тобто сукупність упорядкованих пар (a, b), де $a,\ b\ \in\ X$. Якщо $(a, b)\ \in \varrho$, то вважають, що a та b перебувають у відношенні ϱ і записують це таким чином: $a\varrho b$. Залежно від властивостей бінарних відношень здійснюють їх типізацію. Наведемо визначення

найбільш поширених типів бінарних відношень.

Відношення ϱ називають *рефлексивним*, якщо $(a,a) \in \varrho \ \forall \ a \in X$; *ірефлексивним,* якщо $(a,a) \ \overline{\in} \ \varrho \ \forall \ a \in X$, тобто $a\varrho a$ несправедливе для жодного $a \in X$.

Відношення ϱ називають *симетричним*, якщо $(a,b) \in \varrho \Rightarrow (b,a) \in \varrho$; *асиметричним*, якщо $(a,b) \in \varrho \Rightarrow (b,a) \ \overline{\in} \ \varrho$; *антисиметричним*, якщо $(a,b) \in \varrho$, $(b,a) \in \varrho \Rightarrow a = b$.

Відношення ϱ називають *транзитивним*, якщо $(a,b) \in \varrho$, $(b,c) \in \varrho \Rightarrow (a,c) \in \varrho$.

Елементи $a, b \in X$ називають *порівняними за* ϱ, якщо справедливе або $a\varrho b$, або $b\varrho a$, інакше їх називають *непорівняними за* ϱ.

Відношення ϱ називають *повним* (або *зв'язним*), якщо довільні $a, b \in X$ порівняні за ϱ (зокрема й за $a = b$). Відношення, яке не є повним, називають *частковим* (або *незв'язним*).

Наприклад, бінарне відношення $\geq$ («не менше») на множині R^1 дійсних чисел є рефлексивним, антисиметричним, транзитивним і повним, а бінарне відношення $>$ («більше») на тій самій множині є ірефлексивним, асиметричним, транзитивним і неповним.

Рефлексивне, симетричне і транзитивне бінарне відношення називають *еквівалентністю.*

Ірефлексивне транзитивне бінарне відношення називають *строгим частковим порядком*; рефлексивне транзитивне бінарне відношення називають *частковим квазіпорядком*; антисиметричний частковий квазіпорядок називають *частковим порядком*; повний частковий порядок називають *повним порядком.*

З точки зору порядку на R^1 бінарне відношення $\geq$ є повним порядком, а бінарне відношення $>$ є лише строгим частковим порядком.

Розглянемо бінарні відношення на R^n, які можна сконструювати за допомогою вказаних вище двох бінарних відношень на R^1:

1) $a \geqq b \leftrightarrow a_i \geq b_i, \quad i = \overline{1,n}$;

2) $a \geq b \leftrightarrow a \geqq b$ та $a \neq b$, тобто серед нерівностей $a_i \geq b_i$, $i = \overline{1,n}$ хоча б одне виконується строго;

3) $a > b \leftrightarrow a_i > b_i, \quad i = \overline{1,n}$;

4) $a \overline{>} b \leftrightarrow a = b$ або $a_i > b_i$ хоча б для одного i.

Очевидно, що відношення 1) є частковим порядком, 2) та 3) — строгі часткові порядки, а 4) лише рефлексивне.

Таким чином, означені вище бінарні відношення на R^n нас не задовольняють: «найкраще» із них $\geqq$ є неповним. Тому уведемо бінарне відношення нестрогої переваги аксіоматично.

Аксіома 1.1. *Відношення нестрогої переваги $\succeq$ є повним квазіпорядком.*

Аксіома 1.2. *Відношення нестрогої переваги є неперервним, тобто множина $\{(x,y) \in X \times X: x \succ y\}$ є відкритою у декартовому добутку $X \times X$.*

Зміст аксіоми 1.1 щодо встановлення певного порядку відносно споживчих наборів очевидний. Зміст аксіоми 1.2 полягає в такому: для будь-яких наборів x^0, $y^0 \in X$: $x^0 \succ y^0$ $\exists$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що для всіх $x \in O_{\varepsilon_1}(x^0)$, $y \in O_{\varepsilon_2}(y^0) \Rightarrow x \succ y$.

Далі пару $(X, \succeq)$, тобто простір товарів з відношенням нестрогої переваги певного споживача, будемо називати *полем переваги* цього споживача.

Розглянемо теорему, яка характеризує порядкові властивості відношення переваги, зафіксовані в аксіомі 1.1.

Теорема 1.1.

I. *Відношення строгої переваги має такі властивості:*

1) для кожного $x \in X$ не може бути $x \succ x$;

2) якщо $x \succeq y$, $y \succeq z$, $\forall\ x, y, z \in X$ і хоча б одне із них виконується строго, то $x \succ z$;

3) $\forall\ x, y \in X$ або $x \succ y$, або $y \succeq x$.

II. *Відношення байдужості* $\sim$ *є відношенням еквівалентності, тобто*

1) $x \sim x\ \forall\ x \in X$ (рефлексивність);

2) $\forall\ x, y \in X$ із $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симетричність);

3) $\forall\ x, y, z \in X$ із $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивність).

Доведення

I. 1. Із $x \succ x$ випливало б, що відношення $x \succeq x$ не виконується, а це суперечить рефлексивності.

I. 2. Якщо б не виконувалось відношення строгої переваги $x \succ z$, то було б $z \succeq x$. Тоді із транзитивності відношення переваги $y \succeq z$, $z \succeq x \Rightarrow y \succeq x$ та $z \succeq x$, $x \succeq y \Rightarrow z \succeq y$: це унеможливлює виконання відношень $x \succ y$ або $y \succ z$.

II. 3. Ця властивість є наслідком повноти відношення переваги.

Властивості відношення $\sim$ випливають із його означення. •

Згідно із властивостями відношення байдужості $\sim$ простір товарів споживача розбивається на класи еквівалентності I_x, що попарно не перетинаються і кожний з яких складається з усіх наборів товарів y, байдужих заданому набору x із цього класу, тобто $I_x = \{y \in X\colon y \sim x\}$.

Класи еквівалентності I_x називають *класами байдужості* споживача, а їх сукупність утворює *фактор-простір* $(X, \sim)$ простору X щодо відношення байдужості $\sim$.

З геометричної точки зору за $n = 2$ класи байдужості утворюють криві байдужості, за $n = 3$ — поверхні байдужості, за $n > 3$ — гіперповерхні байдужості.

Неперервність відношення переваги характеризує така теорема.

Теорема 1.2. *Неперервність відношення переваги* $\succeq$ *еквівалентна властивості:*

a) множина $\{y \in X: a \succ y\}$ відкрита в X за кожного $a \in X$;

b) множина $\{x \in X: x \succ b\}$ відкрита в X за кожного $b \in X$. •

Будемо говорити, що відношення переваги є *монотонним*, якщо із відношення $x \geq y$ (частковий порядок) випливає $x \succeq y$, тобто збільшення кількості товарів у споживчому наборі робить його більш переважним для споживача.

З викладеного вище зрозуміло, що поле переваг споживача $(X, \succeq)$ геометрично можна задавати сукупністю класів байдужості, які за $n = 2$ утворюють *карту кривих байдужості* у першому квадраті площини R^2, а за $n = 3$ — утворюють *карту поверхонь байдужості* в першому октанті простору R^3.

Приклад 1.1. Нехай карта кривих байдужості $(R^2_+, \sim)$ у полі переваг споживача $(R^2_+, \succeq)$ має вигляд сім'ї гіпербол $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \alpha \geq 0$ (рис. 1.1).

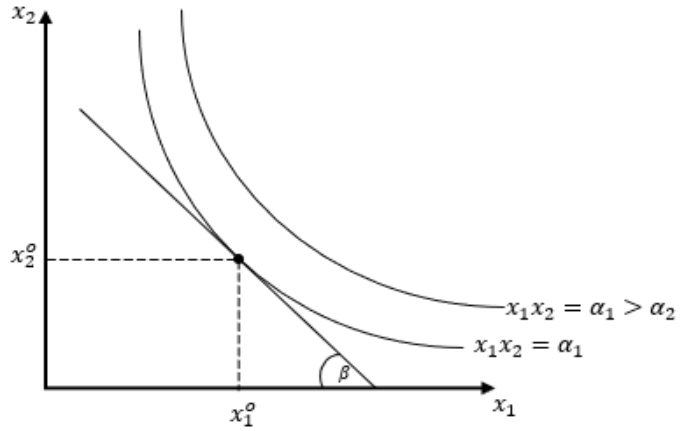

Рис. 1.1.

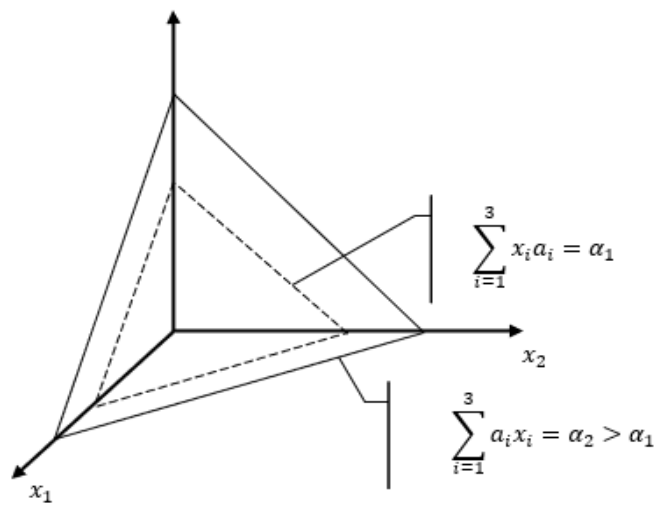

Рис. 1.2.

У цьому випадку через кожну точку (x_1^0, x_2^0) пристору товарів R_+^2 проходить лише одна крива байдужості, криві не перетинаються. Криві байдужості, які відповідають кращим наборам товарів, лежать вище і праворуч від кривої, яка проходить через точку (x_1^0, x_2^0).

Нахил кривої байдужості $x_2 = x_2(x_1)$, $x_1 > 0$ у точці $(x_1^0, x_2^0 = x_2(x_1^0))$ буде

$$\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1} = \lim_{\triangle x_1 \to 0} \frac{\triangle x_2}{\triangle x_1} = \text{tg}\beta,$$

де β — кут нахилу дотичної у точці (x_1^0, x_2^0) до кривої байдужості, характеризує *граничну норму заміщення* $MRS_{1,2}$ товару 1 товаром 2, оскільки зменшення кількості товару 1 на $\triangle x_1$ має бути компенсоване збільшенням споживання товару 2 на значення $\triangle x_2 = x_2(x_1^0 - \triangle x_1) - x_2(x_1^0)$, тобто

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1}.$$

Оскільки вздовж кривої $f(x_1, x_2) = \alpha$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

то

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right)^{-1}.$$

Для гіперболи $x_1 x_2 = \alpha$ будемо мати

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{x_2^0}{x_1^0}.$$

Приклад 1.2. Нехай карта поверхонь байдужості $(R_+^3, \sim)$ у полі переваг споживача $(R_+^3, \succeq)$ має вигляд сім'ї площин $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha \geq 0$, $a_i > 0$, $i = \overline{1,3}$ (рис. 1.2).

Тоді товари 1, 2 та 3 є *взаємозамінними* для споживача у пропорціях, що задаються коефіцієнтами $a_i > 0$, $i = \overline{1,3}$. Якщо $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, то такі товари називають *субститутами.*

Приклад 1.3. Нехай карта ліній байдужості $(R_+^2, \sim)$ у полі переваг споживача $(R_+^2, \succeq)$ має вигляд сім'ї ліній $\min(a_1 x_1, a_2 x_2) = \alpha \geq 0$, $a_i > 0$, $i = \overline{1,2}$ (рис. 1.3).

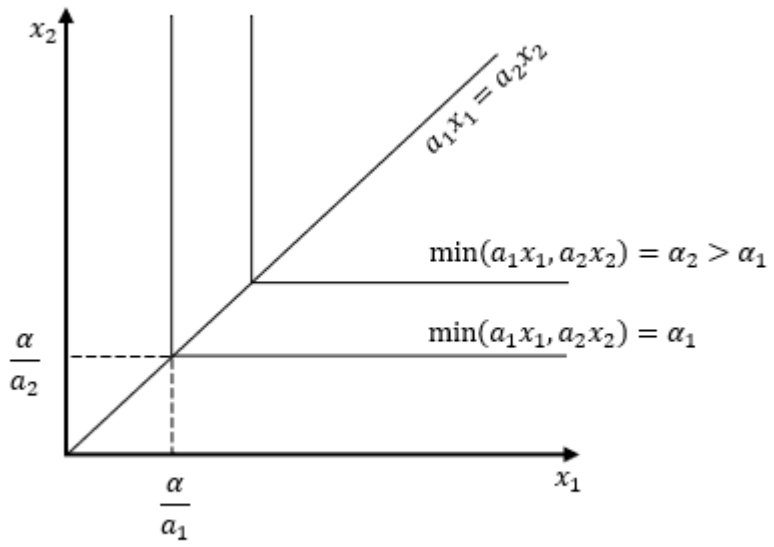

Рис. 1.3.

Тоді товари 1 та 2 є *взаємодоповнювальними* (*комплементарними*) для споживача у пропорції $x_2/x_1 = a_1/a_2$, оскільки зайва кількість будь-якого товару не змінює цінності набору для споживача $(a_1\ (x_1 + b), a_2\ x_2) \sim (a_1\ x_1, a_2\ (x_2 + c)) \sim (a_1\ x_1, a_2\ x_2)$.

1.2. Загальна порядкова теорія споживчого вибору. Порядкові функції корисності. Теорема Дебре

Опишемо загальний підхід до задачі споживчого вибору і побудови функцій попиту споживача у термінах відношень переваги.

Згідно з теорією економічної поведінки споживача вважається, що споживачі вибирають найкращий щодо порівняльних переваг набір товарів, який вони можуть собі дозволити. У зв'язку із цим далі важливим буде таке означення.

Означення 1.1. *Нехай* $(X, \succeq)$ *— поле переваг і* $C \subseteq X$. *Елемент* $x \in C$ *називають найбільш (найменш) переважним у* C, *якщо* $x \succeq y$ $(y \succeq x)$ $\forall\ y \in C$. •

Нагадаємо означення *компактної множини* (*компакту*) C в $\boldsymbol{R} = (R^n, \rho)$ — це обмежена і замкнута множина. Вона має таку властивість: із довільної сім'ї відкритих множин, які в сукупності містять C (утворюють покриття цієї множини), завжди можна вибрати скінченну кількість множин, які теж покривають C.

Теорема 1.3. *Якщо відношення в умовах означення 1.1 неперервне і множина* C *компактна, то* C *містить хоча б один найбільший (найменший) елемент, а множина* $M(C)$ $(m(C))$ *усіх найбільш (найменш) переважних елементів у* C *є компактною.*

Найбільш переважний елемент для поля переваг $(X, \succeq)$ називають точкою *насичення*. Якщо ж простір X не має точки насичення, то маємо явище *ненасиченості*.

Множину векторів із R^n вигляду $z = \alpha\ x + (1 - \alpha)\ y$, $\forall x,\ y \in R^n$, де число α пробігає відрізок $[0,1]$, називають *відрізком* в R^n. Цей відрізок сполучає точки x, y, його позначають через $[x, y]$.

Множину $A \subseteq X$ називають *опуклою*, якщо $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subseteq A$.

Означення 1.2. *Нехай множина* X *поля переваг* $(X, \succeq)$ *є опуклою. Тоді поле*

переваг $(X, \succeq)$ *називають:*

1) *опуклим*, якщо $x \succeq y \forall\ x,\ y \in X \Rightarrow \alpha\ x + \beta y \succeq y\ \forall\ \alpha,\ \beta \geq 0,$ $\alpha + \beta = 1;$

2) *підсилено опуклим*, якщо $x \succ y\ \forall\ x,\ y \in X \Rightarrow \alpha\ x + \beta\ y \succ y\ \forall\ \alpha,\ \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1;$

3) *строго опуклим*, якщо із $x \succeq y$ для різних $x,\ y \in X \Rightarrow \alpha\ x + \beta\ y \succ y\ \forall\ \alpha,\ \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$ •

В економіці припущення щодо опуклості є традиційними: вони відображають певні економічні закономірності й відіграють важливу роль в економіко-математичних моделях та їх аналізі.

Розглянемо економічний зміст опуклості поля переваг споживача. Покладемо в 1) означення 1.2 $\alpha = \beta = 0{,}5,\ y \sim x$. Тоді споживач надає перевагу середньому набору $(x + y)/2$. Якщо покласти $x_i = 0,\ y_i \neq 0;\ x_j \neq 0,$ $y_j = 0,$ то $(x_k + y_k)/2 \neq 0,\ k = \overline{i,j},$ тобто розподіл $(x + y)/2$ дає споживачеві деяку кількість товарів i та j, тоді як розподіли x та y дають йому тільки один із цих товарів. Отже, опуклість квазіпорядку переваги виражає прагнення споживача бути представленим на всіх ринках, робити свій вибір між усіма товарами.

Теорема 1.4. *Різні поняття опуклості поля переваг пов'язані такими співвідношеннями:*

$a)$ із 3) випливає 1);

$b)$ із 3) випливає 2);

$c)$ із 2) випливає 1), якщо відношення $\succeq$ неперервне.

Теорема 1.5.

$a)$ *якщо* $(X, \succeq)$ *— опукле поле переваг, і* C *— опукла множина в* X*, то* $M(C)$ *— опукла підмножина в* C.

$b)$ якщо $(X, \succeq)$ — строго опукле поле переваг, то $M(C)$ містить не більше

одного елемента.

Доведення.

1. Якщо $a, b\ M(C)$, то $a, b \geq x$ для кожного $x \in C$. Тоді через опуклість $(X, \geq)$ будемо мати $\alpha\ a + b\ y \geq x$ для будь-яких $x \in C$, α, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тому $\alpha\ a + b\ y \in M(C)$.

2. Якщо $(X, \geq)$ — строго опукле поле переваг, то для різних $a, b \in M(C)$ і того, що $a, b \geq a$, випливало б $\alpha\ a + \beta\ b \succ a\ \forall\ \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Це означало б існування в C елемента більш переважного, ніж a, що неможливо. •

Під час застосування полів переваг споживача, як зазначалось вище, $X = R_+^n$. Крім того, уведемо *споживчий симплекс* (рис. 1.4):

$$S_n = \{x \in R_+^n\colon \sum_{i=1}^n p_i\ x_i = p'\ x \leq I,$$

де $p \in R_+^n$ — вектор цін; $x \in R_+^n$ — споживчий набір; $I > 0$ — бюджет споживача.

Множина S_n є опуклим компактом. Зрозуміло (рис. 1.5), що: 1) більшим значенням бюджету споживача відповідає більше значення площі споживчого сімплексу; 2) якщо ціна p_2 не змінюється, а ціна p_1 зростає $(p_1' > p_1)$, то площа споживчого симплексу зменшується.

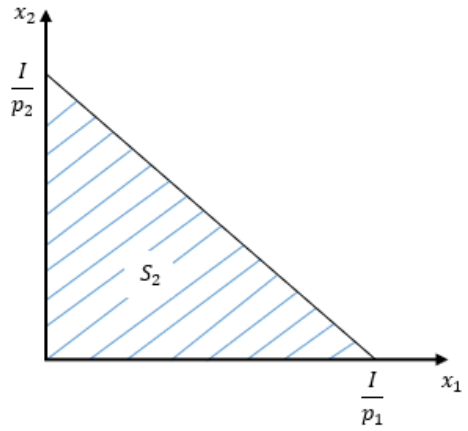

Рис. 1.4.

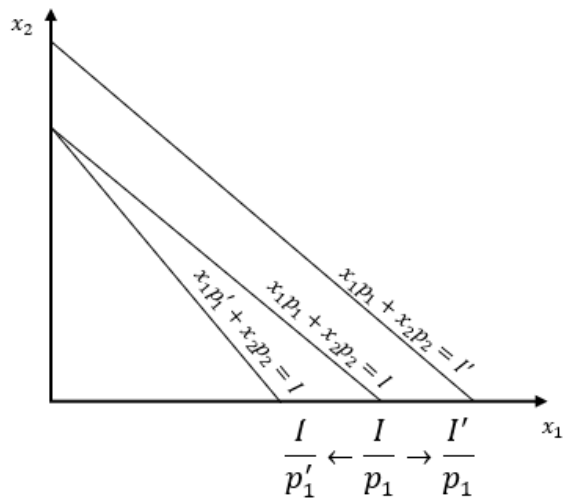

Рис. 1.5.

Зауважимо, що описаний вище підхід дає лише загальний принцип споживчого вибору в ринкових умовах: немає гарантії того, що існує набір товарів із X, який задовльняє бюджетні обмеження. Навіть коли бюджетні обмеження сумісні з X, тобто $C_I^p = \{x \in X: p'x \leq I\} \neq \emptyset$, невідомо про існування найбільш переважного набору товарів.

Розглянемо всі можливі пари (p, I), $p \in P \subseteq R_+^n$, $I \in [I_1, I_2]$. Кожній такій парі поставимо у відповідність множину $M(C_I^p)$, тобто маємо багатозначне відображення

$$\varphi\colon P \times [I_1, I_2] \to M(C_I^p) \subseteq X.$$

Це відображення будемо називати *функцією попиту* споживача.

Далі для розв'язання задачі споживчого вибору використаємо геометричний підхід, який полягає у зіставленні карт кривих байдужості зі споживчим сімплексом. Цей спосіб має суттєве застереження: за $n > 1$ (2) проблемно перевіряти справедливість аксіом.

Приклад 1.4 (*споживчий вибір між повними субститутами*). Нехай поле переваг споживача $(R_+^2, \geq)$ з монотонною неперервною перевагою має карту кривих байдужості $R_+^2 \backslash\sim$ у вигляді сім'ї прямих $x_1 + x_2 = \alpha \geq 0$. Для таких кривих $MRS_{1,2} = 1$.

Із монотонності відношення преваги випливає, що більшому α відповідає кращий набір товарів з точки зору його цінності. Тоді задача споживчого вибору полягає в максимізації функції $x_1 + x_2$ за обмежень $p_1\, x_1 + p_2\, x_2 \leq I$, $x_1, x_2 \geq 0$. Якщо $p_1 < p_2$ (рис. 1.6), то $(x_1^*, x_2^*) = (I/p_1, 0)$. Аналогічно, коли $p_1 > p_2$, будемо мати $(x_1^*, x_2^*) = (0, I/p_2)$. Якщо ж (p_{1}) $h_1 = p_2$, то це будуть товари (x_1^*, x_2^*): $p_1\, x_1^* + p_2\, x_2^* = I$, $x_1^*, x_2^* \leq 0$.

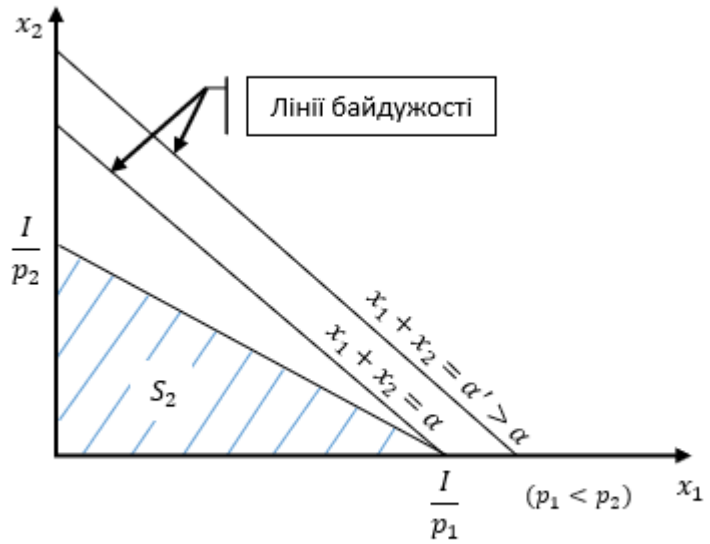

Рис. 1.6.

Таким чином, функція попиту споживача складається з таких елементів:

(поставити правильно індекси p_{2})

$$x_1^*(p_1, p_[2, I) \;=\; \begin{cases} I/p_1, & p_1 \;<\; p_2, \\ \in\; [0, I/p_1], & p_1 \;=\; p_2, \\ 0, & p_1 \;>\; p_2, \end{cases}$$

$$x_2^*(p_1, p_[2, I) \;=\; \begin{cases} I/p_2, & p_2 \;<\; p_1, \\ (I \;-\; p_1\; x_1^*)/p_2, & p_1 \;=\; p_2, \\ 0, & p_2 \;>\; p_1. \end{cases}$$

Приклад 1.5 (*споживчий вибір у просторі комплементарних товарів*). Нехай поле переваг споживача $(R_+^2, \succeq)$ із монотонною неперервною перевагою $\succeq$ має карту кривих байдужості $R^2 + \backslash\sim$ у вигляді сім'ї ліній $\min(a_1\; x_1,\; a_2\; x_2) \;=\; \alpha \;\geq\; 0$. Тоді з міркувань прикл(аду) 1.4 випливає, що задача споживчого вибору зводиться до такої оптимізційної задачі:

$$\min(a_1\; x_1,\; (a_2\; x_1,)) \;\rightarrow\; \max,$$

$$p_1\; x_1 \;+\; p_2\; x_2 \;\leq\; I,\; x_1, x_2 \;\geq\; 0.$$

У цьому випадку (рис. 1.7) споживач повинен купувати оптимальні кількості товарів $x_1^*,\; x_2^*$ у пропорції $a_1\; x_1^* \;=\; a_2\; x_2^*$. Це разом з бюджетним обмеженням $p_1\; x_1^* \;+\; p_2\; x_2^* \;= I,\; x_1^*,\; x_2^* \;\geq\; 0$ дає такі функції попиту споживача:

$$x_1^*(p_1, p_2, I) \;=\; \frac{a_2\; I}{p_1\; a_2 \;+\; p_2\; a_1},\;\; x_2^*(p_1, p_2, I) \;=\; \frac{a_1\; I}{p_1\; a_2 \;+\; p_2\; a_1}.$$

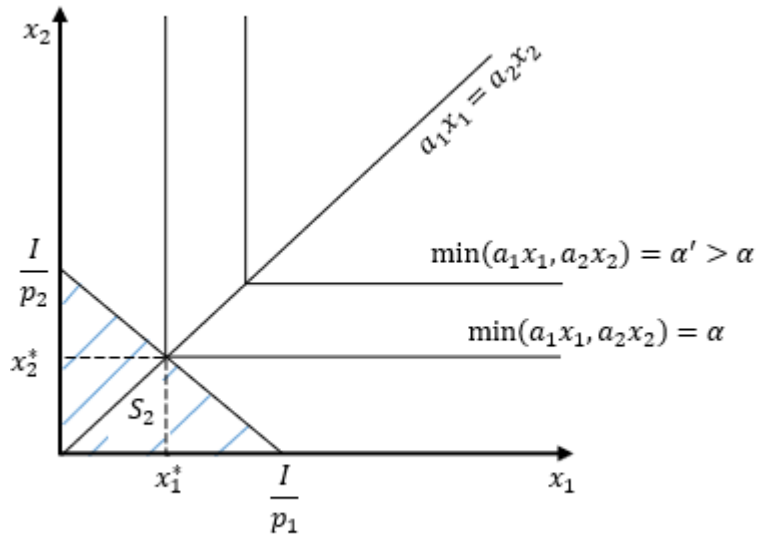

Рис. 1.7.

Нехай $(X, \succeq)$ — поле переваг, $X \subseteq R^n$, відношення переваги $\succeq$ задовольняє аксіому 1.1.

Означення 1.3. *Числову функцію* $U: X \to R$ *називають* ***індикатором переваги*** $\succeq$, *або* ***функцією корисності****, що зображує відношення переваги* $\succeq$, *якщо*

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \succeq y \ \forall x, y \in X. \bullet$$

Якщо функція корисності $U(x)$ зображує відношення переваги, то множина рівнів цієї функції є класами байдужості для $\succeq$, тобто $U(x) = U(y)$ тоді і тільки тоді, коли $x \sim y$:

$$U(x) = U(y) \Leftrightarrow x \succeq y \sim x, \ y \in X.$$

Теорема 1.6.

1) *Якщо* $U(x)$, $x \in X$ — *функція корисності для поля переваг* $(X, \succeq)$ *і* $f: U(X) \to R^1$ *строго зростаюча функція, то суперпозиція* $f \circ U(x) = f(U(x))$ *також є функцією корисності, що зображує поле переваг* $(X, \succeq)$.

2) Якщо $U(x)$ та $V(x)$ — дві функції корисності, які зображують поле переваг $(X, \succeq)$, то існує така строго зростаюча дійсна функція $f(t,)$ визначена на

$U(X)$, що $V(x) = f \circ U(x) = f(U(x))$, $x \in X$.

Доведення.

Твердження 1) очевидне. Доведемо 2). Шукану функцію можна побудувати як показано на рис. 1.8.

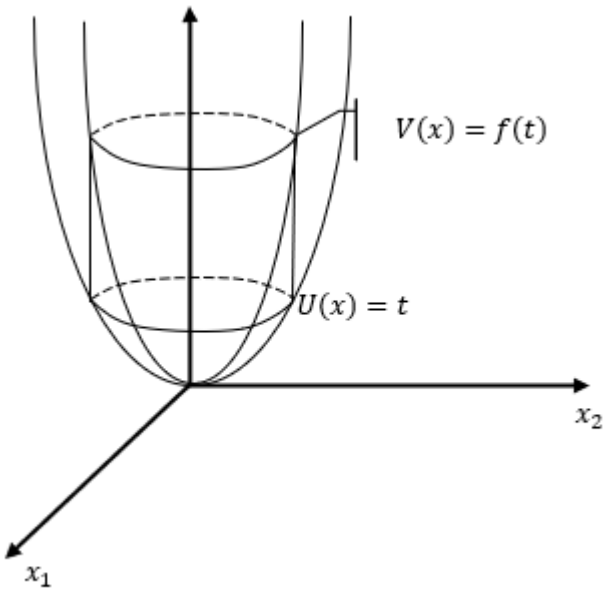

Рис. 1.8.

Покладемо для $t \in U(x)$ $f(t) = V(x)$ для будь-якого x із множини $U^{-1}(t) = \{x\colon U(x) = t\}$. Значення $f(t)$ таким чином буде визначено однозначно:

— оскільки $U^{-1}(t)$ — це клас байдужості за відношенням еквівалентності $\sim$, то $V(x) = V(y)$ $\forall$ $x, y \in U^{-1}(t)$;

— функція $f(t)$ — строго зростаюча, оскільки якщо $s, t \in U(x)$, $s > t$, то $x \succ y$, $x \in U^{-1}(s)$, $y \in U^{-1}(t)$; звідси $f(s) = V(x) > V(y) = f(t)$.

За побудовою $V(x) = f \circ U(x) = f\big(U(x)\big)$, $x \in X$. •

Із теореми 1.6 випливає, що коли для будь-якого поля переваг існує хоча б одна функція корисності, то є безліч функцій корисності, які можна отримати одну

з одної за допомогою строгих монотонно зростаючих перетворень.

Припустимо, що функція корисності для певного поля переваги існує й має частинні похідні за товарами. Тоді можемо ввести для j-го товару таку числову характеристику, як *гранична корисність*:

$$MU_j(x) = \frac{\partial\ U(x)}{\partial x_j}.$$

Приклад 1.6 (*лінійна функція корисності*). Ця функція має вигляд

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i,\ x \in R_+^n,$$

де a_j — граничні корисності споживача за товаром j.

За допомогою квадратичної функції $f(z) = z^2,\ z \geq 0,$ яка є строго зростаючою, одержимо квадратичну функцію корисності:

$$V(x) = f(U(x)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ x_i^2 + 2\ \sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i\ a_j\ x_j,$$

(у другій сумі потрібно ще просумувати по індексу j при умові, що він не дорівнює індексу i)

яка характеризує те ж відношення переваги, що і функція $U(x)$.

Приклад 1.7 (*мультиплікативна функція корисності*). Ця функція має вигляд

$$U(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ x \in R_+^n,\ \alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n},$$

при цьому граничні корисності мають вигляд

$$MU_i(x) = \alpha_i\ \frac{U(x)}{x_i} > 0,\ x \in intR_+^n.$$

За допомогою строго зростаючої функції $f(z) = z^\gamma,\ z \geq 0,\ \gamma = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^{-1}$ одержимо функцію корисності Кобби—Дугласа:

$$V(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i},\ x \in R_+^n;$$

$$0 < \beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} < 1,\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1,$$

яка характеризує те ж відношення переваги, що і функція $U(x)$.

Зауважимо, що для функції корисності $V(x)$ граничні корисності $MV_i(x)$ є спадними функціями, оскільки

$$\frac{\partial\ MV_i(x)}{\partial x_i} = \beta_i(\beta_i - 1)\ \frac{V(x)}{x_i^2} < 0,\ x \in intR_+^n.$$

Приклад 1.8 (*функція корисності зі сталою еластичністю заміни*). Ця функція має вигляд

$$U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}, x \in R_+^2,\ 0 < \rho < 1.$$

За допомогою строго зростаючої функції $f(z) = z^\rho,\ z \geq 0$, одержимо функцію корисності

$$V(x_1, x_2) = x_1^\rho + x_2^\rho,$$

яка характеризує те ж відношення переваги, що і функція $U(x)$.

Для функції корисності $V(x)$ маємо

$$MV_i(x) = \rho\ x_i^{\rho-1} \geq 0, \frac{\partial^2 V(x)}{\partial X_i^2} \leq 0.$$

Параметр ρ виражає еластичність заміни товару 1 товаром 2:

$$\varepsilon(x) = \frac{d\ln(\frac{x_1}{x_2})}{d\ln MRS_{1,2}}.$$

Приклад 1.9 (*функція корисності Лєонтьєва*). Ця функція має вигляд

$$U(x) = \min\{a_1\ x_1, \ldots, a_n\ x_n\},$$

де $x \in R_+^n,\ a_i > 0,\ i = \overline{1, n}$.

Для випадку $n = 2$ таку функцію було розглянуто у прикл. 1.5. Ця функція не має похідних на множині $a_1\ x_1 = a_2\ x_2 = \ldots = a_n\ x_n$.

Приклад 1.10 (*загальна мультиплікативна функція корисності*). Ця функція має вигляд

$$U(x) = C \prod_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^{\alpha_i},\ x \in R_+^n,\ \alpha_i > 0,\ i = \overline{1, n},$$

де $C > 0,\ x_i \geq \bar{x}_i$.

Таким чином, можна сказати, що функція корисності споживача виражає *порівняльну* (*ординалістську*) кількісну міру цінності різних споживчих наборів.

Одним з основних результатів теорії споживання є теорема Ж. Дебре.

Теорема 1.7 (*Ж. Дебре*). *Якщо множина* X *поля переваг* $(X, \succeq)$ *є зв'язною, а відношення переваги — неперервне, то існує функція корисності* $U(x)$, $x \in X$, *що зображує це поле.* •

Застосуємо поняття граничної корисності для характеристики деяких властивостей відношення переваги.

Очевидно, що перевага $\succeq$ є *монотонною* тоді й тільки тоді, коли функція корисності, що зображує поле переваг $(X, \succeq)$, є монотонною зростаючою: $x \succeq y \Rightarrow U(x) \geq U(y)$. Тоді, якщо функція корисності має похідні, то умова монотонного зростання еквівалентна умові

$$MU_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Далі розглянемо опуклість поля переваг $(X, \succeq)$.

Твердження 1.1.

1. *Відношення переваги* $\succeq$ *у полі переваг* $(X, \succeq)$ *є опуклим тоді й тільки тоді, коли функція корисності, що зображує* $(X, \succeq)$, *є квазівгнутою, тобто для довільного* $a \in R^1$ *множина*

$$S_a = \{x \in R^n\colon U(x) \geq a\}$$

є опуклою.

2. Відношення переваги$\succeq$ є строго опуклим тоді й тільки тоді, коли функція корисності, що зображує $(X, \succeq)$, є строго квазівгнутою, тобто для довільних $\lambda \in (0,1)$, $x \in R^n$:

$$\{U(y) \geq U(x),\ y \neq x\} \Rightarrow \{U(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq U(x)\}.\ \bullet$$

Квазівгнуті функції становлять надто широкий клас і незручні для роботи. Тому далі будемо викристовувати *вгнуті* та *строго вгнуті* функції:

$$U(\lambda\ x\ +\ (1\ -\ \lambda)\ y)\ \geq\ \lambda\ U(x)\ +\ (1\ -\ \lambda)\ U(y),\ \lambda\ \in\ [0,1],$$

$$U(\lambda\ x\ +\ (1\ -\ \lambda)\ y)\ >\ \lambda\ U(x)\ +\ (1\ -\ \lambda)\ U(y),\ \lambda\ \in\ (0,1).$$

Зрозуміло, що кожна вгнута (строго вгнута) функція є квазівгнутою (строго квазівгнутою) функцією. Далі будемо вважати, що функції корисності є строго вгнутими. Якщо функція корисності має другі похідні, то строга вгнутість є наслідком від'ємної визначеності *матриці Гессе*:

$$U''\ =\ \frac{d^2U(x)}{dx^2}\ =\ \frac{\partial^2U(x)}{\partial x_i\ \partial x_j}\Big|_{i,j=1}^{n}.$$

Із від'ємної визначеності матриці Гессе випливає, що

$$\frac{\partial^2U(x)}{\partial x_i^2}\ <\ 0,\ i\ =\ \overline{1,n}.$$

Останні нерівності виражають *перший закон Госсена*: гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням його споживання.

1.3. Неокласична задача споживання. Модель споживання Стоуна: товари першої необхідності, вибору, розкоші. Дуальна задача споживання. Узагальнення неокласичної задачі споживання

Нехай функція корисності споживача $U(x),\ x \in R_+^n$ є двічі диференційованою, монотонно зростаючою і строго вгнутою, а бюджетне обмеження має вигляд $p'\ x \le I$, де $p \in R_+^n$ — вектор цін, I — бюджет (дохід) споживача. Тоді раціональна поведінка споживача визначається такою задачею опуклого програмування (неокласична задача споживання):

$$U(x_1, \ldots, x_n) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i\ x_i = p'\ x \le I,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{1.1}$$

Відступ 1.2. *Умови оптимальності в задачі математичного програмування [5].*

Розглянемо задачу вигляду

$$f(x) \to \min,$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1, k},$$

$$g_i(x) = 0,\ i = \overline{k+1, m},\ x \in U_0 \subset R^n. \tag{1.2}$$

Зв'яжемо із задачею (1.2) множину векторів

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m\colon \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1, k}.\} \tag{1.3}$$

Для задачі (1.2) уведемо функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0\ f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i\ g_i(x). \tag{1.4}$$

Градієнт функції Лагранжа за x будемо позначати через $L'_x(x, \lambda_0, \lambda)$.

Якщо функції в задачі (1.2) неперервні, множина U_0 — компактна або замкнута і така, що в ній існує послідовність $\{x_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} ||x_k|| = \infty$, $(||x|| = \rho(x, 0))$, виконуються обмеження щодо нерівностей і рівностей, то така задача має розв'язок (теорема Вейєрштраса).

Теорема 1.8 (*принцип Лагранжа*). Нехай у задачі (1.2) множина U_0 — опукла, функції $f(x), g_i(x)$, $i = \overline{1, k}$ — диференційовні у точці $\hat{x}_* \in U_0$, функції $g_i(x)$, $i = \overline{k+1, m}$ — диференційовні в околі точки $\hat{x}_*$. Якщо $\hat{x}_*$ — локальний розв'язок задачі (1.2), то існують число $\lambda_{0,*} \geq 0$ і вектор $\lambda_* \in \Lambda$, не рівні одночасно нулеві й такі, що

$$(L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \ \forall \ x \in U_0, \tag{1.5}$$

$$\lambda_{i,*} \ g_i(\hat{x}_*) = 0, \ i = \overline{1, k}. \ \bullet \tag{1.6}$$

Будь-яку точку $\hat{x}_* \in \Omega$, що задовольняє умови (1.5)—(1.6) за деяких $\lambda_{0,*} \geq 0$, $\lambda_* \in \Lambda$, $(\lambda_{0,*}, \lambda_*) \neq 0$, називають стаціонарною точкою задачі (1.2). Принцип Лагранжа стверджує, що за вказаних припущень будь-який локальний розв'язок задачі (1.5)—(1.6) є стаціонарною точкою. Зворотне гарантується лише за додаткових припущень щодо задачі (1.2).

Числа $\lambda_{i,*}$, $i = \overline{0, m}$ називають множниками Лагранжа. Вони визначені з точністю до додатної постійної. Це дозволяє розглядати в теоремі 1.8 лише два випадки: $\lambda_{0,*} = 0$ або $\lambda_{0,*} = 1$. Будь-яке додаткове припущення, яке забезпечує в межах цієї теореми випадок $\lambda_{0,*} = 1$, називають умовою регулярності. Саму задачу (1.2) при цьому називають регулярною. Для регулярної задачі функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ g_i(x). \tag{1.7}$$

Для регулярної задачі опуклого програмування умови (1.5)—(1.6) є не тільки необхідними, але й достатніми.

Теорема 1.9. Нехай у задачі (1.2) множина U_0 — опукла, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,k}$ — опуклі на U_0 та диференційвні у точці $\hat{x}_* \in \Omega$, функції $g_i(x)$, $i = \overline{k+1,m}$ — лінійні. Якщо за $\lambda_{0,*} = 1$ і деякого $\lambda_* \in \Lambda$ виконуються умови (1.5)—(1.6), то $\hat{x}_* = x_*$. •

Наведемо деякі випадки реалізації умови (1.5), конкретизуючи множину U_0.

Лема 1.1.

1) якщо $U_0 = R^n$, то умова (1.5) еквівалентна умові

$$L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*) = 0;$$

2) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n\colon a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\},$$

де $-\infty \le a_i < b_i \le \infty$, $i = \overline{1,n}$ (коли $a_i = -\infty$ або $b_i = \infty$, то відповідний знак нерівності слід розуміти як строгий). Тоді умова (1.5) буде еквівалентною умові

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*,\lambda_{0,*},\lambda_*)}{\partial x_i}\begin{cases} = 0, & a_i < \hat{x}_{*,i} < b_i, \\ \ge 0, & \hat{x}_{*,i} = a_i \ne -\infty, \\ \le 0, & \hat{x}_{*,i} = b_i \ne \infty, i = \overline{1,n}; \end{cases}$$

3) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n\colon x_i \ge 0,\ i = \overline{1,s}\},$$

де $0 \le s \le n$ ($s = 0$ відповідає випадку $U_0 = R^n$), то умова (1.5) буде еквівалентною сукупності умов

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*,\lambda_{0,*},\lambda_*)}{\partial x_i} \ge 0, \hat{x}_{i,*}\ \frac{\partial L(\hat{x}_*,\lambda_{0,*},\lambda_*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,s},$$

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*,\lambda_{0,*},\lambda_*)}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{s+1,n}. \bullet$$

Повернімось до задачі (1.1). Для неї необхідні й достатні умови оптимальності, згідно з теоремою 1.8 і п. 3 леми 1.1 (див. відступ 1.2), будуть мати вигляд

$$ML_i(x^*, \lambda^*) = MU_i(x^*) - \lambda^* p_i \leq 0,$$

$$x_i^* \; ML_i(x^*, \lambda^*) = x_i^* \; (MU_i(x^*) - \lambda^* \; p_i) = 0, \; i = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = I - p' \; x^* \geq 0, \; \lambda^* \; (I - p' \; x^*) = 0. \qquad (1.8)$$

Припустимо, що всі товари мають бути купленими, тобто $x_i^* > 0, \; i = \overline{1, n}$. Тоді із другого співвідношення умов оптимальності (1.8) і додатності $MU_i(x^*)$ отримаємо:

$$\lambda^* = \frac{MU_i(x^*)}{p_i} > 0, \; i = \overline{1, n}. \qquad (1.9)$$

Звідси і з четвертого співвідношення умов оптимальності (1.8) матимемо

$$I - p' \; x^* = 0.$$

Таким чином, умови оптимальності (1.8) набувають вигляду системи рівнянь

$$MU_i(x^*) - \lambda^* \; p_i = 0, \; \overline{1, n};$$

$$I - p' \; x^* = 0. \qquad (1.10)$$

Нехай $x^*(p, I)$ — розв'язок системи (1.10). Тоді

$$\lambda^* = \frac{1}{p_i} \; \frac{\partial U_i(x^*(p,I))}{\partial I} \; \frac{\partial I}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i(x^*(p,I))}{\partial I},$$

тобто в цій моделі споживання множник Лагранжа називають *граничною корисністю грошей,* а функцію

$$V(p, I) = U(x^*(p, I))$$

називають *непрямою корисністю* споживача.

Надамо геометричну ілюстрацію умовам оптимальності (1.10) за $n = 2$.

Розв'язок системи (1.10) лежить на бюджетній прямій

$$I - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0$$

і є точкою дотику її до кривої байдужості (рис. 1.9).

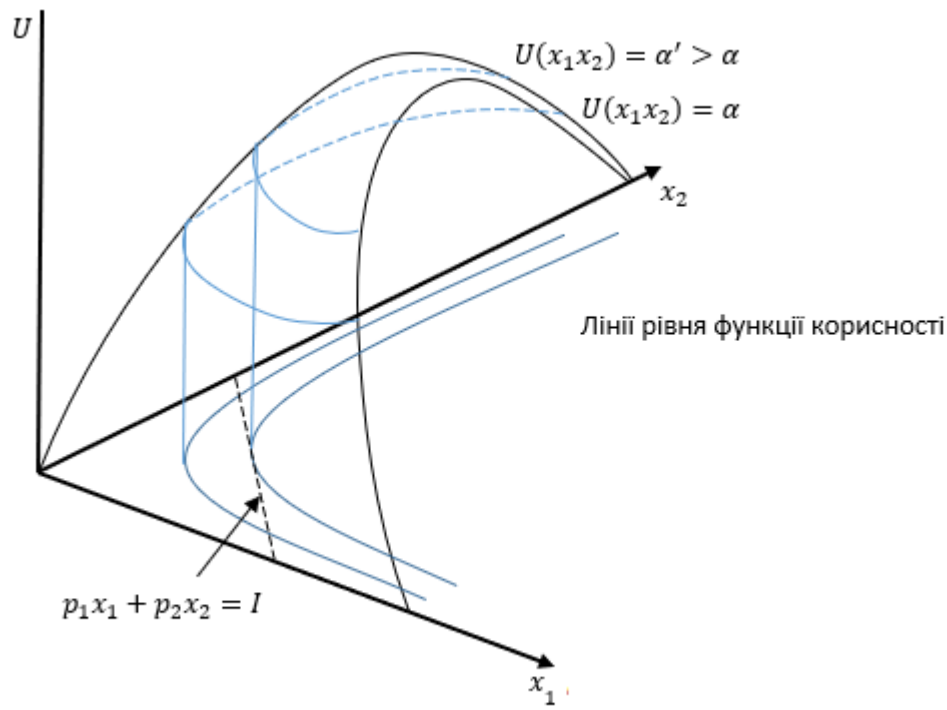

Рис. 1.9.

За цих умов нахил (кутовий коефіцієнт) бюджетної прямої дорівнює $-p_1/p_2$, а нахил відповідної кривої байдужості dx_2/dx_1 визначають із рівняння

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

тоді

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^{-1}.$$

Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^{-1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Із (1.10) випливає, що функція попиту споживача $x^*(p, I)$ є однорідною нульового ступеня відносно цін і бюджету, тобто

$$x^*(\alpha p, \alpha I) = x^*(p, I) \ \forall \ \alpha > 0.$$

Розглянемо деякі приклади, що розкривають особливості оптимального вибору споживача в різних ситуаціях.

У задачі (1.10) за $n = 2$ функцію корисності візьмемо у вигляді функції Бернуллі:

$$U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, a_1, a_2 > 0.$$

Система (1.10) буде мати вигляд

$$\frac{a_1}{x_1} - \lambda p_1 = 0, \frac{a_2}{x_2} - \lambda p_2 = 0;$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = I.$$

Тоді

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_1}, x_2^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_2}.$$

Розглянемо більш загальний підхід до задачі вибору споживача. При цьому функція корисності споживача має включати для кожного товару його мінімальну кількість $\bar{x}_i$, яка не є об'єктом вибору, а купується ним обов'язково за відповідних бюджетних можливостей. Якщо $\bar{x}_i > 0$, то відповідний товар є *товаром першої потреби.* Набір усіх товарів першої потреби $\bar{x}$ утворює *мінімальний споживчий кошик.*

Усереднений за певною методикою мінімальний споживчий кошик та його вартість визначають рівень бідності економіки.

Якщо $\bar{x}_i = 0$, то товар i є *товаром вибору.* Товари вибору характеризуються швидким темпом зростання попиту на них в разі збільшення доходу порівняно з товарами першої потреби, попит на які є обмеженим. Серед товарів вибору іноді виділяють групу *товарів розкошів*, попит на які необмежено зростає в разі необмеженого зростання доходу I, причому в більших пропорціях, ніж зростання I.

Із наведеного випливає, що формально i -й товар є:

— товаром першої потреби, якщо

$$\lim_{I\to\infty} \frac{x_i^*(p,I)}{I} = 0;$$

— товаром вибору, якщо

$$\lim_{I\to\infty} \frac{x_i^*(p,I)}{I} = K < \infty;$$

— товаром розкошів, якщо

$$\lim_{I\to\infty} \frac{x_i^*(p,I)}{I} = \infty.$$

Розглянемо модель споживання Стоуна із загальною мультиплікативною функцією корисності:

$$U(x) = C \prod_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^{\alpha_i},$$

де

$$C > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\ \bar{x}_i < I,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I,\ x \in R_+^n.$$

Система оптимальності (1.10) тут буде мати вигляд

$$\frac{\partial U(x^*)}{\partial x_i} - \lambda^*\ p_i = \frac{\alpha_i\ U(x^*)}{x_i^* - \bar{x}_i} - \lambda^*\ p_i = 0,\ i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\ x_i^* = I.$$

Із перших n рівнянь цієї системи отримаємо

$$x_i^* = \bar{x}_i + \frac{\alpha_i}{p_i}\ \frac{U(x^*)}{\lambda^*}, i = \overline{1,n}.$$

У виписаних вище рівняннях невідомою є величина $U(x^*)/\lambda^*$. Для її визначення домножимо кожне з цих рівнянь на p_i і складемо всі добутки з урахуванням останнього рівняння системи оптимальності:

$$I = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \bar{x}_i + \frac{U(x^*)}{\lambda^*} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Звідси отримаємо, відповідно,

$$\frac{U(x^*)}{\lambda^*} = \frac{I - \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i};$$

$$x_i^* = \bar{x}_i + \frac{\alpha_i}{p_i}\frac{I - \sum_{j=1}^n p_j\bar{x}_j}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}, i = \overline{1,n}. \quad (1.11)$$

Отриманий результат можна інтерпретувати таким чином:

1) спочатку споживач витрачає суму коштів $\sum_{j=1}^n p_j\bar{x}_j$ на придбання товарів першої потреби $\bar{x}$;

2) після цього в нього залишається сума грошей $I - \sum_{j=1}^n p_j\bar{x}_j$, на яку він закуповує додаткову кількість товарів $(I - \sum_{j=1}^n p_j\bar{x}_j)/p_i$, $i = \overline{1,n}$ у пропорції α_i $(\sum_{k=1}^n \alpha_k)^{-1}$.

Зазначимо, що в моделі Стоуна згідно з уведеною вище класифікацією всі товари за $\bar{x}_j \neq 0$; $j = \overline{1,n}$ є одночасно і товарами першої необхідності, і товарами вибору:

$$\lim_{I\to\infty} \frac{x_i^*(p,I)}{I} = \frac{\alpha_i}{p_i \sum_{k=1}^n \alpha_k}.$$

Іноді функція корисності не включає мінімального споживчого кошика. Справді, нехай у моделі (1.1) функція корисності має вигляд

$$U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_2 + b - a)^{-b},$$

де $a > 0$, $b > a$, $x \in R_+^2$.

Тоді умови оптимальності для задачі (1.1) запишемо таким чином:

$$\frac{a}{x_1} U(x^*) - \lambda^* p_1 = 0;$$

$$\frac{b-a}{x_2} U(x^*) - \frac{b}{x_2 + b - a} U(x^*) - \lambda^* p_2 = 0.$$

Виключаючи з умов оптимальності невідому величину $U(x^*)/\lambda^*$ і враховуючи бюджетне обмеження, отримаємо рівняння відносно невідомої x_2^*:

$$\frac{I - p_2 x_2^*}{a} = \frac{p_2 x_2^* (x_2^* + b - a)}{(b-a)^2 - a x_2^*}.$$

Звідси визначаємо

$$x_2^* = \frac{I\ (b - a)^2}{I\ a + p_2\ b\ (b - a)}.$$

Тоді

$$x_1^* = \frac{a\ I\ (I + p_2\ (b - a))}{I\ a + p_2\ b\ b - a}.$$

Згідно з уведеною вище класифікацією перший товар є товаром вибору, а другий — товаром першої потреби.

Зауважимо, що розв'язки моделі (1.1) (функція попиту) та похідні від них величини (гранична корисність грошей, непряма функція корисності) називають *маршалівськими.*

Дуальною (двоїстою) задачею споживання до неокласичної задачі споживання (1.1) є задача мінімізації видатків споживача на придбання набору товарів x із рівнем корисності, не меншим від заданого значення u, яка має вигляд

$$x'\ p \rightarrow \min,\ U(x) \geq u,\ x \in R_+^n, \qquad (1.12)$$

де p — вектор цін на товари; U — функція корисності споживача.

Ця задача разом із задачею (1.1) дає повний аналітичний опис раціональної поведінки споживача. Установимо основні співвідношення між моделями (1.1) та (1.12).

Теорема 1.10. *Нехай виконуються такі припущення:*

a) функція $U(x)$ неперервна на R_+^n і задовольняє умову локальної ненасичуваності: $\forall\ x \in R_+^n, x > 0$, *і довільних малих* $\varepsilon > 0\ \exists$ *набір товарів* y, $||x - y|| < \varepsilon$, *що* $U(y) > U(x)$;

b) розв'язки задач (1.1) та (1.12) існують.

Тоді:

I. Якщо x^* — розв'язок задачі (1.1) та $u = U(x^*)$, то $x_* = x^*$, де x_* — розв'язок задачі (1.12).

II. Якщо x_* — розв'язок задачі (1.12) та $I = x_*'\ p$, то $x^* = x_*$.

Доведення.

I. Припустимо, що в разі виконання умов теореми x^* не є розв'язком задачі (1.12). Тоді існує інший її розв'язок $\hat{x}$: $\hat{x}'\ p\ <\ x^{*\prime}\ p$ й $U(\hat{x})\ \geq\ U(x^*)$. Згідно з умовою локальної ненасичуваності є набір товарів $\hat{\hat{x}}$, близький до $\hat{x}$ і такий, що $\hat{\hat{x}}'\ p\ < x^{*\prime}\ p\ =\ I,\ U(\hat{\hat{x}})\ >\ U(x^*)$, тобто x^* не може бути розв'язком задачі (1.1). Отримана суперечність доводить I.

II. Припустимо, що в разі виконання умов теореми x_* не є розв'язком задачі (1.1). Тоді існує інший її розв'язок $\hat{x}$: $U(\hat{x})\ >\ U(x_*)$, $\hat{x}'\ p\ =\ x_*{}'\ p\ =\ I$. Тоді, зважаючи на неперервність $U(x)$, існує таке $t\ \in\ (0,1)$, що $t\ \hat{x}'\ p\ <\ x_*{}'\ p\ =\ I$ і $U(t\ \hat{x})\ >\ U(x_*)$. Тому x_* не може бути розв'язком задачі (1.12). •

Знайдемо умови оптимальності для задачі (1.12). Функція Лагранжа для неї має вигляд

$$L(x,\lambda)\ =\ x'\ p\ +\ \lambda\ (u\ -\ U(x)).$$

Тоді

$$p_i\ -\ \lambda_*\ MU_i(x_*)\ \geq\ 0,\ x_{i*}\ (p_i\ -\ \lambda_*\ MU_i(x_*))\ =\ 0,\ i\ =\ \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L(x_*,\lambda_*)}{\partial\lambda}\ =\ u\ -\ U(x_*)\ \geq\ 0,\ \lambda_*\ (u\ -\ U(x_*))\ =\ 0. \qquad (1.13)$$

Припускаючи, що всі товари купуються $x_{i*}\ >\ 0,\ i\ =\ \overline{1,n}$, умови оптимальності (1.13) набудуть вигляду

$$p_i\ =\ \lambda_*\ MU_i(x_*),\ i\ =\ \overline{1,n},\ U(x_*)\ =\ u, \qquad (1.14)$$

при цьому розв'язок задачі (1.4) $x_*(p,u)$ називають функцією *хіксіанського попиту* споживача, на відміну від маршалівського попиту як розв'язку задачі (1.1).

1. *Неокласична задача споживання з обмеженнями щодо товарів.* Нехай у моделі (1.1) є додаткове обмеження

$$U_0\ =\ \{x\ \in\ R_+^n\colon a_i\ \leq\ x_i\ \leq\ b_i,\ i\ =\ \overline{1,n}\},$$

де $a_i\ \geq\ 0,\ b_i\ >\ a_i$.

Припустимо, що $b_i\ =\ \infty$. Тоді в означенні множини відношення $\leq$ слід

замінити відношенням $<$.

Таким чином, отримуємо модель споживчого вибору з обмеженнями щодо товарів

$$U(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \max;$$

$$x \in S_n = \{p' x \leq I\} \cap U_0 \neq \emptyset. \qquad (1.15)$$

Використовуючи принцип Лагранжа (див. відступ 1.2), для моделі (1.15) можна написати умови оптимальності, але їх аналіз буде складнішим, ніж аналіз умов оптимальності для моделі (1.1).

2. *Неокласична модель гарантованого споживчого вибору з обмеженнями щодо товарів*. Нехай у задачі (1.15) ціни на товари не фіксовані, а належать деякому поліедру

$$P = \{0 < \underline{p}_i \leq p_i \leq \overline{p}_i,\ i = \overline{1, n.}\}.$$

Тоді модель гарантованого споживчого вибору буде мати вигляд

$$\min_{p \in P} U(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \max,$$

$$x \in S_n = \{p' x \leq I\} \cap U_0 \neq \emptyset. \qquad (1.16)$$

3. *Неокласична ігрова модель гарантованого споживчого вибору з обмеженнями щодо товарів*. У всіх попередніх моделях споживач був один. Припустимо, що

1) на споживчому ринку діє m незалежних споживачів. Кожний із них діє згідно зі своєю функцією корисності $U_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ щодо вибору споживчого набору;

2) кожний споживач діє в межах своїх бюджетних обмежень $I^j \in [\underline{I}^j, \overline{I}^j]$, $\underline{I}^j > 0$, $j = \overline{1, m}$, а попит на i-й товар залежить від його бюджету $x_i^j = f_i(I^j)$, де f_i – деякі однозначні функції;

3) вектор цін вважаємо фіксованим і

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j \; p_i \;\leq\; I^j, \; j \;=\; \overline{1,m},$$

$$x' \;=\; (\sum_{j=1}^{m} x_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} x_n^j) \;\in\; U_0.$$

Тоді

$$\widetilde{U}_j(I^1, \ldots, I^m) \;=\; U_j(\sum_{k=1}^{m} x_1^k, \ldots, \sum_{k=1}^{m} x_n^k),$$

і ми можемо шукати рівноважні ситуації (гарантовані, за Нешем та інше [5]) у некооперативній грі m осіб (функції виграшів мають вигляд $\widetilde{U}_j(I^1, \ldots, I^m)$, $j \;=\; \overline{1,m}$) та обмеженнями, наведеними вище у припущеннях 1) — 3).

1.4. Порівняльна статика споживання: основне рівняння теорії споживання. Рівняння Слуцького і класифікація товарів. Еластичність попиту та умови агрегації

Метою порівняльної статики споживання є вивчення чутливості розв'язків системи оптимальності для неокласичної задачі споживання

$$MU_i(x^*) - \lambda^* p_i = 0,\ i = \overline{1,n};\ I - p' x^* = 0$$

щодо зміни екзогенних параметрів $p,\ I$.

Нехай $x^*(p,I),\ \lambda^*(p,I)$ — розв'язки виписаної системи оптимальності. Позначимо

$$\xi(p,I) = x^*(p,I),\ \Lambda(p,I) = \lambda^*(p,I).$$

Тоді система рівнянь умов оптимальності перетворюється на систему тотожностей:

$$MU_i(\xi(p,I)) - \Lambda(p,I)\ p_i = 0,\ i = \overline{1,n}, I - p'\ \xi(p,I) = 0, \quad (1.17)$$

яка виконуються за $\forall p,\ I > 0$.

Позначимо через $\partial\xi_i/\partial I,\ i = \overline{1,n},\ \partial\Lambda/\partial I$ функції чутливості для функції попиту ξ та функції граничної корисності грошей Λ щодо зміни бюджету I. Диференцюючи за I тотожності (1.17), отримаємо систему рівнянь відносно уведених функцій чутливості:

$$1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial\xi_k}{\partial I} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\ \partial x_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial I} - p_i \frac{\partial\Lambda}{\partial I} = 0,\ i = \overline{1,n}. \quad (1.18)$$

Систему (1.18) можна подати у матричному вигляді:

$$H \begin{pmatrix} \partial\Lambda/\partial I \\ \partial\xi/\partial I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p' \\ -p & U'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\Lambda/\partial I \\ \partial\xi/\partial I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

де $(\partial\xi/\partial I)' = (\partial\xi_1/\partial I, \ldots, \partial\xi_n/\partial I),\ U'' = \{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i\ \partial x_k}\}_{i,k=1}^{n}$.

Позначимо через $\partial\xi_k/\partial p_j$, $\partial\Lambda/\partial p_j$, $k,j = \overline{1,n}$ функції чутливості для функції попиту ξ та функції граничної корисності грошей Λ щодо зміни ціни p_j. Диференцюючи за p_j тотожності (1.17), отримуємо систему рівнянь відносно уведених функцій чутливості:

$$\xi_j + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial\xi_k}{\partial p_j} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial p_j} - p_i \frac{\partial\Lambda}{\partial p_j} - \Lambda \, \delta_{i,j} = 0, \; i,j = \overline{1,n}, \qquad (1.20)$$

де символ Кронеккера $\delta_{i,j} = 1, \; i = j; \; \delta_{i,j} = 0, \; i \neq j$.

Систему (1.20) можна подати у матричному вигляд:

$$H \begin{pmatrix} (\partial\Lambda/\partial p)' \\ \partial\xi/\partial p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p' \\ -p & U'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial\Lambda/\partial p)' \\ \partial\xi/\partial p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \Lambda \; E_n \end{pmatrix}, \qquad (1.21)$$

де $(\partial\Lambda/\partial p)' = (\frac{\partial\Lambda}{\partial p_1}, \ldots, \partial\Lambda/\partial p_n)$, $\partial\xi/\partial p = \{\frac{\partial\xi_k}{\partial p_i}\}_{k,i=1}^{n}$, E_n — одинична матриця розмірністю $n \times n$.

Далі дослідимо вплив *компенсованої зміни ціни*, згідно з якою дохід компенсується таким чином, щоб корисність залишалася незмінною. Для цього знайдемо повні диференціали функцій U та I з урахуванням умов оптимальності:

$$dU = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} \, dx_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \, dx_k = \lambda \, p' \, dx;$$

$$dI = d(p' \, x) = (dp)' \, x + p' \, dx,$$

де $(dx)' = (dx_1, \ldots, dx_n)$.

Умова незмінної корисності приводить до того, що $dU = 0$ й $p' \, dx = 0$. Тоді додатковий дохід

$$dI = (dp)' \, x \qquad (1.22)$$

забеспечує незмінність корисності. Якщо усі ціни фіксовані, а зміюється лише ціна

p_j, то (1.22) набуває вигляду

$$dI = x_j \, dp_j. \qquad (1.23)$$

Позначимо через $(\partial\xi_k/\partial p_j)_{comp}$, $(\partial\Lambda/\partial p_j)_{comp}$, $k,j = \overline{1,n}$, функції чутливості для функції попиту ξ та функції граничної корисності грошей Λ щодо компенсованої зміни ціни. Диференцюючи за p_j тотожності (1.17) з урахуванням (1.23), отримаємо систему рівнянь відносно уведених функцій чутливості:

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{\partial\xi_k}{\partial p_j}\right)_{comp} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \, \partial x_k}\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial p_j}\right)_{comp} - p_i \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_j}\right)_{comp} - \Lambda \, \delta_{i,j} = 0, \; i,j = \overline{1,n}. \qquad (1.24)$$

Систему (1.24) можна подати у матричному вигляді:

$$H \begin{pmatrix} (\partial\Lambda/\partial p)'_{comp} \\ (\partial\xi/\partial p)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p' \\ -p & U'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial\Lambda/\partial p)'_{comp} \\ (\partial\xi/\partial p)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \; E_n \end{pmatrix}, \qquad (1.25)$$

де $((\partial\Lambda/\partial p)_{comp})' = ((\frac{\partial\Lambda}{\partial p_1)_{comp}}, \ldots, \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_n)_{comp}}\right)$; $(\partial\xi/\partial p)_{comp} = \{(\frac{\partial\xi_k}{\partial p_i})_{comp}\}_{k,i=1}^{n}$.

Матричні лінійні рівняння (1.19), (1.21), (1.25) називають основними рівняннями теорії споживання. Їх розв'язність визначається блочною матрицею Гессе, обрамленою цінами H. Ця матриця невироджена. Справді, розглянемо матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 0 & -p' \\ -p & U'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \theta' \\ \theta & \Upsilon \end{pmatrix} = E_{n+1}, \qquad (1.26)$$

де

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \theta' \\ \theta & \Upsilon \end{pmatrix}.$$

Система (1.26) еквівалентна такій системі:

$$-p' \, \theta = 1, \; -p' \, \Upsilon = 0;$$

$$-\mu\ p + U''\ \theta = 0,\ -p\ \theta' + U''\ \Upsilon = E_n.$$

Розв'язуючи останню систему, отримаємо

$$\mu = -(p'(U'')^{-1}p)^{-1} > 0,\ \theta = \mu\ (U'')^{-1}\ p;$$

$$\Upsilon = (U'')^{-1}\ (E_n + \mu\ p\ p'\ (U'')^{-1}).$$

Діючи на кожне з рівнянь (1.19), (1.21), (1.25) матрицею H^{-1}, отримуємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial I} = -\mu\ (U'')^{-1}\ p; \qquad (1.27)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \mu\ (U'')^{-1}\ p\ \xi' + \mu\ (U'')^{-1}\ p\ p'\ (U'')^{-1}\ \Lambda + (U'')^{-1}\ \Lambda; \quad (1.28)$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} = \mu(U'')^{-1}\ p\ p'^{\ -1}\ (U'')^{-1}\ \Lambda + (U'')^{-1}\ \Lambda; \qquad (1.29)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial I} = -\mu,\ \frac{\partial \Lambda}{\partial p} = \mu\ \xi + \mu\ \Lambda\ (U'')^{-1}\ p,\ \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p}\right)_{comp} = \mu\ \Lambda\ (U'')^{-1}\ p. \quad (1.30)$$

У попередніх підрозділах було встановлено, що множник Лагранжа λ^* в неокласичній задачі споживчого вибору має вигляд

$$\lambda^*(p, I) = \Lambda(p, I) = \frac{\partial U(x^*)}{\partial I}.$$

Тоді згідно з першою формулою із (1.30) та виразом для Λ отримуємо

$$\mu = -\frac{\partial \Lambda}{\partial I} = -\frac{\partial^2 U(x^*)}{\partial I^2},$$

тобто додатне число μ можна назвати *коефіцієнтом зменшення граничної корисності грошей*.

Із формул (1.27)—(1.29) випливає таке *рівняння Слуцького*:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} - \frac{\partial \xi}{\partial I}\xi', \qquad (1.31)$$

яке описує загальний ефект від впливу цін на функції попиту через вплив

компенсованої зміни ціни на попит і вплив зміни доходу на попит.

Покомпонентно рівняння (1.31) буде мати вигляд

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} - \frac{\partial \xi_i}{\partial I} \xi_j, \ i,j = \overline{1,n}. \qquad (1.32)$$

Матрицю

$$C = \left\{\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp}\right\}_{i,j=1}^{n} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} \qquad (1.33)$$

називають *матрицею Слуцького*, вона характеризує ефекти заміни одних товарів іншими в разі компексованої зміни цін, зокрема:

— член $(\partial \xi_i / \partial I)\ \xi_j$ рівняння (1.32) відображає вплив зміни доходу на попит на i-й товар відносно попиту на j-й товар;

— член $(\partial \xi_i / \partial p_j)_{comp}$ характеризує заміни в попиті на i-й товар, що відбувається в разі зміни компенсованої ціни на j-й товар.

Далі розглянемо геометричну ілюстрацію рівняння Слуцького для випадку двох товарів. Якщо ціна на товар 1 збільшиться від p_1 до p_1', то бюджетна лінія пересунеться від положення 1 до положення 2 (рис. 1.10). Тоді точка A на старій бюджетній лінії 1, що є точкою дотику до кривої байдужості I, зміниться на нову точку дотику B, яка лежить вже на новій бюджетній лінії 2 і дотикається до кривої байдужості II.

Якщо компенсувати втрату добробуту споживача, збільшуючи його дохід, то відповідна нова бюджетна лінія 3 (паралельна лінії 2) дотикатиметься до кривої байдужості I у точці C. Тоді:

— вектор $\overline{AC}$ буде показувати ефект заміни зі збільшеням ціни та завдяки підтримці старого рівня доброботу споживача компенсуючим збільшенням доходу;

— вектор $\overline{CB}$ буде показувати ефект доходу, тобто зміну попиту споживача, коли ціни (нові) не міняються, а дохід змінюється.

Загальний ефект зростання ціни (коли немає компенсації) відображає вектор

$\overline{AB}$, причому $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

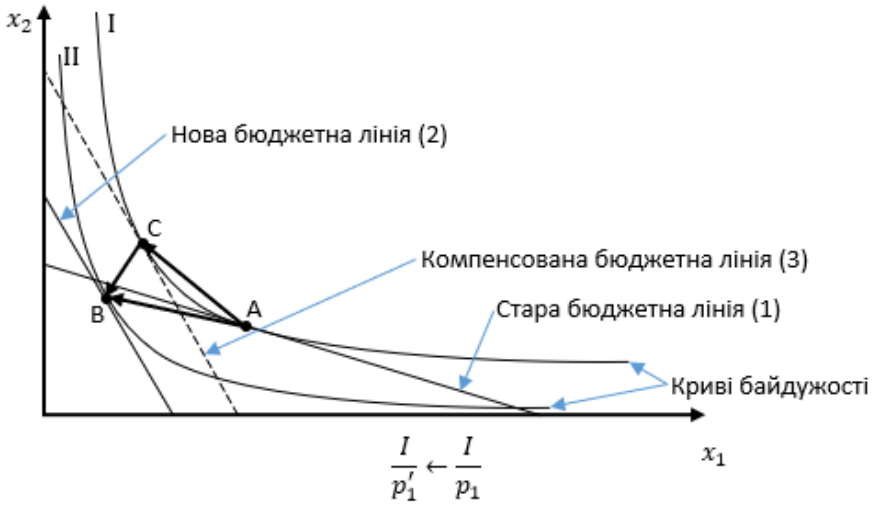

Рис. 1.10.

Розглянемо числові приклади аналізу компенсаційних ефектів та рівняння Слуцького.

Приклад 1.11. Нехай споживач має логарифмічну функцію корисності (функцію корисності Бернуллі) $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, його дохід $I = 60$, а ціни на товари $p_1 = 10$, $p_2 = 2$. Тоді функцію попиту на товари визначають за формулами

$$x_1^*(p, I) = \xi_1(p, I) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_1} = \frac{1}{2} \frac{60}{10} = 3;$$

$$x_2^*(p, I) = \xi_2(p, I) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_{12}} = \frac{1}{2} \frac{60}{2} = 15,$$

де $a_1 = a_2 = 1$.

Тоді непряма функція корисності $V(p, I) = \ln(x_1^*(p, I)\ x_2^*(p, I)) = \ln 45$.

Нехай тепер ціна на другий товар зросла до 7 одиниць, тобто $p_2' = 7$. Тепер, щоб споживачеві придбати той самий набір товарів x^*, йому треба мати додатково $(7 - 2)\ 15 = 75$ грошових одиниць. Однак стара структура споживання не є оптимальною за нових цін, тому мінімально необхідна йому

компенсація буде меншою за 75. Позначимо через ΔI величину компенсуючого зростання доходу. Тоді

$$x_1 \; = = \; \frac{I \; + \; \Delta I}{2 \;\; 10}, \; x_2 \; = \; \frac{I \; + \; \Delta I}{2 \;\; 7},$$

$$V(x) \; = \; \ln x_1 \;\; x_2 \; = \; \ln(\frac{I \; + \; \Delta I}{2 \;\; 10} \;\; \frac{I \; + \; \Delta I}{2 \;\; 7}) \; = V(x^*) \; = \; \ln 45.$$

З останнього рівняння знаходимо, що $\Delta I \; = \; 52{,}25$.

Повернемось до матриці Слуцького (1.33). З її означення (1.29) випливає, що вона симетрична. Крім того, ця матриця від'ємно напіввизначена. Справді, нехай $z \; = \; \alpha \;\; p$ за деякого $\alpha \in \; R^1$. Тоді із (1.29) отримаємо

$$z' \; (\frac{\partial \xi}{\partial p})_{comp} \;\; z \; = \; \Lambda \;\; \alpha^2 \;\; p'(\mu (U'')^{-1} \;\; p \;\; p' \;^{-1} \;\; (U'')^{-1} \; + \; (U'')^{-1}) \;\; p \; =$$

$$= \; \Lambda \;\; \alpha^2 \;\; p'(\mu \;\; (-\mu)^{-1} \;\; p' \;\; (U'')^{-1} \; + \; p' \;\; (U'')^{-1}) \;\; p \; = \; 0.$$

Будь-який вектор $z \;\; in \;\; R^n$ можна подати у вигляді

$$z \; = \; \alpha \;\; p \; + \; \nu, \qquad (1.34)$$

де $\nu \; \in \; R^n$, $\nu \; \neq \; 0$, $p' \;\; (U'')^{-1} \nu \; = \; 0$, а число α визначають однозначно за формулою

$$\alpha \; = \; \frac{p' \;\; (U'')^{-1} \;\; z}{p' \;\; (U'')^{-1} \;\; p},$$

при цьому

$$z' \; (\frac{\partial \xi}{\partial p})_{comp} \;\; z \; = \; \Lambda \;\; (\alpha \;\; p \; + \; \nu)'(\mu (U'')^{-1} \;\; p \;\; p' \;^{-1} \;\; (U'')^{-1} \; +$$

$$(U'')^{-1}) \;\; (\alpha \;\; p \; + \; \nu) \; =$$

$$= \; \Lambda \;\; (\mu \;\; \nu' \;\; (U'')^{-1} \;\; p \;\; p' \;^{-1} \;\; (U'')^{-1} \;\; \nu \; + \; \nu' \;\; (U'')^{-1} \;\; \nu) \; =$$

$$\Lambda \nu' (U'')^{-1} \;\; \nu \; < \; 0$$

Позначимо $(e^i)' \; = \; \underbrace{(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)}_{i}$ — i-й одиничний орт. Тоді

$$(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i})_{comp} = (e^i)'(\frac{\partial \xi}{\partial p})_{comp}\ e^i < 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (1.35)$$

Це означає, шо *компенсоване зростання ціни товару завжди приводить до зменшення попиту на цей товар.*

Покладемо в рівнянні Слуцького (1.32) $j = i$. Якщо

$$(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i})_{comp} - \frac{\partial \xi_i}{\partial I}\ \xi_i' < 0,$$

то

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} < 0, \qquad (1.36)$$

і такий товар, коли зі зростанням ціни попит на нього падає, будемо називати *нормальним товаром*.

Якщо ж

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} > 0, \qquad (1.37)$$

то такий товар, коли зі зростанням ціни попит на нього зростає, будемо називати *товаром Гіффена.*

Якщо

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial I} > 0, \qquad (1.38)$$

то такий товар будемо називати *цінним*. Якщо у (1.38) виконується зворотна нерівність, то відповідний товар будемо називати *малоцінним.*

Зі збільшенням доходу попит на малоцінні товари зменшується, що потребує їх заміни більш цінними товарами. Тому в разі некомпенсованої зміни ціни може спостерігатись *парадокс Гіффена*, коли з підвищенням ціни на торар попит на нього зростає (це явище характерне для держав зі слабкою економікою).

Товари i-й та j-й називають *взаємозамінними,* якщо

$$(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j})_{comp} > 0. \qquad (1.39)$$

Якщо ж справджується нерівність

$$(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j})_{comp} \ < \ 0, \qquad (1.40)$$

то такі товари називають *взаємодоповнювальними.*

Із (1.29) випливає рівність

$$p' \ (\frac{\partial \xi}{\partial p})_{comp} \ = \ (\frac{\partial \xi}{\partial p})_{comp} \ p \ = \ \sum_{j=1}^{n} \ (\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j})_{comp} \ p_j \ = \ 0, \qquad (1.41)$$

тобто завжди існують такі пари (хоч би одна) товарів (i_0, j_0), які становлять взаємозамінну пару.

Використання в економічній практиці показників, які визначаються через частинні похідні, з метою аналізу і прогнозування реакції споживача на зміну цін та доходів, є незручним із двох причин. По-перше, ці показники важко зісталяти, оскільки вони вимірюються в різних фізичних одиницях: приріст попиту на тканини вимірюється в метрах, на молоко — у літрах, на м'ясо — у кілограмах. По-друге, значення цих показників залежить від масштабу вимірювання. Тому замість граничних значень показника визначають його логарифмічний аналог. Якщо показник виражається значенням функції багатьох змінних $f(x)$, $x \ \in \ R^n$, то величини

$$\varepsilon(f; x_i) \ = \ \frac{x_i}{f(x)} \ \frac{\partial f(x)}{\partial \ x_i} \ = \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \ \ln x_i}, \ [\ = \ \overline{1, n} \qquad (1.42)$$

називають *частковими коефіцієнтами еластичності* вони є безрозмірними. Коефіцієнт еластичності є відношенням відсоткової зміної функції $f(x)$ у разі одновідсоткової зміни x_i.

Повний коефіцієнт еластичності є сумою його часткових коефіцієнтів еластичності.

Властивості еластичності визначають відповідними властивостями похідних, зокрема,

$$\varepsilon(u \ \ v; x_i) \ = \ \varepsilon(u; x_i) \ + \ \varepsilon(v; x_i), \varepsilon(\frac{u}{v}; x_i) \ = \ \varepsilon(u; x_i) \ - \ \varepsilon(v; x_i).$$

Надамо геометричну ілюстрацію коефіцієнта еластичності в одновимірному

випадку для типових кривих в економічній практиці.

1. Нехай $y = f(x)$, $x \in R^1$ є спадною строго опуклою функцією (рис. 1.11, *а*). Знайдемо еластичність y в довільній точці її графіка.

Якщо AB — дотична до кривої $y = f(x)$ у точці $C(x, y)$, то із трикутника ACX знайдемо $AX = CX/\mathrm{tg}\alpha$. Тоді $y'(x) = \mathrm{tg}(\pi - \alpha)$ й $\mathrm{tg}\alpha = -y'(x)$. Отже, $AX = -y/y'(x)$. Із подібності трикутників CBY та CAX будемо мати

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CY}{AX} = \frac{OX}{AX} = -\frac{CY}{x\ f'(x)} f(x) = \varepsilon(f; x).$$

Зауважимо, що в цьому випадку точка C лежить між точками A та B. Якщо точка C лежить по один бік від A та B (рис. 1.11, *в*, *с*), то

$$\varepsilon(f; x) = \frac{CB}{CA}.$$

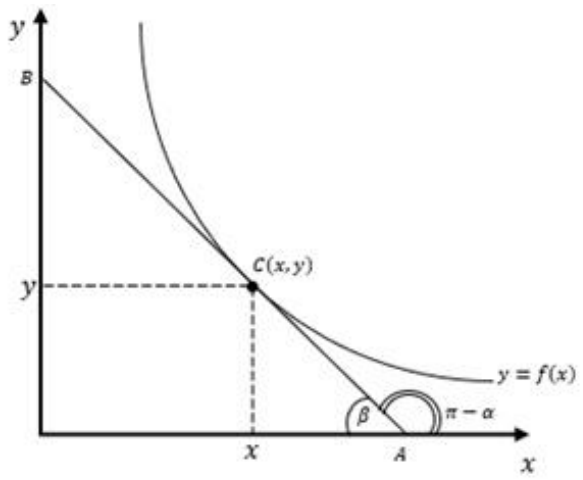

Рис. 1.11, а

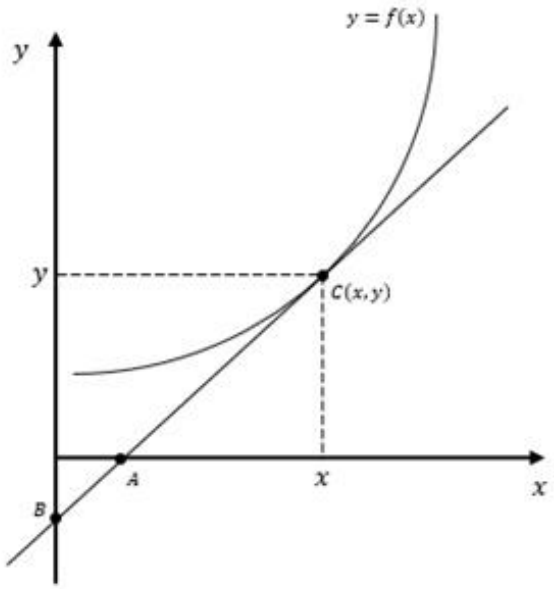

Рис. 1.11, в

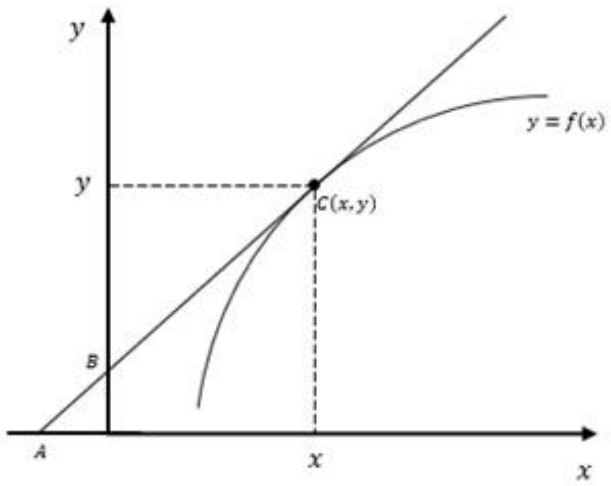

Рис. 1.11, с

Встановимо основні співвідношення між рівнями еластичності та пов’язаними з ними частинними похідними (умови агрегації).

Для цього спочатку помножимо рівняння Слуцького (1.32) на p_j і складемо результат:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \ \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \ = \ -\frac{\partial \xi_i}{\partial I} \ I, \ i \ = \overline{1,n}.$$

Розділимо почленно це співвідношення на ξ_i , отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} \ \varepsilon(\xi_i; p_j) \ + \ \varepsilon(\xi_i; I) \ = \ 0, \ i \ = \ \overline{1,n}, \qquad (1.43)$$

тобто *для кожного товару сума його рівнів еластичності щодо цін і доходу дорівнює нулеві.*

Із (1.27) отримаємо *умову агрегації Енгеля*:

$$\sum_{i=1}^{n} \ p_i \ \frac{\partial \xi_i}{\partial I} \ = \ 1, \qquad (1.44)$$

тобто *всі товари із кошика споживача не можуть бути малоцінними.*

Із рівняння Слуцького (1.32) та (1.44) отримаємо *умову агрегаці Курно*:

$$\xi_i \ = \ - \ \sum_{j=1}^{n} \ p_j \ \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i}. \qquad (1.45)$$

1.5. Задачі та завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1.1.

Підприємець вирощує яблука та інші культури на площі *S* кв. га. Кожна яблуня займає *A* кв. га, а інші культури — по *B* кв. га. Функція корисності має вигляд $u(x_1 x_2) = x_1 + 100x_2 - x_2^2$, де x_1 — кількість яблунь, x_2 — кількість інших культур. Скільки яблунь та інших дерев посадить підприємець, щоб максимізувати корисність? Якщо площа саду збільшиться на 100 кв. га, наскільки зміняться посадки яблунь та інших культур?

№ варіанта	S	A	B
1	500	1,0	4,0
2	550	1,5	4,1
3	450	1,2	3,9
4	510	1,3	4,3
5	580	1,4	3,9
6	600	1,1	4,2
7	540	1,0	4,1
8	590	1,3	4,4
9	620	1,5	4,5
10	630	1,2	5,0
11	650	1,4	4,2
12	680	2,0	4,0
13	700	1,5	4,5

Алгоритм виконання роботи.

1. Скласти оптимізаційну задачу максимізації корисності. Бюджетному обмеженню в ній відповідає обмеження на витрату площі саду.

2. Побудувати функцію Лагранжа.

3. Виконати рішення моделі засобами або симплекс-методу, або розв'язанням функції Лагранжа, або Ексель-пошуком рішень.

4. Здійснити моделювання другого варіанта завдання та виконати порівняльний аналіз.

Завдання 1.2.

Нехай крива попиту має вигляд $P = 200 - (X *)$^2. Потрібно обчислити еластичність попиту за ціною в разі зміни останньої від $\boldsymbol{p1 = A}$ до $\boldsymbol{p2 = B}$.

№ варіанта	A	B
1	136	119
2	145	121
3	164	128
4	139	114
5	146	129
6	141	120
7	152	134
8	138	120
9	156	132
10	149	122
11	156	136
12	160	136
13	158	130

Алгоритм виконання роботи.

1. Застосовуючи функцію попиту, визначити відповідну цим цінам кількість товарів.

2. Обчислити еластичність у точках (P1, P2).

Завдання 1.3.

Функція попиту на вино $C = 0{,}02K - 2p$, де K — дохід; p — ціна пляшки вина; C — кількість пляшок вина. Нехай $\boldsymbol{K = A}$, $\boldsymbol{p = B}$.

1. Якщо ціна вина зросте до S, то яким має стати дохід, щоб попит на вино залишався попереднім? При цьому рівні доходу й новій ціні скільки пляшок вина буде куплено?

2. Чому дорівнює ефект заміни та ефект доходу в разі підвищення ціни на вино до $\boldsymbol{S}$?

№ варіанта	S	A	B
1	40	7500	30
2	50	9670	40
3	45	6280	39
4	51	9800	33
5	58	8250	39
6	60	1100	42
7	54	1050	41
8	59	1340	44
9	62	1500	45
10	63	1450	50
11	55	1410	42
12	58	1290	49
13	60	8570	45

Завдання 1.4. Гранична корисність товару *X* дорівнює 30, а його ціна — 15 грн. Ціна товару *Y* дорівнює 20 грн. Ціна товару *Z* становить 10 грн. Якщо споживач прагне максимізувати корисність від споживання цих товарів, то якою має бути гранична корисність товарів *Y* та *Z*?

А) MUY = 20; MUZ = 40;

Б) MUY = 40; MUZ = 20;

В) MUY = 10; MUZ = 40;

Г) MUY = 10; MUZ = 5.

Завдання 1.5. Рівняння бюджетної лінії для певного споживача було таким: $Y = 45 – 0,6X$. Після того, як ціна товару *Y* зросла з 12 грн до 15 грн за одиницю, а дохід споживача залишився на рівні 540 грн, рівняння бюджетної лінії набуло вигляду:

А) Y = 54 – 0,72X;

Б) Y = 42 – 0,6X;

В) Y = 36 – 0,48X;

Г) Y = 15 – 12X.

Завдання 1.6. Яка з наведених змін загальної корисності унаслідок впливу збільшення обсягу споживання показує дію закону спадної граничної корисності?

А) 400; 500; 600; 700;

Б) 100; 150; 250; 300;

В) 200; 250; 270; 280;

Г) 150; 350; 450; 600.

Завдання 1.7. Для споживача товари X та Y є абсолютними замінниками у пропорції 1:1. Ціна товару X — 1 грн, товару Y — 1,5 грн. Споживач максимізує корисність, якщо:

А) гранична норма заміни товару X товаром Y становить 2/3;

Б) витрачає весь свій дохід на товар X;

В) витрачає весь свій дохід на товар Y;

Г) гранична норма заміни товару X товаром Y становить 3/2.

Завдання 1.8. Яка з наведених змін граничної корисності унаслідок збільшення обсягу споживання показує дію 1-го закону Госсена?

А) 40; 50; 45; 60;

Б) 10; 15; 25; 30;

В) 28; 25; 27; 28;

Г) 65; 55; 45; 30.

Завдання 1.9. Сергій купує 8 шоколадок та 4 апельсини. Ціна однієї шоколадки — 2 грн, гранична норма заміни апельсинів шоколадом — 0,5. Бюджет Сергія становить:

А) 24 грн;

Б) 32 грн;

В) 20 грн;

Г) 36 грн.

Завдання 1.10. Форма і нахил кривих байдужості залежать:

А) від ступеня замінності благ у споживанні;

Б) від співвідношення цін товарів;

В) від уподобань споживача, його доходу та співвідношення цін товарів;

Г) усі відповіді правильні.

Завдання 1.11. Споживач вибирає кошик із двома товарами X та Y. Рівновага споживача характеризується такими даними: обсяг споживання товару X = 2,5 од., обсяг споживання товару Y = 2,5 од., дохід становить 75 грн. Якщо MRSxy = 2, то ціни товарів становитимуть:

А) PX = 10 грн, PY = 20 грн;

Б) PX = 5 грн, PY = 10 грн;

В) PX = 20 грн, PY = 10 грн;

Г) PX = 10 грн, PY = 5 грн.

Завдання 1.12. Функція корисності споживача TU = X · Y. Дохід споживача становить 24 грн, PX = 2 грн, PY = 3 грн. Оптимальний споживчий кошик складається з:

А) 6X + 4Y;

Б) 3X + 6Y;

В) 2X + 3,3Y;

Г) 4Y + 6X.

Завдання 1.12. В умовах рівноваги раціональний індивід споживає 2 склянки кави та 3 тістечка. Якщо склянка кави коштує 3 грн, а тістечко – 2,5 грн, то гранична норма заміщення тістечок кавою становитиме:

А) 2/3;

Б) 3/2;

В) 5/6;

Г) 6/5.

Завдання 1.13 Робінзон, який мешкає на безлюдному острові, може споживати тільки те, що сам виробив. Склалося так, що Робінзон виробляє (і, відповідно, споживає) тільки товар X. Функція корисності Робінзона

$$TU = \frac{x_c(1-x_{\acute{a}})}{2},$$

де x_c — споживання товару X, одиниць на день; $x_{\acute{a}}$ — виробництво товару X, одиниць на день.

Чим більше значення функції корисності, тим краще живе Робінзон. Робінзон може виробити не більше ніж 30 одиниць товару X за день. Скільки одиниць товару X має споживати Робінзон, щоб отримати максимальне задоволення?

Завдання 1.14. Функція корисності споживача має вигляд $U = x + 2\sqrt{y}$. Споживач прагне максимізувати свою корисність, ціна товару *y* становить 10 грош. од., бюджет споживача становить 80 грош. од. Знайдіть функцію попиту споживача на товар *x*.

Завдання 1.15. Бюджет споживача, який він витрачає на товари *x* та *y*, становить 118 грн. Ціна товару *x* становить 3 грн/од. Ціна товару y — 8 грн/од. Одну

із кривих байдужості споживача описують рівнянням $x^{0,5} \cdot y^{0,5} = 1$. Знайдіть, яку кількість товарів *x* та *y* має купити раціональний споживач.

Контрольні запитання

1. Назвіть деякі аспекти характеристики економіки, її структури як об'єкта моделювання.
2. Опишіть економічні колізії та моделювання економіки.
3. Підтвердіть тезис «Моделювання як метод наукового пізнання».
4. Наведіть основні підходи щодо класифікації економіко-математичних моделей.
5. Які ви знаєте принципи перевірки адекватності моделей?
6. Які є стадії розроблення моделей?
7. Визначьте типові математичні й алгоритмічні схеми та елементи.
8. Сформулюйте поняття ординальної та кардинальної функції корисності особи.
9. Складіть принципи граничних норм заміщення.
10. Наведіть основні елементи неокласичної теорії попиту.

Розділ 2. Теорія виробництва

2.1. Простір витрат і виробничі функції. Еластичність випуску та можливості заміщення витрат. Основні типи виробничих функцій. CES-функції

Будемо вважати, що підприємство (фірма) випускає тільки один вид продукції, використовуючи m виробничих факторів або виробничих витрат. Таке підприємство будемо називати *однопродуктовим.* Діяльність *багатопродуктового підприємства*, яке виробляє кілька видів продукції, буде розглянуто в кінці цього розділу з використанням математичного моделювання діяльності однопродуктового підприємства.

Загальні виробничі витрати за певний перід часу можна охарактеризувати за допомогою вектора витрат $x \in R_+^m$. Тоді *простір витрат — це множина* $X \subseteq R_+^m$.

Переходячи в разі потреби до цінових індексів кількості факторів виробництва, їх можна робити сумірними та агрегувати у потрібні для заданої моделі групи. Досить часто факторами виробництва вважають такі агреговані фактори:

1) *виробничий капітал* K, що є втіленням нагромадженої праці у формі *основних виробничих фондів* (засобів праці — обладнання, виробничої інфраструктури тощо);

2) сучасну *працю* L;

3) *матеріали* M, що є предметами праці й утворюють *оборотні фонди.*

Під *виробничою функцією* будемо розуміти відображення $F\colon X \to R_+^1$, яке формується прийнятою технологією переробки виробничих факторів.

Тоді кількість випущеної підприємством продукції у певний час має вигляд $q = F(x),\ x \in X \subseteq R_+^m$.

Виробничі функції мають задовольняти певним загальним умовам, які

сформулюємо у вигляді аксіом.

Аксіома 2.1 (*відсутність «рогу достатку»*). Якщо $F(0) = 0$, то неможливо виробити щось із нічого.

Аксіома 2.2 (*монотонність*). Існує підмножина E простору витрат X, яку називають *економічною областю,* в якій збільшення будь-якого виду витрат не приводить до зменшення випуску продукції, тобто із $x^1, x^2 \in E$: $x^1 \geq x^2 \Rightarrow F(x^1) \geq F(x^2)$.

Аксіома 2.3 (*вгнутість*). Існує опукла підмножина D економічної області E, на якій виробнича функція $F(x)$ буде вгнутою, тобто $F(\alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2) \geq \alpha F(x^1) + (1 - \alpha) F(x^2)$ $\forall x^1, x^2 \in D, \alpha \in [0,1]$.

Аксіома 2.3 відображає економічний *закон спадної віддачі* (*спадної дохідності*): коли витрати одного виробничого фактора поступово збільшуються за фіксованих інших факторів, то в кінцевому результаті досягається особлива область, де приріст продуктивності спадає.

Щоб пояснити зміст закону спадної віддачі, розглянемо класичний приклад із сільського господарства. Додаткове внесення у ґрунт нових порцій добрив за незмінних інших факторів виробництва спочатку буде сприяти деяким приростам врожаю, але ці прирости поступово будуть зменшуватися і після досягнення певної точки насичення припиняться. Надалі внесення добрив призведе до шкідливого впливу на врожайність.

Під час моделювання виробництва в межах неокласичного підходу вважають, що виробнича функція $F(x)$ є двічі диференційовною за сукупністю змінних. Це дає змогу використовувати апарат математичного аналізу (маржиналістський підхід). Тоді градієнт виробничої функції

$$F'(x) = \{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\}_{i=1}^{m} = MP(x) \qquad (2.1)$$

називають *граничним продуктом,* а частинні похідні

$$\frac{\partial f(x)}{\partial\ x_i} = MP_i(x),\ i = \overline{1,m} \qquad (2.2)$$

називають *частинними граничними продуктами.*

На мові граничних продуктів аксіома 2.2 набуває вигляду

$$E = \{x \in X\colon MP(x) \geq 0\}. \qquad (2.3)$$

Аксіому 2.3 підсилимо, вимагаючи від'ємної визначеності матриці других похідних (матриці Гессе):

$$F''(x) = \{\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i\ \partial x_j}\}_{i,j=1}^{m} < 0. \qquad (2.4)$$

Із (2.4) випливає закон спадної віддачі:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} < 0;\ i = \overline{1,m}. \qquad (2.5)$$

Для аналітичного моделювання ринку, підрозділів економічної системи та й загалом всього виробничого сектору економіки використовують *неокласичні виробничі функції*, які є звуженням виробничих функцій, що задаються аксіомами 2.1—2.3. Такі функції для випадку двох агрегованих факторів $(K,\ L)$ задовольняють умовам:

1) вони неперервно диференційовані за сукупністю аргументів;

2) якщо бракує одного з ресурсів, K або L , виробництво стає неможливим, тобто $F(0,L) = F(K,0) = F(0,0) = 0$;

3) граничні продукти мають бути додатними, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0;\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0;$$

4) виконується закон спадної віддачі

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0;$$

5) у разі необмеженого збільшення одного з ресурсів випуск продукції необмежено зростає, тобто $F(\infty,L) = F(K,\infty) = \infty$;

6) (за потреби) виробнича функція має бути однорідною першого ступеня за аргументами, тобто $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha\ F(K, L)$ для всіх $\alpha,\ K,\ L > 0$.

Прикладом неокласичної виробничої функції є функція Кобби—Дугласа $q = F(K, L) = A\ K^{\beta}\ L^{1-\beta},\ A > 0,\ \beta \in (0,1)$. Справді, виконання умов 1)—2) очевидне. Перевіримо виконання інших умов.

Умова 3):

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \beta\ \frac{F(K,L)}{K} > 0, \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = (1 - \beta)\ \frac{F(K,L)}{L} > 0.$$

Умова 4):

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = \beta\ (\beta - 1)\ \frac{F(K,L)}{K^2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} = -\ (1 - \beta)\ \beta\ \frac{F(K,L)}{L^2} < 0.$$

Умова 5):

$$\lim_{K\to\infty} F(K, L) = \lim_{L\to\infty} F(K, L) = \infty.$$

Умова 6):

$$F(\alpha K, \alpha L) = A\ (\alpha\ K)^{\beta}\ (\alpha\ L)^{1-\beta} = \alpha\ F(K, L).$$

Розглянемо умову 3). Оскільки $\frac{F}{K}$ та $\frac{F}{L}$ є, відповідно, середніми фондовіддачею і продуктивністю праці, то наведені нерівності показують, що відповідно до технології Кобби—Дугласа граничні віддачі факторів виробництва менші за середні. Крім того,

$$\beta = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} = \varepsilon(F; K);$$

$$1 - \beta = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln L} = \varepsilon(F; L),$$

тобто β є еластичністю випуску за капіталом, а $1 - \beta$ — еластичністю випуску за працею.

За допомогою виробничої функції можна будувати *криві продукці*, які наочно відображають стадії виробництва та закон спадної віддачі.

Нехай $\bar{x}_i$ — вектор витрат, в якому зафіксовано всі компоненти, крім i-ї. Тоді

$$P_i(x_i) \;=\; F(\bar{x}_i)$$

є *кривою* P_i *продукції для витрат* i*-го типу*;

$$AP_i(x_i) \;=\; \frac{F(\bar{x}_i)}{x_i} \;=\; \frac{P_i(x_i)}{x_i}$$

є *кривою* AP_i *середнього продукту для витрат* i*-го типу*;

$$MP_i(x_i) \;=\; \frac{\partial F(\bar{x}_i)}{\partial x_i} \;=\; \frac{P_i(x_i)}{x_i}$$

є *кривою* MP_i *граничного продукту для витрат* i*-го типу.*

Типову поведінку кривих продукції показано на рис. 2.1.

За поведінкою кривих продукції розрізняють *три стадії виробництва та його критичні точки.*

Перша критична точка $\bar{x}_i$ — це точка, де функція $P_i(x_i)$ має перегин, а функція $MP_i(x_i)$ досягає максимуму.

Друга критична точка $\bar{\bar{x}}_i$ — це точка, де промінь, проведений із початку системи координат (x_i, q), дотикається до кривої $P_i(x_i)$ і де функція $AP_i(x_i)$ досягає максимуму й дорівнює $MP_i(x_i)$. Справді,

$$\frac{\partial AP_i(x_i)}{\partial x_i} \;=\; \left(\frac{\partial P_i(x_i)}{\partial x_i} x_i \;-\; P_i(x_i)\right)\, x_i^2 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; AP_i(\bar{\bar{x}}_i) \;= MP_i(\bar{\bar{x}}_i).$$

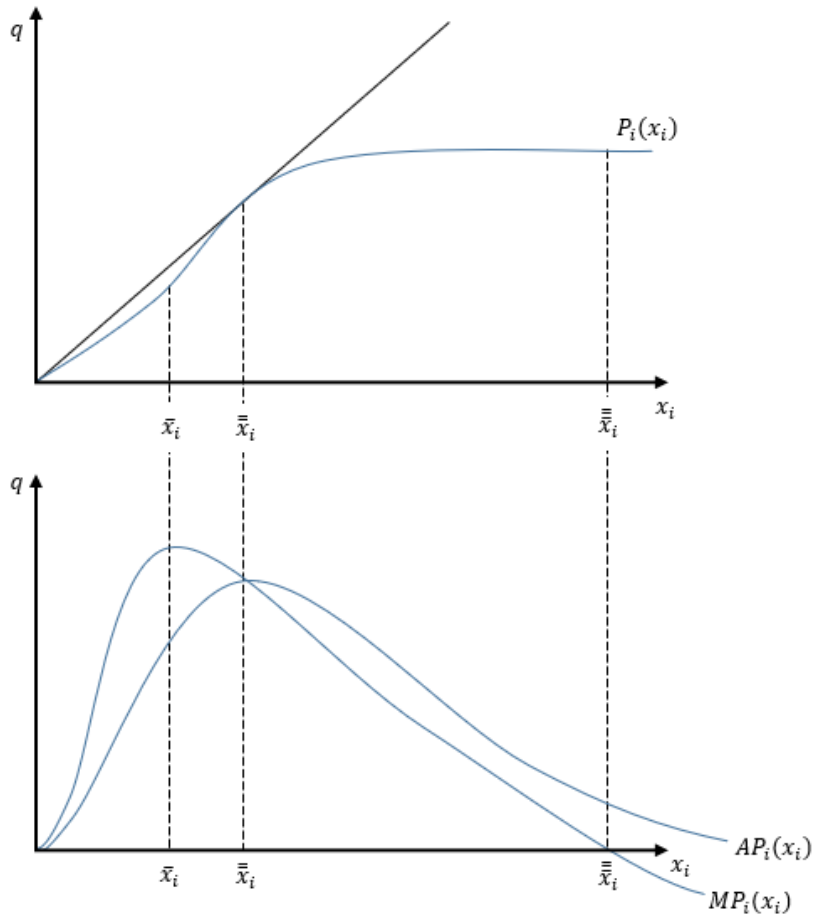

Рис. 2.1.

Третя критична точка $\bar{\bar{\bar{x}}}_i$ — це точка, де крива $P_i(x_i)$ досягає максимуму й $MP_i(x_i) = 0$.

Закон спадної віддачі геометрично виражається в тому, що $MP_i(x_i)$ спадає після першої критичної точки $\bar{x}_i$.

Перша стадія виробництва характеризується умовами

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i);\ 0 < x_i < \bar{\bar{x}}_i.$$

Друга стадія виробництва характеризується умовами

$$AP_i(x_i) > MP_i(x_i) > 0;\ \bar{\bar{x}}_i < x_i < \bar{\bar{\bar{x}}}_i.$$

Третя стадія виробництва характеризується умовами

$$MP_i(x_i) < 0;\ x_i > \bar{\bar{\bar{x}}}_i.$$

Якщо відбувається пропорційна зміна всіх витрат, то говорять про *зміну масштабів виробництва*. Із цим пов'язана деяка класифікація технологічних процесів виробництва.

Нехай простір витрат X такий, що $x,\ \alpha\ x\ \in\ X,\ \alpha\ >\ 1$. Виробництво характеризується *сталим доходом від розширення масштабу*, якщо випуск продукції зростає у тій же пропорці, що й витрати,

$$F(\alpha\ x)\ =\ \alpha\ F(x). \tag{2.6}$$

Виробництво характеризується *зростаючим* (*спадним*) *доходом від розширення масштабу*, якщо його виробнича функція зростає у більшій (меншій) мірі, ніж змінюються всі витрати, тобто

$$F(\alpha\ x)\ >\ \alpha\ F(x)\ (F(\alpha\ x)\ <\ \alpha\ F(x)). \tag{2.7}$$

Характеристики (2.6)—(2.7) мають глобальний характер, тобто виконуються для деяких областей простору витрат X. Локльним показником доходу від розширення масштабу виробництва у точці $x\ \in\ X$ є *еластичність виробництва* (*сумарна еластичність*)

$$\varepsilon(x)\ =\ \lim_{\alpha\to 1}\ \frac{\alpha}{F(\alpha x)}\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial\alpha}\ =\ \lim_{\alpha\to 1}\frac{\partial \ln F(\alpha x)}{\partial \ln\alpha}, \tag{2.8}$$

тобто еластичність випуску щодо параметра масштабу α.

Із співвідношень (2.8) та (2.6)—(2.7) випливає, що для сталого доходу від розширення масштабу $\varepsilon(x)\ =\ 1$, для зростаючого доходу $\varepsilon(x)\ >\ 1$, для спадного доходу $\varepsilon(x)\ <\ 1$. Справді,

$$\varepsilon(x)\ =\ \lim_{\alpha\to 1}\ \frac{\alpha}{F(\alpha x)}\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial\alpha}\ =\ \lim_{\alpha\to 1}\ \frac{\alpha}{F(\alpha x)}F(x)\ \frac{\partial\alpha}{\partial\alpha}\ =\ 1;$$

$$\varepsilon(x)\ =\ \lim_{\Delta\alpha\to 0}\ \frac{1\ +\ \Delta\alpha}{F((1\ +\ \Delta\alpha)x))}\frac{F((1\ +\ \Delta\alpha)x)\ -\ F(x)}{\Delta\alpha}\ >$$

$$>\ \lim_{\Delta\alpha\to 0}\ \frac{1\ +\ \Delta\alpha}{F((1\ +\ \Delta\alpha)x))}\frac{(1\ +\ \Delta\alpha)F(x)\ -\ F(x)}{\Delta\alpha}\ =\ 1.$$

Для випадку спадного доходу міркування будуть аналогічними.

Формулу (2.8) можна подати у вигляді

$$\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} MP_i(x)\; x_i \;=\; \frac{1}{F(x)}\; x'\; MP(x). \qquad (2.9)$$

Справді,

$$\varepsilon(x) \;=\; \lim_{\alpha\to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} \;=\; \lim_{\alpha\to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial(\alpha x_j)}\; x_j \;=$$

$$= \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} MP_i(x)\; x_i.$$

Еластичність випуску за фактором i визначимо так:

$$\varepsilon_i(x) \;=\; \frac{x_i}{F(x)}\; MP_i(x). \qquad (2.10)$$

Тоді

$$\varepsilon(x) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(x), \qquad (2.11)$$

тобто еластичність випуску в довільній точці є сумою еластичностей випуску за всіма факторами у цій самій точці.

Приклад 2.1. Нехай виробнича функція F є однорідною ступеня k, тобто $F(\alpha x) \;=\; \alpha^k F(x)$. Для таких функцій виконується рівність (теорема Ейлера)

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\; x_j \;=\; k\; F(x).$$

Звідси

$$\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{F(x)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\; x_j \;=\; k.$$

Таким чином, сумарна еластичність для однорідних виробничих функцій не залежить від комбінацій витрат. Тоді за $k \;>\; 1$ будемо мати зростаючу, за $k \;<\; 1$ — спадну, а за $k \;=\; 1$ — сталу ефективність від розширення масштабів виробництва.

Можливість заміщення витрат характеризує технологічний процес виробництва (функцію F) з боку різних комбінацій витрат факторів, що

породжують однакові умови випуску продукції. Локальною характеристикою заміщення між витратами x_i та x_j, коли всі інші фактори залишаються сталими в точці $x \in D$, є *еластичність заміщення*

$$\sigma_{ij}(x) = -\frac{d\ln(x_i/x_j)}{d\ln(MP_i/MP_j)},\ i,j = \overline{1,m}. \qquad (2.12)$$

Еластичність заміщення дає відсоткову зміну співідношення витрат, поділену на відсоткову зміну співвідношення їх граничних продуктів, при цьому знак «мінус» у (2.12) забезпечує виконання нерівності $\sigma_{ij}(x) \geq 0$ в особливій області $x \in D$.

Геометрично еластичності заміщення характеризують кривину *ізоквант*, що є множинами витрат, необхідних для сталого виробництва,

$$IQ(q^0) = \{x \in X\colon F(x) = q^0, \qquad (2.13)$$

де q^0 — заданий рівень виробництва.

Таким чином, ізокванти є гіперповерхнями рівня виробничої функції. Їх інколи називають *виробничими гіперповерхнями байдужості*.

Аналогічно теорії споживання абсолютні значення кривин dx_i/dx_j на ізокванті можна інтерпретувати як *граничні норми технологічного заміщення j-го фактора i-им*:

$$MRTS_{ji}(x) = \frac{MP_j(x)}{MP_i(x)} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}\right)^{-1}. \qquad (2.14)$$

Знайдемо ці характеристики для технології Кобби—Дугласа:

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial F}{\partial L}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^{-1} = \frac{1-\beta}{\beta}\ \frac{K}{L},$$

$$MRTS_{KL} = \frac{\partial F}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^{-1} = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\ \frac{K}{L}\right)^{-1}.$$

Розглянемо ще одну геометричну характеристику для виробничих функцій (для випадку $m = 2$).

Ізокліналями виробничої функції $q = F(x_1, x_2)$ називають лінії найбільшого її зростання у просторі витрат R_+^2, що проходять ортогонально до лінії ізоквант (як лінії нульового зростання функції F). Оскільки напрямок найбільшого зростання F задається вектором граничного продукту $MP'(x) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2})$, то кривина ізокванти має вигляд

$$k_1 = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\frac{\partial F}{\partial x_2})^{-1}.$$

Нехай k_2 — кутовий коефіцієнт ізокліналі. Тоді відповідно до рівності $k_1 \ k_2 = -1$ отримаємо рівняння ізокліналі

$$\frac{dx_1}{\partial F/\partial x_1} = \frac{dx_2}{\partial F/\partial x_2}. \qquad (2.15)$$

Аналогічно визначають ізокліналі для більшої кількості факторів.

Приклад 2.2. Нехай виробнича функція має вигляд $F = A \ K^{\alpha} \ L^{\beta}$, A, α, $\beta > 0$, тобто є мультиплікативною. Тоді рівняння (2.15) запишемо таким чином:

$$\frac{K}{\alpha} \ dK = \frac{L}{\beta} \ dL.$$

Інтегруючи останнє, отримаємо

$$K = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \ L^2 + C},$$

де C — постійна інтегрування.

Розглянемо основні типи виробничих функцій.

Лінійні виробничі функції. Лінійна виробнича функція має вигляд

$$q = F(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ x_i, \ x \in R_+^m, \ a_i = MP_i(x) > 0, i = \overline{1, m}.$$

Ця функція одночасно є опуклою і вгнутою. Ізоквантами виступають гіперплощини

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ x_i = q^0 > 0.$$

Ізокліналі є пряменями в R_+^m, паралельними променю $\{a_1 \ z, \ldots, a_m \ z\}$, $z \geq 0$.

Еластичність виробництва для лінійної функції

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \frac{F(x)}{F(x)} = 1.$$

Еластичність заміщення для лінійної функції

$$\sigma_{ij}(x) = \infty, \ i \neq j.$$

Мультиплікативні виробничі функції. Такі функції мають вигляд

$$q = F(x) = \beta_0 \prod_{i=1}^{m} x_i^{\beta_i}, \ x \in R_+^m, \ \beta_i > 0, i = \overline{0, m}.$$

Тоді еластичність виробництва для мультиплікативної функції

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} \beta_i Fx = \sum_{i=1}^{m} \beta_i,$$

а еластичність заміщення для такої функції

$$\sigma_{ij}(x) = -\frac{d\ln(x_i/x_j)}{d\ln((\beta_i/x_i)/(\beta_j/x_j))} =$$

$$= -\frac{d\ln(x_i/x_j)}{d(\ln(\beta_i/\beta_j) + \ln(x_j/x_i))} = 1.$$

Розглянемо задачу знаходження аналітичного вигляду виробничої функції зі сталою еластичністю $\sigma = const > 0$ для випадку двох факторів виробництва: праці L та капіталу K. Ця задача є оберненою до задач, які розглядалися вище, де задавали виробничі функції та знаходили їх характеристики.

Будемо вважати, що шукана функція є однорідною ступеня $\gamma \geq 1$: $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha^{\gamma} F(K, L)$. Тоді, покладаючи $\alpha = L^{-1}$, отримуємо

$$F(K, L) = L^{\gamma} F(\frac{K}{L}, 1) = L^{\gamma} f(k),$$

де $k = K/L$ — фондоозброєність праці.

Знайдемо граничні продукти:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma L^{\gamma - 1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \frac{K}{L^2} = = L^{\gamma - 1} (\gamma f(k) - f'(k) k);$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma - 1} f'(k).$$

Тоді

$$S_L = MRTS_{LK} = \frac{\partial F}{\partial L} \left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^{-1} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k. \qquad (2.16)$$

Таким чином, еластичність заміщення праці на капітал буде мати вигляд

$$\sigma_{LK} = - \frac{d\ln(L/K)}{d\ln MRTS_{LK}} = \frac{(dk/k)}{(dS_L/S_L)}.$$

Легко бачити, що

$$\sigma_{LK} = \sigma_{KL}.$$

Тоді отримуємо таке диференціальне рівняння:

$$\sigma = \frac{(dk/k)}{(dS_L/S_L)}.$$

Його розв’язок має вигляд

$$S_L = C_1 \; k^{1/\sigma}, \qquad (2.17)$$

де $0 < C_1$ — постійна інтегрування.

Порівнючи (2.17) із (2.16), отримуємо ще одне диференціальне рівняння:

$$C_1 \; k^{1/\sigma} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k. \qquad (2.18)$$

Перепишемо рівняння (2.18) у вигляді

$$\frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{C_1 \; k^{1/\sigma} + k}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо

$$\ln f = \gamma \int \frac{dk}{C_1 \; k^{1/\sigma} + k} = \frac{\gamma \; \sigma}{\sigma - 1} \int \frac{dk^{1 - 1/\sigma}}{C_1 + k^{1 - 1/\sigma}} =$$

$$= \frac{\gamma \; \sigma}{\sigma - 1} \ln C_2 \; (C_1 + k^{1 - 1/\sigma}).$$

Таким чином,

$$f(k) = C_2 \; (C_1 + k^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}})^{\frac{\gamma \; \sigma}{\sigma - 1}}, \qquad (2.19)$$

або, повертаючись до змінних K та L, із (2.19) отримуємо

$$q = F(K,L) = C_2 \left(C_1 L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\gamma\,\sigma}{\sigma-1}}.$$

Покладемо

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma},\ \delta = \frac{1}{1+C_1} < 1, A = C_2\,(1 + C_1)^{-\gamma/\sigma}.$$

Тоді остаточно отримаємо загальний вигляд виробничої CES-функції:

$$q = F(K,L) = \left((1-\delta)\,L^{-\rho} + \delta\,K^{-\rho}\right)^{\frac{-\gamma}{\rho}}.$$

2.2. Неокласична теорія поведінки однопродуктової фірми. Порівняльна статика фірми. Задачі максимізації випуску продукції та мінімізації видатків

Неокласична теорія поведінки діяльності однопродуктової фірми з виробничою функцією $F(x)$ включає короткострокове та довгострокове планування. Водночас будемо вважати, що фірма працює в умовах досконалої конкуренції як на ринку ресурсів, так і на ринку випущеної продукції, тобто задані екзогенно як ціни на ресурси $\omega_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, так і ціна одиниці продукції $p > 0$.

У цих умовах дохід фірми R і загальні витрати C задають виразами

$$R = p\ q = p\ F(x);\ C = \sum_{i=1}^{m} \omega_i\ x_i = x'\omega,$$

де $x \in R_+^m$ — ендогенний вектор попиту на ресурси.

Тоді неокласична модель поведінки діяльності однопродуктової фірми у довгостроковому періоді буде мати вигляд

$$\pi(x) = p\ F(x) - x'\omega \rightarrow \max;\ x \in R_+^m, \qquad (2.20)$$

де $\pi(x)$ — прибуток фірми за заданого вектора ресурсів x.

Відповідна неокласична модель у короткостроковому періоді буде мати вигляд

$$\pi(x) = p\ F(x) - x'\omega \rightarrow \max;$$

$$g_j(x) \leq 0,\ j = \overline{1,l},\ x \in R_+^m, \qquad (2.21)$$

тобто ця модель містить додаткові обмеження на кількість ресурсів.

Як приклад задачі прийняття фірмою виробничих рішень у короткостроковому періоді за наявності ресурсних обмежень розглянемо задачу максимізації доходу багатопродуктової фірми в умовах виробничої технології зі сталими пропорціями витрат факторів виробництва в разі змін його масштабів, тобто розглянемо задачу лінійного програмування:

$$y' \ c \ \rightarrow \ \max;$$

$$A \ y \ \leq \ b, \ x \ \in \ R_{+}^{m}, \qquad (2.22)$$

де y — ендогенний вектор продукції; c — вектор цін продукції; $A \ = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,m}}$ — технологічна матриця витрат ресурсів; b — вектор ресурсів.

Тепер розглянемо модель (2.20). Припустимо, що виробнича функція $F(x)$ задовольняє такі умови:

1) $F(x)$ має матрицю других похідних;

2) її граничний продукт невід'ємний:

$$MP_i(x) \ \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \ \geq \ 0, \ i \ = \ \overline{1,m};$$

3) матриця других похідних (матриця Гессе)

$$F''(x) \ = \ \{\frac{\partial^2 \ F(x)}{\partial x_i \ \partial x_j}\}_{i,j=1}^{m}$$

є від'ємно визначеною.

Тоді задача (2.20) є строго вгнутою, тобто має єдиний розв'язок (модель продуктивна), який характеризується необхідними і достатніми умовами оптимальності [5]:

$$p \ MP_i(x) \ - \ \omega_i \ \leq \ 0, \ x_i \ (p \ MP_i \ - \ \omega_i) \ = \ 0, x_i \ \geq \ 0, \ i \ = \ \overline{1,m}. \qquad (2.23)$$

Припустимо, що було використано всі фактори виробництва, тобто $x_i \ > \ 0$, $i \ = \ \overline{1,m}$. Тоді умови оптимальності (2.23) набудуть вигляду

$$p \ MP_i(x) \ = \ \omega_i, \ i \ = \ \overline{1,m}. \qquad (24\ 2.24)$$

Нехай $x^* \ = \ \xi(p,\omega)$ — розв'язок системи оптимальності (2.24), при цьому вектор $\xi(p,\omega)$ називають *функцією попиту на витрати*, а функцію $q^* \ = \ F(\xi(p,\omega)) \ = Q(p,\omega)$ — *функцією пропозиції випуску.*

Очевидно, що

$$\xi(\alpha\ p, \alpha\ \omega) = \xi(p, \omega)\ \forall\alpha > 0,$$

тобто функція попиту є однорідною функцією нулевого степеня і такою самою буде функція пропозиції випуску.

Насамкінець надамо геометричну ілюстрацію розв'язку неокласичної задачі фірми для випадку $m = 2$.

Геометрично виробничу функцію фірми $F(x_1, x_2)$ характеризують ізокванти, що є геометричними місцями витрат (x_1, x_2) зі сталим випуском продукції q. Для строго вгнутої виробничої функції ізокванти утворюють поле опуклих в області D кривих, які мають від'ємний нахил (кутовий коефіцієнт дотичної), різні ізокванти не перетинаються і через кожну точку (x_1, x_2) проходить лише одна ізокванта.

Геометрично функцію загальних витрат $C = C(x_1, x_2)$ характиризують *ізокости*, що є геометричними місцями витрат (x_1, x_2) зі сталими загальними витратами c: $IK = \{(x_1, x_2)\colon \omega_1\ x_1 + \omega_2 x_2 = c\}$. Ізокости є сім'єю паралельних ліній з нахилом:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{IK} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (2.25)$$

Нахил до ізокванти має вигляд

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{IQ} = -\frac{MP_1(x)}{MP_2(x)}. \qquad (2.26)$$

Враховуючи умови оптимальності (2.24), із (2.25)—(2.26) отримаємо

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{IQ} = -\frac{MP_1(x^*)}{MP_2(x^*)} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{IK},$$

тобто в точці x^* оптимального розв'язку задачі (2.24) ізокоста збігається з дотичною до відповідної ізокванти (рис. 2.2).

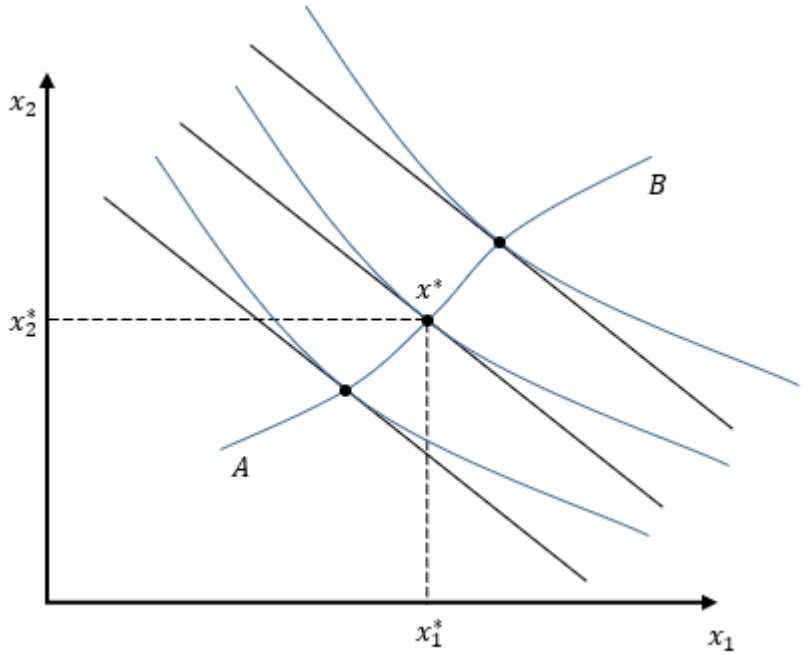

Рис. 2.2.

Геометричне місце всіх точок дотику ізоквант та ізокост є кривою у просторі витрат (на рис.2.2. це крива AB), яку називаються *довгостроковим шляхом розширення*. Вона відображає витрати, що максимізують випуск прдукції за певного рівня видатків, або витрати, що мінімізують видатки на виробництво за певного рівня випуску, де рівень видатків визначається ізокостою, а рівень випуску — ізоквантою.

Розглянемо проблему порівняльної статики фірми, тобто дослідимо чутливість оптимального попиту на витрати та пропозиції випуску щодо зміни цінових параметрів неокласичної задачі фірми. Для цього підставимо функцію попиту на витрати $x^* = \xi(p, \omega)$ в умови оптимимальності (2.24), які після цього перетворяться на тотожності

$$p \frac{\partial F(\xi(p,\omega))}{\partial x_i} = \omega_i, \ i = \overline{1, m}. \qquad (2.27)$$

До тотожностей (2.27) додамо ще тотожність, пов’язану з функцією пропозиції випуску, тобто

$$Q(p,\omega) \;=\; F(\xi(p,\omega)). \qquad (2.28)$$

Позначимо через $\partial\xi_k/\partial p$, $\partial Q/\partial p$, $k = \overline{1,m}$, функції чутливості для функції попиту на ресурси ξ та функції пропозиції випуску Q щодо зміни ціни p. Диференцюючи за p тотожності (2.27), отримуємо систему рівнянь відносно уведених функцій чутливості $\partial\xi/\partial p$:

$$\frac{\partial F(\xi(p,\omega))}{\partial x_i} + p \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\xi(p,\omega))}{\partial x_j\, \partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial p} = 0,\; i = \overline{1,m},$$

або в матричному вигляді

$$F'' \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{dF(\xi)}{dx}, \qquad (2.29)$$

де $\frac{dF(\xi)}{dx}$ — градієнт функції F у точці ξ.

Застосовуючи аналогічні операції до тотожності (2.28), отримаємо

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{dF(\xi)}{dx}\right)' \frac{\partial \xi}{\partial p}. \qquad (2.30)$$

Оскільки матриця F'' — від'ємно визначена, обернена матриця $(F'')^{-1}$ завжди існує і теж буде від'ємно визначеною, із (2.29)—(2.30) визначаємо шукані функції чутливості:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{1}{p} (F'')^{-1} \frac{dF(\xi)}{dx}; \qquad (2.31)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{1}{p} \left(\frac{dF(\xi)}{dx}\right)' (F'')^{-1} \frac{dF(\xi)}{dx}. \qquad (2.32)$$

Позначимо через $\partial\xi_k/\partial\omega_j$, $\partial Q/\partial\omega_j$, $k,j = \overline{1,m}$, функції чутливості для функції попиту на ресурси ξ та функції пропозиції випуску Q щодо зміни ціни ω_j. Диференцюючи за ω_j тотожності (2.27), отримуємо систему рівнянь відносно уведених функцій чутливості $\partial\xi/\partial\omega$:

$$p \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\xi(p,\omega))}{\partial x_k\, \partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial \omega_j} = \delta_{ij},\; i,j = \overline{1,m},$$

або в матричному вигляді

$$p\ F''\ \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = E_m. \qquad (2.33)$$

Застосовуючи аналогічні операції до тотожності (2.28), отримуємо

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{\partial \xi}{\partial \omega}\ \frac{dF(\xi)}{dx}. \qquad (2.34)$$

Із (2.33)—(2.34) визначаємо шукані функції чутливості:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{1}{p}\ (F'')^{-1}, \qquad (2.35)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{1}{p}\ (F'')^{-1}\ \frac{dF(\xi)}{dx}. \qquad (2.36)$$

Рівняння (2.29)—(2.30) та (2.33)—(2.34) називають *основними рівняннями теорії фірми.*

Проведемо аналіз розв'язків рівнянь (2.31)—(2.32) та (2.35)—(2.36), щоб встановити властивості поведінки функцій попиту на витрати та пропозиції випуску залежно від цінових змін та класифікацію виробничих витрат.

Із (2.32) випливає, що

$$\frac{\partial Q}{\partial p} > 0, \qquad (2.37)$$

тобто *зростання цін на продукцію завжди зумовлює збільшення оптимального рівня її випуску: крива пропозиції випуску продукції буде зростати.*

Між тим згідно з (2.30)

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{dF(\xi)}{dx}\right)'\ \frac{\partial \xi}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m}\ \left(\frac{\partial F(\xi)}{\partial x_i}\right)\ \frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0.$$

Оскільки $\frac{\partial F(\xi)}{\partial x_i} \geq 0,\ i = \overline{1, m},$ із наведеної нерівності випливає таке: не можуть усі похідні $\frac{\partial \xi_i}{\partial p}$ бути від'ємними, тобто хоч б для одного індекса i_0 повинна виконуватись нерівність

$$\frac{\partial \xi_{i_0}}{\partial p} > 0. \qquad (2.38)$$

Таким чином, *збільшення ціни на продукцію зумовлює зростання її*

пропозиції, а отже, підвищення попиту на деякі види витрат.

Витрати i-го виду називають *малоцінними*, якщо

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p} < 0,$$

тобто коли їх споживання з підвищенням ціни на продукцію спадає. Із (2.38) випливає, що *не всі фактори виробництва одночасно можуть бути малоцінними.*

Порівнюючи формули (2.31) та (2.36), отримуємо рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = -\frac{\partial \xi}{\partial p}. \qquad (2.39)$$

Використовуючи рівність (2.39) та нерівність (2.37), отримуємо

$$0 < \frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F(\xi)}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \xi_i}{\partial p} = -\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F(\xi)}{\partial x_i}\right) \frac{\partial Q}{\partial \omega_i}.$$

Оскільки $\frac{\partial F(\xi)}{\partial x_i} \geq 0,\ i = \overline{1,m},$ із наведеної нерівності випливає таке: не можуть усі похідні $\frac{\partial Q}{\partial \omega_i}$ бути додатними, тобто хоч би для одного індекса i_0 повинна виконуватись нерівність

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_{i_0}} < 0. \qquad (2.40)$$

Таким чином, *збільшення плати на деякий вид факторів приводить до зменшення випуску продукції.*

Із формули (2.35) випливає, що матриця $\frac{\partial \xi}{\partial \omega}$ — симетрична і від'ємно визначена. Тоді

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \omega_i} < 0, \qquad (2.41)$$

тобто *підвищення плати за витрати фактора деякого виду завжди призводить до зменшення попиту на ці витрати.*

Фактори *i*-го та *j*-го видів будемо називати *взаємозамінними* (*взаємодоповнювальними*), якщо

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \omega_j} > 0 \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \omega_j} < 0\right). \qquad (2.42)$$

Розглянемо дві моделі раціональні поведінки однопродуктової фірми, які в певному сенсі будуть двоїстими до моделі (2.20).

1. Задача максимізації випуску продукції фірмою в довгостроковому періоді із заданим обсягом виробничих видатків c і технологією, що описується виробничою функцією $F(x)$, $x \in D \subseteq R_+^m$, має вигляд

$$F(x) \to \max,\ x'\ \omega \le c,\ x \ge 0. \qquad (2.43)$$

Задача (2.43) з точністю до позначень збігається з неокласичною задачею споживчого вибору, тому необхідні й достатні умови оптимальності для оптимального вектора витрат $\bar{x}^* > 0$ будуть мати вигляд

$$MP_j(\hat{\bar{x}}^*) = \bar{\lambda}^*\ \omega_j,\ j = \overline{1,m};$$

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k\ \bar{x}_k^* = c,\ \bar{x}_k^* > 0, k = \overline{1,m}, \qquad (2.44)$$

де $\bar{\lambda}^*$ — множник Лагранжа відповідної функції Лагранжа $L(x,\lambda) = F(x) + \lambda\ (c - x'\ \omega)$.

Геометрично для двох факторів умови (2.44) означають, що вектор оптимального використання ресурсів $\bar{x}^*$ є точкою дотику ізокости $(\bar{x}^*)'\ \omega = c$ до ізокванти.

Встановимо зв'язок між розв'язками задачі (2.20) — x^* та задачі (2.43) — $\bar{x}^*$ відповідно.

Теорема 2.1. *Якщо x^* — єдиний розв'язок задачі (2.20), то задача (2.43) в разі виконанні умови $c = (x^*)'\ \omega$ також має єдиний розв'язок $\bar{x}^*$ та $\bar{x}^* = x^*$.*

Доведення.

Справді, з одного боку,

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = \frac{1}{p}\ \omega,\ (x^*)'\ \omega = c,\ \pi(x^*) \ge \pi(\bar{x}^*),$$

а з другого боку,

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = \bar{\lambda}^* \omega, \ (\bar{x}^*)' \omega = c, \ F(\bar{x}^*) \geq F(x^*).$$

Оскільки $\pi(x^*) = p\ F(x^*) - (x^*)'\ \omega \geq p\ F(\bar{x}^*) - (\bar{x}^*)'\ \omega = \pi(\bar{x}^*)$ і рівність $(x^*)'\ \omega = (\bar{x}^*)'\ \omega = c$, будемо мати $F(x^*) \geq F(\bar{x}^*)$. Однак $F(x^*) \leq F(\bar{x}^*)$, і тоді $F(x^*) = F(\bar{x}^*)$. Звідси, зважаючи на строгу вгнутість виробничої функції, $\bar{x}^* = x^*$.•

2. Розглянемо двоїсту до попередньої задачі максимізації випуску продукції задачу оптимальної поведінки фірми, яка полягає у мінімізації видатків за заданого рівня пропозиції q фірми, тобто

$$C(x) = x'\ \omega \to \min, \ F(x) = q, \ x \geq 0. \qquad (2.45)$$

Задача (2.45) з точністю до позначень збігається з двоїстою задачею до неокласичної задачі споживчого вибору (див. підрозд. 1.3, теорему 1.10). Тому необхідні й достатні умови оптимальності для оптимального вектора витрат $x_* > 0$ будуть мати вигляд

$$\lambda_*\ MP_j(x_*) = \omega_j, \ j = \overline{1,m},$$

$$F(x_*) = q, \qquad (2.46)$$

де λ_* — множник Лагранжа відповідної функції Лагранжа $L(x,\lambda) = x'\ \omega + \lambda\ (q - F(x))$.

Встановимо зв'язок між розв'язками задачі (2.43) $\bar{x}^*$ та задачі (2.45) x_* відповідно. Нехай $\bar{q}^* = F(\bar{x}^*)$ та $C(q) = (x_*)'\ \omega$. Тоді за $c = C(q)$ в задачі (2.43) будемо мати $\bar{q}^* = q$. Якщо ж $q = \bar{q}^*$ у задачі (2.45), то $c = C(q)$.

Розглянемо деякі приклади щодо оптимальної поведінки однопродуктивної фірми в довгостроковому періоді.

Приклад 2.3. Нехай фірма з виробничою мультиплікативною функцією $F(K,L) = A\ K^a\ L^b, a,\ b > 0$, орієнтована у своїй діяльності на отримання максимального прибутку за фіксованих цін на продукцію $p > 0$ та ресурси

$\omega_i > 0,\ i = \overline{1,2}$. Знайти функції попиту фірми на капітал і працю.

Сформульована задача є задачею на максимізацію прибутку (2.20) за $m = 2$. Умови оптимальності (2.24) для неї будуть мати вигляд

$$p\ a\ \frac{F(K^*,L^*)}{K^*} - \omega_1 = 0;\ p\ b\ \frac{F(K^*,L^*)}{L^*} - \omega_2 = 0.$$

Звідси знаходимо, що

$$K^* = p\ a\ \frac{F(K^*,L^*)}{\omega_1};\ L^* = p\ b\ \frac{F(K^*,L^*)}{\omega_2}. \qquad (2.46)$$

Якщо $a + b \neq 1$, то нелінійну систему (2.47) можна розв'язати аналітично. Справді, нехай $F^* = F(K^*, L^*)$. Тоді

$$F^* = A\ (K^*)^a\ (L^*)^b = A\ (p\ a\ \frac{F(K^*,L^*)}{\omega_1})^a (p\ b\ \frac{F(K^*,L^*)}{\omega_2})^b =$$

$$= A\ (\frac{p\ a}{\omega_1})^a\ (\frac{p\ b}{\omega_2})^b\ (F^*)^{a+b}.$$

Із цього рівняння знаходимо

$$F^* = A^{\frac{1}{1-a-b}}\ (\frac{p\ a}{\omega_1})^{\frac{a}{1-a-b}} (\frac{p\ b}{\omega_2})^{\frac{b}{1-a-b}}.$$

Звідси і (2.47) отрмуємо шукані функції попиту на капітал та працю:

$$K^* = A^{\frac{1}{1-a-b}}\ (\frac{p\ a}{\omega_1})^{\frac{a}{1-a-b}+1} (\frac{p\ b}{\omega_2})^{\frac{b}{1-a-b}};$$

$$L^* = A^{\frac{1}{1-a-b}}\ (\frac{p\ a}{\omega_1})^{\frac{a}{1-a-b}} (\frac{p\ b}{\omega_2})^{\frac{b}{1-a-b}+1}.$$

Якщо $a + b = 1$, тобто коли виробнича функція є функцією Кобби—Дугласа, то для неї не існує F^* і задача максимізації прибутку фірми не буде мати розв'язку.

Приклад 2.4. Для виробничої функції попереднього прикладу розглянемо задачу максимізації випуску подукції за заданого рівня витрат c.

Функція Лагранжа в цьому випадку має вигляд

$$L(K, L, \lambda) = A\ K^a\ L^b + \lambda\ (c - K\ \omega_1 - L\ \omega_2).$$

Умови оптимальності тоді запишемо у вигляді

$$A\ a\ K^{a-1}\ L^b - \lambda\ \omega_1 = 0,\ A\ b\ K^a\ L^{b-1} - \lambda\ \omega_2 = 0;$$

$$K\ \omega_1 + L\ \omega_2 = c.$$

Із перших двох рівнянь випливає, що

$$L = \frac{b\ \omega_1}{a\ \omega_2}\ K.$$

Тоді із третього рівняння умов оптимальності та наведеного вище рівняння знаходимо

$$K^* = \frac{c}{\omega_1}\ \frac{a}{a+b},\ L^* = \frac{c}{\omega_2}\ \frac{b}{a+b}.$$

Функція пропозиції випуску буде мати вигляд

$$F^* = A\ (\frac{c}{\omega_1}\ \frac{a}{a+b})^a\ (\frac{c}{\omega_2}\ \frac{b}{a+b})^b.$$

Із наведеного розв'язку випливає, що в цьому прикладі через умову $a + b = 1$ не виникає ніяких особливостей.

Приклад 2.5. Розглянемо задачу мінімізації видатків фірми за заданого рівня q випуску продукції, коли технологію виробництва описують CES-функцією,

$$F(K, L) = (K^\rho + L^\rho)^{1/\rho},\ \rho \geq -1.$$

Сформульована задача має вигляд

$$\omega_1\ K + \omega_2\ L \to \min,\ K^\rho + L^\rho = q^\rho,\ K, L \geq 0.$$

Складемо для цієї задачі функцію Лагранжа:

$$L(K, L, \lambda) = \omega_1\ K + \omega_2 + \lambda\ (q^\rho - K^\rho - L^\rho),$$

(вставити працю L)

і запишемо умови оптимальності:

$$\omega_1 - \rho\ \lambda\ K^{\rho-1} = 0,\ \omega_2 - \rho\ \lambda\ L^{\rho-1} = 0, K^\rho + L^\rho = q^\rho.$$

(після коми вставити пробіл)

Із перших двох рівнянь умов оптимальності знаходимо

$$K = (\frac{\omega_1}{\rho\ \lambda})^{\frac{1}{\rho-1}},\ L = (\frac{\omega_2}{\rho\ \lambda})^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Тоді із третього рівняння умов оптимальності визначаємо величину

$$(\frac{1}{\rho\ \lambda})^{\frac{1}{\rho-1}} = (\omega_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \omega_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{-1/\rho}\ q.$$

Остаточний попит на ресурси та функція видатків будуть мати вигляд

$$K_* = \omega_1^{\frac{1}{\rho-1}}\ (\omega_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \omega_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{-1/\rho}\ q,$$

$$L_* = \omega_2^{\frac{1}{\rho-1}}\ (\omega_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \omega_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{-1/\rho}\ q,$$

$$C_* = q\ (\omega_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \omega_2^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{(\rho-1)/\rho}.$$

Як і у випадку прикл. 2.3, тут є два критичні випадки значень параметра ρ:

1) $\rho = 0$, тоді задача змісту не має: не виконується обмеження $K^\rho + L^\rho = q^\rho$;

2) $\rho = 1$, тоді маємо лінійну задачу

$$C = K\ (\omega_1 - \omega_2) + q\ \omega_2 \rightarrow \min, L = q - K \geq 0.$$

Якщо $\omega_1 > \omega_2$, то $K_* = 0$, $L_* = q$, $C_* = q\ \omega_2$ (рис. 2.3).

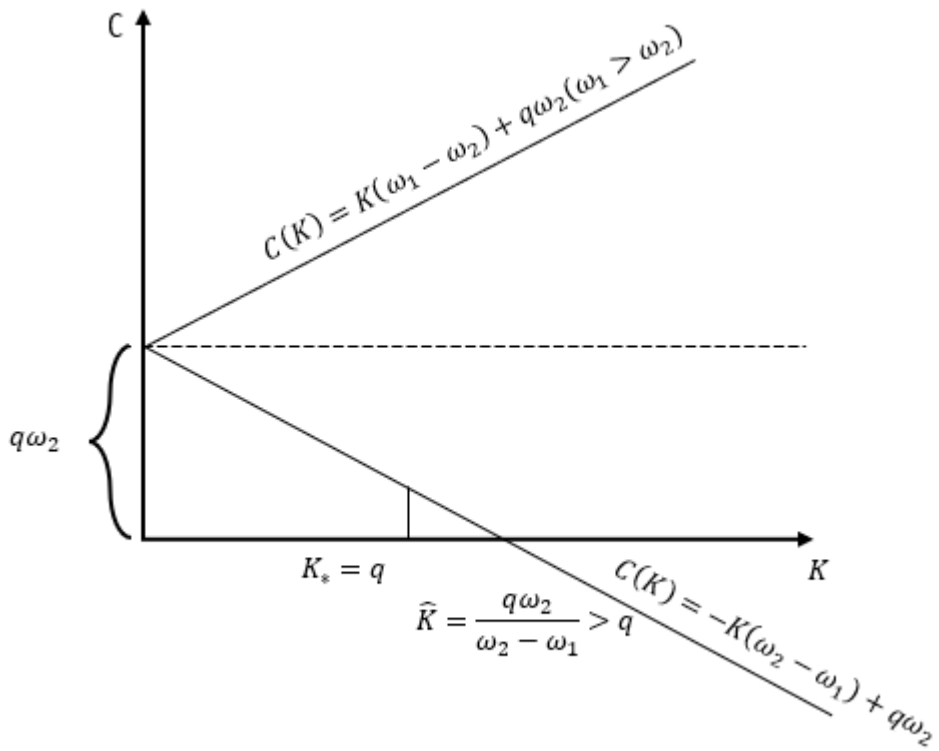

Рис. 2.3.

Якщо $\omega_2 > \omega_1$, то $K_* = q$, $L_* = 0$, $C_* = q\ \omega_1$ завдяки тому, що $\widehat{K} = \frac{q\ \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} > q, C(\widehat{K}) = 0$.

Якщо $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, то $C_* = q\omega$, а K_*, L_* задовольняють рівняння $K_* + L_* = q$.

2.3. Фірма в умовах монополії та монопсонії. Олігополія та олігопсонія. Моделі поведінки багатопродуктової фірми

У попередніх підрозділах цього розділу виконувалось припущення про *досконалу конкуренцію* на товарному та ресурсному ринках, тобто фірма розробляє лінію своєї поведінки, виходячи із заданих цін на продукцію та факторів виробництва, і не намагається своїми діями впливати на них. На практиці це припущення здебільшого не справджується і виникає ситуація, яку називають *недосконалою конкуренцією.* Фірма має деяку *монопольну владу*, якщо вона здатна впливати на ціну продукції, а монопсонія дає владу впливати на фактори виробництва.

Фірма-монополіст може впливати на ціну продукції, змінюючи обсяги випуску своєї продукції, тобто $p = p(q)$. Ця функція характеризує ціну, яку фірма може призначити за різних умов пропозиції продукції. У цьому питанні фірма-монополіст може дотримуватись різних політик. Виділимо із них дві крайні:

a) збільшення виробництва та пропозиції випуску продукції та зменшення ціни на неї;

b) зменшення виробництва та пропозиції випуску продукції та збільшення ціни на неї.

Для обох випадків виконується умова

$$\frac{dp(q)}{dq} < 0. \qquad (2.48)$$

Валовий дохід фірми-монополіста R є функцією випуску і має вигляд $R(q) = p(q)\ q$, а граничний дохід $MR(q)$ характеризує зміну валового доходу від зміни випуску продукції і має вигляд

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}\ q. \qquad (2.49)$$

Враховуючи (2.48), із (2.49), отримаємо такий висновок: *у випадку монополії граничний дохід буде меншим за ціну*, тобто $MR(q) < p(q)$.

Монополіста на ринку ресурсів (факторів виробництва) називають *монопсоністом.* Він здійснює закупівлю факторів виробництва у великих обсягах і при цьому може впливати на їх ціну, тобто $\omega_j = \omega_j(x_j),\ j = \overline{1,m}$. Ця функція характеризує ціну, яку фірма-монопсоніст може запропонувати продавцеві за різні обсяги факторів вирбництва. У цьому питанні фірма-монопсоніст може дотримуватись різних політик. Виділимо із них дві крайні:

$a)$ збільшення обсягів закупівлі факторів виробництв зі збільшенням ціни на них;

$b)$ зменшення обсягів закупівлі факторів виробництв зі зменшенням ціни на них.

Для обох цих випадків виконується умова

$$\frac{d\omega_j(x_j)}{dx_j} > 0,\ j = \overline{1,m}. \qquad (2.50)$$

Вартість витрат j-го виду має вигляд $C_j(x_j) = \omega_j(x_j)\ x_j$, а гранична вартість витрат j-го виду $MC_j(x_j)$ характеризує зміни цих витрат і має вигляд

$$MC_j(x_j) = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j} = \omega_j(x_j) + \frac{d\omega_j(x_j)}{dx_j}\ x_j. \qquad (2.51)$$

Враховуючи (2.50), із (2.51) отримаємо такий висновок: *у випадку монопсонії гранична вартість витрат перевищує їх оплату*, тобто $MC_j(x_j) > \omega_j(x_j)$.

Враховуючи наведений вище аналіз діяльності фірми-монопоніста, можемо сформулювати таку модель її поведінки у довгостроковому періоді:

$$\pi(q,x) = p(q)\,q - \sum_{j=1}^{m} \omega_j\left(x_j\right) x_j \to \max;$$

$$q = F(x_1,\ldots,x_m),\ x \in R_+^m, \qquad (2.52)$$

тобто це задача максимізації прибутку фірми, коли вона одночасно є монополістом як на товарному ринку, так і на ринку факторів виробництва.

Тепер наведемо альтернативні (двоїсті) моделі поведінки цієї фірми. Перша із

них буде полягати у максимізації валового доходу за обмежень на видатки, тобто

$$p(q)\,q \;\rightarrow\; \max,\; q \;=\; F(x_1,\ldots,x_m);$$

$$\sum_{j=1}^{m} \;\omega_j(x_j)\;x_j \;\leq\; c,\; x \;\in\; R_+^m. \qquad (2.53)$$

Друга модель буде полягати у мінімізації видатків за заданого рівня валового доходу $\hat{R}$, тобто

$$\sum_{j=1}^{m} \;\omega_j\left(x_j\right)x_j \;\rightarrow\; \min;$$

$$p(q)\;q \;=\; \hat{R},\; q \;=\; F(x_1,\ldots,x_m),\; x \;\in\; R_+^m. \qquad (2.54)$$

Повернімось до аналізу базової моделі (2.52). Для цього випишемо функцію Лагранжа;

$$L(q,x,\lambda) \;=\; p(q)\;q \;-\; \sum_{j=1}^{m} \;\omega_j(x_j)\;x_j \;+\lambda\;(F(x) \;-\; q),$$

де λ — множник Лагранжа.

Тоді необхідні умови оптимальності для цієї задачі у вигляді рівнянь (припускаюч, що $q,\; x \;>\; 0$) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial q} \;=\; MR(q) \;-\; \lambda \;=\; 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \;=\; -\;MC_i(x_i) \;+\; \lambda\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \;=\; 0,\; i \;=\; \overline{1,m};$$

$$q \;=\; F(x). \qquad (2.55)$$

Із перших двох рівнянь системи (2.55) отримаємо систему рівнянь

$$MR(q)\;MP_i(x) \;=\; MC_i(x_i),\; i \;=\; \overline{1,m}.$$

Помножимо кожне із рівнянь цієї системи на dx_i і складемо отримані співвідношення. Тоді умови оптимальності (2.55) набудуть такої форми:

$$MR(q) \;=\; \frac{dC}{dF} \;=\; MC(q),\; q \;=\; F(x), \qquad (2.56)$$

де $C = \sum_{j=1}^{m} C_j(x_j)$ — сумарні витрати на фактори виробництва, тобто *граничний дохід збігається із граничними витратами.*

Приклад 2.6. Нехай фірма-монополіст на товарному та ресурсному ринках з виробничою мультиплікативною функцією $q = F(K,L) = A\ K^a\ L^b,\ a,\ b > 0,$ орієнтована на отримання мінімальних збитків за фіксованого рівня доходів $\hat{R}$, якщо ціни на продукцію та ресурси мають вигляд $p(q) = q^{-2},\ \omega_1(K) = K,$ $\omega_1(L) = L.$ Знайти функції попиту фірми на капітал та працю.

Сформульована задача є задачею (2.54). Для неї виконані умови (2.48) та (2.50) щодо поведінки цін. Отже, маємо таку модель поведінки фірми:

$$K^2 + L^2 \to \min,\ F(K,L) = (\hat{R})^{-1}. \qquad (2.57)$$

Функція Лагранжа для задачі (2.57) буде мати вигляд

$$L(K,L,\lambda) = K^2 + L^2 + \lambda\ ((\hat{R})^{-1} - F(K,L)).$$

Тоді умови оптимальності для цієї задачі запишемо таким чином:

$$2\ K^2 - a\ \frac{\lambda}{\hat{R}} = 0{,}2\ L^2 - b\ \frac{\lambda}{\hat{R}} = 0. \qquad (2.58)$$

(вставити пробіл між формулами)

Із (2.58) визначаємо

$$K = (\frac{a}{2\ \hat{R}})^{\frac{1}{2}}\ \lambda^{\frac{1}{2}},\ L = (\frac{b}{2\ \hat{R}})^{\frac{1}{2}}\ \lambda^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.59)$$

У формулах (2.59) невідомою є величина $\lambda^{\frac{1}{2}}$. Знайдемо її з умови $F(K,L) = (\hat{R})^{-1}$:

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = (\frac{2\ (2\hat{R})^{\frac{a-b}{2}}}{A\ a^{\frac{a}{2}}\ b^{\frac{b}{2}}})^{\frac{1}{a+b}}.$$

Тоді згідно із (2.59) отримаємо

$$K_* = (\frac{a}{2\hat{R}})^{\frac{1}{2}}\ (\frac{2\ (2\hat{R})^{\frac{a-b}{2}}}{Aa^{\frac{a}{2}}\ b^{\frac{b}{2}}})^{\frac{1}{a+b}}, L_* = (\frac{b}{2\hat{R}})^{\frac{1}{2}}\ (\frac{2\ (2\hat{R})^{\frac{a-b}{2}}}{Aa^{\frac{a}{2}}\ b^{\frac{b}{2}}})^{\frac{1}{a+b}}. \qquad (2.60)$$

При цьому мінімальні видатки мають вигляд

$$L_* \;=\; \frac{a\;+\;b}{2\hat{R}}\;\left(\frac{2\;(2\hat{R})^{\frac{a-b}{2}}}{Aa^{\frac{a}{2}}\;b^{\frac{b}{2}}}\right)^{\frac{2}{a+b}} \;=\; \frac{a\;+\;b}{2\hat{R}}\left(\frac{4\;(2\hat{R})^{a-b}}{A^2a^a\;b^b}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

$$=\;(a\;+\;b)\;2^{\frac{2}{a+b}}\;(2\hat{R})^{-\frac{2b}{a+d}}A^{-\frac{2}{a+d}}\;a^{-\frac{a}{a+d}}\;b^{-\frac{b}{a+d}}. \qquad (2.61)$$

Знайдемо ціни на продукцію та на ресурси, за яких досягається мінімальне значення видатків (2.61)

$$p_* \;=\; \hat{R}^2;\;\; \omega_{1*} \;=\; K_*;\;\; \omega_{2*} \;=\; L_*. \qquad (2.62)$$

Розглянемо цю ж задачу, але з фіксованими цінами на продукцію та на фактори виробництва:

$$\omega_1\;K\;+\;\omega_2\;L\;\rightarrow\;\min,\;p\;F(K,L)\;=\;\hat{R}. \qquad (2.63)$$

Розв’язок задачі (2.63) має вигляд

$$\hat{K}_* \;=\; \frac{a}{\omega_1}\;\left(\frac{\hat{R}\;\omega_1^a\;\omega_2^b}{A\;p\;a^ab^b}\right)^{\frac{1}{a+b}},\;\hat{L}_* \;=\; \frac{b}{\omega_2}\;\left(\frac{\hat{R}\;\omega_1^a\omega_2^b}{A\;p\;a^ab^b}\right)^{\frac{1}{a+b}},$$

а вираз мінімальних видатків запишемо таким чином:

$$L_* \;=\; (a\;+\;b)\;\left(\frac{\hat{R}\;\omega_1^a\;\omega_2^b}{A\;p\;a^ab^b}\right)^{\frac{1}{a+b}}. \qquad (2.64)$$

Знайдемо значення видатків у задачі (2.63) за оптимальних цін на продукцію та фактори виробництва (2.62) у задачі (2.57):

$$L(p_*,\omega_{1*},\omega_{2*}) \;=\; (a\;+\;b)\;\left(\frac{\hat{R}\;\omega_1^a\omega_2^b}{A\;p\;a^ab^b}\right)^{\frac{1}{a+b}} \;=\; (a\;+\;b)\;\left(\frac{1}{A\;\hat{R}\;a^a\;b^b}\right)^{\frac{1}{a+b}}\;\times$$

$$\times\;\left(\frac{a}{2\hat{R}}\right)^{\frac{a}{2(a+b)}}\;\left(\frac{2\;(2\hat{R})^{\frac{a-b}{2}}}{Aa^{\frac{a}{2}}\;b^{\frac{b}{2}}}\right)^{\frac{1}{a+b}}\;\left(\frac{b}{2\hat{R}}\right)^{\frac{b}{2(a+b)}} \;=(a\;+\;b)\;2^{\frac{2}{a+b}}\;(2\hat{R})^{-\frac{b+1}{a+b}}\;\times$$

$$\times A^{-\frac{2}{a+b}}\;a^{-\frac{a}{a+b}}\;b^{-\frac{b}{a+b}}. \qquad (2.65)$$

Використовуючи формули (2.61) і (2.65), одержимо співвідношення

$$\frac{L_*}{L(p_*,\omega_{1*},\omega_{2*})} \;=\; (2\hat{R})^{\frac{1}{a+b}},$$

із якого випливає:

1) якщо $\hat{R} < 0{,}5$, то $L_* < L(p_*, \omega_{1*}, \omega_{2*})$;

2) якщо $\hat{R} > 0{,}5$, то $L_* > L(p, \omega_{1*}, \omega_{2*})$;

3) якщо $\hat{R} = 0{,}5$, то $L_* = L(p_*, \omega_{1*}, \omega_{2*})$.

Важливим випадком недосконалої конкуренції є *конкуренція серед небагатьох.* Це такі ринкова ситуація та механізм, коли діє невелика кількість фірм і вони впливають на ціноутворення на продукцію і фактори виробництва. Таким чином, прибуток кожної фірми залежить від політики решти конкуруючих фірм. Тому, щоб визначити оптимальну політику, спрямовану на максимізацію прибутку, кожна фірма повинна враховувати не лише власний безпосередній вплив на ринки товарів і фактори виробництва, але й побічний — через взаємодію своїх кокурентів.

Таку ринкову структуру, коли на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють весь ринок і кілька з них займають значну його частину, називають *олігополією.* Подібну ситуацію на ринку ресурсів, коли попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, а на окремі з них припадають значні частини попиту, називають *олігопсонією.*

Для побудови математичних моделей подібної недосконалої конкуренції застосовують різний математичний апарат, зокрема теорію ігор. Далі будемо розглядати варіант олігополії з двома конкурентами, тобто *дуополію.*

Нехай дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, які відображаться їхніми виробничими функціями,

$$q_j = F_j\left(x_1^j, \ldots, x_m^j\right); \; j = \overline{1,2}, \qquad (2.66)$$

де q_j — випуск продукції j-ю фірмою, $x^j = \{x_i^j\}_{i=1}^m$ — її витрати.

Тоді ціну на продукцію визначають обома рівнями випуску, тобто $p = p(q_1, q_2)$, при цьому будемо припускати, що

$$\frac{\partial p}{\partial q_i} < 0, \ i = \overline{1,2}. \qquad (2.67)$$

Ціна будь-якого виду витрат залежить від їх закупівлі обома фірмами, тобто $\omega_i = \omega_i\left(x_i^1, x_i^2\right)$, при цьому будемо припускати, що

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^j} > 0, \ j = \overline{1,2}. \qquad (2.68)$$

Кожна фірма намагається діяти таким чином, щоб, зміюючи *стратегію*, $q_i, x_1^i, \ldots, x_m^i, \ i = \overline{1,2}$, досягти найбільшого значення свого прибутку:

$$\pi_j = p(q_1, q_2) \ q_j - \sum_{i=1}^m \ \omega_i(x_i^1, x_i^2) \ x_i^j, q_j = F_1(x_1^j, \ldots, x_m^j), \ j = \overline{1,2}. \qquad (2.69)$$

Задача (2.69) є задачею векторної оптимізації в умовах конфлікту і для її розв'язання потрібно використати відповідний апарат теорії ігор. Це ми зробимо згодом, а поки для цієї задачі застосуємо міркування, характерні для однокритеріальної оптимізації.

Будемо вважати першу фірму оперуючою стороною, а дії другої фірми — неконтрольованими факторами для оперуючої сторони. Критерієм ефективності першої фірми є її прибуток π_1. Тоді завдання першої фірми полягає у визначенні стратегії $q_1, x_1^1, \ldots, x_m^1$, яка максимізує її прибуток:

$$\pi_1 = p(q_1, q_2) \ q_1 - \sum_{i=1}^m \ \omega_i(x_i^1, x_i^2) \ x_i^1, q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \qquad (2.70)$$

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд

$$L = \pi_1 + \lambda \ (F_1(x^1) - q_1),$$

де λ — множник Лагранжа.

Тоді умови оптимальності для випадку $q_1 > 0, \ x_i^1 > 0, \ i = \overline{1,m}$, будуть мати вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q_1 \ \frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_2} \ \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^1} = -\omega_i - x_i^1 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} - x_i^1 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0,\ i = \overline{1,m};$$

$$q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \qquad (2.71)$$

Виключаючи із (2.71) множник Лагранжа, отримаємо таку систему оптимальності:

$$(p(q_1, q_2) + q_1 (\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1})) \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = \omega_i + x_i^1 (\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i^1} \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}),\ i = \overline{1,m},$$

$$q_1 = F_1(x_1^1, \ldots, x_m^1). \qquad (2.72)$$

Умови оптимальності (2.72) будуть змістовними, якщо відома стратегія $q_2, x_1^2, \ldots, x_m^2$ другої фірми на товарному та ресурсному ринках. Крім того, потрібно знати величини

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \omega_i^2}{\partial \omega_i^1}, i = \overline{1,m}, \qquad (2.73)$$

які називають *гаданими варіаціями* і характеризують конкурента та його реакцію на обрану політику першої фірми. Наступний аналіз залежить від різних припущень щодо поведінки виразів (2.73), тому спростимо вихідну задачу, поклавши: $p = a - b\ (q_1 + q_2),\ a, b > 0$ — ціна одиниці продукції; $C_i = c\ q_i + d,\ c,\ d > 0$ — витрати i-ї фірми на випуск продукції. Тоді прибутки фірм задають виразами

$$\pi_i = (a - b\ (q_1 + q_2))\ q_i - c\ q_i - d,\ i = \overline{1,2} \qquad (2.74)$$

за додаткової умови

$$q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b}, \qquad (2.75)$$

яка породжена невід'ємністю ціни на товари.

Кожна з фірм намагається максимізувати прибуток, змінюючи свої обсяги.

Тоді умови оптимальності першого порядку для них будуть мати вигляд

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - b\,(q_1 + q_2) - b\,q_1\left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - c = 0;$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - b\,(q_1 + q_2) - b\,q_2\,(1 + \frac{\partial q_1}{\partial q_2}) - c = 0. \quad (2.76)$$

Дуополія Курно спирається на припущення

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0, \quad (2.77)$$

тобто кожний із дуополістів вважає, що зміни у випуску його продукції не впливають на конкурента. Тоді *рівновага Курно* — це пара (q_1, q_2) випусків, яка задовольняє умови

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\Big|_{\frac{\partial q_2}{\partial q_1}} = 0, \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\Big|_{\frac{\partial q_1}{\partial q_2}} = 0, \quad (2.78)$$

або

$$2\,b\,q_1 + b\,q_2 = a - c;$$

$$b\,q_1 + 2\,b\,q_2 = a - c. \quad (2.79)$$

Розв’язок системи (2.79) взначається формулами

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b},\ a > c, \quad (2.80)$$

для яких виконується умова (2.75), при цьому

$$\pi_1 = \pi_2 = (a - 2\,b\,\frac{a - c}{3b})\,\frac{a - c}{3b} - c\,\frac{a - c}{3b} - d =$$

$$= \frac{(a - c)^2}{9b} - d. \quad (2.81)$$

Під час більш складного аналізу припускаються ненульові гадані варіації. *Дуополія Стекельберга* спирається на таке припущення — одна або дві фірми вважають, що конкурент поводитиме себе як дуополіст Курно. Нехай перша фірма вважає, що друга фірма реагуватиме на її дії згідно з функцією Курно. Для цього із

другого рівняння системи (2.79) знаходимо

$$q_2 = \frac{a - c - b\ q_1}{2\ b}. \qquad (2.82)$$

Тоді гадана варіація $\partial q_2/\partial q_1 = -1/2$, і при цьому система оптимальності (2.76) набуде вигляду

$$3\ b\ q_1 + 2\ b\ q_2 = 2\ (a - c);$$

$$b\ q_1 + 2\ b\ q_2 = a - c. \qquad (2.83)$$

Розв'язок системи (2.83) визначається формулами

$$q_1 = \frac{a - c}{2b};\ q_2 = \frac{a - c}{4b}, \qquad (2.84)$$

для яких виконується умова (2.75).

Отже, результат для обох фірм буде залежати від поведінки другої фірми. Якщо вона обирає реакцію Курно, як вважає перша фірма, то рішенням є *рівновага Стекельберга*, яка задається парою випусків (2.84), при цьому

$$\pi_1 = \left(a - 3\ b\ \frac{a - c}{4b}\right) \frac{a - c}{2b} - c\ \frac{a - c}{2b} - d = \frac{(a - c)^2}{8b} - d;$$

$$\pi_2 = (a - 3\ b\ \frac{a - c}{4b})\ \frac{a - c}{4b} - c\ \frac{a - c}{4b} - d =$$

$$= \frac{(a - c)^2}{16b} - d,\ \pi_1 - 2\ \pi_2 = d, \qquad (2.85)$$

тобто прибуток першої фірми більше ніж удвічі перевищує прибуток другої фірми.

Проте коли друга фірма не використовує реакцію Карно, а діє згідно з реакцією Стекельберга, тобто кожна фірма неправильно вважає, що інша фірма використовує наївне припущення Курно, маємо *нерівновагу Стекельберга*. При цьому система оптимальності (2.76) набуде вигляду

$$3\ b\ q_1 + 2\ b\ q_2 = 2\ (a - c);$$

$$2\ b\ q_1\ +\ 3\ b\ q_2\ =\ 2\ (a\ -\ c). \qquad (2.86)$$

Розв'язок системи (2.86) визначається формулами

$$q_1\ =\ q_2\ =\ \frac{2\ (a\ -\ c)}{5b}. \qquad (2.87)$$

для яких виконується умова (2.75).

Прибутки обох фірм в умовах нерівноваги Стекельберга збігаються і мають вигляд

$$\pi_1\ =\ \pi_2\ =\ (a\ -\ 4\ b\ \frac{a\ -\ c}{5b})\ \frac{2\ (a\ -\ c)}{5b}\ -\ c\ \frac{2\ (a\ -\ c)}{5b}\ -\ d\ =$$

$$=\ 2\ \frac{(a\ -\ c)^2}{25b}\ -\ d, \qquad (2.88)$$

і вони менші, ніж за рівноваги Курно.

Серед інших можливостей розглянемо ще *кооперативне рішення* обох фірм в дуополії, згідно з яким вони хочуть разом максимізувати загальний прибуток. У цьому випадку маємо таку екстремальну задачу:

$$\pi(q_1, q_2)\ =\ \pi_1(q_1, q_2)\ +\ \pi_2(q_1, q_2)\ =$$

$$=\ (a\ -\ b\ (q_1\ +\ q_2))\ (q_1\ +\ q_2)\ -\ c\ (q_1\ +\ q_2)\ -\ 2\ d\ \rightarrow\ \max. \qquad (2.89)$$

Умови оптимальності для задачі (2.89) мають вигляд

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1}\ =\ \frac{\partial\pi)}{\partial q_2}\ =\ (a\ -\ b\ (q_1\ +\ q_2))\ -b\ (q_1\ +\ q_2)\ -\ c\ =\ 0.$$

Звідси $q_1\ +\ q_2\ =\ \frac{a\ -\ c}{2b}$,

$$\pi(q_1, q_2)\ =\ (a\ -\ b\ \frac{a\ -\ c}{2b})\ \frac{a\ -\ c}{2b}\ -c\ \frac{a\ -\ c}{2b}\ -\ 2\ d\ =$$

$$=\ \frac{(a\ -\ c)^2}{4b}\ -\ 2\ d.$$

Спільний прибуток при цьому буде більшим за спільні прибутки для всіх наведених вище варіантів реалізації гаданих варіацій.

Насамкінець застосуємо до вихідної задачі методологію безкоаліційних ігор [5], зокрема, найбільш поширену *рівновагу за Нешем* розв'язання таких задач.

Ситуація (q_1^N, q_2^N) у цьому випадку буде називатися рівноважною за Нешем, якщо одночасно буде виконуватись система нерівностей

$$\pi_1(q_1, q_2^N) \leq \pi_1(q_1^N, q_2^N);$$

$$\pi_2(q_1^N, q_2) \leq \pi_2(q_1^N, q_2^N),\ 0 \leq q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b},\ q_1,\ q_2 \geq 0. \quad (2.90)$$

Щоб визначити стратегії $q_i^N,\ i = \overline{1,2}$, які становлять рівноважну за Нешем ситуацію (q_1^N, q_2^N), розв'яжемо систему оптимізаційних задач

$$\hat{\pi}_1(q_2^N) = \max_{q_1 \in \left[0, \frac{a}{b} - q_2^N\right]} \left[\left(a - b\ (q_1 + q_2^N)\right) q_1 - c\ q_1 - d\right];$$

$$\hat{\pi}_2(q_1^N) = \max_{q_2 \in [0, a/b - q_1^N]} [(a - b\ (q_1^N + q_2)\ q_2 - c\ q_2 - d]. \quad (2.91)$$

Для першої задачі знаходимо похідну

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2^N)}{\partial q_1} = a - 2\ b\ q_1 - b\ q_2^N - c = 0. \quad (2.92)$$

Тоді з виразу для похідної випливає, що в області $0 \leq q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b}$ функція $\pi(q)$ не є монотонною і її максимум за q_1 за фіксованого q_2^N може досягатись у внутрішніх точках відрізка $[0, a/b - q_2^N]$. Стаціонарні точки задовольняють рівняння $a - 2\ b\ q_1 - b\ q_2^N - c = 0$. Оскільки в цих точках

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2\ b < 0,$$

вони утворюють множину глобальних максимумів функції $\pi_1(q)$ за q_1, при цьому пряма (2.92) перетинає координатні осі відповідно в точках $\hat{q}_1 = (a -)/(2b) \in$

$(0, a/b)$, $\hat{q}_2 = (a -)/b) \in (0, a/b)$. Таким чином, множина розв'язків першої задачі: $q_1 = (a - c - b\ q_2^N)/(2b), q_2^N \in [0, (a - c)/b]$.

Відповідно до симетрії множина розв'язків другої задачі: $q_2 = (a - c - b\ q_1^N)/(2b), q_1^N \in [0, (a - c)/(2b)]$.

Таким чином, рівновага за Нешем досягається в точці, яка є розв'язком системи

$$2\ b\ q_1^N + b\ q_2^N = a - c;$$

$$b\ q_1^N + 2\ b\ q_2^N = a - c.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$q_1^N = q_2^N = \frac{a - c}{3\ b}$$

і він збігається з дуополією Курно, тобто розв'язок безкоаліційної гри з використанням рівноваги Неша не дав нових результатів порівняно з аналізом гаданих варіацій.

Поширимо розглянуту вище теорію поведінки однопродуктової фірми на випадок багатопродуктової фірми, яка виробляє $n > 1$ видів продукції і використовує m видів ресурсів. Розглянемо два типи моделей поведінки багатопродуктової фірми.

1. Нехай

$$q_i = F_i(x_1^i, \ldots, x_m^i),\ i = \overline{1, n},\ x_j = \sum_{i=1}^n x_j^i,$$

тобто кожному типу продукції відповідає своя виробнича функція.

Тоді модель поведінки фірми зводиться до такої задачі максимізації її прибутку:

$$\pi(x^1, \ldots, x^n)) = \sum_{i=1}^n p_i\ F_i(x^i) - \sum_{j=1}^m \omega_j(\sum_{i=1}^n x_j^i) \to \max,$$

$$x_j^i \geq 0,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}. \qquad (2.93)$$

Необхідні умови оптимальності для задачі (2.93) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_j^i} = p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} - \omega_j \leq 0, \left(p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} - \omega_j\right) x_j^i = 0;$$

$$x_j^i \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}. \qquad (2.94)$$

2. Задамо виробничу функцію у неявному вигляді:

$$\Phi(q,x) = \Phi(q_1,\ldots,q_n;x_1,\ldots,x_m) = 0, \qquad (2.95)$$

причому вона має відображати загальні закономірності виробництва:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} < 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} > 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}. \qquad (2.96)$$

Тоді модель поведінки фірми зводиться до такої задачі максимізації її прибутку:

$$\pi(q,x) = \sum_{i=1}^{n} q_1 \ p_i - \sum_{j=1}^{m} \omega_j x_j \rightarrow \max;$$

$$\Phi(q,x) = 0, \ q, \ x \geq 0. \qquad (2.97)$$

У термінах функції Лагранжа

$$L(q,x,\lambda) = \pi(q,x) + \lambda \ \Phi(q,x),$$

де λ — множник Лагранжа.

Необхідні умови оптимальності для задачі (2.97) у разі виконання умови q, $x > 0$ будуть мати вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_j} = -\omega_j + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0;$$

$$\Phi(q,x) = 0, \ \lambda > 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}. \qquad (2.98)$$

2.4. Міжгалузева модель Лєонтьєва «витрати — випуск». Невід'ємні матриці. Продуктивність моделі Лєонтьєва. Порівняльна статика моделі Лєонтьєва

Розглянемо модель міжгалузевого балансу В. В. Лєонтьєва (модель «витрати — випуск»), яку використовують для планування господарської діяльності країни, регіону або великої багатопродуктової корпорації (*економічної системи*). Крім того, ця модель пов'язує виробництво зі споживанням в агрегованому вигляді.

Для формування моделі «витрати — випуск» використовують балансову таблицю (матрицю міжгалузевих потоків), яка містить відомості про діяльність господарства. Нехай виробничий сектор економічної системи поділено на n *чистих* або *технологічних галузей*, тобто виробничий сектор виробляє n продуктів. *Балансовий звіт* за певний період наведено у табл. 2.1 (рис. 2.4), в якій:

$\bar{a}_{ij},\ i,j\ =\ \overline{1,n},$ — обсяг продукції i-ї галузі, витраченої j-ю галуззю у виробничому процесі за певний період часу;

$\bar{v}_j,\ j\ =\ \overline{1,n}$ — *валовий випуск* j-ї галузі за той самий період часу;

$\bar{c}_j,\ j\ =\ \overline{1,n},$ — обсяг продукції j-ї галузі, який витрачається у невиробничій сфері.

Співвідношення між параметрами табл. 1.1 має вигляд

$$\sum_{j=1}^{n}\ \bar{a}_{ij}\ =\ \bar{v}_i\ -\ \bar{c}_i,\ i\ =\ \overline{1,n}. \qquad (2.99)$$

Таблиця 2.1

Міжгалузева модель Лєонтьєва «витрати — випуск»

Витрати	Розподіл випуску між галузями						Кінцеве споживання	Валовий випуск
Розподіл продукції і-ї галузі на потреби інших галузей	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	…	$\bar{a}_{1j}$	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{C}_1$	$\bar{U}_1$
	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	…	$\bar{a}_{2j}$	…	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{C}_2$	$\bar{U}_2$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	$\bar{a}_{i1}$	$\bar{a}_{i2}$	…	$\bar{a}_{ij}$	…	$\bar{a}_{in}$	$\bar{C}_i$	$\bar{U}_i$
	…	…	…	…	…	…	…	…
	…	…	…	…	…	…	…	…
	$\bar{a}_{n1}$	$\bar{a}_{n2}$	…	$\bar{a}_{nj}$	…	$\bar{a}_{nn}$	$\bar{C}_n$	$\bar{U}_n$

Зазначені показники можуть виражатися як у натуральних, так і у вартісних одиницях. Залежно від цього розрізняють *натуральний* чи *вартісний міжгалузевий баланс*.

Проведемо нормування елементів табл. 2.1:

$a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{v}_j}$ — обсяг продукції i-ї галузі, витраченої на випуск одиниці j-го продукту;

$c_j = \frac{\bar{c}_j}{\bar{v}_j}$ — частка продукції j-ї галузі, яка витрачається у невиробничій сфері.

Тоді $c' = (c_1, \ldots, c_n)$ — *вектор споживання.* Числа a_{ij}, $i = \overline{1,n}$ — *коефіцієнти прямих витрат* j-ї галузі; вони характеризують технології виробництва цієї галузі за певний період, оскільки визначають обсяг і структуру витрат, необхідних для випуску одиниці j-го продукту.

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — *матриця прямих витрат* (*технологічна матриця*). Вона містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків та наявні в певній виробничій системі технології виробництва. У різні часові періоди ця матриця може змінюватись, тобто за її допомогою можна проаналізувати розвиток

технологій у виробничій системі. Крім того, матрицю A можна використовувати для планування і прогнозування виробництва.

Нехай відносно матриці A виконуються такі припущення:

$i)$ вона є сталою протягом певного періоду (базового);

$ii)$ для випуску x_j одиниць продукції j-ї галузі необхідні й достатні витрати інших галузей у тій же пропорції, тобто $a_{ij}\ x_j,\ i\ =\ \overline{1,n}$.

Вектор $x'\ =\ (x_1,\ldots,x_n)$ будемо називати *вектором валового випуску.*

Частку валового випуску, яку витрачають на виробничі потреби економіки, описують *вектором виробничих витрат*

$$(Ax)'\ =\ (\sum_{j=1}^{n}\ a_{1j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}\ a_{nj}). \qquad (2.100)$$

Взаємозв'язок між ендогенним вектором валового випуску x, ендогенним вектором виробничих витрат Ax та екзогенним вектором споживання c описують балансовим рівнянням

$$x\ -Ax\ =\ c,\ x\ \in\ R_+^n, \qquad (2.101)$$

де $c\ \geq\ 0,\ A\ \geq\ 0$.

З математичної точки зору питання про сумісність лінійної алгебраїчної системи із (2.101) зводиться до існування оберненої матриці $(E_n\ -\ A)^{-1}$, де E_n — одинична матриця розмірністю $n \times n$. Звідси $x\ =(E_n\ -\ A)^{-1}\ c$. Умова невід'ємності вектора x ускладнює дослідження системи із (2.101) і для цього потрібний спеціальний апарат теорії невід'ємних матриць, який буде розглянуто в нижче.

Задачу (2.101) називають *моделлю Леонтьєва.* Якщо для довільного вектора споживання $c\ \geq\ 0$ задача (2.101) має розв'язок, то модель Леонтьєва буде продуктивною.

До моделі (2.101) додамо *двоїсту* до неї модель, яку записують у термінах цін. Нехай

$p_i,\ i = \overline{1,n}$ — ціна одиниці продукції i-ї галузі;

$\omega_j,\ j = \overline{1,n}$ — заробітна плата за одиницю продукції j-ї галузі.

Припустимо, що у виробничій системі діє правило нульового доходу для кожної галузі: виручка галузі мінус вартість випуску за цінами реалізації дорівнює її витратам. Тоді можемо записати балансове співвідношення цін у вигляді

$$p - A'p = \omega,\ p \in R_+^n. \qquad (2.102)$$

Розглянемо ще одну модель, близьку до моделі Леонтьєва, — *лінійну модель обміну* (*модель міжнародної торгівлі*).

Припустимо, що існує n країн, які торгують між собою. Нехай:

$d_j,\ j = \overline{1,n}$ — прибуток j-ї країни від торгівлі, який формується із продажу товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках;

$q_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$ — частка прибутку d_j j-ї країни, яка витрачається на імпорт товарів із i-ї країни.

Матриця $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n$, що описує структуру торговельних відносин, є сталою і не залежить від вектора прибутків d. Якщо країни торгують відповідно до матриці Q, то після одного обороту торгівлі країни матимуть прибуток

$$(Qd)' = (\sum_{j=1}^n q_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^n q_{nj}) \qquad (2.103)$$

і цей прибуток повинен задовольняти умову

$$d \leq Qd. \qquad (2.104)$$

Дослідимо більш ретельно модель (2.104). Відповідно до означення елементів q_{ij} матриці Q маємо набір рівностей

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}. \qquad (2.105)$$

Запишемо покоординатно систему нерівностей (2.104)

$$d_i \leq \sum_{j=1}^n q_{ij} d_j,\ i = \overline{1,n}. \qquad (2.106)$$

Припустимо від зворотного, що за деякого i_0, $1 \leq i_0 \leq n$ відповідна нерівність із (2.106) є строгою. Враховуючи це, оцінимо суму d_i:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i < \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} d_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} q_{ij}) d_j = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Отримуємо суперечність, тобто модель міжнародної торгівлі (2.104) слід замінити системою однорідних алгебричних рівнянь

$$d = Qd. \qquad (2.107)$$

Щодо продуктивності моделі (2.107), то вона полягає в тому, що спектр матриці Q повинен містити одиницю серед своїх складових і цьому власному числу має відповідати власний вектор з додатними компонентами.

Через велику розмірність технологічної матриці A одним з основних питань є питання щодо продуктивності моделі Леонтьєва. Щоб з'ясувати це питання, розглянемо деякі властивості невід'ємних матриць.

Нехай $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — квадратна матриця з невід'ємними елементами: $a_{ij} \geq 0, V_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

Означення 2.1. *Нехай* $S \subseteq V_n$, *а* $S' = V_n \setminus S$. *Якщо* $a_{ij} = 0$, $i \in S'$, $j \in S$, *то множину* S *називають ізольованою.* •

Наприклад,

$a)$ якщо матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то $S = \{3\}$, $S' = \{1,2\}$;

$b)$ якщо матриця має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix},$$

то $S = \{1\}$, $S' = \{2,3\}$ або $S = \{1,2\}$, $S' = \{3\}$;

$c)$ якщо матриця має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

то $S = \{\emptyset\}$.

З економічної точки зору в межах моделі Леонтьєва наявність ізольованої множини свідчить про те, що галузі з номерами із S не використовують у виробничому процесі продукцію галузей з номерами із S', тобто група галузей з номерами із S може функціонувати незалежно від інших галузей. Так, у прикладі $a)$ третя галузь може функціонувати незалежно від інших галузей. У випадку моделі обміну наявність непорожньої ізольованої мнжини S означає, що країни з намерами із S не імпортують товарів із країн із номерами, які належать S'. При цьому експорт у ці країни можливий.

Перенумеруємо індекси так, щоб $S = \{1, \ldots, k\}$, $S' = \{k + 1, \ldots, n\}$. Для матрицы A із прикладу $a)$ це означає одночасну перестановку рядків і стовпців, після чого вона набуде вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.108)$$

де A_{11}, A_2 — квадратні блоки розмірністю $k \times k$ та $(n - k) \times (n - k)$ відповідно.

Так, якщо у матриці A виконати перестановку 1-го і 3-го стовпців, а потім 1-го і 3-го рядків, то будемо мати

$$A = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \; A_{11} = \{a_{33}\}, \; A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \; k = 1,$$

$n - k = 2.$

Матриця B із прикладу $b)$ вже має вигляд (2.108), а блок A_{11} можемо вибирати по-різному:

$$A_{11} = b_{11} \text{ або } A_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю C із прикладу $c)$ жодною одночасною перестановкою рядків і стовпців не можна звести до вигляду (2.108).

Означення 2.2. *Якщо для деякої матриці A розмірністю $n \times n$ у множині V_n немає ізольованих підмножин, то таку матрицю називають нерозкладною.* •

Нерозкладну матрицю A одночасною перестановкою рядків і стовпців не можна звести до вигляду (2.108). Зокрема, матриця C із прикладу $c)$ є нерозкладною. Матриця $A > 0$ — нерозкладна. Якщо в матриці за $n \geq 3$ лише один елемент дорівнює нулю, то така матриця нерозкладна.

Теорема 2.2 (*Перрона—Фробеніуса про спектр невід'ємної нерозкладної матриці*). *Нехай матриця A розмірністю $n \times n$ невід'ємна і нерозкладна, а $\Lambda(A)$ — множина її власних чисел: $(\Lambda(A))' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m), m \leq n$. Тоді у множині $\Lambda(A)$ є додате число $\lambda_A > 0$ таке, що*

$$|\lambda_k| \leq \lambda_A, \ k = \overline{1, m}.$$

Крім того, власному числу λ_A відповідає додатний власний вектор x_A. •

При цьому число λ_A називають *числом Фробеніуса*, а вектор x_A — *вектором Фробеніуса*.

Приклад 2.7. Знайти λ_A, x_A для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння $|A - \lambda E_2| = 0$ для цієї матриці має вигляд $\lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 = 0$. Тоді $(\Lambda(A))' = (0{,}5;\ 1)$. Тому $\lambda_A = 1$, а вектор x_A

визначають із системи

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

він може дорівнювати $(x_A)' = (3{,}2)$.

Наступна теорема дає можливість оцінити фробеніусове число λ_A матриці $A \geq 0$. Для цього введемо позначення:

$r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, R = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, s = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, S = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

Теорема 2.3. *Нехай матриця A розмірністю $n \times n$ невід'ємна. Тоді для її фробеніусового число λ_A справедливі такі нерівності:*

$$r \leq \lambda_A \leq R, \; s \leq \lambda_A \leq S. \qquad (2.109)$$

Якщо до того ж матриця A ще й нерозкладна, то нерівності (2.109) — строгі, крім випадку $r = R, \; s = S$. •

Приклад 2.7. Для прикладу 2.7 маємо: $r = 0{,}9, \; R = 1{,}1, \; s = S = 1$. Тому $0{,}9 \leq \lambda_A \leq 1{,}1$ або навіть $\lambda_A = 1$.

Виявилось, що продуктивність моделі Леонтьєва повністю визначається числом Фробеніуса λ_A.

Теорема 2.4. *Для продуктивності моделі Леонтьєва*

$$x - A\,x = c, \; x \geq 0 \qquad (2.110)$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $\lambda_A < 1$.

Доведення.

Для перевірки продуктивності матриці A досить існування оберненої матриці B = (E - A)-1 з невід'ємними елементами, де матриця E - одинична матриця

Достатність. Покажемо, що за $\lambda_A < 1$: (i) $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$, (ii) існує $(E_n - A)^{-1}$.

Маємо ланцюжок співвідношень:

$$A\ x_A\ =\ \lambda_A\ x_A, \qquad A^2\ x_A\ =\ \lambda_A^2\ x_A, \ldots, A^k\ x_A\ =\ \lambda_A^k\ x_A.$$

Звідси $\lim\limits_{k\to\ \infty} A^k\ x_A\ =\ 0$, бо за умовою $\lambda_A\ <\ 1$. Оскільки вектор Фробеніуса $x_A\ >\ 0$ і $A^k\ \geq\ 0$, то отримаємо співвідношення (i).

Запишемо тотожність, справедливу для будь-якої квадратної матриці:

$$(E_n\ -\ A)\ (E_n\ +\ A\ +\ \ldots\ +\ A^{k-1})\ =\ E_n\ -\ A^k. \qquad (2.111)$$

Перейдемо у (2.111) до границі за $k\ \to\ \infty$. Границя правої частини існує й дорівнює E_n. Тому

$$(E_n\ -\ A)\ \sum_{k\to\infty}\ A^k\ =\ E_n.$$

Отже, ряд $\sum_{k\to\infty}\ A^k$ збігається і справедлива формула

$$(E_n\ -\ A)^{-1}\ =\ E_n\ -\ \sum_{k\to\infty}\ A^k, \qquad (2.112)$$

що і доводить (ii). Оскільки матриця $(E_n\ -\ A)^{-1}$ невід'ємна, то для довільного вектора кінцевого невиробничого попиту $c\ \geq\ 0$ система (2.110) має єдиний розв'язок

$$x\ =\ (E_n\ -\ A)^{-1}\ c\ \geq\ 0. \qquad (2.113)$$

Необхідність. Нехай модель (2.110) продуктивна. Тоді існує вектор $x\ \geq\ 0$, для якого виконується рівність $x\ -\ A\ x\ =\ c$.

Нехай $c\ >\ 0$. Тоді $x\ >\ A\ x$. Помножимо останню нерівність скалярно на додатний вектор p_A $(p_A\ A\ = \lambda_A\ p_A)$:

$$(x, p_A)\ >\ (Ax, p_A)\ =\ (x, p_A\ A)\ =\ \lambda_A\ (x, p_A).$$

Звідси $\lambda_A\ <\ 1$. •

Таким чином, перевірка моделі Леонтьєва на продуктивність зводиться до суто математичної задачі щодо спектру матриці A. Ця задача за складністю рівнозначна розв'язності системи рівнянь із (2.110), тому наведемо достатні умови продуктивності моделі «витрати — випуск».

Теорема 2.5. *Нехай:*

(i) матриця A невід'ємна і нерозкладна;

(ii) виконуються умови

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \ i = \overline{1,n}; \qquad (2.114)$$

(iii) хоч б для одного рядка i_0 виконується умова $r_{i_0} < 1$.

Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці, є продуктивною. •

Із теореми 2.4 випливає, що розв'язок моделі Леонтьєва у випадку її продуктивності має вигляд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} A^k c. \qquad (2.115)$$

Формула (2.115) є зручною для наближених обчислень.

Повернімось до моделі Леонтьєва (2.110). Будемо вважати, що технологічна матриця не змінюється, а змінюється вектор c. Тоді $x = x(c)$, тобто йдеться про реакцію системи на зміну координат вектора попиту.

Теорема 2.6 (*про додатність вектора валового випуску*). *Нехай в моделі (2.110) матриця $A \geq 0$ нерозкладна і продуктивна, вектор попиту $c \geq 0$, $c \neq 0$. Тоді $x(c) > 0$, тобто в нерозкладній продуктивній виробничій системі для задоволення ненульового кінцевого попиту потрібний валовий випуск кожного із товарів в додатній кількості.* •

Нехай у моделі (2.110) у векторі попиту c збільшилась перша координата c_1, а інші координати не змінились. Як прореагує на такі зміни система?

Теорема 2.7. *Нехай у моделі (2.110) матриця $A \geq 0$ нерозкладна і продуктивна. Якщо $c' = (c_1, \ldots, c_n)$ й $\hat{c}' = (\hat{c}_1, \ldots, c_n)$, причому $\hat{c}_1 > c_1$, то*

$$\max_{j=\overline{1,n}} \frac{x_j(\hat{c})}{x_j(c)} = \frac{x_1(\hat{c})}{x_1(c)}. \qquad (2.116)$$

Якщо максимум у (2.116) досягається, крім $j = 1$, ще для якогось $j = i \neq 1$, тобто

$$\frac{x_i(\hat{c})}{x_i(c)} = \frac{x_1(\hat{c})}{x_1(c)},$$

то потрібно, щоб $c_i = 0$.

Доведення.

Із (2.115) завдяки довільності c можемо записати $A^* (E_n - A)^{-1} > 0$. Тоді

$$x(\hat{c}) = A^* \hat{c} = A^* c + A^* (\hat{c} - c) > A^* c = x(c). \quad (2.117)$$

Якщо $x_j(\hat{c}) = \gamma_j x_j(c)$, то з нерівності (2.117) отримаємо $x_j(\hat{c}) > x_j(c), \gamma_j > 1, j = \overline{1,n}$. Із рівностей

$$x_i(c) = c_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(c), \; x_j(c) = \frac{x_j(\hat{c})}{\gamma_j}$$

випливає, що

$$x_i(\hat{c}) = \gamma_i c_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} a_{ij} x_j(\hat{c}). \quad (2.118)$$

Припустимо, що $S = \{i: \gamma_i = \max_{j=\overline{1,n}} \gamma_j\}$, і покажемо, що $1 \in S$, тобто (116 2.116) буде доведено. Тому припустимо від зворотного, що $1 \overline{\in} S$. Тоді $\forall\, i \in S: \hat{c}_i = c_i, \gamma_i/\gamma_j > 1, j \overline{\in} S$ й

$$x_i(\hat{c}) = \gamma_i c_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} a_{ij} x_j(\hat{c}) > \hat{c}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, x_j(\hat{c}), \quad (2.119)$$

що суперечить означенню вектора $x(\hat{c})$. Щоб усунути цю суперечність слід припустити, що $a_{ij} = 0, i \in S, j \overline{\in} S$. Тоді S — ізольована множина, але це неможливо: матриця A — нерозкладна. Отже, $1 \in S$ й (2.116) доведено.

Якщо припустити, що $i \in S, i \neq 1$ та $c_i > 0$, то знаву отримаємо суперечність. Із $\hat{c}_i = c_i$ випливає $\gamma_i c_i > \hat{c}_i, \gamma_i/\gamma_j \geq 1, j = \overline{1,n}$. Проте (2.118) знову веде до суперечності (2.119). Отже $c_i = 0, i \in S, i \neq 1$. •

Нехай

$$E_{ij} = \frac{c_j}{x_i(c)} \frac{\partial x_i(c)}{\partial c_j}$$

є еластичністю i-го товару щодо попиту c_j на j-й товар.

Теорема 2.8. *Якщо в моделі (2.110) матриця $A \geq 0$ нерозкладна і*

продуктивна, то $E_{ij} \leq 1, i, j = \overline{1, n}$. *Якщо* $c_i > 0$, *то* $E_{ij} < 1$, $i \neq j$.•

2.5. Задачі та завдання для самостійного розв'язання

Завдання 2.1. У короткостроковому періоді виробнича функція фірми має вигляд: $Y = 100L + 25L^2 - 3L^3$, де L — кількість робітників. За якого рівня зайнятості загальний випуск буде максимальним?

Порядок виконання роботи:

✓ Знайдемо точку максимуму функції У(.). Для цього продиференціюємо її за L та прирівняємо похідну до нуля.

✓ Розв'язуємо отримане рівняння одним з відомих методів.

✓ Аналізуємо результатів розв'язку і визначаємо рівень зайнятості.

Завдання 2.2. Виробнича функція мас вигляд $Y = L \cdot K$. Якщо загальний обсяг витрат не повинен перевищувати *Z*, ціна праці становить, ціна капіталу — *K*, то за якої комбінації праці і капіталу буде досягнуто максимальний випуск?

№ варіанта	Z	T	K
1	30	4	5
2	50	3	10
3	45	6	9
4	31	4,4	7
5	38	5	3
6	36	3,8	4,2
7	34	5	4,1
8	39	4	4,4
9	42	5,1	4,5
10	43	4,5	5
11	45	4,1	4,2
12	48	3,9	4,9
13	40	5,7	4,5

Порядок виконання роботи:

✓ Шукані значення праці і капіталу є координатами точки дотику ізокванти Y- L-K (за деякого) й ізокости (записати її рівняння).

✓ Сформувати систему рівнянь для пошуку спільних точок.

✓ Знайти максимум Y за L.

✓ Визначити шукані значення L, K, max випуску.

Завдання 2.3. Задана виробнича функція фірми $Y = 12x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{4}}$, де x_1 — праця чоловіків, x_2 — праця жінок (у люд.-годинах). Чоловіки отримують 5,6 доларів на годину, жінки — 4 долари на годину.

Якщо фірма використовує Z люд.-годин праці жінок і T люд.-годин праці чоловіків, щоб виробити k од. продукції, то чи будуть мінімальними при цьому витрати на даний випуск?

№ варіанти	Z	T	K
1	81	64	144
2	90	63	151
3	95	66	149
4	91	64,4	172
5	98	65	153
6	86	63,8	144,2
7	84	65	154,1
8	89	74	144,4
9	92	65,1	144,5
10	93	64,5	150
11	85	74,1	154,2
12	88	63,9	144,9
13	90	65,7	145

Порядок виконання роботи:

✓ Мінімальні витрати відповідають точці дотику ізокванти відповідної ізокости.

✓ Задаємо рівняння ізокванти і будуємо для неї рівняння дотичної в точці (X1, X2), попередньо виразивши X1 через X2.

✓ Розраховуємо витрати в заданій точці.

- ✓ Будуємо рівняння ізокости і порівнюємо з рівнянням дотичної.
- ✓ Аналізуємо розв'язок.

Завдання 2.4. Виробнича функція фірми мас вигляд $Y = 100 \cdot K \cdot L$. Ціна праці становить Т, а капіталу — К. Чому дорівнюють середні витрати виробництва N одиниць продукції, якщо фірма вибирає найдешевший спосіб виробництва?

№ варіанта	N	T	K
1	100	30	120
2	190	33	151
3	195	36	149
4	90	34,4	132
5	98	35	153
6	106	33,8	144,2
7	114	25	154,1
8	129	34	144,4
9	190	25,1	144,5
10	130	44,5	150
11	145	34,1	154,2
12	128	33,9	144,9
13	190	35,7	145

Порядок виконання роботи:

- ✓ Мінімальні витрати С відповідають точці дотику ізокванти (записати рівняння) й ізокости (записати рівняння).
- ✓ Побудуємо систему рівнянь для спільних точок цих кривих.
- ✓ Знаходимо min С за L, К та мінімальні витрати.
- ✓ Визначаємо середні витрати як витрати, що припадають на одиницю випуску продукції.

Завдання 2.5. Припустимо, що в разі, якщо фірма збільшує застосовуваний капітал з 100 до 150 одиниць, а використовувані трудові ресурси — з 500 до 750 одиниць, випуск продукції збільшується з 200 до 300 одиниць. Який ефект зростання масштабу виробництва становитиме у такому разі?

Завдання 2.6. До реконструкції підприємство виробляло 5000 мопедів на рік. Після реконструкції протягом першого року обсяг виробництва зріс до 7500 мопедів, і при цьому кількість працівників за рік зменшилася на 1/3. Протягом наступного року обсяг виробництва через зменшення попиту зменшився на 10 %, а кількість працівників не змінювалася. Як змінилася продуктивність праці за два роки?

Завдання 2.7. Виробнича функція $Q = 4L^{0,5}K$, де L — витрати праці; К — витрати капіталу. Знайдіть граничний продукт капіталу, якщо витрати праці становлять 4, а витрати капіталу — 8.

Завдання 2.8. Виробнича функція задається формулою: $Q = 0,5L^{0,5}K$. Визнечте граничну норму технологічного заміщення капіталу працею, якщо витрати ресурсів: L = 4, К = 8.

Завдання 2.9. Попит на продукцію монополістичного конкурента описується рівнянням $Q_d = 300 - 5P$, функція загальних витрат має вигляд $TC = 200 + 30Q$. Визначте оптимальний обсяг випуску і ціни, які дозволять максимізувати прибуток фірми.

Завдання 2.10. Монополія, що, максимізуючи прибуток не здійснюючи цінової дискримінації, має два підприємства, на яких виробляється один і той самий продукт з різними витратами: $TC_1 = 10Q_1, TC_2 = 0,25{Q_2}^2$. Попит на продукцію характеризується функцією $Q = 200 - 2P$. Скільки і на якому підприємстві монополія буде виробляти продукції?

Завдання 2.11. Функція загальних витрат монополії має вигляд $TC = 30 + 10Q$. Відомо, що фірма здійснює цінову дискримінацію. Функції попиту на двох сегментах ринку мають вигляд: $P_1 = 40 - 3Q_1$; $P_2 = 90 - 10Q_2$. Визначити обсяги продажів на кожному сегменті ринку.

Завдання 2.12. У галузі діє п’ять фірм з обсягами випуску 2; 3; 5; 10 і 30 % загального випуску галузі. Останній випуск здійснюють невеликі фірми галузі,

кожна з яких має близько 1 % продажів. На основі необхідних розрахунків зробіть висновок щодо ступеня монополізації цієї галузі.

Завдання 2.13. Попит на продукцію монополістичного конкурента описується рівнянням $Q_d = 300 - 5P$, функція загальних витрат має вигляд $TC = 200 + 30Q$. Визначте оптимальний обсяг випуску і ціни, які дозволять максимізувати прибуток фірми.

Завдання 2.14. Нехай фірма А намагається порушити монополію фірми Б на ринку певного товару. Фірма А вирішує, варто чи не варто їй входити на ринок, тоді як фірма Б — варто чи не варто знижувати випуск, якщо фірма А все таки вирішить війти (варіанти цих рішень наведені в таблиці).

Фірма А	Фірма Б		
	Рішення	Залишити без змін	Знизити випуск
	Ввійти на ринок	−6; −4	8; 8
	Не входити на ринок	0; 20	0; 20

Необхідно знайти всі види рівноваги, а також проаналізувати проблему, що характеризується цією моделлю.

Завдання 2.15. Ринковий попит описується функцією $P^D(Q) = 100 - 0{,}1Q$. Кожна фірма, що діє на ринку має граничні витрати $MC_i = 40$. Визначте обсяг виробництва кожної фірми, ринковий обсяг продажу та ціни, якщо на ринку діють дві фірми в умовах моделі Курно.

Завдання 2.16. Самостійно придумати лінійну модель рівноважних цін розміру 3х3 і розв'язати цю проблему.

Знайти зміни валових випусків у разі збільшення кінцевого випуску першої галузі на 10 %, зменшення другої на 15 % і незмінному кінцевому випуску третин галузі.

Як слід змінити ціни на продукцію галузей, якщо поставлено завдання збільшити додану вартість у першій галузі на 20 %, а в третій на 10 %.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте нелінійність взаємозв'язків між основними чинниками економічних процесів.
2. Наведіть роль прикладних економіко-математичних досліджень в економіці, підприємництві, менеджменті.
3. Які принципи організації рекламної компанії?
4. Як працює взаємозалік боргів підприємства?
5. Сформулюйте загальне поняття виробничої функції. Економічний зміст виробничої функції.
6. Сформулюйте загальну характеристику та етапи побудови виробничих функцій.
7. Назвіть макроекономічні виробничі функції.
8. Що таке балансовий метод? Принципова схема міжгалузевого балансу?
9. Чи знаєте ви, як складається економіко-математична модель міжгалузевого балансу?
10. Опишіть коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат.
11. Яке значення міжгалузевих балансових моделей в аналізі економічних показників?

12.Яке застосування балансових моделей в економіці та підприємництві?

Розділ 3. Моделі ринків і теорія загальної рівноваги.

3.1. Найпростіші агреговані моделі ринкової економіки. Моделі вальрасівського типу. Умови існування рівноваги за Вальрасом за неокласичного підходу

Під час моделювання ринків та ринкової взаємодії економічних агентів використовують дві основні концепції. Одна з них пов'язана з агрегуванням окремих типів агентів у відповідні сектори економіки. Згідно з іншою концепцією економіку розглядають як дезагреговану систему, компонентами якої виступають економічні агенти. З аналітичної точки зору агреговані моделі є більш простими і доступними для вивчення та аналізу.

Обидва типи моделювання використовують моделі виробництва та споживання, які було розглянуто у двох попередніх розділах.

Далі на концептуальному рівні розлянемо два найпростіші варіанти гранично агрегованих моделей: класичну модель та модель Кейнса.

Класична модель ринкової економіки грунтується на описанні економіки з досконалою конкуренцією та охоплює опис взаємодії трьох ринків: ринку робочої сили (праці), ринку грошей та ринку товарів.

Ринок праці, як і інші ринки, описують за допомогою функцій попиту і пропозиції цього агрегованого фактора та умов рівноваги між ними. Функцію попиту будують за таких припущень:

1) фірми є повністю конкурентними при пропозиції товарів та найму праці;

2) за інших однакових умов граничний продукт праці спадає зі зростанням кількості праці.

Розглядаючи весь виробничий сектор економіки як одне велике підприємство і позначаючи через π його прибуток та вважаючи, що всі фактори виробництва фіксовані, крім праці L, можемо записати

$$\pi(L) = p\ F(K, L) - \omega\ L, \qquad (3.1)$$

де p — ціновий індекс агрегованої продукції; F — виробнича функція економіки; ω — індекс ціни агрегованої праці; K — агреговані виробничі фонди економіки.

Тоді необхідна умова оптимальності першого порядку для максимуму прибутку (3.1) має вигляд

$$\frac{\partial \pi(L)}{\partial L} = p \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - \omega = 0 \qquad (3.2)$$

і є достатньою, оскільки за припущенням 2):

$$\frac{\partial^2 \pi(L)}{\partial L^2} = p \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0.$$

Подавши (3.2) у вигляді

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\omega}{p}$$

та продиференціювавши його за параметром ω/p (індексом реальної зарплати), отримаємо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \frac{\partial L}{\partial(\omega/p)} = 1. \qquad (3.3)$$

Оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, то із (3.3) будемо мати

$$\frac{\partial L}{\partial(\omega/p)} < 0,$$

тобто попит на працю $L_D = L_D(\omega/p)$ є спадною функцією реальної зарплати.

Припустимо, що функція пропозиції праці $L_S = L_S(\omega/p)$ є зростаючою відносно ω/p.

Взаємодію функцій L_D та L_S на ринку праці графічно зображує модель Маршала (рис. 3.1). Рівноважний рівень реальної зарплати $(\omega/p)^*$ визначають збігом $L_D((\omega/p)^*)$ та $L_S((\omega/p)^*)$, що встановлює рівноважний рівень використання праці L_* (або рівень зайнятості). Якщо $\omega/p > (\omega/p)^*$, виникає надлишок пропозиції над попитом $L_S(\omega/p) > L_D(\omega/p)$, що призводить до падіння реальної зарплати ω/p під впливом безробіття. Якщо ж $\omega/p < (\omega/p)^*$, то $L_S(\omega/p) < L_D(\omega/p)$, тобто попит на працю перевищує пропозицію праці, що

змушує підприємців збільшувати реальну зарплату.

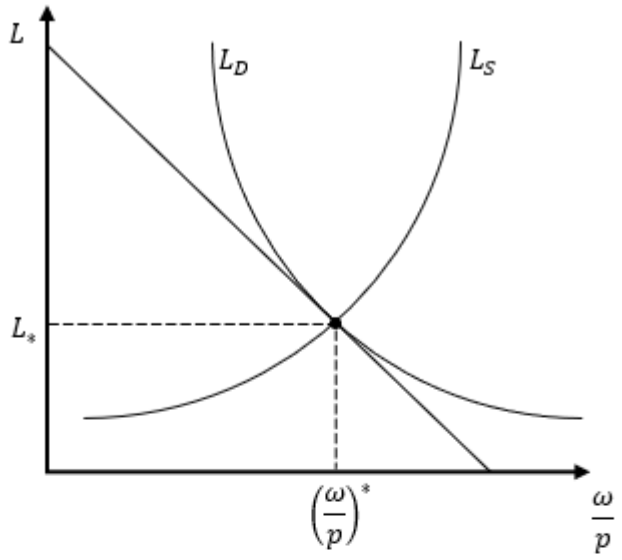

Рис. 3.1.

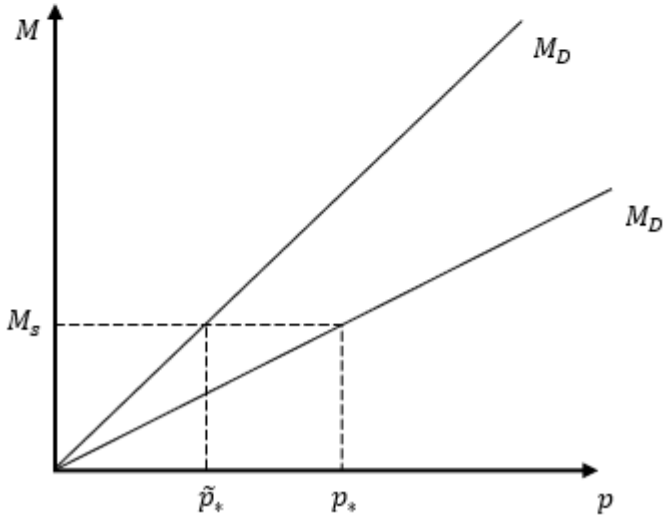

Рис. 3.2.

Розглянемо ринок грошей. Функцію попиту на гроші $M_D(p)$ визначають формулою Пігу

$$M_D(p) \ = \ k \ Y \ p, \qquad (3.4)$$

де Y — індекс валового внутрішнього продукту (ВВП); p — середній індекс цін; k — коефіцієнт пропорційності («кембриджський» коефіцієнт).

Пропозицію грошей задають екзогенно M_S. Графічно лінії попиту та пропозиції грошей зображено на рис. 3.2, причому для кожного Y маємо свою лінію попиту і нехай p_* — рівноважний ціновий індекс. Якщо за заданого $\tilde{Y}$ ціна $\tilde{p}_* \ < \ p_*$, то спостерігається надлишок пропозиції грошей $M_S \ - \ M_D(\tilde{p}_*) \ > \ 0$ і ціни починають зростати до рівня p_*.

На ринку товарів розглядають два типи товарів: споживчі та інвестиційні. Попит на ці товари задають функціями $C(r)$ та $I(r)$, які залежать від норми відсотка r і вважаються спадними, тобто зі зростанням ставки r стають більш вигідними заощадження. Загальний попит на товари (планові видатки) $E_D(r) \ = \ C(r) \ + \ I(r)$, а пропозиція товірів є функцією рівня зайнятості $E_S(L) \ = \ Y(L)$. Отже, рівноважні рівні використання праці L_*, ставки r_* та ВВП Y_* визначають рівністю

$$C(r_*) \ + \ I(r_*) \ = \ Y(L_*) \ = \ Y_*.$$

Об’єднавши рівняння та умови, що описують ринки праці, грошей та товарів, отримаємо повну класичну модель ринкової економіки у гранично агрегованому вигляді:

$$L_S \ = \ L_S\left(\frac{\omega}{p}\right), \ L_D \ = \ L_D\left(\frac{\omega}{p}\right);$$

$$L_S((\frac{\omega}{p})_*) \ = \ L_D(\left(\frac{\omega}{p})_*\right);$$

$$M_D(p) \ = \ k \ Y \ p;$$

$$M_S \ = \ k \ Y_* \ p_*;$$

$$E_D(r) = C(r) + I(r),\ E_S(L) = Y(L);$$

$$C(r_*) + I(r_*) = Y(L_*) = Y_*. \qquad (3.5)$$

Розв'язки системи (3.5) $((\frac{\omega}{p})_*,\ p_*,\ r_*,\ L_*,\ Y_*)$ характеризують стан *загальної рівноваги економіки*.

Модель (3.5) дає змогу розв'язувати задачу пошуку рівноваги в економіці в умовах повної зайнятості. *Модель Кейнса*, яку було розроблено у 1936 р., давала відповіді на проблеми, що виникли у світі у зв'язку з кризою перевиробництва та масового безробіття у період Великої депресії 1929—1933 рр. Головне питання полягало в тому, як досягти рівноваги, коли економіка далеко відійшла від рівноважного стану і сталося масове безробіття. Відповідь полягала в особливій регуляторній економічній політиці держави, оскільки ринкові сили, що діють автоматично, не могли гарантувати досягнення рівноваги.

Розглянемо найпростіший варіант моделі Кейнса і порівняємо його із класичною моделлю. У моделі Кейнса діють три типи активів: гроші, облігації та фізичний капітал. Тут відносну ціну грошей, виражену в облігаціях, характеризує ставка відсотка за облігаціями, і припускається, що в умовах рівноваги норма прибутку на K дорівнює ставці доходу за облігаціями. Таким чином, модель дає змогу простежити, як грошово-кредитна політика впливає на виробництво. Наприклад, емісія грошей зумовлює збільшення грошової маси, що змінює пропорції обміну між грошима та облігаціями. Зі збільшенням маси грошей їх зберігатимуть тільки за умови зниження норми відсотка на облігації, при цьому норма прибутку теж має спадати через зв'язок між облігаціями та капіталом.

Умова максимуму прибутку $\pi(K) = p\ F(K,L) - r\ K$ має вигляд

$$\frac{\partial\pi(K)}{\partial K} = p\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - r = 0(\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0).$$

Отже, гранична продуктивність капіталу у вартісному вимірі дорівнює нормі прибутку r. Зниження r веде до спаду $\partial F/\partial K$, а оскільки $\partial F/\partial K$ зменшується зі зростанням K, спад r веде до збільшення попиту на інвестиційні товари, а отже, і на всі товари в цілому. Це означає, що помірне збільшення грошової маси зумовлює зростання попиту на товари і, відповідно, збільшення пропозиції товарів, тобто зростання кінцевого продукту.

Якщо з якихось причин загальний попит E на продукцію виявився меншим від пропозиції Y_* при повній зайнятості, то, згідно з Кейнсом, фактично вироблений кінцевий продукт Y дорівнюватиме попиту E, тобто $Y < Y_*$, що негайно вплине на обсяг використаної праці L, який буде меншим за L_* у класичній моделі, при цьому різниця $L_* - L$ визначить рівень безробіття.

Отже, основні особливості моделі Кейнса порівняно з класичною моделю такі:

1) рівноваги на ринку товарів досягають, якщо попит дорівнює фактичній пропозиції;

2) фактичний попит на працю визначається фактично затребуваним продуктом, і рівноваги на ринку праці може бути досягнуто тоді, коли ринок товарів перебуватиме в рівновазі.

У класичній моделі рівновага на ринку праці встановлювалась при повній зайнятості та реальній зарплаті $(\omega/p)_*$, яка визначалась з умови $L_S(\omega/p) = L_D(\omega/p) = L_*$, де L_* — обсяг праці в разі повної зайнятості. Водночас рівноважний обсяг кінцевого продукту Y_* визначали рівністю $Y_* = F(K, L_*)$.

Якщо позначити через $Lq(r)$ функцію попиту на облігації залежно від відсоткової ставки, то найпростіший варіант моделі Кейнса можна подати у вигляді

$$L_S = L_S(\frac{\omega}{p}),\ L_D = L_D(Y); \qquad (3.6)$$

$$M_D = k\ p\ Y + Lq(r),\ \frac{dLq(r)}{dr} < 0,\ M_S = M_D; \qquad (3.7)$$

$$E_D = C(Y) + I(r),\ \frac{dC(Y)}{dY} > 0,\ \frac{dI(r)}{dr} < 0,$$

$$E_S = Y(L),\ E_D = E_S. \qquad (3.8)$$

Для подальшого аналізу спростимо нашу модель. Нехай функції $C(Y)$ та $I(r)$ є афінними, тобто

$$C(Y) = \bar{C} + \hat{c}\ Y,\ I(r) = \bar{I} - \hat{f}\ r, \qquad (3.9)$$

де $\bar{C}$ — автономне споживання; $\hat{c}$ — гранична схильність до споживання, тобто $\hat{c} = dC/dY \in (0,1)$; $\bar{I}$ — автономні інвестиційні видатки; $\hat{f}$ — чутливість інвестиційних видатків до норми відсотка r, тобто $\hat{f} = -\ dI/dr > 0$.

На фазовій площині станів економіки (Y, r) умова рівноваги (3.9) на ринку товарів буде мати вигляд

$$Y = \bar{C} + \hat{c}\ Y + \bar{I} - \hat{f}\ r,$$

тобто лінія рівноваги на ринку товарів (на рис. 3.3 — це лінія IS, *лінія інвестицій та заощаджень*) є прямою й описується афінною функцією

$$Y = \frac{\bar{C} + \bar{I}}{1 - \hat{c}} - \frac{\hat{f}}{1 - \hat{c}}\ r, \qquad (3.10)$$

яка є спадною за r, а отже, за фіксованого r існує єдине рівноважне значення $Y^*(r)$.

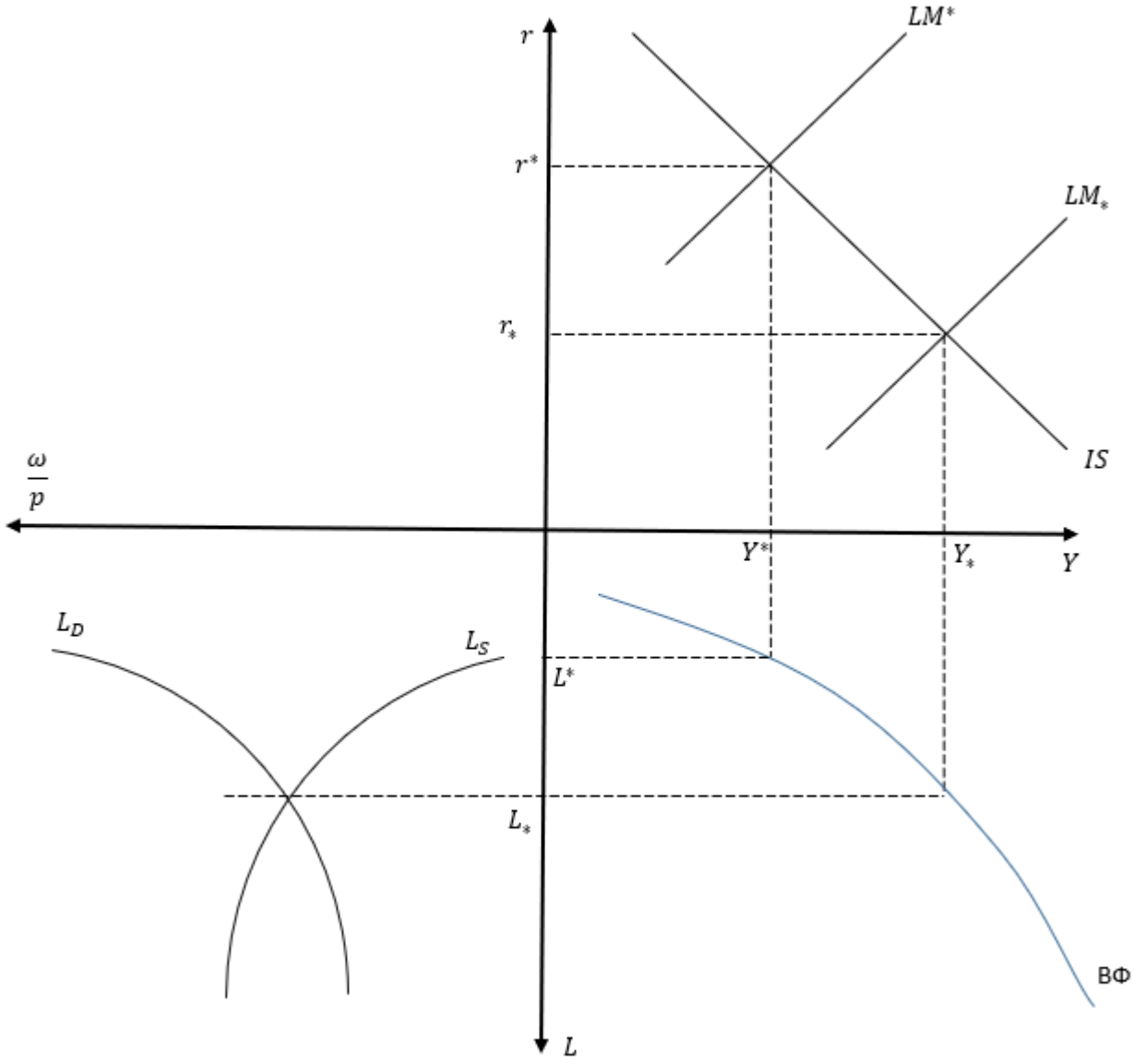

Рис. 3.3.

Розглянемо тепер рівновагу на ринку грошей припускаючи, що

$$Lq(r) = \bar{h} - \hat{j}\, r, \qquad (3.11)$$

де $\bar{h}$ — автономний рівень видатків на облігації; $\hat{j}$ — чутливість Lq до r, причому $\hat{j} = -dLq/dr > 0$.

Тоді умова рівноваги (3.8) буде мати вигляд

$$Y = \frac{M_S - \bar{h}}{k\ p} + \frac{\hat{j}}{k\ p}\ r, \qquad (3.12)$$

тобто лінія рівноваги на ринку грошей (*лінія грошей* LM) є зростаючою афінною функцією r, а отже, за фіксованого r існує єдине рівноважне значення $Y_M^*(r)$.

Таким чином, *загальної рівноваги* на ринку товарів та грошей досягають за $Y^*(r^*) = Y_M^*(r) = Y^*$, причому точка рівноваги (Y^*, r^*) є єдиною. Ця рівновага на ринках грошей та товарів однозначно визначає фактичну потребу у праці L^*:

$$Y^* = F(K(r^*, L^*), L^*),\ p\ \frac{\partial F(K, L^*)}{\partial K} = r^*.$$

Загальну графічну ілюстрацію встановлення рівноваги у моделі Кейнса показано на рис. 3.3. У першому квадранті зображено лінії IS та LM, у четвертому квадранті — виробничу функцію економіки як функцію праці L, у третьому квадранті — криві попиту та пропозиції на працю.

Якщо класична модель припускає автоматичну тенденцію до повної зайнятості, то в моделі Кейнса її немає, і рівновага може встановлюватись при неповній зайнятості. Для зменшення цієї диспропорції потрібна спеціальна політика держави.

Розглянемо економіку в дезагрегованому вигляді. Її складовими виступають окремі виробники та споживачі. Модель поведінки економічних агентів на такому ринку запропонував у середині XIX ст. швейцарський економіст *Леон Вальрас.*

Нехай економіка складається з H споживачів та E підприємств. Підприємства є багатопродуктовими і випускають n типів продукції, витрачаючи при цьому m типів ресурсів. Нехай при цьому p_i — ціна одиниці продукції i-го виду; ω_j — ціна одиниці витрат j-го виду. Вважаємо, що економіка є *конкурентною.*

Споживачі, діючи в межах своїх бюджетних обмежень, намагаються отримати максимум задоволення своїх потреб від придбання продукції, а виробники прагнуть до максимізації прибутків від виробництва.

Нехай r_j^e — кількість первинних ресурсів виду j, які закуповує фірма e; q_i^e — обсяг продукції виду i, який продає фірма e. Тоді прибуток фірми e має вигляд

$$\pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i \, q_i^e - \sum_{j=1}^{m} \omega_j \, r_j^e, e = \overline{1,E}. \qquad (3.13)$$

Кожна фірма максимізує власний прибуток за додаткового обмеження

$$\Phi^e(q^e, r^e) = 0, \; e = \overline{1,E}, \qquad (3.14)$$

де $\Phi^e(q^e, r^e)$ — виробнича функція фірми e в неявному вигляді.

Умови оптимальності для задачі максимізації прибутку (3.13) за обмежень (3.14) набувають вигляду

$$\lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial q_i^e} = -p_i, \; \lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial r_j^e} = \omega_j, \; \lambda^e > 0;$$

$$\Phi^e(q^e, r^e) = 0, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}, \; e = \overline{1,E}. \qquad (3.15)$$

Таким чином, умови оптимальності (3.15) складаються з $E\,(n + m + 1)$ рівнянь, які містять стільки ж невідомих, включаючи множник Лагранжа λ^e.

Тепер охарактеризуємо поведінку споживачів. Кожний з них має певний набір виробничих факторів (наприклад, робочу силу), які він може продати на ринку факторів виробництва та отримати дохід. Крім того, кожний споживач може мати свою частку у фірмі та отримувати відповідну частку її прибутків. Загальний дохід від продажу факторів виробництва та участі у справах фірм споживач використовує для закупівлі товарів і послуг на ринку продукції.

Нехай x_i^h — кількість i-ї продукції, закупленої споживачем h; y_j^h — кількість j-го фактора, проданого споживачем h. Тоді корисність, отриману споживачем h від товарів та послуг, а також від продажу факторів, можна охарактеризувати функцією корисності

$$U^h(x^h, y^h), \; h = \overline{1,H}, \qquad (3.16)$$

де $(x^h)' = (x_1^h, \ldots, x_n^h)$, $(y^h)' = (y_1^h, \ldots, y_m^h)$.

Бюджетне обмеження для споживача h має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \, y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} \, \pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i^h, \; h = \overline{1,H}, \qquad (3.17)$$

де $s^{h,e}$ — частка участі споживача h у справах фірми e.

Споживач намагається максимувати свою корисність (3.16) за бюджетного обмеження (3.17).

Поведінку споживача описують системою рівнянь, які виражають умови оптимальності в оптимізаційній задачі (3.16)—(3.17),

$$\frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} = \mu^h \, p_i, \frac{\partial U^h}{\partial y_j^h} = -\mu^h \, \omega_j, \; \mu^h > 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \, y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} \, \pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i^h, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}, \; h = \overline{1,H}. \qquad (3.18)$$

Таким чином, умови оптимальності (3.18) складаються з $H\,(n + m + 1)$ рівнянь, які містять стільки ж невідомих, включаючи множник Лагранжа μ^h.

Системи рівнянь (3.15) та (3.18) описують рівновагу виробників та споживачів окремо. До цих рівнянь слід додати балансові рівняння на товарному та ресурсному ринках, тобто

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e, \; i = \overline{1,n}; \qquad (3.19)$$

$$\sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e, \; j = \overline{1,m}. \qquad (3.20)$$

Таким чином, системи рівнянь (3.15), (3.18), (3.19) та (3.20) описують рівноважний стан ринкової економіки і складаються з $(H + E)\,(n + m + 1) + n + m$ скалярних рівнянь.

Згідно із *законом Вальраса***,** загальний попит має дорівнювати загальній пропозиції за будь-якої системи цін.

Із цього випливає, що в системі рівноваги (3.15), (3.18), (3.19)—(3.20) одне із

рівнянь є наслідком інших рівнянь. Справді, розглянемо балансові рівняння (3.17). Підсумуємо їх, враховуючи, що сума часток $s^{h,e}$ дорівнює одиниці для кожної фірми,

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \, y_j^h + \sum_{e=1}^{E} \pi^e = \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i^h. \qquad (3.21)$$

Враховуючи вираз (3.13) для прибутку фірм, запишемо рівняння (3.21) у вигляді

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \, y_j^h + \sum_{e=1}^{E} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, q_i^e - \sum_{j=1}^{m} \omega_j \, r_j^e\right) = \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i^h,$$

або, групуючи вирази,

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \left(\sum_{h=1}^{H} y_j^h - \sum_{e=1}^{E} r_j^e\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{e=1}^{E} q_i^e\right). \qquad (3.22)$$

Із виразу (3.22) закону Вальраса випливає, що одне з рівнянь загальної рівноваги залежить від інших. Нехай, наприклад, усі фактори, крім останнього, а також усі товари є зрівноваженими:

$$\sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e, \; j = \overline{1, m-1};$$

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e, \; i = \overline{1, n}.$$

Підставляючи ці співвідношення у (3.22), отримаємо

$$\omega_m \left(\sum_{h=1}^{H} y_m^h - \sum_{e=1}^{E} r_m^e\right) = 0.$$

Отже, за $\omega_m \neq 0$ має виконуватись рівновага на ринку останнього фактора, а останнє рівняння із (3.20) може бути виведене з інших рівнянь системи.

Таким чином, згідно із законом Вальраса, маємо $(H + E)(n + m + 1) + n + m - 1$ незалежних рівнянь загальної рівноваги.

Розглянемо кількість невідомих у системі рівноваги.

Додаючи до системи рівноваги балансові рівняння (3.19)—(3.20), ціни як на товари, так і на ресурси можна «перевести» з екзогенних в ендогенні. В

екстремальній моделі поведінки виробників та споживачів ціни (p, ω) входять лінійно, тобто ендогенні змінні q_i^e, r_j^e, x_i^h, y_j^h, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $e = \overline{1,E}$, $h = \overline{1,H}$ є однорідними функціями нульового ступеня однорідності відносно цін. Це дозволяє в системі рівноважних рівнянь перейти до відносних цін $(1, p_2/p_1, \ldots, \omega_1/p_1, \ldots, \omega_m/p_1)$. Таким чином, система рівнянь загальної рівноваги є замкнутою: кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих. Основним питанням для системи загальної рівноваги є встановлення її продуктивності.

Спростимо модель загальної рівноваги таким чином. У неокласичній моделі економіки, що розглядалася вище, споживачі та виробники однозначно встановлюють свої плани споживання $x^h = (x_i^h(p))_{i=1}^n$, $h = \overline{1,H}$ і плани виробництва $q^e = (q_i^e(p))_{i=1}^n$, $e = \overline{1,E}$ за будь-яких цін p.

Векторну функцію

$$\Sigma'(p) = (\Sigma_1(p), \ldots, \Sigma_n(p)),$$

де

$$\Sigma_i(p) = \sum_{h=1}^{H} x_i^h(p) - \sum_{e=1}^{E} q_i^e,$$

називають *функцією надмірного попиту.*

Нехай для цієї функції виконуються такі припущення:

I. *Функція $\Sigma(p)$ — однорідна нульового ступеня відносно цін, тобто $\Sigma'(\alpha\ p) = \Sigma'(p)$, $\alpha > 0$.*

Ця властивість дає змогу обирати ціни зі стандартного цінового симплексу

$$S_n = \{p\colon p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

II. *Функція $\Sigma(p)$ — однозначна та неперервна відносно цін.*

III. *Функція $\Sigma(p)$ задовольняє закон Вальраса у вартістному сенсі:*

$$p'\ \Sigma(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \Sigma_i(p) = 0.$$

Означення 3.1. *Систему цін p^* у цій моделі називають рівноважною, якщо*

виконуються умови

$$p^* \geq 0, \ \Sigma(p^*) \leq 0. \qquad (3.23)$$

Теорема 3.1. *Якщо в неокласичній моделі ринкової економіки функція надмірного попиту $\Sigma(p)$ задовольняє умови $I - III$, то система рівноважних цін p^* існує.*

Доведення. Доведення спирається на *теорему Брауера про нерухому точку:* неперервне відображення f компактної опуклої множини $X \subset R^n$ у себе має нерухому точку, тобто $x^* = f(x^*)$.

Розглянемо ціновий індикатор $\Delta'(p) = (\Delta_1(p), \ldots, \Delta_n(p))$, $\Delta_i(p) = \max\{0, \Sigma_i(p)\}$. Тоді $\Delta(p)$ має такі властивості:

1) $\Delta_i(p) > 0 \Leftrightarrow \Sigma_i(p) > 0 \forall i$;

2) $\Delta_i(p) = 0$, якщо $\Sigma_i(p) = 0$;

3) $p_i + \Delta_i(p) > 0, \ i = \overline{1, n}$.

Функція $\Delta(p)$ вказує на тенденцію зміни цін: ціна i-го товару зростає, коли попит на нього не задовольняється і $\Delta_i(p) > 0$, та не змінюється, коли $\Delta_i(p) = 0$.

Розглянемо нормовану функцію скоригованих цін:

$$f(p) = \frac{p + \Delta(p)}{\mu(p)}, \ \mu(p) = \sum_{i=1}^{n} (p_i + \Delta_i(p)).$$

Функцію $f(p)$ визначено коректно, оскільки для $p \in S_n$ маємо

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^{n} (p_i + \Delta_i(p)) \geq 1.$$

З означення $f(p)$ випливає, що ця функція є неперервною, $f: S_n \to S_n$, тому що $f(p) \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_i + \Delta_i(p))}{\mu(p)} = 1.$$

Застосувавши до функції $f(p)$ теорему Брауера, отримуємо $p^* = f(p^*)$, $p^* \in S_n$, або $p^* + \Delta(p^*) = \mu(p^*) \, p^*$. Перевіримо, чи буде вектор p^*

рівноважною ціною, тобто $\Sigma(p^*) \leq 0$. Покладемо $\nu = \mu(p) - 1$. Тоді $\nu\ p^* = \Delta(p^*)$. Помноживши цю рівність на $\Sigma(p^*)$ та враховуючи умову III, отримаємо $\Sigma'(p^*)\ \Delta(p^*) = 0$. Нехай $\Sigma_{i_0}(p^*) > 0$. Тоді буде порушуватись попередня рівність, отже, $\Sigma(p^*) \leq 0$. •

3.2. Задачі та завдання для самостійного розв'язання

Завдання 3.1. *Виділити основне, скласти модель, навести приклади з поясненням до моделей.*

1. Класична модель ринкової економіки.
2. Модель Кейнса.
3. Модель Вальраса.
4. Схильність до ризику.

Завдання 3.2. Сформуйте умови прийняття або відхилення задачі інвестування / гри / виробництва / лотереї.

Завдання 3.3.

1. Розробити економіко-математичну модель задачі відповідно до заданого варіанта.
2. Отримати розв'язок моделі засобами пакета MathCad.
3. Дати економічну інтерпретацію отриманого розв'язку.
4. Виконати моделювання та економічний аналіз різних ситуацій, змінюючи основні змінні моделі як у бік збільшення, так і в бік їх зменшення (відповідь на запитання «Що буде, якщо...?»)

Приклад виконання роботи.

Структурно модель Ерроу—Дебре дуже подібна до моделі Вальраса, від останньої вона різниться конкретизацією природи походження функцій пропозиції та попиту, а також механізмом утворення доходу споживача.

Розглянемо економіку із простором R => 2 як простору товарів і трьома учасниками A = (1, 2, 3), які мають такі характеристики:

Учасник 1: початковий запас $w1$ = (1, 2), функція корисності

$u1\ (x, y) = x \cdot y$.

Учасник 2: початковий запас $w2$ = (1, 1), функція корисності

$u2\ (x, y) = x \wedge 2 \cdot y$.

Учасник 3: початковий запас $w3$ = (2, 3), функція корисності

$u3\ (x, y) = x \cdot y \wedge 2$.

Повний запас є вектором $w = w1 + w2 + w3$ = (4, 6).

Знайдемо функції попиту $x1$ (.), $X2$ (.), $X3$ (.).

Зафіксуємо ціну: $p = (p1, p2) >> 0$.

Перший учасник максимізує функцію корисності $u1\ (x, y) = x \cdot y$ за бюджетного обмеження $p1 \cdot x + p2 \cdot y = p1 + 2 \cdot p2$. Використовуючи множники Лагранжа, бачимо, що в точці максимуму має виконуватись рівняння $\nabla u1 = (x, y) = \lambda p$. Таким чином, маємо систему рівнянь $x = \lambda p1,\ y = \lambda p2$, $p1 \cdot x + p2 \cdot y = p1 + 2 \cdot p2$.

Розв’язуючи її, отримуємо:

$X1\ (p) = ((p1 + 2 \cdot p2) / 2 \cdot p1, (p1 + 2 \cdot p2) / 2 \cdot p2)$.

Другий учасник максимізує функцію корисності $u2\ (x,\ y) = x\ \wedge\ 2\ \ y$ за бюджетного обмеження $p1 \cdot x + p2 \cdot y = p1 + p2$. Використовуючи множники Лагранжа, отримуємо систему рівнянь

$2 \cdot x \cdot y = \lambda p1$; $x\wedge 2 = \lambda p2$, $p1 \cdot x + p2 \cdot y = p1 + p2$.

Розв'язуючи її, отримуємо

$X2\ (p) = ((2 \cdot p1 + 2 \cdot p2) / 3 \cdot p1, (p1 + p2) / 3 \cdot p2)$.

Для третього учасника отримуємо систему

$y\wedge 2 = \lambda p1$, $2 \cdot x \cdot y = \lambda p2$, $p1 \cdot x + p2 \cdot y = 2 \cdot p1 + 3 \cdot p2$.

Розв'язуючи її, отримуємо

$X3\ (p) = ((2 \cdot p1 + 3 \cdot p2) / 3 \cdot p1, (4 \cdot p1 + 6 \cdot p2) / 3 \cdot p2)$.

Таким чином,

$X1(p) + X2(p) + X3(p) = ((11 \cdot p1 + 16 \cdot p2)/6 \cdot p1, (13 \cdot p1 + 20 \cdot p2)/6 \cdot p2)$, і відповідно, $X1\ (p) + X2\ (p) + X3\ (p) = ((11 \cdot p1 + 16 \cdot p2) / 6 \cdot p1, (13 \cdot p1 + 20 \cdot p2) / 6 \cdot p2)$. Тоді

$\xi(p) = ((11 \cdot p1 + 16 \cdot p2) / 6 \cdot p1, (13 \cdot p1 + 20 \cdot p2) / 6 \cdot p2) - (4, 6) = ((-13 \cdot p1 - 16 \cdot p2) / 6 \cdot p1, (13 \cdot p1 - 16 \cdot p2) / 6 \cdot p2)$.

Очевидно, що вищенаведена рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $13 \cdot p1 - 16 \cdot p2 = 0$. Беручи до уваги, що $p1 + p2 = 1$, отримуємо для рівноважної ціни таке значення

$P = (16/29; 13/29) = (0{,}45; 0{,}55)$.

Номер варіанта	u1	u2	u3	W1	W2	W3
1	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$x \cdot y$	$Y \cdot \exp(x)$	(1,2)	(3,4)	(1,1)
2	0,5x + y	lg (x) +2 · y	$\sqrt{2 \cdot x + 4 \cdot y}$	50	9670	40
3	Min (x, y)	4 · x +3 · y	2 · log (x + y)	45	6280	39
4	Min (x / 2, y)	2 · exp (x + y)	2 · x +3 · y	51	9800	33
5	2 · x ^ 2 · y	3 · x +2 · y	$\sqrt{2 \cdot x + 3 \cdot y}$	58	8250	39
6	3 · lg (x-y)	2 · x + y ^ 3	ln (x) + ln (y)	60	1100	42
7	4 · exp (x) + y	min (x / 2, y / 3)	3 · x +2 * y	54	1050	41
8	$\sqrt{2 \cdot x + 4 \cdot y}$	0,5x + y	3 · lg (x-y)	59	1340	44
9	lg (x) +2 · y	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	3 · x · y	62	1500	45
10	4 · x +3 · y	Y · exp (x)	Min (x, y)	63	1450	50
11	ln (x) + ln (y)	2 · x ^ 2 · y	2 · exp (x + y)	55	1410	42
12	3 · lg (xy)	$\sqrt{2 \cdot x + 4 \cdot y}$	2 · x + y ^ 3	58	1290	49
13	$\sqrt{2 \cdot x + 4 \cdot y}$	Min (x / 2, y)	4 · x +3 · y	60	8570	45

Контрольні запитання

1. Сформуйте принципи еволюційної економіки та синергетичної економіки.
2. Як формується композиція моделей складних економічних об’єктів?
3. Сформулюйте основні засади алгоритмічного та імітаційного моделювання.
4. Сформулюйте рівняння Слуцького та елементи його аналізу.
5. Сформулюйте принципи стратегії Курно, Стакельберга, Бертрана та їх порівняння.
6. Наведіть модель Еванса.

7. Сформуйте Модель Кейнса.
8. Як виглядає класична модель ринкової економіки?
9. Назвіть основні принципи ринку грошей.
10. Назвіть Основні принципи ринку товарів.
11. Сформуйте Модель Солоу.
12. Сформулюйте принципи аналізу макроекономічної політики.

Розділ 4. Мікроекономіка невизначеності. Фінансові та страхові ринки.

4.1. Припущення сподіваної корисності. Теорема фон Неймана — Моргенштерна. Поведінка агентів в умовах ризику: Міри Ерроу — Пратта уникання ризику. Застосування до задач страхування: попит на страхові послуги

У звичайній теорії економічного вибору в детермінованих умовах не припускається принципової відмінності між окремими актами вибору. Проте в умовах невизначеності акти вибору та їх наслідки залежать від зовнішніх обставин, які трактуються як *стани природи.*

Множину альтернатив, з якої робиться вибір, називають *проспектом* або *лотереєю.*

Розглянемо приклад скінченної множини станів, який складається із s елементів, де кожний проспект має s наслідків вибору: $x^1, x^2, \ldots, x^s$ у деякій множині $X \subseteq R^n$. Вважатимемо, що кожен наслідок x^i може бути отриманий з деякою ймовірністю p_i. Множина всіх подібних ймовірностей утворює дискретний ймовірнісний розподіл $\{p \in R_+^n: \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$. Таким чином, під *проспектом* або *лотереєю* матимемо таблицю

$$y = \bigoplus_{i=1}^s p_i \circ x^i = p_1 \circ x^1 \oplus \ldots \oplus p_s \circ x^s. \qquad (4.1)$$

Позначимо через Y множину всіх проспектів для окремого агента, який стоїть перед проблемою вибору в умовах описаної вище невизначеності. Припустимо, що агент може робити вибір із множини Y за допомогою деякого відношення переваги $\succeq$. Крім того, вважається можливим утворення *складних проспектів*. Нехай

$$y_j = \bigoplus_{i=1}^s p_i^j \circ x^i, \; j = \overline{1, m}.$$

Тоді складний проспект

$$y = \bigoplus_{j=1}^m q_j \circ y_j, \; q \in R_+^m, \; \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

До найпростіших належать проспекти з двома та одним наслідком, тобто проспекти вигляду

$$y = p \circ x^1 \oplus (1 - p)\, x^2 = (p; x^1, x^2);$$

$$y = 1 \circ x = 1 \circ x \oplus 0 \circ z = (1; x, x) = x.$$

Сформулюємо основні припущення сподіваної корисності у вигляді аксіом.

Аксіома 4.1 Агент має на множині Y усіх проспектів відношення нестрогої переваги $\succeq$, яке є повним квазіпорядком, тобто $(X, \succeq)$ — поле переваг у задачі вибору рішення агентом.

Аксіома 4.2 (неперервність). Для всіх y^1, y^2, $y^3 \in Y$ таких, що $y^1 \succeq y^2 \succeq y^3$ є таке $\alpha \in [0,1]$, що $\alpha \circ y^1 \oplus (1 - \alpha) \circ y^3 = (\alpha; y^1, y^3) \sim y^2$.

Інакше кажучи, для середнього проспекту є можливість його інтерполяції імовірнісною сумішшю крайніх проспектів.

Аксіома 4.3 (редукція складного проспекту). Для складного проспекту

$$y = \oplus_{i=1}^{m} q_i \circ y_i,\ q \in R_+^m,\ \sum_{i=1}^{m} q_i = 1,$$

де

$$y_i = \oplus_{j=1}^{s} p_j^i \circ x^j,\ p^i \in R_+^s,\ \sum_{j=1}^{s} p_j^i = 1,\ i = \overline{1, m},$$

є звичайний проспект

$$\hat{y} = \oplus_{j=1}^{s} \hat{p}_j \circ x^j,\ \hat{p}_j = \sum_{k=1}^{m} q_k\, p_j^k,$$

еквівалентний y, тобто $\hat{y} \sim y$.

Розглянемо приклад. Нехай складний проспект має вигляд

$$y = (\alpha; x^2, (\pi; x^1, x^2)).$$

Покажемо що $y \sim ((1 - \alpha)\, \pi; x^1, x^2)$.

Справді, для складного проспекту маємо $q_1 = \alpha$, $q_2 = 1 - \alpha; p_1^1 = 0$, $p_2^1 = 1$; $p_1^2 = \pi$, $p_2^2 = 1 - \pi$. Тоді

$\hat{p}_1 = \sum_{k=1}^{m} q_k \; p_1^k = \pi \; (1 - \alpha)$, $\hat{p}_2 = \sum_{k=1}^{m} q_k \; p_2^k = \alpha + (1 - \alpha) \; (1 - \pi) = 1 - \pi \; (1 - \alpha)$,

тобто $y \sim \hat{y}$.

Аксіома 4.4 (незалежність). (*1*) Для всіх $y^1, \; y^2 \in Y$ таких, що $y^1 \succ y^2$ є таке $\alpha \in (0,1)$, що для довільного $y \in Y$: $\alpha \circ y^1 \oplus (1 - \alpha) \circ y \succ \alpha \circ y^2 \oplus (1 - \alpha) \circ y$. (*2*) Для всіх $y^1, \; y^2 \in$ Y таких, що $y^1 \sim y^2$ є таке $\alpha \in (0,1)$, що для довільного $y \in Y$: $\alpha \circ y^1 \oplus (1 - \alpha) \circ y \sim \alpha \circ y^2 \oplus (1 - \alpha) \circ y$, тобто будь-яка третя альтернатива не порушує строгу перевагу або еквівалентність двох альтернатив.

Аксіома 4.5 (монотонність). Нехай $x^1, \; x^2 \in X, \; x^1 \geq x^2, 0 < \pi, \; \pi' < 1$. Тоді

$$(\pi; x^1, \; x^2) \succ (\pi'; x^1, \; x^2) \Leftrightarrow \pi > \pi'; \tag{4.2}$$

$$(\pi; x^1, \; x^2) \sim (\pi'; x^1, \; x^2) \Leftrightarrow \pi = \pi', \tag{4.3}$$

тобто перевага віддається лотереї з більшою ймовірністю отримання більш переважної альтернативи.

Теорема 4.1 (фон Неймана — Моргенштерна). *Якщо виконані аксіоми 4.1—4.5, то є така дійснозначна функція* u на Y, *що*

1) *для* $y^1, \; y^2 \in Y$ *виконується відношення* $y^1 \succ y^2$ *тоді і тільки тоді, коли* $u(y^1) > u(y^2)$;

2) *для будь-якого проспекту* $y = \bigoplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i$ *маємо*

$$u(\bigoplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i) = \sum_{i=1}^{s} p_i \; u(x^i) \; \bullet,$$

при цьому функцію корисності із теореми 4.1 називають *NM-функцією корисності.*

Теорема 4.2 (про єдиність NM -функції корисності). *Якщо* u: $Y \to R^1$ *є NM-функцією корисності, то вона визначена з точністю до довільного афінного перетворення з додатнім коефіцієнтом однорідності, тобто*: 1) *для довільного*

$a > 0$ та $c \in R^1$ *функція* $v(y) = a\ u(y) + c, y \in Y$ *також є* NM*-функцією корисності, що зображує таке саме відношення переваги на* Y; 2) *для* NM*-функції корисності* u *будь-яке монотонне перетворення, яке зберігає властивість сподіваної корисності п. 2 теореми 4.1, є афінним перетворенням.* •

Розглянемо основні заперечення проти наведених припущень сподіваної корисності. Більшість контрприкладів відносно припущень сподіваної корисності були висунуті М. Алле.

1. Заперечення щодо аксіоми 4.2 (неперервність). Нехай є лотерея з наслідками: $x^1 = 100$ у. о., $x^2 = 1$ у. о., x^3 — отримати смертельний постріл. Тоді очевидні строгі переваги: $x^1 \succ x^2 \succ x^3$. Чи можна в цьому разі постулювати наявність додатньої ймовірності $p \in (0,1)$, для якої $p \circ x^1 \oplus (1 - p) \circ x^3 \sim x^2$. Навряд чи можна буде знайти раціонального індивідуума, який погодиться на такі правила гри. Подібні заперечення можна усунути, якщо з простору Y усунути екстремальні ситуації і лишити в ньому лише «нормальні» події.

2. Заперечення проти аксіоми 4.4 (незалежності). Розглянемо лотереї: $y^1 = (1; 3000,0)$, $y^2 = (4/5; 4000,0)$. Припустимо, що індивідуум віддає перевагу y^1 перед y^2, тобто $y^1 \succ y^2$. Нехай $y = (1; 0,0)$. Тоді не зрозуміло, чи можна стверджувати, що за усіх $\alpha \in (0,1)$ $(\alpha; y^1, y) \succ (\alpha; y^2, y)$. Наприклад, за $\alpha = 1/4$ маємо $y^3 = (1/4; y^1, y) \sim (1/4; 3000,0)$, $y^4 = (1/4; y^2, y) \sim (1/5; 4000,0)$. У цьому разі індивідуум може віддати перевагу y^4 перед y^3, оскільки у багаторазовій грі у середньому він виграватиме при лотереї y^3: $1/4\ 3000 = 750$, при лотереї y^4: $1/5\ 4000 = 800$.

Нехай $y = \bigoplus_{i=1}^{s} p_i \circ x^i$ — лотерея з виплатами грошей x^i, $i = \overline{1, s}$. Тоді сподіване значення y (сподіваний виграш) матиме вигляд $E(y) = \sum_{i=1}^{s} p_i\ x^i$.

Нехай економічний агент має індивідуальну фунуцію корисності u, яка визначена на множині y з невизначеним ефектом Y. Тоді цей економічний агент буде називатися *нейтральним до ризику,* якщо

$$u(\sum_{i=1}^{s} p_i \ x^i) = \sum_{i=1}^{s} p_i \ u(x^i), \tag{4.4}$$

де припускається, що u є строго монотонно зростаюча функція. Якщо агент буде нейтральним до ризику, то матиме таку функцію корисності:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ x_i + c, \ \alpha_j > 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Агент називатиметься *не схильним до ризику,* якщо його NM -функція корисності строго вгнута, тобто

$$u(\sum_{i=1}^{s} p_i \ x^i) > \sum_{i=1}^{s} p_i \ u(x^i). \tag{4.6}$$

Навпаки, агент буде *схильним до ризику,* якщо його NM-функція корисності строго опукла.

NM-функцію корисності ухильника ризику наведено на рис. 4.1, де сподіване значення проспекту $y = (\pi; x_1, x_2)$, що визначається виразом $E(y) = \pi \ x_1 + (1 - \pi) \ x_2$, зображено відрізком OA, сподівану корисність $Eu(y) = \pi \ u(x_1) + (1 - \pi) \ u(x_2)$ — відрізком AB, а корисність сподіваного виграшу $u(E(y))$ — відрізком AC.

Для ілюстрації таких важливих понять, що характеризують поведінку агента в умовах ризику, як *еквівалент визначеності та ризикова премія*, розглянемо приклад.

Нехай агент стоїть перед вибором однієї з альтернатив:

(a) отримати суму $x_0 + h$ з імовірністю $1/2$, або отримати суму $x_0 - h$

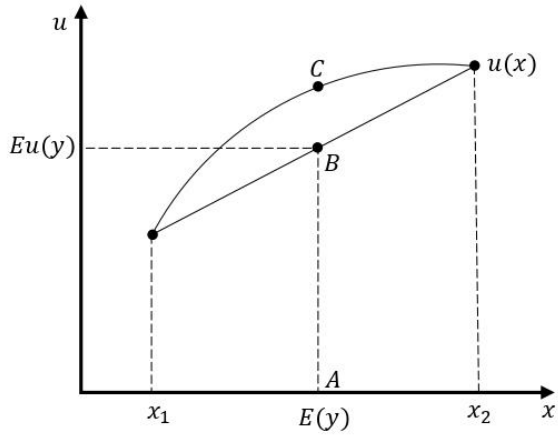

Рис. 4.1.

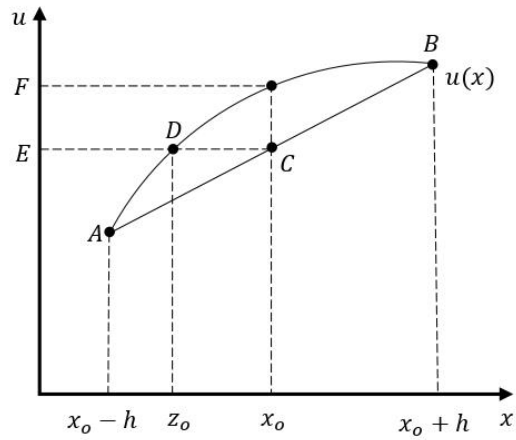

Рис. 4.2.

з імовірністю $1/2$, де $h \in (0, x_0)$.

(b) отримати суму x_0 з імовірністю 1.

Не схильний до ризику агент віддасть перевагу альтернативі (b) перед альтернативою (a), хоча в останній мав шанс отримати більшу суму $x_0 + h$. Для його функції корисності буде виконуватися нерівність

$$0{,}5\ u(x_0 + h) + 0{,}5\ u(x_0 - h) < u(x_0). \qquad (4.7)$$

Це ілюструє рис. 4.2, де строга вгнутість функції $u(x)$ означає, що дуга ADB, що сполучає точки $u(x_0 + h)$ та $u(x_0 - h)$ на графіку u, лежить вище хорди

ACB, яка сполучає ті самі точки. З огляду на те, що функція u строго вгнута та зростаюча, є єдина точка z_0, для якої виконується рівність

$$0{,}5\ u(x_0 + h) + 0{,}5\ u(x_0 - h) = u(z_0). \qquad (4.8)$$

Величину z_0 називають *еквівалентом визначеності* для випадкової величини x_0, при цьому величину $\rho = x_0 - z_0$ називають *ризиковою премією.* Таким чином, *ризикова премія* ρ є максимальною сумою грошей, яку не схильний до ризику агент готовий сплатити, щоб мати вірогідний дохід на відміну від сподіваного доходу від невизначеного проспекту. На рис. 4.2 ρ дорівнює довжині відрізка DC. Із означення ρ випливає, що $\rho = \rho(x_0, h)$.

Отримаємо наближене значення ризикової премії $\rho(x, h)$ у випадку, коли альтернатива (a) виражається загальним проспектом $y = (\pi; x + h, x - h)$. Тоді для еквівалента визначеності маємо тотожність

$$u(x - \rho(x,h)) = \pi\ u(x + h) + (1 - \pi)\ u(x - h). \qquad (4.9)$$

Застосуємо формулу Тейлора до кожного члена тотожності (4.9). Тоді будемо мати

$$u(x - \rho(x,h)) = u(x) - \rho(x,h)\ u'(x) + O_1(\rho(x,h)); \qquad (4.10)$$

$$u(x + h) = u(x) + u'(x)\,h + 0{,}5\ h^2\ u''(x) + O_2(h); \qquad (4.11)$$

$$u(x - h) = u(x) - u'(x)\,h + 0{,}5\ h^2\ u''(x) + O_3(h), \qquad (4.12)$$

де

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{O_1(\rho(x,h))}{\rho(x,h)} = 0,\ \lim_{h \to 0} \frac{O_2(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{O_3(h)}{h} = 0.$$

Підставляючи (4.10)—(4.12) у (4.9) за $\pi = 0{,}5$, отримаємо

$$\rho(x,h) \cong -\frac{h^2}{2}\ \frac{u''(x)}{u'(x)} > 0. \qquad (4.13)$$

Зважаючи на формулу (4.13), уведемо два показники, які характеризують

поведінку агента, не схильного до ризику.

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0. \qquad (4.14)$$

Вираз (4.14) — коефіцієнт абсолютного уникання ризику або міра Ерроу — Пратта абсолютного уникання ризику;

$$R_r(x) = -\frac{x\ u''(x)}{u'(x)} > 0. \qquad (4.15)$$

Вираз (4.15) – коефіцієнт відносного уникання ризику.

Зв'язок між введеними показниками наведено в таких теоремах.

Теорема 4.3. *Якщо функції корисності* $u_i(x)$, $i = \overline{1,2}$ *є двічі неперервно диференційовними, монотонно зростаючими та строго угнутими, то наступні три умови є еквівалентними:*

$$(a)\ R_{a1}(x) > R_{a2}(x);$$

(b) $\rho_1(x,h) > \rho_2(x,h)$ для всіх h;

(c) функція $u_1(x)$ є більш вгнутою, ніж $u_2(x)$, тобто є монотонно зростаюча строго вгнута функція φ, така що $u_1(x) = \varphi\big(u_2(x)\big)$. •

Теорема 4.4. *Міри уникання ризику* $R_a(x)$ *та* $R_r(x)$ *є інваріантними щодо афінних перетворень функції корисності* $u(x)$, *тобто якщо* $u_1(x)$ *— двічі неперервно диференційовна, строго вгнута і зростаюча функція корисності,* $u_2(x) = a\ u_1(x) + b$, $a > 0$, $b \in R^1$ *— її афінне перетворення. Тоді*

$$R_{a1}(x) = R_{a2}(x),\ R_{r1}(x) = R_{r2}(x).\ \bullet$$

К. Ерроу та Дж. В. Пратт постулювали такі гіпотези про індивідуальну поведінку агента щодо ризику.

Гіпотеза 4.1. *Коефіцієнт абсолютного уникання ризику є монотонно спадною функцією, тобто* $R'_a(x) < 0$ *для всіх* x.

Ця гіпотеза свідчить про те, що багаті агенти є більш толерантними до

ризику, ніж бідні.

Гіпотеза 4.2. *Коефіцієнт відносного уникання ризику є монотонно зростаючою функцією, тобто* $R_r'(x) > 0$ *для всіх* x.

Підсумовуючи викладене вище, зауважимо, що типові NM -функції корисності $u(x)$ для не схильного до ризику агента мають такі властивості:

(a) $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$ для всіх $x \in X \subseteq R^1$;

(b) $R_a'(x) < 0$;

$$(c)\ R_r'(x) > 0.$$

Розглянемо деякі приклади щодо властивостей типових NM -функцій корисності $u(x)$.

Приклад 4.1 (квадратична функція). Нехай

$$u(x) = a + b\,x - c\,x^2,\ b,\ c > 0.$$

Тоді $u'(x) = b - 2\,c\,x > 0,\ 0 < x < b/2c;\ u''(x) = -2\,c < 0.$

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2\,c}{b - 2\,c\,x},\ R_r(x) = \frac{2\,c\,x}{b - 2\,c\,x}.$$

Далі

$$R_a'(x) = -\left(\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' = -\frac{u'''(x)\,u'(x) - (u''(x))^2}{(u'(x))^2} = \frac{4\,c^2}{(b - 2\,c\,x)^2} > 0;$$

$$R_r'(x) = \left(\frac{2\,c\,x}{b - 2\,c\,x}\right)' = \frac{2\,b\,c}{(b - 2\,c\,x)^2} > 0.$$

Через нерівність $R_a'(x) > 0$, згідно з якою більш багаті агенти є менше толерантними до ризику, ніж бідні, квадратичні функції не використовуються для опису поведінки економічних агентів в умовах ризику.

Приклад 4.2 (логарифмічна функція корисності). Нехай

$$u(x) = a + b\ln(x + c),\ x^2,\ b > 0,\ c \geq 0, x + c > 0.$$

Тоді $u'(x) = \frac{b}{x + c} > 0;\ u''(x) = -\frac{b}{(x + c)^2} < 0;$

$$R_a(x) = \frac{1}{x + c},\ R_a'(x) = -\frac{1}{(x + c)^2} < 0;$$

$$R_r(x) = \frac{x}{x + c},\ R_r'(x) = \frac{c}{(x + c)^2} > 0,$$

тобто виконуються умови гіпотези 4.2 (a) — (c).

Приклад 4.3. Знайдемо вигляд функції корисності зі сталою мірою уникання ризику. Нехай $R_a(x) = \alpha = const$. Інтегруючи рівняння $-u''(x) = \alpha\ u'(x)$, знаходимо $u(x) = -\exp(-\alpha\ x), \alpha > 0$.

Розглянемо агента, який має деякий актив вартістю a грошових одиниць. Наприклад, це може бути будинок. Припустимо, що агент ризикує втратити частину вартості b через деяку випадкову подію (наприклад, через пожежу будинку).

У межах загальної формальної схеми маємо два стани природи: S_1, коли відбулася несприятлива подія, та S_2, коли такої події не було. За S_1 вартість активу дорівнюватиме $a - b$, а за S_2 вона залишається тією ж самою. Це еквівалентно лотереї $(\pi; a - b, a)$, де π — ймовірність несприятливої події.

Якщо агент діє раціонально, тобто дотримується результатів формальної теорії, розглянутої раніше, то максимальною сумою, яку він погоджується сплатити за уникнення втрат через ризик, є його ризикова премія ρ, яка визначається із співвідношення

$$u(a - \rho) = \pi\ u(a - b) + (1 - \pi)\ u(a), \qquad (4.16)$$

де u — функція корисності агента.

Виникає природнє запитання: кому не схильний до ризику агент готовий сплачувати ризикову премію для уникнення ризику?

Припустимо, що агент може купити у деякій страховій компанії страховий поліс як захист від несприятливої події. Нехай x — сума, яку страхова компанія зобов'язується сплатити агентові, якщо виникне стан S_1, а P — премія за

страхування. Тоді очікуваний дохід агента виражається сумою:

$a_1 = a - b - P + x$, якщо відбувся стан S_1;

$a_2 = a - P$, якщо відбувся стан S_2.

Це еквівалентно лотереї $(\pi; a_1, a_2) = (\pi; a - b - P + x, a - P)$. Сподівана корисність такої лотереї має вигляд

$$\pi\ u(a - b - P + x) + (1 - \pi)\ u(a - P).$$

Агент буде страхуватися, коли ця величина перевищуватиме сподівану корисність без страхування, тобто значення $\pi\ u(a - b) + (1 - \pi)\ u(a)$.

Припустимо, що

$$0 < a - b < a_1 < a_2, \tag{4.17}$$

або

$$0 < a - b < a - b - P + x < a - P.$$

Зауважимо, що нерівність $a - b < a_1$ означає, що $P < x$, тобто страхова премія P менше страхового покриття x; нерівність $a_1 < a_2$ — що $x < b$, тобто виплата, яка надається страховою компанією, не повністю відшкодовує втрати b.

Для не схильного до ризику агента (u — строго вгнута функція) отримаємо (див. рис. 4.3)

$$\pi\ u(a - b - P + x) + (1 - \pi)\ u(a - P) > \pi\ u(a - b) + (1 - \pi)\ u(a), \tag{4.18}$$

що показує попит на страхові послуги.

Спростимо модель (4.18), поклавши $q = \frac{P}{x}$ — ціна страхування за одиницю страхового покриття x. Припустимо, що P — стала ціна для різних значень x та q, екзогенно задана для кожного, хто страхується. Тоді економічний агент обиратиме x так, щоб максимізувати свою сподівану корисність

$$\varphi(x) = \pi\ u(a - b - q\ x + x) + (1 - \pi)\ u(a - q\ x). \tag{4.19}$$

Припускаючи, що оптимальне значення $x^* > 0$, із умов оптимальності першого порядку отримаємо

$$\frac{\pi}{1-\pi}\,\frac{u'(a_1^*)}{u'(a_2^*)} = \frac{q}{1-q}. \qquad (4.20)$$

Обчислимо значення другої похідної функції φ у точці x^*:

$$\varphi''(x^*) = \pi\, u''(a_1^*)\,(1-q)^2 + (1-\pi)u''(a_2^*)\,q^2 < 0 \quad (4.21)$$

через строгу вгнутість функції u, тобто умови оптимальності (4.20) є не лише необхідними, але й достатніми.

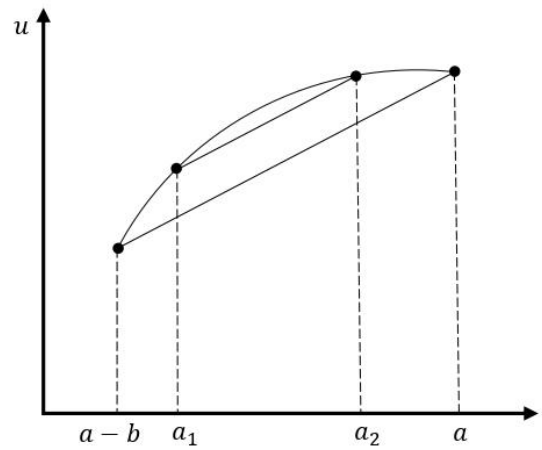

Рис. 4.3.

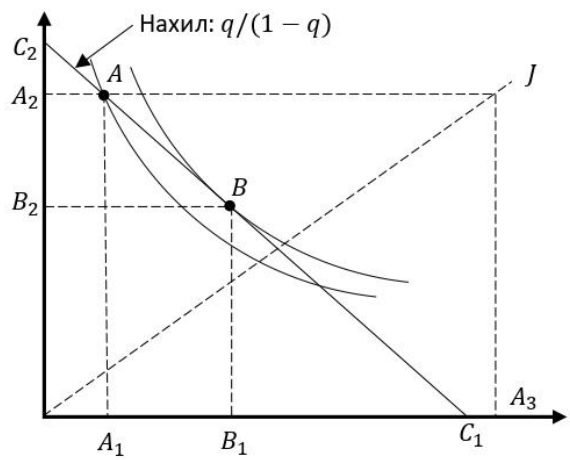

Рис. 4.4.

Геометрично проілюструємо умови оптимальності, (4.20) див. рис. 4.4. З означень величин q, a_1 та a_2 випливає рівність

$$q = \frac{a - a_2}{a_1 - a_2 + b},$$

або

$$q\ a_1 + (1 - q)\ a_2 = a - q\ b. \qquad (4.22)$$

Зазначимо, що ті величини a_1^*, a_2^*, які задовольняють (4.20), також задовольняють (4.22). Справді, a_1^*, a_2^* можуть бути знайдені вибором a_1, a_2, що максимізує $\pi\ u(a_1) + (1 - \pi)\ u(a_2)$ за умови (4.22). Для цього розглянемо функцію Лагранжа:

$L = \pi\ u(a_1) + (1 - \pi)\ u(a_2) + \lambda\ (q\ a_1 + (1 - q)\ a_2 - a + q\ b)$.

Умови оптимальності для неї мають вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = \pi\ u'(a_1) + \lambda\ q = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = (1 - \pi\ u'(a_2) + \lambda\ (1 - q) = 0,$$

звідки й отримаємо вираз (4.20).

Нехай $A = (a - b, a)$ або $OA_1 = a - b$, $OA_2 = a$. Лінія C_1C_2 проходить через точку A з нахилом $-\ q/(1 - q)$. Вона зображує положення тих величин $(a_1,\ a_2)$, які задовольняють вираз (4.22), і тому її називають *лінією можливостей.*

Координатами точки B є $(a_1^*,\ a_2^*)$ і вона є оптимальною точкою для агента. Оскільки нахил кривої байдужості

$$\{(a_1,\ a_2)): \pi\ u(a_1) + (1 - \pi)\ u(a_2) = \pi\ u(a_1^*) + (1 - \pi)\ u(a_2^*)\} \qquad (4.23)$$

(відформувати формулу (4.23))

визначається виразом

$$\frac{da_2}{da_1} = -\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u'(a_1)}{u'(a_2)},$$

умова (4.20) вимагає, щоб крива байдужості була дотичною до лінії можливостей у точці B. Оскільки агент не схильний до ризику, то для нього криві байдужості — опуклі. Зауважимо, що

$$OB_1 = a_1^* = a - b - q\,x^* + x^*,\ OB_2 = a_2^* = a - q\,x^*.$$

Таким чином,

$$B_1A_1 = OB_1 - OA_1 = x^* - q\,x^*,\ B_2A_2 = OA_2 - OB_2 = q\,x^*.$$

Повернемось до умов оптимальності (4.20) і розглянемо поведінку страхової компанії. Коли відбудеться страховий випадок, то компанія сплатить страхувальнику суму $x - P = (1 - q)\,x$. Якщо страховий випадок не відбувся, то компанія отримує премію $P = q\,x$ як вартість страхового полісу. Сподіваний прибуток компанії становитиме $-\pi\,(1 - q)\,x + (1 - \pi)q\,x$. Зважаючи на конкуренцію у страховій галузі, загальні прибутки страхових компаній нульові й тому

$$\pi\,(1 - q)\,x = (1 - \pi)q\,x \Rightarrow \pi = q. \qquad (4.24)$$

Підставляючи рівність із (4.24) в умову (4.20), отримаємо

$$u'(a - b - q\,x^* + x^*) = u'(a - q\,x^*). \qquad (4.25)$$

Оскільки $u'' < 0$, то $x^* = b$, тобто страхове покриття x^* дорівнює витратам b. Таким чином, клієнт буде повністю захищений від утрат.

4.2. Стохастична теорія фірми. Задача вибору портфеля з двох активів: ризикового та безпечного. Домашні господарства в умовах невизначеності: рішення про заощадження і споживання

Припущення про скінченність множини наслідків проспекту та дискретність відповідного розподілу в теорії сподіваної корисності не є принциповими і відповідні конструкції можуть бути поширені на проспекти з нескінченними множинами наслідків за допомогою стандартних конструкцій теорії ймовірностей. Таким чином, для проспекту y з континуальною множиною наслідків $X \subseteq R^n$, і неперервним розподілом цих наслідків, який має щільність розподілу $\varphi(x)$, $x \in X$, відповідний проспект можна записати у вигляді $y = \bigoplus x \circ \varphi(x)$, а відповідну сподівану корисність, пов'язану з функцією корисності u, можна подати у вигляді

$$Eu(y) = \int_X u(x)\ \varphi(x)\ dx. \qquad (4.26)$$

Розглянемо деяку фірму, яка продає довільну кількість своєї продукції за встановленою ринковою ціною p. Припустимо, що ціна p не є сталою, а утворює випадкову величину з відомою щільністю розподілу $\varphi(\mathrm{p})$, і не можна створювати запаси продукції. Єдиний вид продукції y випускається з використанням n типів факторів виробництва з вектором цін $\omega' = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ за допомогою технології, що описує виробнича функція $F(x)$, $x \in R_+^n$, причому

$$F(0) = 0,\ (MP(x))' = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) > 0;$$

$$H(x) = \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\ \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^n < 0\ \forall\ x \in intR_+^n.$$

Припустимо, що випадкова ціна p та вектор цін ω задані екзогенно (оскільки фірма є конкурентною). Тоді випадкова функція прибутку фірми має вигляд

$$\pi(x) = p\ F(x) - \omega'\ x - a,$$

де a — стала вартість виробничих витрат.

Припустимо, що фірма має NM-функцію корисності u, визначену на множині можливих значень випадкового прибутку π, і вибирає вектор виробничих витрат x так, щоб максимізувати сподівану корисність прибутку

$$Eu(\pi) = E(u(p\ F(x) - \omega'\ x - a)) =$$

$$= \int_0^\infty u(p\ F(x) - \omega'\ x - a)\ \varphi(p)\ dp \to \max,\ x \in R_+^n. \quad (4.27)$$

Використовуючи у цьому виразі правило диференціювання інтеграла за параметром, отримаємо такі умови оптимальності першого порядку для вектора витрат $x^* > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ Eu(\pi) = E(u'(\pi)\ (p\ \frac{\partial F}{\partial x_i} - \omega)) = 0, i = \overline{1,n},$$

або

$$E(u'(\pi)\ (p\ \frac{\partial F}{\partial x_i})) = E(u'(\pi))\ \omega_i,\ i = \overline{1,n}. \quad (4.28)$$

Проведемо порівняльний аналіз поведінки фірми у разі випадкової ціни p та її поведінки під час сталої ціни.

Через складність аналізу у загальному випадку обмежемось ситуацією, коли $n = 1$, тобто є один змінний фактор виробництва, яким вважатимемо працю. Таким чином, $x_1 = x$, $\omega_1 = \omega$. Тоді, припускаючи, що $x^* > 0$, матимемо таку форму умов оптимальності

$$E\big(u'(\pi)\, p\ F'(x^*)\big) = E\big(u'(\pi)\big)\, \omega; \quad (4.29)$$

$$E(u''(\pi)\ (p\ F'(x^*) - \omega)^2 + u'(\pi)\ p\ F''(x^*)) < 0. \quad (4.30)$$

Зауважимо, що умова (4.30) виконуватиметься, якщо фірма не схильна до ризику, тобто $u'' < 0$ (та звичайних припущеннях: $u' > 0$, $F''(x^*)) < 0$).

Нехай $\bar{p} = E(p)$ — середня ціна. Тоді умову (4.29) можна переписати у

вигляді

$$E(u'(\pi)\ (p\ -\ \bar{p}))\ F'(x^*)\ =\ E(u'(\pi))\ (\omega\ -\ \bar{p}\ F'(x^*)). \qquad (4.31)$$

Оскільки $E(\pi)\ =\ E(p\ F(x^*)\ -\ \omega\ x^*\ -\ a)\ =\ \bar{p}\ F(x^*) -\ \omega\ x^*\ -\ a$, то

$$\pi\ -\ E(\pi)\ =\ (p\ -\ \bar{p})\ F(x^*). \qquad (4.32)$$

З огляду на те, що $F(x^*)\ >\ 0$, із рівності (4.32) отримаємо

$$\pi\ \geq\ E(\pi), \text{коли}\ p\ \geq\ \bar{p};\ \pi\ \leq\ E(\pi), \text{коли}\ p\ \leq\ \bar{p}. \qquad (4.33)$$

Оскільки фірма не схильна до ризику $u''\ <\ 0$, тобто u' є спадною функцією, отримаємо

$$u'(\pi)\ \leq\ u'\big(E(\pi)\big), \text{коли}\ p\ \geq\ \bar{p};\ u'(\pi)\ \geq\ u'\big(E(\pi)\big),$$

$$\text{коли}\ p\ \leq\ \bar{p}. \ (4.34)$$

Для фірми, яка уникає ризику, із нерівностей (4.33)—(4.34) випливає нерівність

$$u'(\pi)\ (p\ -\ \bar{p})\ \leq\ u'(E(\pi))\ (p\ -\ \bar{p}), \qquad (4.35)$$

де рівність виконується тільки тоді, коли $p\ =\ \bar{p}$.

Застосувавши до обох частин нерівності (4.35) оператор математичного сподівання E з урахуванням того, що $E(p\ -\bar{p})\ =\ 0$, отримаємо

$$E(u'(\pi)\ (p\ -\ \bar{p}))\ <\ 0, \qquad (4.36)$$

коли $p\ \neq\ \bar{p}$.

Із рівності (4.31), враховуючи (4.36) і $F'(x^*)\ >\ 0$, отримаємо нерівність

$$E(u'(\pi))\ (\omega\ -\ \bar{p}\ F'(x^*))\ <\ 0. \qquad (4.37)$$

Враховуючи, що $u'\ >\ 0$ і, відповідно, $E(u'(\pi))\ >\ 0$, із нерівності (4.37) отримаємо нерівність

$$\omega\ <\ \bar{p}\ F'(x^*)). \qquad (4.38)$$

Якщо невизначеності у цінах немає, тобто $p\ =\ \bar{p}$, то замість нерівності (4.38) із (4.31) отримаємо рівність

$$\omega = \bar{p}\ F'(x^*)). \tag{4.39}$$

Цю ситуацію зображено на рис. 4.5.

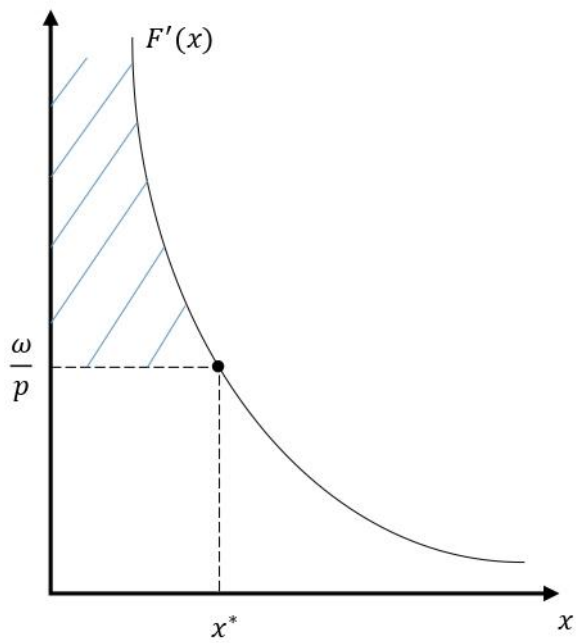

Рис. 4.5.

Таким чином, для не схильної до ризику фірми оптимальні виробничі витрати x^* в умовах невизначеності визначаються із рівняння (4.31) і задовольняють додатково умову (4.38), а в умовах визначеності вектор витрат задовольняє рівняння (4.39), тобто *оптимальні виробничі витрати в умовах невизначеності є меншими, ніж в умовах визначеності.*

Для подальшого аналізу поведінки фірми в умовах невизначеності подамо випадкову ціну p у вигляді

$$p = \bar{p} + \gamma\ \varepsilon, \tag{4.40}$$

де ε — випадкова величина з нульовим середнім ($E\varepsilon = 0$), γ — індикатор невизначеності: за $\gamma = 0$ невизначеність зникає, тобто $p = \bar{p}$; за $\gamma \neq 0$ вона існує.

Підставивши (4.40) у (4.31), отримаємо

$$(\bar{p} - q)\ F'(x^*) = \omega,\ q = -\gamma\ \frac{E(u'(\pi)\varepsilon)}{E(u'(\pi))}. \qquad (4.41)$$

Із (4.41) випливає, що $\bar{p} - q > 0$, оскільки $\omega > 0$, $F'(x^*) > 0$.

Підставляючи (4.40) в (4.35), робимо висновок, що фірма є не схильною до ризику тоді і тільки тоді, коли

$$u'(\pi)\ \gamma\ \varepsilon \leq u'(E(\pi))\ (p - \bar{p}),$$

де рівність виконується лише за $p = \bar{p}$.

Взявши математичне сподівання від обох частин зазначеної нерівності, отримаємо

$$\gamma\ E(u'(\pi)\ \varepsilon) < u'(E(\pi))\ E(p - \bar{p}) = 0. \qquad (4.42)$$

Тоді з (4.42) і (4.41) випливає, що $q > 0$ *тоді і тільки тоді, коли фірма уникає ризику.*

За $q > 0$ рівність із (4.41) означає, що не схильна до ризику фірма в умовах невизначеності має менші виробничі витрати (а отже, й випуск продукції), ніж в умовах визначеності (див. вираз (4.38)), при цьому величина $\bar{p} - q$ може бути проінтерпретована як *«ефективна ціна»* в умовах невизначеності, а q — як *«плата за ризик»*.

Розглянемо приклад двох факторів виробництва, коли $x' = (x_1, x_2)$. Умови оптиальності в цьому випадку мають вигляд (4.28) за $n = 2$. Підставляючи в ці умови (4.40), отримаємо

$$(\bar{p} - q)\ \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = \omega_i,\ i = \overline{1,2}, \qquad (4.43)$$

де q виначається згідно з (4.41).

Із (4.43) випливає, що в умовах невизначеності «ефективне» значення граничної продуктивності кожного фактора дорівнює його ціні. Якщо спостерігається стала ефективність від розширення масштабу виробництва, то рівняння Ейлера для однорідних функцій матиме вигляд

$$F(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} x_2.$$

Тоді

$$(\bar{p} - q) F(x^*) = (\bar{p} - q) \left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_1} x_1^* + \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_2} x_2^*\right) =$$

$$= \omega_1 x_1^* + \omega_2 x_2^*.$$

Отже,

$$E(\pi) = \bar{p} F(x^*) - \omega_1 x_1^* - \omega_2 x_2^* = q F(x^*). \qquad (4.44)$$

Якщо агент не схильний до ризику, то $q > 0$ й із (4.44) випливає, що $E(\pi) > 0$.

Цей результат дещо контрастує з тим, що в умовах визначеності в довгостроковій класичній задачі фірми з технологією, яка має сталу ефективність від розширення масштабу виробництва, маємо

$$\pi = \bar{p} F(x^*) - \omega_1 x_1^* - \omega_2 x_2^* = \bar{p} \left(\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_1} x_1^* + \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_2} x_2^*\right) -$$

$$- \omega_1 x_1^* - \omega_2 x_2^* = \omega_1 x_1^* + \omega_2 x_2^* - \omega_1 x_1^* - \omega_2 x_2^* = 0,$$

тобто прибуток нульовий.

Отже, нерівність $E(\pi) > 0$ означає, що *в умовах невизначеності довгостроковий прибуток є додатнім,* що є ефектом функції корисності, яка відповідає політиці уникнення ризику.

Із наведеного вище випливають такі висновки:

I. Якщо фірма вибирає оптимальний рівень використання тільки одного фактора виробництва та є не схильною до ризику, то рівні витрат і випуску фірми в умовах невизначеності менші, ніж в умовах визначеності.

II. Якщо фірма використовує два фактори виробництва з технологією, яка дає сталий ефект у разі розширення масштабу виробництва, то довгостроковий

сподіваний прибуток не схильної до ризику фірми є додатнім.

Розглянемо задачу вибору інвестиційного портфеля, який складається із двох фінансових активів для індивідуума з початковим капіталом A. Ця задача була досліджена К. Ерроу.

Припустимо, що є два типи активів: один тип не дає прибутку, але є бепечним, інший — дає прибуток за випадковою ставкою нарощення r, яка може набувати і від'ємних значень, що призводить до втрат. Перший актив називають *безпечним,* а другий — *ризиковим.* Позначимо через m та a відповідно початкові вкладення капіталу індивідуумом в активи обох типів. Тоді сумарний капітал індивідуума наприкінці деякого періоду часу матиме вигляд $W = m + a\,(1 + +r)$.

Припустимо, що є тільки два стани природи $S_i,\ i = \overline{1,2}$. Якщо настає S_1, то $r = r_1 > 0$, а якщо настає S_2, то $r = r_2 < 0$. Нехай p — ймовірність появи S_1, а W_i — значення капіталу за $S_i,\ i = \overline{1,2}$. Тоді

$$W_i = m + a\,(1 + r_i) = A + a\,r_i,\ i = \overline{1,2}. \qquad (4.45)$$

Описана вище ситуація еквівалентна такій лотереї $W = (p; W_1, W_2) = (p; A + a\,r_1, A + a\,r_2)$, при цьому сподіване значення лотереї матиме вигляд

$$E(W) = p\,W_1 + (1 - p)\,W_2 =$$

$$= A + a\,(p\,r_1 + (1 - p)\,r_2) = A + a\,E(r), \qquad (4.46)$$

а сподівана корисність для індивідуума

$$p\,u(W_1) + (1 - p)\,u(W_2) =$$

$$= p\,u(A + a\,r_1) + (1 - p)\,u(A + a\,r_2) = \varphi(a), \qquad (4.47)$$

де u — функція корисності індивідуума.

Індивідуум обирає кількість ризикового активу a так, щоб максимізувати

сподівану корисність $\varphi(a)$, $0 \leq a \leq A$. Припускаючи, що оптимальне значення ризикового активу $a^* > 0$, умови оптимальності першого порядку тут набувають вигляду $\varphi'(a^*) = 0$, або

$$\frac{p}{1-p}\,\frac{u'(W_1^*)}{u'(W_2^*)} = -\frac{r_2}{r_1}\ (= q), \qquad (4.48)$$

де

$$u'(W_i^*) = u'(A + r_i\, a^*),\ i = \overline{1,2}.$$

Друга похідна

$$\varphi''(a) = p\, r_1^2\, u''(W_1) + (1-p)\, r_2^2\, u''(W_2)$$

завжди від'ємна, якщо індивідуум не схильний до ризику, тобто $u'' < 0$. Отже, величина a^*, що визначається із рівняння (4.48), запезпечує глобальний максимум сподіваної корисності.

Умову оптимальності (4.48) графічно зображено на рис. 4.6.

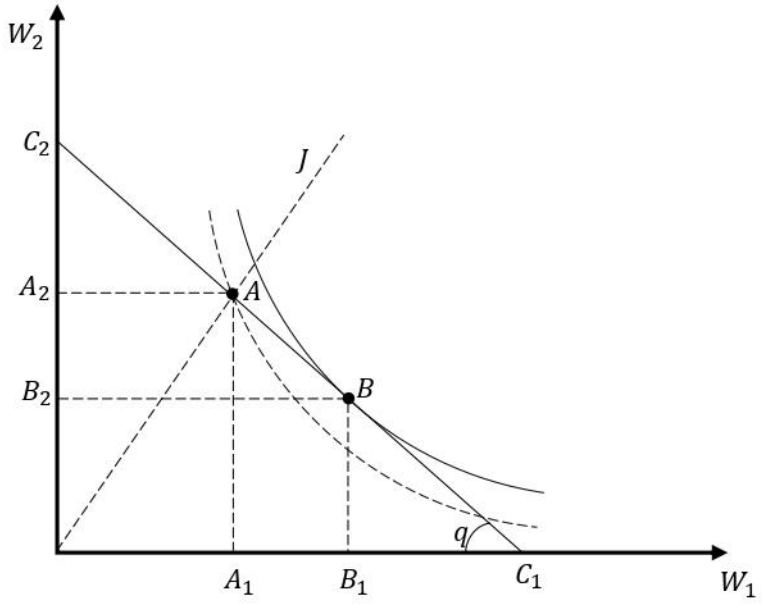

Рис. 4.6.

Із (4.45) випливає рівність

$$\frac{A - W_2}{W_1 - A} = -\frac{r_2}{r_1},$$

яку можна переписати у вигляді

$$q\ W_1\ +\ W_2\ =\ (1\ +\ q)\ A. \qquad (4.49)$$

Зазначимо, що умову оптимальності (4.48), як і в задачі про попит на страхові послуги, можна отримати, вибираючи $W_i,\ i\ =\ \overline{1,2}$, які максимізують сподівану корисність

$$p\ u(W_1)\ +\ (1\ -\ p)\ u(W_2)$$

для обмеженнь (4.49) і $W_i\ \geq\ 0,\ i\ =\ \overline{1,2}$.

Справді, для цього складемо функцію Лагранжа

$L\ =\ p\ u(W_1)\ +\ (1\ -\ p)\ u(W_2)\ +\ \lambda\ (q\ W_1\ +\ W_2\ -\ (1\ +\ q)\ A)$,

де λ — множник Лагранжа.

Тоді умови оптимальності першого порядку набудуть вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial W_1}\ =\ p\ u'(W_1)\ +\ \lambda\ q\ =\ 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_2}\ =\ (1\ -\ p)\ u'(W_2)\ +\ \lambda\ =\ 0.$$

Виключаючи з наведених умов опимальності множник Ларанжа, отримаємо вираз (4.48), і при цьому буде виконуватись умова (4.49).

Лінія C_1C_2 є геометричним місцем точок (W_1, W_2), що задовольняють (4.49) і $OC_1\ =\ A\ (1\ +\ q)/q, OC_2\ =\ A\ (1\ +\ q)$ (рис. 4.6.) Ця лінія подібна до лінії C_1C_2 на рис. 4.4. у задачі страхування, і тому є лінією можливостей для проблеми вибору портфеля. Точка A є перетином лінії можливостей та бісектриси OJ кута W_1OW_2. Тоді, як випливає з (4.49), відрізок $OA_1\ =\ OA_2$ визначає початкове значення активів (A), тобто в точці A індивідуум не має ризикових активів $(a\ =\ 0)$, тому лінію OJ називають *лінією визначеності.*

Нахил кривої байдужості

$$\{(W_1, W_2):\ p\ u(W_1)\ +\ (1\ -\ p)\ u(W_2)\ =\ const\}$$

задається виразом

$$\frac{dW_2}{dW_1} = -\frac{p}{1-p}\frac{u'(W_1)}{u'(W_2)}. \qquad (4.50)$$

З умови (4.48) випливає, що оптимальна точка B є точкою, де крива байдужості дотикається до лінії можливостей. Крім того,

$$OB_1 = W_1^* = A + r_1\ a^*,\ OB_2 = W_2^* = A + r_2\ a^*;$$

$$B_1A_1 = r_1\ a^*,;\ B_2A_2 = -\ r_2\ a^* > 0.$$

Якщо $a^* > 0$, то $W_1^* > W_2^*$, звідки $u'(W_1^*) < u'(W_2^*)$. Тоді із (4.48) випливає, що $q\ (1 - p)/p < 1$. Таким чином, сподівана ставка доходу

$$E(r) = p\ r_1 + (1 - p)\ r_2 > 0. \qquad (4.51)$$

Навпаки, якщо виконується (4.51), то $W_1^* > W_2^*$, тому $a^* > 0$. З наведеного вище можна зробити такий висновок: *індивідуум, який уникає ризику, вкладає гроші в ризиковий актив тоді і тільки тоді, коли сподівана ставка чистого доходу від цього активу є додатною.*

Оптимальне значення вартості ризикових активів a^* залежить від параметрів A, p та r. Для дослідження ефекту впливу кожної із зазначених екзогенних змінних на значення a^* можна стандартним чином розвинути відповідну порівняльну статику. Розглянемо, як приклад, вплив зміни параметра A на значення a^*.

Диференціюючи вирази (4.48) та (4.49) за змінною A, отримаємо рівності

$$u''(W_1^*)\ d\ W_1^* = \beta\ q\ u''(W_2^*)\ d\ W_2^*;$$

$$q\ d\ W_1^* + d\ W_2^* = (1 + q)\ dA,$$

де $\beta = (1 - p)/p$.

Поділимо наведені рівності почленно на dA й із отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $dW_1^*/(dA)$ та $dW_2^*/(dA)$ знайдемо

$$\frac{dW_1^*}{dA} = \frac{\beta\ q\ (1 + q)\ u''(W_2^*)}{\Delta};$$

$$\frac{dW_2^*}{dA} = \frac{(1 + q)\ u''(W_1^*)}{\Delta}, \qquad (4.52)$$

де

$$\Delta = u''(W_1^*) + \beta\ q^2\ u''(W_2^*).$$

Очевидно, що $\Delta < 0$ (відповідно $\frac{dW_1^*}{dA} > 0$, $\frac{dW_2^*}{dA} > 0$) тоді і тільки тоді, коли індивідуум не схильний до ризику.

Із (4.45) випливає рівність

$$\frac{dW_1^*}{dA} - \frac{dW_2^*}{dA} = (r_1 - r_2)\ \frac{da^*}{dA}. \qquad (4.53)$$

Підставимо (4.52) у (4.53). Тоді

$$\Delta\ (r_1 - r_2)\ \frac{da^*}{dA} = \beta\ q\ (1 + q)\ u''(W_2^*) - (1 + q)\ u''(W_1^*) =$$

$$= -(1 + q)\ (\frac{(1 - p)\ q}{p}\ u'(W_2^*)\ R_a(W_2^*) - u'(W_1^*)R_a(W_1^*)) =$$

$$= (1 + q)\ u'(W_1^*)\ (R_a(W_2^*) - R_a(W_1^*)),$$

де $R_a(W_i^*) = -u''(W_i^*)/u'(W_i^*)$, $i = \overline{1,2}$ — коефіцієнти абсолютного уникання ризику.

Звідси

$$\frac{da^*}{dA} = -\frac{(1 + q)\ u'(W_1^*)\ (R_a(W_2^*) - R_a(W_1^*))}{\Delta\ (r_1 - r_2)}. \qquad (4.54)$$

Припускаючи, що $u'' < 0$ й абсолютне уникання ризику спадає ($R_a' < 0$), знаходимо, що $da^*/(dA) > 0$, оскільки $W_1^* > W_2^*$ та $r_1 - r_2 > 0$.

Із наведеного вище аналізу співвідношень порівняльної статики зміни a^* відносно A для не схильного до ризику індивідууму маємо такий висновок: *якщо* $R_a' < 0$, *тобто коефіцієнт абсолютного уникання ризику — спадний, то підвищення* A *збільшує інвестування в ризиковий актив.*

Розглянемо домашнє господарство як єдиного споживача, який використовує свій бюджет на споживання та заощадження. Дослідимо модель відповідних рішень на проміжку часу, що складається з двох періодів: першого (теперішнього) та другого (майбутнього).

Нехай C_1 та C_2 — рівні теперішнього та майбутнього споживання відповідно, $u(C_1, C_2)$ — значення функції корисності споживача. Через I_1 та I_2 позначимо його зовнішній дохід відповідно для першого та другого періодів. Тоді заощадження споживача S (які можуть бути додатніми, нульовими або від'ємними) для першого періоду становитимуть

$$S = I_1 - C_1. \tag{4.55}$$

Дохід споживача за другий період (який вважається збіжним з періодом капіталізації заощаджень за відсотковою ставкою r) становитиме $I_2 + (1 + r)\ S$, тому буде виконуватись нерівність

$$C_2 \leq I_2 + (1 + r)\ S. \tag{4.56}$$

Із (4.55) та (4.56) отримаємо нерівність

$$(1 + r)\ C_1 + C_2 \leq I_2 + (1 + r)\ I_1. \tag{4.57}$$

Споживач повинен вибирати рівні споживання C_1 та C_2 так, щоб максимізувати корисність $u(C_1, C_2)$ за бюджетного обмеження (4.57), де $C_1,\ C_2 \geq 0$.

Для цієї задачі запишемо функцію Лагранжа

$$L(C_1, C_2, \lambda) = u(C_1, C_2) + \lambda\ (I_2 + (1 + r)\ I_1 - (1 + r)\ C_1 - C_2).$$

Припускаючи, що $C_1^*,\ C_2^* > 0$ (внутрішній оптимум), отримаємо умови оптимальності першого порядку:

$$\frac{\partial u(C^*)}{\partial C_1} - \lambda\ (1 + r) = 0,\ \frac{\partial u(C^*)}{\partial C_2} - \lambda = 0; \tag{4.58}$$

$$I_2 + (1 + r)\ I_1 - (1 + r)\ C_1^* - C_2^* = 0, \tag{4.59}$$

де $\lambda > 0$.

Умову оптимальності (4.58) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u/\partial C_1}{\partial u/\partial C_2} = 1 + r, \qquad (4.60)$$

Виключивши множник Лагранжа.

Рівняння (4.60), відоме як *закон Фішера* для двоперіодичної задачі споживання та заощадження. Вираз

$$\frac{\partial u/\partial C_1}{\partial u/\partial C_2} - 1$$

називають *граничною нормою часових переваг* (закон Фішера вимагає, щоб ця норма дорівнювала реальній нормі відсотка).

Припускаючи, що функція u є строго вгнутою, встановлюємо, що умови оптимальності (4.60), (4.59) є не тільки необхідними, але і достатніми умовами існування єдиної точки глобального максимуму.

Рівняння (4.60), (4.59), що визначають оптимальні рівні споживання C_1^* та C_2^*, залежать від параметрів I_1, I_2 та r. Дослідження залежностей оптимальних рівнів споживання від вказаних екзогенних параметрів можна провести, використавши стандартний аналіз порівняльної статики. Наприклад, знайдемо функцію впливу $\partial C_1/\partial I_1$. З цією метою продиференціюємо тотожності (4.60), (4.59) за I_1.

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1}\left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1^2} - (1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2 \partial C_1}\right) +$$
$$+ \frac{\partial C_2}{\partial I_1}\left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1 \partial C_2} - (1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2^2}\right) = 0; \qquad (4.61)$$

$$1 + r - (1 + r)\frac{\partial C_1}{\partial I_1} - \frac{\partial C_2}{\partial I_1} = 0. \qquad (4.62)$$

Із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.61)—(4.62) знаходимо

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} = -(1 + r)\left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2 \partial C_1} - (1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2^2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1^2} - 2\,(1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2 \partial C_1} + (1 + r)^2 \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2^2}\right)^{-1}; \qquad (4.63)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial I_1} = (1 + r)\left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1^2} - (1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2 \partial C_1} + r\,(1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2^2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1^2} - 2\,(1 + r)\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2 \partial C_1} + (1 + r)^2 \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2^2}\right)^{-1}. \qquad (4.64)$$

Знаки виписаних похідних, власне кажучи, невизначені. Однак, якщо припустити, що

$$\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_i^2} < 0,\ i = \overline{1,2}, \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1\ \partial C_2} \left(= \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2\ \partial C_1}\right) \geq 0, \qquad (4.65)$$

то

$$\frac{\partial C_i}{\partial I_1} > 0,\ i = \overline{1,2}. \qquad (4.66)$$

Таким чином, *збільшення теперішнього доходу приводить до збільшення як теперішнього, так і майбутнього споживання.*

4.3. Домашні господарства в умовах невизначеності: рішення про заощадження і споживання. Економіка інформації: асиметрія інформації, принцип «лимончиків», сигналізація, зворотна селекція. Ринок страхових послуг: поведінка страхових компаній

Розглянемо поведінку домашніх господарств в умовах невизначеності, припускаючи, що майбутній дохід I_2 є випадковою величиною зі щільністю розподілу $f(I_2)$. Таку невизначеність доходу I_2 називають *ризиком доходу* для споживача. В цих припущеннях сподівана функція корисності споживача має вигляд

$$Eu(C_1, C_2) = E(u(I_1 - S, I_2 + (1 + r)\ S)) =$$
$$= \int_I u(I_1 - S, I_2 + (1 + r)\ S)\ f(I_2)\ dI_2 = \gamma(S), \qquad (4.67)$$

де I — проміжок значень I_2.

Споживач вибиратиме оптимальний рівень заощадження S^* так, щоб максимізувати $\gamma(S)$. Умова оптимальності $\gamma'(S^*) = 0$ має вигляд

$$E(\frac{\partial u}{\partial C_1} - (1 + r)\ \frac{\partial u}{\partial C_2}) = 0$$

і може бути переписана як

$$\frac{E(\frac{\partial u}{\partial C_1})}{E(\frac{\partial u}{\partial C_2})} = 1 + r. \qquad (4.68)$$

Співвідношення (4.68) є версією закону Фішера для випадку невизначеності, і означає, що середня гранична норма часових переваг $E(\frac{\partial u}{\partial C_1})/E(\frac{\partial u}{\partial C_2}) - 1$ дорівнює реальній нормі відсотка.

Якщо виконуються умови

$$\frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_i^2} < 0;\ i = \overline{1,2}, \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_1\ \partial C_2}(\ \frac{\partial^2 u(C^*)}{\partial C_2\ \partial C_1}) \geq 0, \qquad (4.69)$$

то друга похідна

$$\gamma''(S^*) = E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - 2\ (1 + r)\frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_2} + (1 + r)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}) < 0,$$

тому умова (4.68) є умовою глобального максимуму.

Припустимо, що дохід I_2 має вигляд

$$I_2 = \bar{I}_2 + \beta\ \varepsilon;\ \beta > 0;\ \bar{I}_2 = E(I_2), \qquad (4.70)$$

де ε — впадкова величина з нульовим середнім $E(\varepsilon) = 0$.

Зауважимо, що за $\beta = 0$ невизначеність зникає, тобто $I_2 = \bar{I}_2$.

Визначимо функцію

$$\Theta(S; I_1, I_2, r, \beta) = \frac{E(\frac{\partial u}{\partial C_1})}{E(\frac{\partial u}{\partial C_2})} - 1. \qquad (4.71)$$

Тоді

$$\frac{\partial \Theta}{\partial S} = (E(\frac{\partial u}{\partial C_2})\ E(-\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} + (1 + r)\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_1}) - E(\frac{\partial u}{\partial C_1})\ E((1 + r)\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_1})\ (E(\frac{\partial u}{\partial C_2}))^{-2}. \qquad (4.72)$$

Оскільки $\frac{\partial \Theta}{\partial S} > 0$, то значення S^* можна визначити лише із рівняння $\Theta(S; I_1, I_2, r, \beta) = r$, або з перетину кривої $\Theta(S; I_1, I_2, r, \beta)$ та r — лінії, яка задає рівень ставки r.

Аналогічно виразу (4.72) знаходимо, що

$$\frac{\partial \Theta}{\partial I_1} = (E(\frac{\partial u}{\partial C_2})\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2}) - E(\frac{\partial u}{\partial C_1})\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_2}))(E(\frac{\partial u}{\partial C_2}))^{-2} < 0; \qquad (4.73)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial I_2} = (E(\frac{\partial u}{\partial C_2})\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2}) - E(\frac{\partial u}{\partial C_1})\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}))(E(\frac{\partial u}{\partial C_2}))^{-2} > 0. \qquad (4.74)$$

Отже, збільшення I_1 або спад I_2 зміщує криву $\Theta(S)$ вниз, що зумовлює зростання оптимального заощадження S^*, як показано на рис. 4.7, тому $\partial S/\partial I_1 > 0$, а $\partial S/\partial I_2 < 0$.

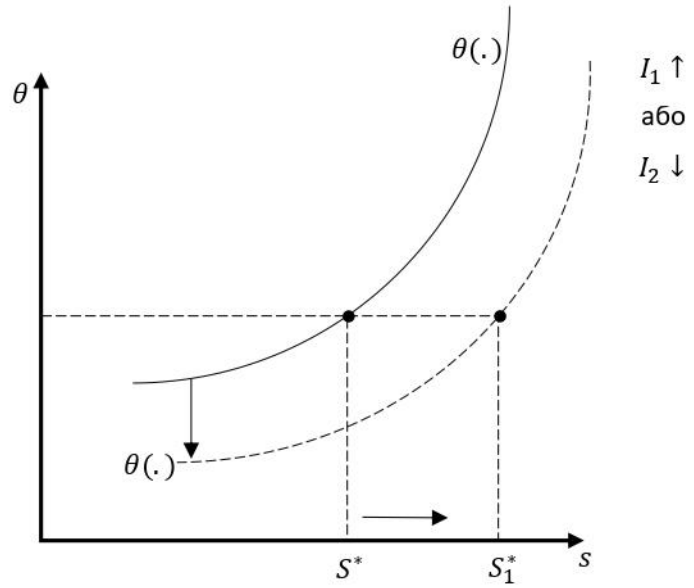

Рис. 4.7.

Враховуючи, що

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} + \frac{\partial S}{\partial I_1} = 1,$$

та спосіб отримання функцій впливу $\frac{\partial C_1}{\partial I_1}$, $\frac{\partial C_2}{\partial I_1}$ для детермінованого варіанту задачі, отримаємо

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} = (1 + r)\ (-\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2}) + (1 + r)\ E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}))\ (\gamma'')^{-1};$$

$$\frac{\partial S}{\partial I_1} = (E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2}) - (1 + r)E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_2}))\ (\gamma'')^{-1}.$$

З огляду на те, що $\gamma''(S^*) < 0,$ із поданих вище формул отримаємо

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} > 0;\ \frac{\partial S}{\partial I_1} > 0,$$

тобто збільшення теперішнього доходу підвищує теперішні споживання та заощадження.

Розглянемо приклад, коли доходи I_1 та I_2 визначено, але реальна відсоткова ставка r є невизначеною, наприклад, через інфляцію. Невизначеність величини r називають *ризиком капіталу,* на відміну від ризику доходу, розглянутого вище.

Припустимо, що випадкова величина r має вигляд

$$r = \bar{r} + \beta\ \varepsilon;\ \beta > 0;\ \bar{r} = E(r), \tag{4.75}$$

де ε — впадкова величина з нульовим середнім $E(\varepsilon) = 0$ та щільністю розподілу $g(\varepsilon)$.

Вважатимемо, що $r > -1$, що еквівалентне припущенню

$$\rho = 1 + \bar{r} + \beta\ \varepsilon > 0. \tag{4.76}$$

Споживач вибирає рівень заощадження S так, щоб максимізувати сподівану корисність

$$E(u(I_1 - S, I_2 + (1 + \bar{r} + \beta\ \varepsilon)\ S)) = \Psi(S).$$

Тоді умова оптимальності першого порядку $\Psi'(S^*) = 0$ матиме вигляд

$$E(-\frac{\partial u}{\partial C_1} + (1 + \bar{r} + \beta\varepsilon)\ \frac{\partial u}{\partial C_1}) = 0,$$

або

$$E(\frac{\partial u}{\partial C_1}) = E(\frac{\partial u}{\partial C_2}) + \bar{r}E(\frac{\partial u}{\partial C_2}) + \beta\ E(\varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial C_2}). \tag{4.77}$$

Таким чином, із (4.77) отримаємо

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial C_1}}{\frac{\partial u}{\partial C_2}} - 1 = \bar{r} - \tau, \tag{4.78}$$

де

$$\tau = -\beta\ E(\varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial C_2})\ E^{-1}(\frac{\partial u}{\partial C_2}). \tag{4.79}$$

Прямий підрахуок дає

$$\Psi''(S^*) = E(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2}) - 2\ E(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_2}) + E(\rho^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}).$$

В припущеннях (4.69), враховуючи, що $\rho > 0$, завжди будемо мати $\Psi''(S^*) < 0$, тому рівність (4.78) виражає необхідні і достатні умови оптимальності.

Оскільки $E(\varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial C_2}) < 0$ ($E(\varepsilon) = 0$, а функція $\frac{\partial u}{\partial C_2}$ — спадна), тому $\tau >$

0. Величину τ можемо інтерпретувати як «плату за ризик». Тому умова оптимальності (4.78) означає, що в точці оптимуму середня гранична норма часової переваги у разі ризику капіталу дорівнює ефективній ставці відсотка, яку визначають як різницю середньої ставки та «плати за ризик», тобто $\bar{r} - \tau$.

Позначивши через Θ середню граничну норму часової переваги у разі ризику капіталу, будемо мати (див. формулу (4.72) для випадку випадкового доходу I_2)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial s} = (E(\frac{\partial u}{\partial C_2})\ E(-\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} + (\rho\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_1}) -$$

$$-\ E(\frac{\partial u}{\partial C_1})\ E(\rho\ \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial C_1\ \partial C_1})\ (E(\frac{\partial u}{\partial C_2}))^{-2}. \qquad (4.80)$$

Тоді із (4.80) у припущеннях (4.69) та $\rho > 0$ будемо мати $\frac{\partial\Theta}{\partial s} > 0$, тобто оптимальний рівень заощаджень S^* у разі ризику капіталу визначають перетином Θ-кривої та $\bar{r} - \tau$-кривої, як це зображено на рис. 4.8.

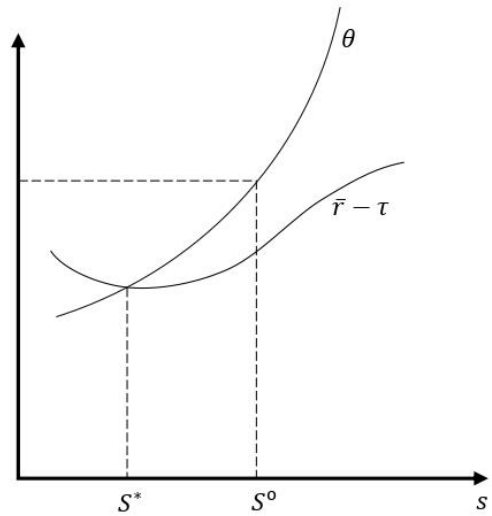

Рис. 4.8.

Значення заощадження у разі ризику капіталу S^* завжди буде меншим, ніж в умовах визначеності S^0, оскільки $\bar{r} - \tau < \bar{r}$.

Таким чином, в припущеннях (4.69) із наведеного вище можна зробити такі висновки.

I. В умовах ризику доходу у разі невизначеного майбутнього доходу, не пов'язаному з нарощенням відсотків, є правильними такі пропозиції:

a) збільшення теперішнього доходу зумовлює зростання теперішнього споживання і теперішніх заощаджень;

b) збільшення сподіваного значення майбутнього безвідсоткового доходу зменшує заощадження.

II. В умовах ризику капіталу, коли ставка r є невизначеною, збільшення невизначеності зменшує заощадження.

Уперше на проблему інформаційної асиметрії та її вплив на поведінку економічних агентів на ринку товарів звернув увагу американський економіст Джорж Акердоф (лауреат Нобелівської премії з економіки 2001 р.).

Асиметрія інформації — це така ситуація, коли одна група агентів має необхідну для ведення справ інформацією, а інша — ні. З цього погляду стан досконалої конкуренції, коли ціни визначаються попитом та пропозицією, є випадком симетричного розподілу інформації, що дає змогу ефективно координувати економічну діяльність. Однак насправді економісти здебільшого стикаються з нерівномірним розподілом інформації.

Дж. Акердоф уперше звернув увагу на проблему асиметрії інформації на ринку, що призводить до *зворотньої селекції* — витіснення з нього якісних товарів товарами з прихованими вадами («*лимончиками»*). Розглянемо докладніше проблему «лимончиків» на ринку продажу та купівлі використаних автомобілів в умовах, коли є дві групи автомобілів, абсолютно одинакових зовні, але істотно різних за якістю.

Нехай якісні автомобілі продаватимуться за середньою ціною 20 тис. у. о., а купуватимуться за 24 тис. у. о.; неякісні (з прихованими вадами) — продаватимуться за середньою ціною 5 тис. у. о., а купуватимуться за 6 тис. у. о.

Якщо якісних автомобілів і «лимончиків» приблизно одинакова кількість, то

середня сподівана ціна Ep довільного автомобіля для покупця становила б 15 тис. у. о. ($Ep = 0{,}5 \cdot 24 + 0{,}5 \cdot 6 = 15$). Однак за 15 тис. у. о. якісні автомобілі не продаватимуться, оскільки їхні власники їздитимуть на них самі, тобто через інформаційну асиметрію на ринку залишаться переважно неякісні товари.

Проблема асиметрії інформації має цікаві застосування. Розглянемо приклад, пов'язаний із сигналами та сигналізацією. Щодо ринку використаних автомобілів, то оцінка автомобіля автомеханіком сигналізує про якість товару. Коли такий сигнал є, то ціна якісних товарів зростає. На ринку одночасно можуть бути як поінформовані, так і непоінформовані покупці. З часом непоінформовані покупці можуть дізнатися про значення сигналу із цін, оскільки ціни поступово відображатимуть повну інформацію про товар.

Далі обмежимось докладнішим дослідженням асиметрії інформації, певентивною активністю і проблемою морального ризику в контексті страхових ринків.

Розглянемо агента, який розмірковує про купівлю страхового полісу. Припустимо, що є два стани природи: за S_1 він зазнає втрати у розмірі b, за S_2 він не зазнає втрат. Нехай a — початкове значення активу, який він хоче застрахувати; x — сума виплат страхової компанії (страхове покриття) у випадку, коли станеться подія S_1; P — премія за подібне страхування. Припустимо також, що агент може вибирати рівень страхового покриття x.

Припустимо, що агент може впливати на ймовірність втрат π превентивною діяльністю, витрати на яку z вимірюються в грошах, тому $\pi = \pi(z)$, причому $\pi'(z) < 0$, $\pi''(z) > 0$. Вважатимемо, що витрати на превентивну активність становлять одну грошову одиницю за одиницю і що страховик не може спостерігати z. Тоді перед агентом постає проблема вибору рішення в лотереї $(\pi(z); a - b - z - P + x, a - z - P)$.

Наведену вище ситуацію, зокрема, можна інтерпретувати як страхування

автомобіля, де ймовірність страхового випадку залежить від рівня діяльності агента, спрямованої на запобігання подібному випадку. Асиметрія інформації полягає в тому, що агент знає про таку діяльність, а страховик — ні.

Агент повинен обрати $x \geq 0$, $z \geq 0$ таким чином, щоб максимізувати свою сподівану корисність, тобто

$$\Phi(x,z) = \pi(z)\, u(a - b - z - P + x) + (1 - \pi(z))u(a - z - P) \to \max. \qquad (4.81)$$

Для спрощення будемо розв'язувати задачу (4.81) у два етапи. Спочатку зафіксуємо рівень покриття x. Тоді умови оптимальності першого порядку для задачі (4.81) матимуть вигляд

$$\frac{d\Phi(x,z^*)}{dz} = \pi'(z^*)\left(u(a_1) - u(a_2)\right) - \left(\pi(z^*)\, u'(a_1) + \left(1 - \pi(z^*)\right) u'(a_2)\right) \leq 0;$$

$$\frac{d\Phi(x,z^*)}{dz}\, z^* = 0, \qquad (4.82)$$

де $a_1 = a - b - z^* - P + x$, $a_2 = a - z^* - P$.

Якщо $x = b$ (випадок повного покриття), то $u(a_1) = u(a_2)$. Тоді $\frac{d\Phi(x,z^*)}{dz} < 0$, що дає $z^* = 0$. Таким чином, агент із повним покриттям не звертає увагу на превентивну діяльність.

Для тих x, що дають z^*, нерівність із умов оптимальності (4.81) перетворюється у рівність

$$\pi'(z^*)\,(u(a_1) - u(a_2)) = \pi(z^*)\, u'(a_1) + (1 - \pi(z^*))\, u'(a_2). \qquad (4.83)$$

Із виразу (4.83), розглядаючи його як рівняння відносно x, знаходимо

$$\frac{dz^*}{dx} = (\pi\, u''(a_1) - \pi'\, u'(a_1))(\pi''\,(u(a_1) - u(a_2)) - 2\,\pi'\,(u'(a_1) - u'(a_2)) + \pi\, u''(a_1) + (1 - \pi)\, u''(a_2))^{-1}. \qquad (4.84)$$

Знаменник у (4.84) від'ємний, а чисельник може змінювати знак. Тому далі ввадатимемо, що $dz^*/dx < 0$. Це означає, що агент може знижувати рівень

превентивної активності, коли страхове покриття зростає. Зрозуміло, що за $z^*(x) = 0$, тобто відсутня превентивна діяльність, що відповідає страховому покриттю x, матимемо $dz^*/dx = 0$.

Нагадаємо, що $z^*(x)$ є рівнем активності для кожного значення x, який визначається із умови (4.83). Тоді агент вибирає рівень покриття $x \geq 0$, що максимізує сподівану корисність.

Нехай $P = P(x)$ — відповідна страхова премія, $z^* = z^*(x)$. Тоді сподівана корисність (4.81) буде залежати лише від x і матиме вигляд

$$\psi(x) = \pi(z^*(x))\, u(a - b - z^*(x) - P(x) + x) + (1 - \pi(z^*(x)))u(a - z^*(x) - P(x)). \quad (4.85)$$

Таким чином, маємо другу задачу агента, яка полягає у виборі $x^* \geq 0$, що максимізує (4.85). Припускаючи, що $x > 0$, отримаємо умови оптимальності першого порядку $\psi'(x^*) = 0$, які набувають вигляду

$$\pi(z^*(x))\, u'(a_1)\, (1 - \frac{dz^*}{dx} - \frac{dP(x^*)}{dx}) - (1 - \pi(z^*(x)))\, u'(a_2)\, (\frac{dz^*}{dx} + \frac{dP(x^*)}{dx}) + \pi'(z^*(x))\, (u(a_1) - u(a_2))\, \frac{dz^*}{dx} = 0.$$

Враховуючи у наведеному вище рівнянні умови оптимальності (4.83), отримаємо

$$\frac{dP(x^*)}{dx} = \frac{\pi(z^*(x^*))\, u'(a_1)}{\pi(z^*(x^*))\, u'(a_1) + (1 - \pi(z^*(x^*)))\, u'(a_1)}. \quad (4.86)$$

Якщо страховик має можливість спостерігати витрати на превентивну діяльність z, то страхова премія призначається відповідно до його значення.

Розглянемо проблему страхування в умовах конкуренції: всі агенти є ідентичними в тому розумінні, що вони купують однакову кількість страхових послуг за заданих цін і при цьому страховики мають нульові сподівані прибутки. Тоді $-\pi\,(x^* - P) + (1 - \pi)\, P = 0$, або

$$P(x*) = \pi(z^*(x^*))\, x^*. \quad (4.87)$$

Тому $P'(x*) = \pi + \pi' (z^*)' x^*$. Підставивши цей вираз у (4.86), отримаємо

$$\pi + \pi' (z^*)' x^* = \frac{\pi(z^*(x^*))\ u'(a_1)}{\pi(z^*(x^*))\ u'(a_1) + (1 - \pi(z^*(x^*)))\ u'(a_1)} = D(x^*), \quad (4.88)$$

де $D(x^*)$ — попит на страхове покриття.

Неоптимальність кнкурентності виникає через те, що конкурентна премія за одиницю страхових послуг $\frac{dP}{dx}$ має бути одинаковою для всіх клієнтів, тоді як сума z для них є різною. Оскільки страхова компанія не знає рівня z, вона продає кожну одиницю страхових послуг за ту саму ціну, скажімо, p. Підставивши її в (4.88), отримаємо

$$p = \pi = D(x^*). \quad (4.89)$$

Зауважимо, що π менше, ніж вираз $\pi + \pi' (z^*)' x^*$, записаний ліворуч у (4.88), оскільки $\pi' < 0$, $(z^*)' < 0$. Отже, припускаючи, що попит $D(x^*)$, який планується, має спадний нахил, установлюємо, що попит на страхування має бути більшим, ніж визначений із рівняння (4.88). Таким чином, конкурентна рівновага характеризується перевиробництвом страхових послуг.

У проблемі, що розглядалася, агент знав рівень своєї превентивної діяльності z, а страховик — ні. Це приводило до того, що страхова премія не впливала на рівень z, при цьому клієнт міг вибирати більш низькі рівні превентивної діяльності у разі зростання страхового покриття, тобто страхування спонукало агента до низького рівня z без зміни премії, внаслідок чого страхова компанія втрачала гроші. Таке явище називається проблемою *морального ризику.*

Щоб не виникало проблеми морального ризику, рекомендовані такі дії:

1) потрібно застосовувати політику неповного покриття витрат;

2) вести спостереження за заходами безпеки проти страхових випадків.

Ринок цінних паперів та ринок страхових послуг є найризикованішими серед усіх ринків. Далі, щоб уникнути використання аксіом сподіваної корисності,

вважатимемо, що функцію корисності економічного агента задано на множині X значень його суми багатства, доходів або прибутку, які можуть бути як детермінованими, так і випадковими величинами. Тому значення $u(x)$ характиризує індивідуальну цінність (корисність) суми капіталу x, виражену в грошах.

Нехай для функції корисності $u(x)$, $x \in X$ виконуються такі властивості: $u'(x) > 0$; $u''(x) < 0$.

Аналогічно коефіцієнту абсолютного уникання ризику Ерроу — Пратта $R_a(x)$ в цьому контексті використовується така функція уникання ризику

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx}\ \ln u'(x). \qquad (4.90)$$

Модельними прикладами функцій корисності, які використовуються у страхуванні, є три типи функцій.

Приклад 4.4. Експоненціальна функція корисності з параметром $a > 0$:

$$u(x) = \frac{1 - \exp(-a\ x)}{a};\ x \in (-\infty, \infty). \qquad (4.91)$$

За $x \to \infty$ функція $u(x)$, залишаючись обмеженою, прямує до границі $1/a$. Вона має сталу функцію несхильності до ризику

$$r(x) = -\frac{-a^2\ \exp(-a\ x)}{a\ \exp(-a\ x)} = a;\ x \in (-\infty, \infty).$$

Від'ємне значення x інтерпретується як борг $|x|$.

Приклад 4.5. Степенева функція корисності першого роду з параметрами $s > 0$, $c > 0$:

$$u(x) = \frac{s^{c+1} - (s - x)^{c+1}}{(c + 1)\, s^c};\ x < c. \qquad (4.92)$$

Для функції 4.(92) маємо

$$r(x) = \frac{c}{s - x};\ x < s,$$

тобто $r(x)$ збільшується із збільшенням x і прямує до нескінченності за $x \to s$

(коли багатство прямує до рівня насиченості s).

Приклад 4.6. Степенева функція корисності другого роду з параметром $c > 0$:

$$u(x) = \frac{x^{1-c}-1}{1-c};\ x > 0. \qquad (4.93)$$

Для функції (4.93) маємо

$$r(x) = \frac{c}{x};\ x > 0,$$

тобто несхильність до ризику спадає у разі зростання x (агент стає більш схильним до ризикової поведінки).

Розглянемо питання введення порядку переваги, коли доходи агентів є випадковими. Якщо Γ_1 і Γ_2 — два випадкових доходи для агента, який вибирає один із них, маючи рівень добробуту (багатства) ω. Тоді вважатимемо, що він віддаватиме строгу перевагу Γ_1 перед Γ_2, $\Gamma_1 \succ \Gamma_2$, коли

$$E(u(\omega + \Gamma_1)) > E(u(\omega + \Gamma_2)), \qquad (4.94)$$

тобто коли сподівана корисність Γ_1 більша від сподіваної корисності Γ_2. Якщо сподівані корисності одинакові, то Γ_1 і Γ_2 байдужі для агента, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$. Це дає повне відношення переваги $\succeq$ на множині випадкових доходів.

Розглянемо визначення *страхової премії під час страхування ризику* у випадку компанії з початковим капіталом ω. Нехай компанія страхує ризик і повинна сплатити загальний страховий позов S (випадкову величину) наприкінці певного періоду. Якою має бути страхова премія P для подібного страхового контракту?

Визначимо страхову премію P із такої умови; сподівана корисність капіталу під час виконання контракту повинна дорівнювати корисності без контракту:

$$E(u(\omega + P - S)) = u(\omega). \qquad (4.95)$$

Таку умову називають *принципом еквівалентності корисності.*

Рівняння (4.95) визначає P єдиним чином, але точні його розв’язки можна

одержати лише у винятковому випадку. Зокрема, якщо функція корисності має експоненціальний вигляд, то

$$P = \frac{1}{a} \ln E(\exp(a\ S)). \tag{4.96}$$

Розглянемо питання *оптимальності страхового контракту із припиненням утрат.* Нехай є страхова компанія, яка повинна сплачувати випадкову суму S власникам полісів наприкінці року. Порівняємо два типи страхових угод:

1. Контракт із припиненням утрат на рівні d, коли перестраховик сплачуватиме наприкінці року суму

$$(S - d)_+ = \begin{cases} S - d, & S > d, \\ 0, & S \leq d. \end{cases} \tag{4.97}$$

2. Загальний контракт перестрахування задається функцією $h(x)$, тому перестраховик виплачує суму $h(S)$ наприкінці року. Єдине обмеження, яке накладається на функцію h: $0 < h(x) \leq x$.

Припустимо, що обидва контракти є порівнянними у тому розумінні, що сподівані виплати перестраховика — однакові, тобто

$$E((S - d)_+) = E(h(S)). \tag{4.98}$$

Вважатимемо, що обидві премії за перестрахування однакові. Тоді в термінах корисності контракт із припиненням утрат є більш переважним:

$$E(u(\omega - S + h(S))) \leq E(u(\omega - S + (S - d)_+)), \tag{4.99}$$

де ω — капітал після одержання премій за перестрахування.

Покажемо справедливість нерівності (4.99). Зауважимо спочатку, що вгнута крива лежить під своєю дотичною, тобто $u(y) \leq u(x) + u'(x)\ (y - x)$ для всіх x і y.

Використовуючи це для $y = \omega - S + h(S)$ та $x = \omega - S + (S - d)_+$, отримаємо

$$u(\omega - S + h(S)) \leq u(\omega - S + (S - d)_+) + u'(\omega - S +$$

$(S - d)_+) \times (h(S) - (S - d)_+) \leq u(\omega - S + (S - d)_+) + u'(\omega - d)(h(S) - (S - d)_+)$. (4.100)

Друга нерівність в (4.100) є наслідком нерівності

$u'(\omega - S + (S - d)_+)\ (h(S) - (S - d)_+) = u'(\omega - S)\ h(S) \leq u'(\omega - d)\ h(S) = u'(\omega - d)\ (h(S) - (S - d)_+)$.

Узявши математичне сподівання в (4.100) та використовуючи (4.98), отримаємо (4.99).

4.5. Оптимальні ступені перестрахування та обміну ризиками. Ринок банківсько-кредитних послуг

Розглянемо n компаній (економічних агентів). Припустимо, що компанія i має наприкінці року капітал W_i та приймає рішення, ґрунтуючись на функції корисності $u_i(x)$. Тут $W_i,\ i = \overline{1,n}$ — випадкові величини з відомим сумісним розподілом. Позначимо через

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

загальний капітал компаній. Процес обміну ризиком приводить до перерозподілу загального капіталу, внаслідок чого компанія i матиме капітал X_i (випадкова величина) і при цьому

$$W = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

тобто загальний капітал залишається таким самим. Сподівана корисність такого обміну для компанії i визначається величиною $E(u_i(X_i))$.

Обмін ризиками $(\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_n)$ називають *Парето-оптимальним,* якщо неможливо поліпшити ситуацію для однієї компанії без втрат для іншої. Інакше кажучи, не має такого обміну $(X_1,\ldots,X_n)$, що

$$E(u_i(X_i)) \geq E(u_i(\tilde{X}_i)),\ i = \overline{1,n},$$

де хоча б одна із нерівностей була строгою. Якщо компанії погоджуються на кооперативні дії, то вони мають вибирати обмін ризиками, який є Парето-оптимальним.

Відомо [5], що Парето-оптимальні обміни ризиками утворюють сім'ю, що залежить від $n - 1$ параметрів. Вони (оптимальні обміни) можуть бути знайдені, наприклад, за допомогою максимізації лінійної згортки

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\ E(u_i(X_i)), \tag{4.101}$$

де $k_1 > 0,\ldots,k_n > 0$, а максимум береться за всіма обмінами ризиками X_i, $i = \overline{1,n}$.

Розв'язок цієї задачі визначає таке твердження.

Теорема 4.5 (Борха). *Обмін ризиками* $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$, *максимізує (4.101) за фіксованими значеннями* k_i, $i = \overline{1,n}$, *тоді і тільки тоді, коли випадкові величини* $k_i\ u'(\bar{X}_i)$ *є ідентичними за* $i = \overline{1,n}$, *тобто не залежать від* i.

Доведення.

Необхідність. Припустимо, що обмін $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ максимізує (4.101). Нехай $j \neq h$ і V — довільна випадкова величина. Визначимо величини X_k виразами: $X_i = \bar{X}_i$, $i \neq j, h$; $X_j = \bar{X}_j + t\ V$, $X_h = \bar{X}_h - t\ V$, де $t \geq 0$ — параметр. Позначимо

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i\ E(u_i(X_i)). \qquad (4.102)$$

Відповідно до припущень функція (4.102) має максимум за $t = 0$. Таким чином, $f'(0) = 0$, або

$$k_j\ E(V\ u_j'(\bar{X}_j) - k_h\ E(V\ u_h'(\bar{X}_h) = 0.$$

Записане вище рівняння можна подати у вигляді

$$E(V\ (k_j\ u_j'(\bar{X}_j) - k_h\ u_h'(\bar{X}_h))) = 0.$$

Оскільки це рівняння виконується для довільної величини V, то з ймовірністю 1 отримаємо

$$k_j\ u_j'(\bar{X}_j) - k_h\ u_h'(\bar{X}_h) = 0.$$

Це означає, що випадкові величини $k_i\ u_i'(\bar{X}_i)$ — незалежні від i.

Достатність. Навпаки, нехай тепер $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ — такий обмін ризиками, що

$$k_i\ u_i'(\bar{X}_i) = \Lambda \qquad (4.103)$$

є тією самою випадковою величиною для всіх i. Нехай $(X_1, \ldots, X_n)$ — інший обмін ризиками. З вгнутості функції u_i випливає, що

$$u_i(X_i) \leq u_i(\bar{X}_i) + u_i'(\bar{X}_i)\ (X_i - \bar{X}_i). \qquad (4.104)$$

Якщо помножити нерівність (4.104) на k_i, скласти результати і врахувати

(4.103), то отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \; u_i(X_i) \le \sum_{i=1}^{n} k_i \; u_i(\bar{X}_i) + \Lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \; u_i(\bar{X}_i)$$

з огляду на те, що

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i = W.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \; u_i(X_i) \le \sum_{i=1}^{n} k_i \; u_i(\bar{X}_i),$$

тобто вираз (4.101) справді досягає максимуму для $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$. •

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4.7. Припустимо, що компанії використовують експоненціальну функцію корисності

$$u_i(x) = \frac{1 - \exp(-a_i \; x)}{a_i}, \; i = \overline{1, n}.$$

Умова (4.103) тут приймає вигляд $k_i \; \exp(-a_i \; \bar{X}_i) = \Lambda$, або

$$\bar{X}_i = -\frac{\ln\Lambda}{a_i} + \frac{\ln k_i}{a_i}. \qquad (4.105)$$

Підсумовуючи рівності (4.105), отримаємо рівняння для визначення числа Λ:

$$W = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln\Lambda}{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln k_i}{a_i}. \qquad (4.106)$$

Нехай

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = a^{-1},$$

тоді з (4.106) матимемо

$$-\ln\Lambda = a \; W - a \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln k_i}{a_i}.$$

Підставляючи цей вираз у (4.105), отримаємо

$$\bar{X}_i = \frac{a \; W}{a_i} + \frac{\ln k_i}{a_i} - \frac{a}{a_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln k_j}{a_j} = q_i \; W + d_i,$$

де

$$q_i = \frac{a}{a_i},\ d_i = \frac{\ln k_i}{a_i} - \frac{a}{a_i}\sum_{j=1}^{n} \frac{\ln k_j}{a_j}.$$

Отже, i-та компанія отримує квоту q_i загального капіталу W та плату d_i, яка може бути і від'ємною. Очевидно, що

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 0.$$

Зауважимо, що квота q_i обернено пропорційна несхильності до ризику i-ї компанії й одинакова для всіх Парето-оптимальних обмінів ризиком.

Приклад 4.8. Припустимо, що компанії використовують степеневі функції корисності першого роду

$$u_j(x) = \frac{s_j^{c+1} - (s_j - x)^{c+1}}{(c+1)\, s_j^c},\ j = \overline{1,n}, \tag{4.107}$$

де s_j — рівень насичення j-ї компанії.

Умова (4.103) тут набуває вигляду

$$k_j\ (1 - \frac{\bar{X}_j}{s_j})^c = \Lambda,$$

або

$$\bar{X}_j = -\frac{s_j}{k_j^{1/c}}\ \Lambda^{1/c} + s_j. \tag{4.108}$$

Підсумовуючи рівності (4.108) за j, отримаємо рівняння для визначення Λ:

$$W = -\Lambda^{1/c} \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{k_j^{1/c}} + \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

Звідси

$$\Lambda^{1/c} = (s - W)\ (\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{k_j^{1/c}})^{-1}, s = \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

Підставляючи останній вираз у (4.108), отримаємо

$$\bar{X}_j = \frac{s_j}{k_j^{1/c}}\ (\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i^{1/c}})^{-1}\ W - \frac{s_j}{k_j^{1/c}}\ (\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i^{1/c}})^{-1}\ s + s_j =$$

$$= q_j\ W + d_j, \tag{4.109}$$

де

$$q_j = \frac{s_j}{k_j^{1/c}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i^{1/c}}\right)^{-1}, d_j = s_j - \frac{s_j}{k_j^{1/c}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i^{1/c}}\right)^{-1} s.$$

Зазначимо, що квота q_j і додатковий платіж d_j пов'язані між собою рівністю

$$d_j = s_j - q_j s.$$

Крім того, квоти q_j не є одинаковим для всіх Парето-оптимальних обмінів ризиком (залежать від k_j).

Із (4.109) випливає, що вираз $s_j - \bar{X}_j (q_j (s - W))$ являє собою капітал, якого не вистачає для максимального задоволення і який є фіксованою часткою $s - W$ капіталу, якого не вистачає для всіх компаній.

Приклад 4.9. Припустимо, що компанії використовують степеневі функції корисності другого роду

$$u_j(x) = \frac{x^{1-c} - 1}{1 - c}, j = \overline{1, n}. \tag{4.110}$$

Умова (4.103) тут набуває вигляду

$$k_j \bar{X}_j^{-c} = \Lambda,$$

або

$$\bar{X}_j = k_j^{1/c} \Lambda^{-1/c}. \tag{4.111}$$

Підсумовуючи рівності (4.111) за j, отримаємо

$$\Lambda^{-1/c} = W \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{1/c}\right)^{-1}.$$

Підставляючи останній вираз у (4.111), отримаємо

$$\bar{X}_j = k_j^{1/c} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{1/c}\right)^{-1} W = q_j W, \tag{4.112}$$

де

$$q_j = k_j^{1/c} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{1/c}\right)^{-1}.$$

Тут кожна компанія отримує фінансову квоту q_j загального капіталу W без

додаткових платежів. Як і в попередньому прикладі, квоти q_j не є одинаковим для всіх Парето-оптимальних обмінів ризиком (залежать від k_j).

Приклад 4.7 допомагає зрозуміти структуру Парето-оптимального обміну ризиками в загальному випадку.

Нехай $u_i(x),\ i = \overline{1,n},$ — довільні функції корисності, а $\bar{X}_i,\ i = \overline{1,n},$ — Парето-оптимальний обмін ризиком, що максимізує показник (4.101) за заданого $W = \omega$. Тоді $\bar{X}_i = \bar{X}_i(\omega)$ є функціями загального капіталу ω.

Для $j \neq h,$ згідно з теоремою Борха, отримаємо тотожність

$$k_j\ u'(\bar{X}_j(\omega)) = k_h\ u'(\bar{X}_h(\omega)). \tag{4.113}$$

Диференціюванням (4.113) за ω отримаємо рівність

$$k_j\ u''(\bar{X}_j(\omega))\ \frac{d\bar{X}_j}{d\omega} = k_h\ u''(\bar{X}_h(\omega))\ \frac{d\bar{X}_h}{d\omega}. \tag{4.114}$$

Відношення рівностей (4.114) та (4.113) дає такий вираз:

$$r_j(\bar{X}_j(\omega))\ \frac{d\bar{X}_j}{d\omega} = r_h(\bar{X}_h(\omega))\ \frac{d\bar{X}_h}{d\omega}.$$

Звідси й очевидної рівності

$$\sum_{i=1}^{n} d\bar{X}_i = d\omega$$

знаходимо

$$d\bar{X}_j = \frac{(r_j(\bar{X}_j))^{-1}}{\sum_{h=1}^{n}(r_h(\bar{X}_h))^{-1}}\ d\omega,\ j = \overline{1,n}. \tag{4.115}$$

Таким чином, із рівняння (4.115) можна отримати сім'ю Парето-оптимальних обмінів ризиком, доповнивши його початковими умовами

$$\bar{X}_j(\omega_0) = \hat{X}_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.116}$$

де ω_0 — деяке значення загального капіталу компаній.

Для ілюстрації застосування рівняння (4.115) повернемось до прикл. 4.7—4.8. Припустимо для зручності, що $(r_j(\bar{X}_j))^{-1} = \alpha\ x + \beta_j,\ j = \overline{1,n}$. Перевіремо, що

$$\bar{X}_j = q_j\ W + d_j, \text{або}\ d\bar{X}_j = q_j\ d\omega \qquad (4.117)$$

для множини квот $q_j,\ j = \overline{1,n}$, та додаткових платежів $d_j,\ j = \overline{1,n}$.

Із (4.115) з наших припущенн маємо

$$d\bar{X}_j = \frac{\alpha\ \bar{X}_j + \beta_j}{\sum_{h=1}^{n}(\alpha\ \bar{X}_j + \beta_j)}\ d\omega = \frac{\alpha\ \bar{X}_j + \beta_j}{\alpha\ W + \beta}\ d\omega,$$

де $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$.

Звідси і з виразів (4.117) отримаємо

$$\frac{d\bar{X}_j}{d\omega} = \frac{\alpha\ q_j\ W + \alpha\ d_j + \beta_j}{\alpha\ W + \beta}.$$

Щоб показати, що останнє відношення дорівнює q_j, розглянемо два випадки.

1. Якщо $\beta \neq 0$, то досить прийняти

$$q_j = \frac{\alpha\ d_j + \beta_j}{\beta},\ j = \overline{1,n}.$$

2. Якщо $\beta = 0$, то $q_j,\ j = \overline{1,n}$, — довільні квоти, а додаткові платежі $d_j = -\beta_j/\alpha,\ j = \overline{1,n}$.

Згідно з теоремою Борха, Парето-оптимальний обмін ризиком $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ характеризується наявністю випадкової величини Λ, для якої $\Lambda = k_i\ u'(\bar{X}_i), i = \overline{1,n}$. Оскільки $\bar{X}_i = \bar{X}_i(\omega)$, то і $\Lambda = \Lambda(\omega)$. Звідси

$$\frac{d\Lambda}{d\omega} = k_i\ u''(\bar{X}_i)\ \frac{d\bar{X}_i}{d\omega} = k_i\ u''(\bar{X}_i)\ \frac{(r_i(\bar{X}_i))^{-1}}{\sum_{h=1}^{n}(r_h(\bar{X}_h))^{-1}}$$

або

$$\frac{1}{\Lambda}\ \frac{d\Lambda}{d\omega} = -\frac{1}{\sum_{h=1}^{n}(r_h(\bar{X}_h))^{-1}},$$

тобто Λ є спадною функцією загального капіталу ω.

Припустимо, що розподіл загального капіталу W вигляду $(W_1, \ldots, W_n)$ серед n компаній є Парето-оптимальним. Тоді виникає запитання: скільки вигоди компанія може мати від кооперації?

Для відповіді на це запитання скористаємося поняттям *потенціалу синергії* η.

Це найбільше значення x, яке можна вилучити із системи без шкоди для компаній, тобто таке x, що має обмін ризиком $(X_1, \ldots, X_n)$, для якого

$$X_1 + \ldots + X_n = W - x;$$

$$E(u_i(X_i)) \geq E(u_i(W_i)),\ i = \overline{1,n}. \qquad (4.118)$$

Зрозуміло, що за $x = \eta$ нерівність із (4.118) стає рівністю, тому $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ має бути Парето-оптимальним обміном ризиком для $W - \eta$.

Приклад 4.10. Цей приклад є продовженням прикладу 4.7, в якому всі компанії використовували експоненціальну функцію корисності. Оскільки $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ є Парето-оптимальним обміном ризиком для $W - \eta$, то

$$\bar{X}_i = \frac{a\ (W - \eta)}{a_i} + d_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Використавши умову $E(u_i(\bar{X}_i)) = E(u_i(W_i))$, отримаємо

$$E(\exp(-a\ W))\ \exp(a\ \eta - a_i\ d_i) = E(\exp(-a_i\ W_i))$$

або

$$\frac{a}{a_i}\ \eta - d_i = \frac{1}{a_i}\ \ln E(\exp(-a_i\ W_i)) - \frac{1}{a_i} \ln E(\exp(-a\ W)).$$

Підсумовучи останню рівність за i, запишемо вираз потенціалу синергії

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\ \ln E(\exp(-a_i\ W_i)) - \frac{1}{a}\ \ln E(\exp(-a\ W)).$$

Ринок банківсько-кредитних послуг — це ринок, де основними товарами є гроші, банківські кредити та цінні папери (наприклад, векселі, облігації тощо). Банківсько-кредитні установи виступають посередниками між різними економічними агетами і надають їм фінансові послуги. Відповідні послуги надаються у формі різних фінансових операцій і угод, що потребують кількісних моделей для прийняття відповідних рішень.

Ці моделі є динамічними (тобто залежать від часу), оскільки вартість фінансових активів залежить від часу і змінюється з часом, при цьому розрізняють

моделі з *дискретним часом* (коли стан фінансової операції змінюється в окремі дискретні моменти часу) і з *неперервним часом* (коли стан змінюється неперервно з плином часу), а також моделі з *прямим часом* (коли час змінюється від минулого через сучасне до майбутнього) та із *зворотним часом* (коли час змінюється від майбутнього моменту через сучасність до минулого моменту).

Розглянемо найпростіші моделі фінансових операцій або угод, коли загальний стан фінансового агента в момент часу t характеризується одним числом — загальною сумою його фінансових активів $S(t)$ (у грошовому виразі). Операція описується часовими параметрами: t_0 — її початок; T – термін дії; $t_1 = t_0 + T$ — момент її закінчення.

Абсолютний результат операції дає приріст суми активів $S(t_1) - S(t_0) = I(t_0, T, S(t_0))$, який називають *інтересом (відсотком)* відповідного фінансового агента щодо операції. Інтерес I є платою за відповідну фінансову послугу і водночас певною компенсацією за можливий ризик, пов'язаний з операцією.

Одним із найпоширеніщих типів операцій є надання *кредиту* або позики. Тоді інтерес є платою за використання грошових коштів однієї особи (фізичної чи юридичної), яку називають *кредитором,* іншою особою (позичальником або *дебітором*), а також усередненою премією за можливий ризик неповернення грошей на множині подібних позик.

Показниками ефективності операцій у моделях прямого часу є *ставка відсотка*

$$r(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0)},$$

а в моделях зворотного часу — *відносна знижка* (*дисконт*):

$$d(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0 + T)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0 + T)}.$$

Між уведеними величинами *початкової суми* $S(t_0)$, *нарощеної суми,* ставками відсотка $r(t_0, T)$ та дисконту $d(t_0, T)$ є такі співвідношення:

$$r(t_0,T) = \frac{d(t_0,T)}{1 - d(t_0,T)},\ d(t_0,T) = \frac{r(t_0,T)}{1 + r(t_0,T)};$$

$$S(t_0 + T) = S(t_0)\ (1 + r(t_0,T));$$

$$S(t_0) = S(t_0 + T)\ (1 - d(t_0,T)).$$

Зручними для використання є ще два показники: *дисконт-фактор*

$$v(t_0,T) = 1 - d(t_0,T) = 1 - \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0 + T)} = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + T)} =$$

$$= \frac{1}{1 + r(t_0,T)}$$

та *коефіцієнт нарощення*

$$a(t_0,T) = 1 + r(t_0,T) = \frac{1}{1 - d(t_0,T)} = \frac{S(t_0 + T)}{S(t_0)}.$$

Зауважимо, що у наведених вище формулах r і d є десятковими дробами, але у фінансовій практиці їх зазвичай виражають у відсотках. Крім того, відсоток (інтерес) у практиці банківсько-кредитних операцій нараховують один раз за певну одиницю часу, яку називають *базисною* (рік, квартал, місяць, день). Відовідний інтервал часу (період) називають періодом *капіталізації, конверсії* (*нарахування*).

Для нарахування відсотків (інтересу) використовують схеми *простих відсотків* (для короткострокових операцій, що тривають не більше року), *складних відсотків* та різні їх комбінації.

Нехай $t_0 = 0,\ t_1 = T$. Тоді $S(t_0) = S(0),\ S(t_0 + T) = S(T),$ $r(t_0,T) = r_T, d(t_0,T) = d_T,$ і схема простих відсотків відповідає випадку лінійної залежності r_T та d_T від часу T:

$$r_T = r\ T,\ d_T = d\ T,$$

де r — ставка відсотка за один період конверсії; d — облікова ставка за той самий період.

Тоді основні *формули нарощення* суми за простими відсотками мають вигляд

$$S(T) = S(0)\ (1 + r\ T),\ S(T) = S(0)\ (1 - d\ T)^{-1}, \quad (4.119),$$

а *формули дисконтування* за простими відсотками, що визначають $S(0)$ за майбутньою вартістю $S(T)$, — вигляд

$$S(0) = S(T)\ (1 + r\ T)^{-1} = S(T)\ v_T;$$

$$S(0) = S(T)\ (1 - d\ T) = S(T)\ v_T. \qquad (4.120)$$

Зауважимо, що формули (4.119), (4.120) використовуються не тільки в моделях з дискретним часом для цілого числа T періодів, а й у моделях з довільним числом T, тобто у моделях з неперервним часом.

Якщо ставка простих відсотків через інфляцію та інші обставини є змінною протягом інтервалу угоди $(t_0, t_0 + T)$, причому її зміни відбуваються у моменти часу τ_i: $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m-1}\ t_0 + T$, а на підінтервалі (τ_{k-1}, τ_k) значення ставки є ρ_{k-1}, $k = \overline{1, m}$, де $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = t_0 + T$. Тоді коефіцієнт нарощення на всьому інтервалі $(t_0, t_0 + T)$ визначають виразом

$$a(t_0, T) = \frac{S(\tau_m)}{S(\tau_0)} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (\tau_k - \tau_{k-1})\ \tau_k \rho_{k-1}. \qquad (4.121)$$

Нарощення простих відсотків на початкову суму $S(\tau_0) = S(t_0)$ на кожному підінтервалі (τ_{k-1}, τ_k) відбувається незалежно від нарощення на попередніх підінтервалах, а відповідний абсолютний приріст суми (індекс) $I(\tau_{k-1}, \tau_k, S(t_0))$ є функцією тільки $\tau_{k-1}, \tau_k, S(t_0)$, тому

$$I(t_0, T, S(t_0)) = \sum_{k=1}^{m} I(\tau_{k-1}, \tau_k, S(\tau_0)). \qquad (4.122)$$

Поділивши обидві частини (4.122) на $S(t_0) = S(\tau_0)$, отримаємо

$$r(t_0, T) = \sum_{k=1}^{m} r(\tau_{k-1}, \tau_k) = \sum_{k=1}^{m} (\tau_k - \tau_{k-1})\ \rho_{k-1}.$$

Якщо в момент кожної зміни ставки відсотка нарощену до цього моменту суму знову вкладають під новий простий відсоток (тобто відбувається реінвестування або капіталізація відсотків), то

$$S(t_0 + T) = S(\tau_m) = S(t_0)\ \Pi_{k=1}^{m}\ (1 + (\tau_k - \tau_{k-1})\ \rho_{k-1}). \quad (4.123)$$

Зокрема, коли $\tau_k - \tau_{k-1} = 1$ для всіх k та $\rho_{k-1} = r$ — стала величина, то нарощена сума відповідає схемі складних відстків за *складною ставкою відсотка* r, при цьому формула (4.123) набуде вигляду

$$S(t_0 + T) = S(t_0)\ (1 + r)^T, \quad (4.124)$$

тобто для схеми складних відсотків ставка відсотка r_T за час T визначають як

$$r_T = (1 + r)^T - 1,$$

де r — складна ставка відсотка за один період конверсії.

Таку схему нарахування складних відсотків називають *декурсивною* (наступною), що відповідає методиці нарахування відсотка наприкінці кожного періоду конверсії.

Іншим варіантом схеми складних відсотків є *антисипативна* r (попередня) схема, коли відсоток нараховується на початок кожного періоду конверсії. Кількісно вона відповідає використанню дисконту d_T, що має вигляд

$$d_T = 1 - (1 - d)^T,$$

де d — складна облікова ставка.

Тоді

$$S(0) = S(T)\ (1 - d)^T,\ S(T) = S(0)\ (1 - d)^{-T}.$$

У практиці банківсько-кредитних розрахунків за базову одиницю часу найчастіше беруть один рік, але буває й так, що період конверсій становить $1/m$ частину року, тобто нарахування відсотків і дисконтування виконується m разів на рік. У такому разі річна ставка r або облікова ставка є d *номінальними,* а практичні розрахунки виконують із застосуванням релятивних та еквівалентних ставок.

Релятивні ставки відсотків $r^{(m)}$ і релятивні облікові ставки $d^{(m)}$, що відповідають номінальним ставкам r та d, визначають виразами:

$$r^{(m)} = \frac{r}{m}; \; d^{(m)} = \frac{d}{m}.$$

Тоді нарощені суми за T років мають вигляд

$$S(T) = S(0)\ (1 + \frac{r}{m})^{mT} = S(0)\ (1 - \frac{d}{m})^{-mT}. \qquad (4.125)$$

Використання релятивних ставок спрощує обчислення, але призводить до порушення *принципу еквівалентності фінансових угод,* за яким зміна умов фінансової операції не повинна змінювати результатів. Так, використання формул (4.125) за $m \neq 1$ та $m = 1$ дає різні нарощені суми за той самий час T, оскільки праві частини цих формул як функції m є монотонно зростаючими (друга «чудова» границя теорії числових послідовностей) і за $m \to \infty$ мають границю

$$S(T) = S(0)\ \exp(rT).$$

Щоб уникнути подібного ефекту використання релятивної ставки відсотків, замість неї використовують *еквівалентну* або *зрівноважувальну відсоткову ставку* $r_e^{(m)}$, що визначається умовою рівності відповідних коефіцієнтів нарощення

$$(1 + r)^T = (1 + r_e^{(m)})^{mT}.$$

Звідси

$$r_e^{(m)} = (1 + r)^{1/m} - 1.$$

Ефективна річна ставка $r_{ef}^{(m)}$ для номінальної ставки r у разі нарахування відсотків m разів на рік визначається із умови рівності коефіцієнтів нарощення за рік

$$1 + r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m,$$

тобто

$$r_{ef}^{(m)} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1.$$

Описані вище схеми простих і складних відсотків широко використовуються під час аналізу фінансових операцій.

Далі розглянемо врахування впливу оподаткування та інфляції на нарощення відсотків.

Якщо отримані відсотки (інтерес) оподатковуються, то це призводить до зменшення нарощеної суми. Якщо позначити нарощену суму до сплати податків через $S(T)$ за час T, а з урахуванням сплати — через S^*, то у разі ставки податку на відсотки g у схемі простих відсотків матимемо

$$S^* = S(T) - (S(T) - S(0))\ g = S(0)\ (1 + (1 - g)\ r\ T),$$

тобто оподаткування призводить до скорочення реальної відсоткової ставки: замість r фактично маємо ставку $(1 - g)\ r$.

У довгострокових операціях під час нарахування податку на складні відсотки можливі такі варіанти: податок нараховуться відразу за весь термін (тобто на всю суму інтересу) або ж послідовно, наприкінці кожного періоду (наприклад, року). У першому випадку сума податку становить $S(0)\ ((1 + r)^T - 1)\ g$, а нарощена сума після сплати податку

$$S^*(T) = S(T) - (S(T) - S(0))\ g = S(0)\ ((1 - g)\ (1 + r)^T + g).$$

У другому випадку податок G_t за період t задовольняє рекурентному співвідношенню

$$G_t = I_t\ g = (S(t) - S(t - 1))\ g = S(0)\ ((1 + r)^t - (1 + r)^{t-1})\ g.$$

Темпи інфляції вимірюються за допомогою системи індексів інфляції, що характеризують середню зміну рівня цін для фіксованого набору (кошика) товарів та послуг за певний період часу. Якщо споживчий кошик складається із k благ, причому благо s входить до нього у кількості q_s відповідних одиниць, а ціна за відповідну одиницю в момент часу t становить $p_s(t)$ грошових одиниць, то вартість $P(t)$ кошика в момент часу t визначають як

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k} p_s(t)\ q_s.$$

Індексом інфляції (або підвищення споживчих цін) за проміжок часу від τ_1 до τ_2 називають безрозмірнуа величину

$$H(\tau_1, \tau_2) = \frac{P(\tau_2)}{P(\tau_1)},\ \tau_1 < \tau_2,$$

а *темпом інфляції* за цей проміжок часу — величину

$$h(\tau_1, \tau_2) = \frac{P(\tau_2) - P(\tau_1)}{P(\tau_1)} = H(\tau_1, \tau_2) - 1.$$

Зауважимо, що формально це подібно до визначення ставки відсотків. Розглянемо поведінку коефіцієнтів нарощення за змінними ставками відсотків. Зазначимо, що коефіцієнт нарощення $a(\tau_1, \tau_2) = \frac{S(\tau_1)}{S(\tau_2)}$; $\tau_1 < \tau_2$, суми S за складними відсотками за проміжок часу (τ_1, τ_2) для трьох довільних моментів часу $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ задовольняє ланцюговому співвідношенню

$$a(\tau_1, \tau_3) = a(\tau_1, \tau_2)\ a(\tau_2, \tau_3), \qquad (4.126)$$

що випливає з означення a.

Отже, враховуючи, що $a(\tau_1, \tau_2) = (1 + r)^{\tau_2 - \tau_1}$ у разі сталої ставки відсотка r на проміжку часу (τ_1, τ_2) і змінних відсоткових ставках $r_1, \ldots, r_k$, що діють на відповідних проміжках часу, коефіцієнт нарощення за весь термін часу (τ_0, τ_k) визначається формулою

$$a(\tau_0, \tau_k) = \Pi_{s\Pi=1}^{k}\ (1 + r_s)^{\tau_{2s} - \tau_{s-1}}.$$

У разі довільних темпів інфляції індекс інфляції $H(\tau_0, \tau_k)$ є добутком індексів інфляції $H(\tau_{s-1}, \tau_s) = 1 + h(\tau_{s-1}, \tau_s)$, тобто

$$H(\tau_0, \tau_k) = \Pi_{s\Pi=1}^{k}\ (1 + h(\tau_{s-1}, \tau_s)).$$

Звідси у разі сталого темпу інфляції за одиницю часу h індекс підвищення цін за час T визначається як

$$H_T = (1 + h)^T.$$

Індекс купівельної спроможності грошей за проміжок часу (τ_1, τ_2) $I_{nc}(\tau_1, \tau_2)$

пов'язаний з $H(\tau_1, \tau_2)$ відношенням $I_{nc}(\tau_1, \tau_2) = H^{-1}(\tau_1, \tau_2)$.

Реальна купівельна спроможність нарощеної суми грошей $S(T)$ за час T визначається як

$$I_{nc}(0, T) = \frac{S(T)}{H_T}.$$

Отже, у випадку нарощення за простою ставкою відсотка r маємо

$$I_{nc}(0, T) = S(0) \frac{1 + r\ T}{(1 + h)^T},$$

у випадку нарощення за складною ставкою відсотка r отримаємо

$$I_{nc}(0, T) = S(0) \left(\frac{1 + r}{1 + h}\right)^T,$$

де h — сталий темп інфляції.

Означені вище показники можна поширити на неперервний випадок.

4.6. Потоки платежів. Ренти або ануїтети. Оцінювання вартості та дохідності облігацій та акцій. Страхування життя

Фінансові операції зазвичай мають тривалий за часом характер і складаються не з разового платежу, а з деякої послідовності виплат, тобто є *потоком платежів*, можливо різних знаків, наприклад, є погашення позики частинами, орендна плата, інвестиції тощо.

Нехай фінанасова операція за угодою починається в момент часу t_0, закінчується — в момент часу t_n, виплати сум Y_k відбуваються в моменти t_k, $k = \overline{0,n}$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Якщо всі члени Y_k потоку платежів мають один знак і виплати відбуваються через одинакові інтервали часу $\tau = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, то таку послідовність платежів називають *фінансовою рентою (ануїтетом),* незалежно від призначення цих виплат, а τ — *періодом ренти.*

Крім указаних параметрів потоку платежів, для його опису потрібно мати базову одиницю часу та ефективну ставку r складного відсотка, за якою здійснюються всі розрахунки, а також спосіб нарахування відсотків.

Виплата ренти може відбуватися $l(l \geq 1)$ разів на рік, а нарахування відсотків — $m(m \geq 1)$ разів на рік. Це дискретні (l, m) — кратні ренти. Коли виплати й нарахування відсотків відбуваються досить часто, то такі потоки платежів простіше аналізувати як неперервні. Якщо виплата здійснюється наприкінці кожного періоду, то рента називають *звичайною (постнумерандо)*, а якщо на початку періоду, то — *авансованою (пренумерандо)*.

За значенням своїх членів ренти поділяють на *сталі* ($Y_k = Y = const$) та *змінні*, за ймовірністю виплати — на *правильні* та *умовні*. Вірні рени підлягають безумовній сплаті (наприклад, погашення кредиту), причому кількість членів такої ренти відома наперед. Виплата умовної ренти залежить від настання деякої

випадкової події, тому кількість її членів наперед невідома. До такого типу рент належать *страхові ануїтети* — різні послідовні платежі в особистому і майновому страхуванні.

За кількістю членів розрізняють ренти зі скінченим числом членів, тобто *обмежені за терміном* (їх термін наперед визначений), та *нескінченні (довічні)* ренти. Щодо початку терміну ренти і певного моменту часу, що передує її початку, ренти розподіляють на *негайні* та *відкладені.*

Аналіз потоку платежів передбачає розрахунок таких його узагальнених характеристик:

AV — нарощена вартість або майбутня вартість FV потоку (сума всіх членів потоку з нарахуваннями на них до кінця терміну відсотками);

PV — сучасна вартість потоку (сума всіх його членів, дисконтованих на початок терміну або на деякий попередній момент часу).

Ці характеристики важливі для правильного визначення ціни продажу або купівлі ренти.

Розглянемо спочатку прямий метод розрахунку FV та PV потоку платежів Y_j, що сплачуються у цілочислені моменти часу n_j після початкового моменту часу $t_0 = 0$ протягом n періодів часу одиничної тривалості, коли період потоку збігається з періодом конверсії. Це випадок *простого* потоку платежів з декурсивним нарахуванням відсотків за ставкою r. Тоді

$$S(n) = FV(n) = \sum_j Y_j (1 + r)^{n-n_j};$$

$$S(0) = PV(0) = \sum_j Y_j v^{n_j}, \; v = (1 + r)^{-1};$$

$$PV(0) (1 + r)^n = FV(n), \; S(0) = S(n) v^n.$$

Тепер розглянемо випадки простих рент. Нехай:

$S_0(t)$ — сумарна вартість усіх виплат ренти пренумерандо $\mathfrak{R}_0$, зведена до моменту часу t;

$S_1(t)$ — аналогічна величина для ренти постнумерандо $\mathfrak{R}_1$, $0 \leq t \leq n$.

Виведемо формули для PV та FV цих рент, застосовуючи позначення

$$PV(\mathfrak{R}_0) \div S_0(0),\ FV(\mathfrak{R}_0) \div S_0(n);$$

$$PV(\mathfrak{R}_1) \div S_1(0),\ FV(\mathfrak{R}_1) \div S_1(n).$$

Зводячи всі виплати рент до момену часу $t_0 = 0$ та застосовуючи формулу для суми геометричної прогресії, отримаємо

$$S_0(0) = Y\ (1 + v + \ldots + v^{n-1}) = Y\ \frac{1 - v^n}{1 - v} = Y\ \frac{1 - v^n}{d};\ (4.127)$$

$$S_1(0) = Y\ (v + \ldots + v^{n-1}) = Y\ v\ \frac{1 - v^n}{1 - v} = Y\ \frac{1 - v^n}{r},\ (4.128)$$

де $v = (1 + r)^{-1} = 1 - d$.

Переходячи від вартості рент у момент часу $t_0 = 0$ до їхньої вартості у момент часу n, отримаємо

$$S_0(n) = (1 + r)^n\ S_0(0) = Y\ v^{-n}\ \frac{1 - v^n}{d} = Y\ s\ \frac{s^n - 1}{r};\ (4.129)$$

$$S_1(n) = (1 + r)^n\ S_1(0) = Y\ v^{-n}\ \frac{1 - v^n}{r} = Y\ \frac{s^n - 1}{r},\ (4.130)$$

де $s = 1 + r = v^{-1}$.

Зауважимо, що для вартості рент з одиничними виплатами $Y = 1$ у фінансах і страхуванні прийнято використовувати спеціальні міжнародні позначення. Так, PV рент $\mathfrak{R}_1$ та $\mathfrak{R}_0$ позначаються як

$$a_{n|r} \div \frac{S_1(0)}{Y} = v + \ldots + v^n = v\ \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1 - v^n}{r},\qquad (4.131)$$

$$\ddot{a}_{n|r} \div \frac{S_0(0)}{Y} = 1 + v + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}, \quad (4.132)$$

а FV — як

$$s_{n|r} \div \frac{S_1(n)}{Y} = v^{-n} \frac{1 - v^n}{r} = \frac{s^n - 1}{r}; \quad (4.133)$$

$$\ddot{s}_{n|r} \div \frac{S_0(n)}{Y} = v^{-n} \frac{1 - v^n}{d} = s \frac{s^n - 1}{r}. \quad (4.134)$$

Величини $a_{n|r}$ та $\ddot{a}_{n|r}$ називають відповідно *коефіцієнтами дисконтування рент* $\mathfrak{R}_1$ та $\mathfrak{R}_0$, а $s_{n|r}$ та $\ddot{s}_{n|r}$ — *коефіцієнтами нарощення цих рент.*

Сучасну вартість довічних рент постнумерандо і пренумерандо легко визначити, переходячи у відповідних формулах для обмежених рент до границі за $n \to \infty$ з урахуванням того, що $\lim\limits_{n\to\infty} v^n = 0$, оскільки $v \in (0,1)$. Тоді, зокрема, відповідні коефіцієнти дисконтування довічних рент мають вигляд (див. формули (4.131)—(4.132)):

$$a_{\infty|r} = \lim_{n\to\infty} a_{n|r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v^n}{r} = \frac{1}{r};$$

$$\ddot{a}_{\infty|r} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{n|r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1}{d},$$

тобто PV навіть необмеженої кількості виплат — скінченна («далекі» гроші сьогодні цінятся дуже мало). Механізм довічного отримання доходу зі скінченної суми дуже простий — приріст суми за період між платежами ренти повністю компенсує виплату.

Відкладена рента — це негайна рента, зсунута в часі на період відстрочки. Тому PV відкладеної ренти є PV негайної ренти, дисконтованої на інтервал часу, що дорівнює періоду відстрочки m. Відповідні вартості відкладеної ренти визначаються як

$$a_{n|r}^{m} = v^{m}\ a_{n|r},\ \ddot{a}_{n|r}^{m} = v^{m}\ \ddot{a}_{n|r}.$$

Розглянемо питання, пов'язані з розрахунком термінів ренти та її дохідності. Під час розв'язування задач створення фінансового фонду або під час погашення заборгованості частинами, коли через обмежені фінансові можливості розмір періодичного платежу не може перевищувати Y, виникає запитання: протягом якого часу n може бути створений фонд або погашена заборгованість заданої суми S? Використовуючи наведені вище формули, неважко переконатися в тому, що для ренти $\mathfrak{R}_1$ термін створення фонду

$$n = \frac{\ln(S\ r/Y + 1)}{\ln(1 + r)},$$

а термін погашення заборгованості

$$n = \frac{\ln(1 - S\ r/Y)}{\ln(1 + r)},$$

де $Y = S/a_{n|r}$.

У разі необхідності оцінити ефективність (дохідність) фінансово-банківських операцій або інвестиційних проектів розв'язується задача визначення ставки дохідності ренти r за відомими Y, n, $S_0(n)$ $(S_1(n))$ або $S_0(0)$ $(S_1(0))$. Зокрема, для ренти $\mathfrak{R}_1$ задача зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння

$$S_1(n) = Y\ a_{n|r} \text{ або } S_1(0) = Y\ a_{n|r}$$

відносно r числовими методами.

Розглянемо m-кратні ренти, що виплачуються m разів на рік, при цьому розрахунок FV та PV виконується аналогічно випадку щорічних рент із використанням релятивної ставки $j = r/m$ за період $1/m$ року (де r — номінальна річна ставка). Якщо кількість членів сталої ренти дорівнює N, то для ренти $\mathfrak{R}_1$ з одиничними членами маємо

$$S_1(N) = s_{j,N} = \sum_{k=0}^{N-1} (1 + j)^k = \frac{(1 + j)^N - 1}{j};$$

$$S_0(N) = a_{j,N} = \sum_{k=0}^{N} (1 + j)^{-k} = \frac{1 - (1 + j)^{-N}}{j}. \qquad (4.135)$$

Для ренти пренумерандо $\mathfrak{R}_0$ з $Y = 1$ отримаємо

$$S_1(0) = \ddot{s}_{j,N} = \sum_{k=1}^{N} (1 + j)^{k} = \frac{(1 + j)^{N} - 1}{j} (1 + j) =$$

$$= s_{j,N} (1 + j);$$

$$S_0(N) = \ddot{a}_{j,N} = \sum_{k=0}^{N-1} (1 + j)^{-k} = \frac{1 - (1 + j)^{-N}}{j} (1 + j) =$$

$$= a_{j,N} (1 + j). \qquad (4.136)$$

Нехай на інтервалі часу від нульового до кінцевого моменту n рента сплачується досить часто, тому її можна вважати практично неперервною. Очевидно, що під час неперервної виплати різниця між рентами $\mathfrak{R}_0$ та $\mathfrak{R}_1$ зникає. PV неперервної ренти, що сплачується зі сталою інтенсивністю в одну грошову одиницю за одиницю часу під час неперервного нарахування відсотків зі сталою інтенсивністю δ, позначимо через $\bar{a}_{n|^{\delta}}$. Оскільки за інтервал $(t, t + \Delta t)$ малої довжини Δt буде виплачено Δt грошей, а зведена на початковий момент вартість цієї суми становить $e^{-\delta t} \Delta t$, то розбиваючи інтервал $(0, n)$ на подібні малі проміжки та підсумовуючи відповідні PV, отримаємо інтегральну суму для інтеграла від функції $e^{-\delta t}$ на проміжку $(0, n)$. Перейшовши в ній до границі за $\delta t \to 0$, матимемо

$$\bar{a}_{n|^{\delta}} = \int_0^n e^{-\delta t} dt. \qquad (4.137)$$

Оскільки під час неперервного нарахування $v = e^{-\delta}$, то з (4.137) отримаємо

$$\bar{a}_{n|^{\delta}} = \frac{1 - \exp(-n\delta)}{\delta} = \frac{v^n - 1}{\ln v} = \frac{r}{\delta} a_{n|r}.$$

ренти можна навести й інші її числові характеристики.

У моделях прийняття рішень щодо іпотечного кредитування (позик під заставу нерухомості), страхування життя, планування прямих інвестицій тощо широко застосовуються ренти зі змінними членами.

Розрахунок FV та PV подібних рент та фондів виконується за рекурентними формулами, що пов'язують значення відповідних показників за два суміжні періоди. Використовують розрахункові схеми в прямому і зворотньому часі.

Якщо відома накопичена вартість FV фінансового фонду наприкінці $k - 1$-го року D_{k-1} і платіж Y_k, що вноситься наприкінці k-го року, то сума на кінець k -го року

$$D_k = s\ D_{k-1} + Y_k, \tag{4.138}$$

де $s = r + 1$ — річний множник нарощення (схема прямого часу).

Якщо ж, навпаки, задано FV фонду D_k, то її поточне значення

$$D_{k-1} = v\ (D_k - Y_k), \tag{4.139}$$

де $v = (r + 1)^{-1}$.

Використовуючи метод математичної індукції, розв'язки різницевих рівнянь першого порядку (4.138) і (4.139) можемо записати у такому вигляді:

$$D_t = s^t\ D_0 + \sum_{k=1}^{t} s^{t-k}\ Y_k,\ t = 1,2,\ldots; \tag{4.140}$$

$$D_\tau = v^{n-1}\ D_n - \sum_{k=\tau+1}^{n} Y_k)\ v^{k-1},\ \tau = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{4.141}$$

Із формул (4.140) і (4.141) можна отримати всі попередні результати для сталих щорічних рент. Крім того, ці формули дозволяють здійснювати раціональне планування рент. Як приклад розглянемо таку задачу: за фіксований перід часу T створити фінансовий фонд у розмірі $\widehat{D}$, використавши при цьому мінімальну суму

платежів. Можлива формалізація цієї задачі така:

$$I(D_0, Y_1, \ldots, Y_T) \;=\; D_0^2 \;+\; \sum_{k=1}^{T} \; Y_k^2 \;\rightarrow\; \min \qquad (4.142)$$

у разі виконання умови

$$s^T \; D_0 \;+\; \sum_{k=1}^{T} \; s^{T-k} \; Y_k \;=\; \widehat{D}. \qquad (4.143)$$

Задача (4.142) і (4.143) є строго опуклою і тому має єдиний розв'язок. Для його пошуку використаємо метод Лагранжа, при цьому функція Лагранжа має вигляд

$$L \;=\; I(D_0, Y_1, \ldots, Y_T) \;+\; \lambda \; (\widehat{D} \;-\; s^T \; D_0 \;-\; \sum_{k=1}^{T} \; s^{T-k} \; Y_k),$$

де λ — множник Лагранжа.

Необхідні і достатні умови оптимальності матимуть вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial D_0} \;=\; 2 \; D_0 \;-\; \lambda \; s^T \;=\; 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_j} \;=\; 2 \; Y_j \;-\; \lambda \; s^{T-j} \;=\; 0, \; j \;=\; \overline{1, T}.$$

Звідси

$$D_0 \;=\; \frac{\lambda \; s^T}{2}, \; Y_j \;=\; \frac{\lambda \; s^{T-j}}{2}, \; j \;=\; \overline{1, T}. \qquad (4.144)$$

Із умови (4.143) визначимо множник Лагранжа

$$\lambda \;=\; \frac{2 \; \widehat{D}}{s^{2T} \; (1 \;+\; \sum_{k=1}^{T} \; s^{-2k})}.$$

Звідси і виразу (4.144) отримаємо оптимальні платежі

$$D_0 \;=\; \frac{\widehat{D}}{s^T \; (1 \;+\; \sum_{k=1}^{T} \; s^{-2k})}, \; Y_j \;=\; \frac{\widehat{D} \; s^{-j}}{s^T \; (1 \;+\; \sum_{k=1}^{T} \; s^{-2k})}, \; j \;=\; \overline{1, T}.$$

Облігації та акції — це найпоширеніші типи основних (первинних) цінних паперів, що є товарами фондового ринку. Фінансово-економічні рішення учасників цього ринку значно залежать від методів і моделей оцінки вартості та дохідності цих цінних паперів.

Облігації є найпоширенішим типом *цінних паперів з фіксованим доходом*, до

емісії (випуску) яких вдаються як держава, так і підприємства різної форми власності у разі потреби залучення значних грошових ресурсів.

Основні параметри облігації:

— *номінальна ціна (номінал)* — указана на ній сума, яку позичальник (*емітент* облігації) зобов'язується повернути її власнику (утримувачу) на термін закінчення її дії (на дату погашення);

— *викупна ціна* або правило її визначення;

— *норма дохідності (купона відсоткова ставка)*, — відношення суми відсотків за рік до номіналу облігації;

— *дати виплати відсотків.*

Оцінювання облігації на поточний момент часу полягає у визначенні поточної вартості всіх майбутніх виплат за облігацією з урахуванням моментів часу, коли вони здійснюватимуться. Поточна вартість купонної облігації дорівнює PV номіналу та PV потоку купонних виплат.

Номінали різних облігацій можуть істотно відрізнятися, тому для їх зіставлення потрібен вимірювач ринкових цін облігацій. Це *курс облігації* K, що є відсотковим відношенням ринкової ціни облігації P до її номіналу N: $K = P/N\ 100$. Так, якщо облігація номіналом у 1000 у. о. продається за 950 у. о., то її курс 95 відсотків.

Розглянемо оцінювання курсу облігації терміном на n років у момент її емісії. Сукупність річних виплат за купонами є рентою $\mathfrak{R}_1$ із членом $C = c\ N$, де c — купонна ставка. Тоді поточна вартість цієї ренти на момент емісії (див. формули (4.128), (4.131))

$$P_c = c\ N\ a_{n|r} = c\ N\ \frac{1 - v^n}{r}, \qquad (4.145)$$

де $v = (1 + r)^{-1}$ — дисконтний множник.

Поточна вартість номіналу, що сплачується в момент погашення облігації

через n років після її емісії,

$$P_N = v^n N. \qquad (4.146)$$

Виходячи із (4.145), (4.146), курс облігації в момент емісії визначається як

$$\frac{K}{100} = \frac{P}{N} = \frac{P_c + P_N}{N} = v^n + c\, a_{n|r} = 1 + (c - r)\, a_{n|r}. \quad (4.147)$$

Із (4.147) випливають такі висновки:

1) якщо поточна ставка r дорівнює купонній ставці, то курс облігацій становить 100 відсотків (ціна дорівнює номіналу);

2) якщо $r > c$, то $K < 100$ відсотків (ціна нижче номінала), облігація купується з дисконтом;

3) якщо $r < c$, то $K > 100$ відсотків (ціна вища за номінал), облігація продається з премією.

Оцінюваня облігації проводиться у будь-який момент часу τ до моменту її погашення, і в цей момент облігація може бути продана або куплена на ринку цінних паперів за ринковою ціною. Відповідні формули для ціни облігації тут наводити не будемо.

З'ясуємо, як змінюється ціна облігації під час «миттєвої» зміні поточної відсоткової ставки r. Ціна облігації (як поточна вартість потоку платежів) для довільного моменту часу має вигляд

$$P = \sum_q C_q\, v^{t_q},$$

де t_q — момент сплати суми C_q, відрахований від поточного моменту часу.

Якщо r зміниться на Δr, то зміна ціни облігації становитиме

$$\Delta P = \frac{dP}{dr}\, \Delta r = \frac{dP}{dv}\, \frac{dv}{dr}\, \Delta r. \qquad (4.148)$$

Обчислення похідних дає:

$$\frac{dP}{dv} = \sum_q C_q\, t_q\, v^{t_q - 1}, \ \frac{dv}{dr} = -v^2, \frac{dP}{dr} = -P\, v\, D.$$

Звідси

$$D = -\frac{s}{P}\frac{dP}{dr} = -s\frac{d\ln P}{dr} = \frac{\sum_q C_q\ t_q\ v^{tq}}{\sum_q C_q\ v^{tq}}. \qquad (4.149)$$

Таким чином,

$$\Delta P = -P\ D\ v\ \Delta r. \qquad (4.150)$$

Щоб з'ясувати сутність величини D, визначеною рівністю (4.149), перепишемо останню у вигляді

$$D = \sum_q t_q\ \omega_q,\ \omega_q = \frac{C_q\ v^{tq}}{P},\ \sum_q \omega_q = 1.$$

де ω_q — вага, яку вносить платіж у момент часу t_q.

Отже, D є середньозваженою протяжністю потоку платежів, тобто *дюрацією.*

Сформулюємо загальні висновки, що випливають із формул (4.148) та (4.150).

1. Оскільки дюрація додатна, то збільшення поточної відсоткової ставки призводить до зменшення поточної ціни облігації, і навпаки.

2. Чим більша дюрація, тим сильніша чутливість ціни до зміни відсоткової ставки. Це пояснює поведінку інвесторів у ситуації, коли на ринку очікується зміна ставки r. Якщо очікується зниження r, то найбільше підвищення вартості зазнає облігація з великою дюрацією, тобто для довгострокових облігацій. Тоді інвестори намагаються придбати їх, щоб «зафіксувати» високий рівень r. І навпаки, якщо очікується зростання r, то найменше значення ціни буде у короткострокових облігаціях, тому інвестори прагнуть позбавитися довгострокових облігацій та інвестують кошти на короткі терміни, очікуючи максимального підйому r, коли можна буде купити довгострокові облігації за мінімальною ціною.

У цілому ж дохід від облігацій нижчий, ніж від інших видів цінних паперів, але водночас він надійніший, оскільки менше залежить від кон'юктурних коливань

та фази економічного циклу, ніж, наприклад, дохід від акцій. У зв'язку з цим в облігації переважно інвестують вільні резерви такі інституції, як пенсійні фонди, страхові компанії, інвестиційні фонди.

Розглянемо елементарні методи оцінювання вартості акцій та їх дохідності. *Акції* є цінними паперами, що випускаються акціонерними товариствами для фінансування своєї діяльності. Розрізняють два основних типи акцій: *привілейовані* і *звичайні*. Власник привілейованої акції має право отримувати фіксований дохід (*дивіденд*), причому сплата дивідендів за цими акціями здійснюється до розподілу дивідендів за звичайними акціями.

Проте привілейованої акції не дають права голосу на зборах акціонерів, тобто володіння цими акціями не дає права управляти акціонерним товариством. Ці акції аналогічні облігаціям, але на відміну від останніх термін їх дії необмежений.

Акція є цінним папером, що не підлягає погашенню. Основну масу акцій становлять звичайні акції, власники яких є співвласниками частки акціонерного товариства, що дорівнює відношенню суми їхніх акцій до загального випуску акцій.

З погляду теорії потоків платежів, привілейовані акції можна розглядати як довічні ренти постнумерандо. Якщо акція куплена на початку року, то її вартість дорівнює поточній вартості довічної ренти на цей момент часу

$$P = D\ a_{\infty|r} = \frac{D}{r}, \qquad (4.151)$$

де D — гарантована сума дивіденду за привілейовані акції; r — річна ставка дохідності.

Зазвичай формулу) використовують для оцінювання дохідності акцій за результатами торгів, коли ціна купівлі акцій відома.

Якщо привілейовану акцію куплено за час Θ до чергової виплати дивідендів, то її вартість визначається як

$$P(\Theta) = \frac{D}{r}\ s^{1-\Theta} \simeq \frac{D}{r}\ (1 + к\ (1 - \Theta)). \qquad (4.152)$$

За аналогією з ціною облігації ціну акції можна подати у вигляді суми «чистої» ціни акції, що визначається формулою (4.), та «накопиченого» доходу з дивідендів

$$A = D\ (1 - \Theta). \qquad (4.153)$$

Тоді дохідність акції можна подати у вигляді

$$r = \frac{D}{P - A(\Theta)}. \qquad (4.154)$$

Дохід від володіння звичайними акціями можна розглядати як нескінченний потік дивідендів (з погляду теорії потоків платежів), тому вартість акції дорівнює поточній вартості нескінченної змінної ренти

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} D_k\ v^k. \qquad (4.155)$$

Звичайні акції нормального (сталого) зростання — це акції, за якими очікується щорічний приріст дивідендів зі сталим темпом

$$D_k = D_0\ (1 + q)^k,\ k = 1,\ 2, \ldots, \qquad (4.156)$$

де k — номер року; q — ставка приросту дивідендів.

Ціна акції визначається як поточна вартість нескінченного потоку дивідендів

$$P = D_0\ \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q)^k\ v^k = D_0\ \frac{1 + q}{1 - q}.$$

Наведену формулу визначення ціни акції *називають моделлю Гордона*.

Як приклад умовних рент, у яких фігурують імовірності появи відповідних подій (надходжень або виплат грошей), розглянемо найпоширеніші *страхові ануїтети*, коли виплата члена ренти залежить від настання страхової події. Заздалегідь передбачити кількість платежів у таких ануїтетах та їхній термін неможливо.

Відповідно до страхової угоди страхувальник сплачує наперед страховику деяку суму — страхову премію. У свою чергу, він або його правонаступники мають

право отримати страхову суму S після настання страхової події. Якщо ймовірність настання страхової події q задано, то актуарно справедливу преміу P визначають як сподівану величину страхової виплати

$$P = S\ q.$$

Це відповідає принципу еквівалентних зобов'язань страховика і страхувальника. Однак на практиці реальна страхова премія більша від $S\ q$ на суму *навантаження*, що складається з видатків на ведення справи та деякого прибутку страхової компанії.

Простежимо, як цей принцип реалізується під час розрахунку *тарифної ставки*, тобто ціни зобов'язання сплатити фіксовану суму у разі настання страхової події в розрахунку на певну круглу суму страхової виплати (наприклад, 1000 грошових одиниць) при страхуванні життя.

Нехай P — сума нетто-премії (без страхового навантаження), а q_n — ймовірність смерті застрахованого через n років. Ураховуючи те, що у випадку, коли страхова подія відбудеться на першому році страхування, срахувальник отримає суму P (вважаємо, що премії сплачуються на початку року), на другому році — $P\ (1 + v)$ тощо, то сподівана виплата такого ряду премій становитиме

$$E(A) = P\ \sum_{k=1}^{n} q_k\ (\sum_{j=1}^{k-1} v^j),$$

де v — дисконтний множник за певною ставкою r.

Якщо вважати, що страхова сума сплачується наприкінці року, коли стався страховий випадок, то сподівання виплат у першому році — $S\ v\ q_1$, у другому — $S\ v^2\ q_1$ тощо. Отже, сподівання виплат з урахуванням часу платежу

$$E(S) = S\ \sum_{k=1}^{n} v^k\ q_k.$$

Тоді згідно з принципом еквівалентності зобов'язань страховика і страхувальника маємо рівність

$$E(A) = E(S),$$

яка дає змогу знаходити шукану суму нетто-премії та тариф страхування без урахування навантаження.

У страхуванні життя використовуються значення ймовірностей щодо життя до певного віку або, навпаки, смерті у певному віці. Систему таких характеристик визначають за допомогою таблиць смертності.

Нехай:

l_x — кількість осіб віку x, які лишилися живими з початкової кількості в 100 тис. осіб;

d_x — кількість осіб, які померли у кожній віковій групі після віку x протягом року;

q_x — емпірична ймовірність померти протягом року після віку x років.

Ці показники пов'язані такими співвідношеннями:

$$l_{x+1} = l_x - d_x;\ d_x = l_x\ q_x.$$

На основі таблиць смертності, можна визначити інші ймовірності щодо життя людей. Зокрема, імовірність померти протягом року для особи у віці x років

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

де p_x — ймовірність для кожної статі прожити ще один рік у віці x років.

Розглянемо страхування життя, коли страхова сума S виплачується у разі смерті застрахованого, який уклав угоду у віці x років. Якщо він помре на першому році страхування, то вартість виплати становитиме — $q_x\ v\ S$, на другому році страхування — $q_x\ v^2\ S$ тощо. Тоді одноразовий нетто-тариф дорівнює PV страхового ануїтету або математичному сподіванню суми дисконтованих виплат

$$A = S\ (\frac{d_x}{l_x}\ v + \frac{d_{x+1}}{l_x}\ v^2 + \ldots + \frac{d_\omega}{l_x}\ v^{\omega-x}),$$

де ω — термін смерті страхувальника.

4.7. Аналіз портфельних інвестицій. Модель Марковіца. Модель Тобіна. Модель Шарпа

Портфельні інвестиції полягають в інвестуванні коштів інвестора у певну сукупність фінансових активів тим чи іншим розподілом капіталу між активами. Зазвичай відповідними фінансовими активами є цінні папери з випадковими характеристиками.

Основна стохастична модель ринку цінних паперів ґрунується на припущеннях про визначеність інвестиційного горизонту, наявності скінченної кількості фінансових інструментів з нефіксованою дохідністю та ігноруванні інших витрат.

У моделі припускається, що інвестор, маючи певний початковий капітал I_0, використовує його в момент часу $t_0 = 0$ на придбання портфеля з усіх доступних йому активів на термін інвестиційного горизонту T. Наприкінці періоду інвестор реалізує (за ринковою ціною) всі активи портфеля, перетворюючи їх на капітал I_T, при цьому відносна дохідність портфельної інвестиції становитиме

$$R = \frac{I_T - I_0}{I_0},$$

де I_0 — детермінована величина; I_T — випадкова величина.

Ринкові ціни акцій (через співвідношення попиту та пропозиції) визначаються багатьма факторами економічного, політичного, інформаційного та іншого характерів. Сукупність цих факторів формує певний стан ринку в цілому. Кожен стан є елементарною подією у стохастичному просторі Ω всіх можливих станів ринку. Кожен стан ринку визначає дохідність усіх активів, певну сукупність яких $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ інвестор може залучити до портфеля. Вектор дохідності активів $R = \{R_1, \ldots, R_n\}$ є випадковим вектором на Ω, де R_i — дохідність активу a_i, $i = \overline{1, n}$, що є випадковою величиною на (Ω, B, P). У цьому випадку B — алгебра випадкових подій на Ω, P — ймовірнісна міра на B.

У інвестора є можливість вибирати портфель π з певної сукупності допустимих портфелів П. Під портфелем розуміють n — вимірний вектор $\pi' = (x_1, \ldots, x_n)$, що характеризує розподіл капіталу інвестора (в частках одиниці) між активами $a_1, \ldots, a_n$, тому

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Дохідність (ефективність) портфеля R_π є лінійною комбінацією дохідностей $R_1, \ldots, R_n$, тобто

$$R_\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Задача інвестора полягає у знаходженні оптимального портфеля π, який дає для нього найкращі характеристики R_π.

Математичні сподівання дохідностей $m_j = E(R_j)$, $j = \overline{1, n}$ характеризують середню ефективність активів a_j, дисперсії $\sigma_j^2 = V_{jj} = E(R_j - m_j)^2$ — варіабельність відносних дохідностей R_j активів a_j, а отже, і ризиковість вкладення коштів у них.

Інвестор зацікавлений в отриманні більшої сподіваної ефективності вкладу, але водночас для нього важливим є бажання зменшити ризик. Наприклад, якщо є вибір між двома видами цінних паперів, причому $m_1 > m_2$, а $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то раціональний інвестор вкладе гроші у цінні папери першого виду. Якщо ж $m_1 = m_2$, а $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, то інвестор вкладе гроші у цінні папери другого виду (в цьому випадку буде менша невизначеність). В іншому разі однозначного рішення немає. В цілому кожен інвестор, який вкладає гроші в ризикові активи, є гравцем, поведінка якого залежить до його схильності до ризику.

Будь-яку систему заходів, спрямовану на зниження ризику, називають *хеджуванням*. Ідея портфельних інвестицій полягає у комбінованому вкладі коштів у різні активи, що дає змогу *диверсифікувати* ризик і оптимізацією портфеля додатково знизити показники ризиковості інвестування.

Сподіваний ефект портфельної інвестиції з портфелем $\pi' = (x_1, \ldots, x_n)$ визначається як

$$m_\pi = E(R_\pi) = E(\sum_{i=1}^n x_i R_i) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) = \sum_{i=1}^n x_i m_i.$$

Ризикованість такого портфеля характеризується дисперсією його ефекту

$$V_\pi = E(R_\pi - m_\pi)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E((R_i - m_i)(R_j - m_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij},$$

де $V_{ij} = E((R_i - m_i)(R_j - m_j))$ — коваріації випадкових величин R_i та R_j, тобто $V_{ij} = Cov(R_i, R_j$; зокрема, $V_{jj} = E(R_j - m_j)^2 = \sigma_j^2$ є дисперсіями R_j, $j = \overline{1, n}$.

Розглянемо приклад, пов'язаний з ефектом диверсифікації.

Приклад 4.11. Нехай випадкові ефекти від різних видів цінних паперів у портфелі π є некорельованими, тобто $V_{ij} = 0$, $i \neq j$ (взаємно незалежними). Тоді

$$V_\pi = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2$$

і за основний показник ризиковості портфеля можна прийняти його середньоквадратичне відхилення $\sigma_\pi = \sqrt{V_\pi}$.

Якщо інвестор вклав гроші однаковими частками в усі цінні папери ($x_j = 1/n$, $j = \overline{1, n}$), то

$$m_\pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \ \sigma_\pi = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{1/2}.$$

Звідси

$$\sigma_\pi \leq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \bar{\sigma}^2)^{1/2} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

де $\bar{\sigma} = \sup_j \sigma_j < \infty$.

Отже, під час зростання кількості видів активів n ризик портфеля обмежений і прямує до нуля. Це показує ефект диверсифікації та практичне правило

фінансового ринку: для підвищення надійності інвестування в цінні папери слід складати портфель, що містить велику різноманітність паперів, ефект від яких випадковий, але випадкові відхилення — якомога незалежні.

Одним із можливих піходів до формування оптимальної поведінки інвестора щодо портфельних інвестицій може бути бажання:

1) максимізації сподіваної дохідності портфеля m_π за заданого рівня ризику V_π;

2) мінимізації ризику, вираженого через V_π, за заданого рівня сподіваної ефективності m_π;

3) максимізації сподіваної дохідності портфеля m_π з одночасною мінимізацією ризику V_π.

Подібні оптимізаційні задачі склали сутність аналізу середніх та дисперсій, який був запропонований Г. Марковіцем у теорії портфеля.

Розглянемо другу задачу пошуку оптимального портфеля $(\pi_*)' = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})$, що мінімізує дисперсію ефективності портфеля

$$V_\pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, V_{ij} \to \min \qquad (4.157)$$

за умови забезпечення заданого значення $\overline{m}_\pi$ сподіваної ефективності

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, m_i = \overline{m}_\pi \qquad (4.158)$$

та умови нормування

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad (4.159)$$

де матриця $V = \{V_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — симетрична і додатно визначена.

Задача (4.) ((4.157) – (4.159)) є строго опуклою задачею і тому має єдиний розв'язок. Припустимо, що $x_i^* > 0, i = \overline{1,n}$.

Функція Лагранжа для задачі (4.157)—(4.159) матиме вигляд

$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, V_{ij} + \lambda_1 \, (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \lambda_2 \, (\overline{m}_\pi -$

$\sum_{i=1}^{n} \; x_i \; m_i$).

Тоді умови оптимальності першого порядку потрібно записати таким чином:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \; = \; 2 \; \sum_{j=1}^{n} \; V_{kj} \; x_{*j} \; - \; \lambda_{*1} \; - \lambda_{*2} \; m_k \; = \; 0, \; k \; = \; \overline{1,n}. \quad (4.160)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.160) має єдиний розв'язок (обернена матриця V^{-1} існує і теж буде додатно визначеною)

$$x_* \; = \; \frac{1}{2} \; V^{-1} \; (\lambda_{*1} \; I_n \; + \lambda_{*2} \; m), \quad (4.161)$$

де $I_n' \; = \; (1,\ldots,1)$, $m' \; = \; (m_1,\ldots,m_n)$.

Умови (4.158)—(4.159) породжують систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення множників Лагранжа

$$\lambda_{*1} \; I_n' \; V^{-1} \; I_n \; + \; \lambda_{*2} \; I_n' \; V^{-1} \; m \; = \; 2;$$

$$\lambda_{*1} \; m' \; V^{-1} \; I_n \; + \; \lambda_{*2} \; m' \; V^{-1} \; m \; = \; 2 \; \bar{m}_\pi. \quad (4.162)$$

Розв'язок системи (4.162) визначають за формулами:

$$\lambda_{*1} \; = \; 2 \; \frac{J_2 \; - \; \bar{m}_\pi \; J_{12}}{J_1 \; J_2 \; - \; J_{12}^2}; \; \lambda_{*2} \; = \; 2 \; \frac{J_1 \; \bar{m}_\pi \; - \; J_{12}}{J_1 \; J_2 \; - \; J_{12}^2},$$

де $J_1 \; = \; I_n' \; V^{-1} \; I_n$, $J_2 \; = \; m' \; V^{-1} \; m$, $J_{12} \; = \; I_n' \; V^{-1} \; m$.

Тоді остаточна оптимальна структура портфеля (4.161) матиме вигляд

$$x_* \; = \; V^{-1} \; \frac{\bar{m}_\pi \; (J_{12} \; I_n \; - \; J_1 \; m) \; + \; J_{12} \; m \; - J_2 \; I_n}{J_{12}^2 \; - \; J_1 \; J_2} \; > \; 0. \quad (4.163)$$

Отже, оптимальний розв'язок є афінною функцією від $\bar{m}_\pi$.

Якщо нерівність у (4.163) порушується хоч би для одного індекса, то замість умов оптимальності (4.160) слід використовувати такі умови:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \; \geq \; 0; \; \frac{\partial L}{\partial x_k} \; x_{*k} \; = \; 0; \; x_{*k} \; \geq \; 0, k \; = \; \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \; x_{*i} \; m_i \; = \; \bar{m}_\pi; \; \sum_{i=1}^{n} \; x_{*i} \; = \; 1,$$

але розв'язки наведеної системи можна отримати лише чисельними методами.

Розглянемо третю задачу пошуку оптимального портфеля $\hat{\pi}' = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, що мінімізує дисперсію ефективності портфеля

$$V_\pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, V_{ij} \rightarrow \min \qquad (4.164)$$

за умови забезпечення максимального значення $\overline{m}_\pi$ сподіваної ефективності

$$m_\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i \, m_i \rightarrow \max \qquad (4.165)$$

та умови нормування

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \qquad (4.166)$$

Модель (4.164)—(4.166) є вичерпною, щодо формування оптимального портфеля. Задача (4.164)—(4.166) є задачею векторної оптимізації. Відомо [5], що вона зводиться (достатні умови) до сімейства задач однокритеріальної оптимізації. Для цього замість двох критеріїв (4.164)—(4.165) сформуємо один критерій у вигляді згортки

$$(mV)_\pi = \frac{m_\pi^{\mu_1}}{V_\pi^{\mu_2}} \rightarrow \max, \qquad (4.167)$$

де $\mu_i > 0, \; i = \overline{1,2}$.

За фіксованих (μ_1, μ_2) для задачі (4.167)—(4.166) запишемо функцію Лагранжа

$$L = \frac{m_\pi^{\mu_1}}{V_\pi^{\mu_2}} + \lambda \, (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Тоді умови оптимальності для задачі (4.167)—(4.166) набудуть вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \geq 0; \; \frac{\partial L}{\partial x_k} \hat{x}_k = 0; \; \hat{x}_k \geq 0; k = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 1.$$

Перебираючи всі значення параметрів (μ_1, μ_2) із розв'язків виписаних умов оптимальності чисельно отримаємо Парето-оптимальну множину портфелів.

Розглянемо тепер модифікацію формування портфеля цінних паперів, коли інвестор поряд із ризиковими вкладеннями капіталу може робити також і

безризикові (див. для порівняння формування портфеля для двох активів: ризикового і безпечного). Позначивши через x_0 та r_0 відповідно частку та ефективність безризикової частини портфеля, отримаємо таку задачу для його формування

$$x' \ V \ x \ \rightarrow \ \min;$$

$$m' \ x \ + \ r_0 \ x_0 \ = \ \overline{m}_\pi, \ I_n' \ x \ + \ x_0 \ = \ 1. \qquad (4.168)$$

Модель (4.168) відома як задача Д. Тобіна.

Функція Лагранжа для задачі (4.168) матиме вигляд

$L(x, x_0, \lambda_1, \lambda_2) \ = \ x' \ V \ x \ + \ \lambda_1 \ (1 \ - \ I_n' \ x \ - \ x_0) + \ \lambda_2 \ (\overline{m}_\pi \ - \ m' \ x \ - \ r_0 \ x_0)$.

Тоді умови оптимальності першого порядку для задачі (4.168) набувають вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial x} \ = \ 2 \ V \ x_* \ - \ \lambda_{1*} \ I_n \ - \ \lambda_{2*} \ m \ = \ 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} \ = \ - \ \lambda_{1*} \ - \ \lambda_{2*} \ r_0 \ = \ 0. \qquad (4.169)$$

Із (4.169) визначаємо

$$\lambda_{1*} \ = \ - \ \lambda_{2*} \ r_0, \ x_* \ = \ V^{-1} \ (m \ - \ r_0 \ I_n) \ \frac{\lambda_{2*}}{2}. \qquad (4.170)$$

Виключаючи x_0 із обмежень задачі, отримаємо співвідношення

$$(m \ - \ r_0 \ I_n)' \ x_* \ = \ \overline{m}_\pi \ - \ r_0.$$

Підставивши сюди x_* із (4.170), отримаємо

$$\lambda_{2*} \ = \ \frac{(\overline{m}_\pi \ - \ r_0)}{(m \ - \ r_0 \ I_n)' \ V^{-1} \ (m \ - \ r_0 \ I_n)}.$$

Тоді (4.170) і (4.168) дає змогу отримати явний вигляд розв’язку

$$x_* \ = \ V^{-1} \ (m \ - \ r_0 \ I_n) \ \frac{(\overline{m}_\pi \ - \ r_0)}{(m \ - \ r_0 \ I_n)' V^{-1} \ (m \ - \ r_0 \ I_n)} \ > \ 0; \qquad (4.171)$$

$$x_{0*} = 1 - I_n' V^{-1} (m - r_0 I_n) \frac{(\bar{m}_\pi - r_0)}{(m - r_0 I_n)' V^{-1} (m - r_0 I_n)} > 0. \quad (4.172)$$

Із (4.171) випливає, що відносна структура ризикових вкладень не залежить від $\bar{m}_\pi$:

$$\frac{x_*}{\sum_{i=1}^n x_{i*}} = \frac{V^{-1} (m - r_0 I_n)}{I_n' V^{-1}(m - r_0 I_n)},$$

при цьому значення мінімального ризику набуває вигляду

$$V_{\pi*} = x_*' V x = (\bar{m}_\pi - r_0)^2 g^{-2}, \quad (4.173)$$

де $g = (m - r_0 I_n)' V^{-1} (m - r_0 I_n)$.

Звідси випливає така залежність:

$$\bar{m}_\pi = r_0 + g \sigma_{\pi*}. \quad (4.174)$$

За $x_{0*} = 0$ оптимальний портфель складається тільки із ризикових активів і формули (4.171) та (4.163) повинні збігатися. Для цього потрібно із рівняння (4.172) знайти r_0 і підставити його в (4.171).

Якщо нерівності в (4.171)—(4.172) порушуються хоч би для одного індекса, то замість умов оптимальності (4.169) слід використовувати умови

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} \geq 0; \frac{\partial L}{\partial x_k} x_{k*} = 0; x_{k*} \geq 0; k = \overline{0,n};$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i*} m_i + r_0 x_{0*} = \bar{m}_\pi, \sum_{i=1}^n x_{i*} + x_{0*} = 1,$$

але розв’язки наведеної системи можна отримати лише чисельними методами.

Коли інвестора цікавить вичерпний оптимальний портфель, то замість розглянутих вище «компромісних» моделей, слід використати векторну модель формування портфеля (див. відповідну модель для задачі Марковіца (4.164)—(4.164) та нелінійний метод згортки для її розв’язання).

Повернемось до аналізу результатів моделі Тобіна. Зауважимо, що хоча гіпотеза Тобіна про можливість суто безризикових вкладень на практиці майже не

виконується, але можна довести, що для слабкоризикових вкладень (з малими σ) вона є апроксимацією моделі Марковіца.

Розглянемо оцінювання внеску кожного цінного паперу, що ввійшов до оптимального (за Тобіним) портфеля, щодо загальної сподіваної його ефективності.

Ефективність оптимального портфеля є випадковою величиною

$$R_{\pi*} = r_0 \; x_{0*} + \sum_{i=1}^{n} R_i \; x_{i*} = r_0 \; x_{0*} + R' \; x_*.$$

Звідси, враховуючи рівність $\bar{m}_\pi = x_{0*} + m' \; x_*$, отримаємо

$$R_{\pi*} - \bar{m}_\pi = (R - m)' \; x_*. \qquad (4.175)$$

Характеристикою внеску активу a_j в оптимальний портфель є величина β_{j*}, яку називають «*бетою внеску* j *в* π_*» і визначають рівністю

$$\beta_{j*} = \frac{1}{V_{\pi*}} \; E((R_j - m_j) \; (R_{\pi*} - \bar{m}_\pi)). \qquad (4.176)$$

Із (4.176) та (4.175) отримаємо вигляд вектора β_*:

$$\beta_{j*} = \frac{E((R - m) \; (R - m)' \; x_*)}{V_{\pi*}} = \frac{V_{x*}}{V_{\pi*}}.$$

Враховуючи (4.173), (4.174) та (4.171), отримаємо такий вигляд для вектора (4.176):

$$\beta_{j*} = \frac{m - r_0 \; I_n}{\bar{m}_\pi - r_0} \qquad (4.177)$$

або

$$m_j - r_0 = \beta_{j*} \; (\bar{m}_\pi - r_0); \; j = \overline{1, n}. \qquad (4.178)$$

Величина $m_j - r_0$ трактується як премія за ризик активу a_j, включеного в оптимальний портфель. Із (4.178) випливає, що така премія для будь-якого цінного паперу буде пропорційною премії за ризик, пов’язаній з портфелем в цілому, тобто $\bar{m}_\pi - r_0$.

Практичне використання теорії оптимального портфеля потребує знання вектора математичних сподівань m і матриці коваріації ефективностей V. Для їх

оцінювання використовують статистичні дані фінансового ринку та правила математичної статистики їх обробки.

Якщо $R_j^{(t)}$ — ефективність паперів a_j за період часу t, то

$$R_j^{(t)} = \frac{C_j^{(t+1)} + d_j^{(t)} - C_j^{(t)}}{C_j^{(t)}}, \qquad (4.179)$$

де $C_j^{(t)}$ — ціна паперу на початку періоду t; $d_j^{(t)}$ — дивіденди за цей же період.

Трактуючи послідовність (4.179) як спостереження за випадковими величинами R_j протягом інтервалу часу $1 \leq t \leq T$, засобами математичної статистики можна побудувати оцінки величин m_j та V_{ij}:

$$\widehat{m}_j^T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_j^{(t)};$$

$$\widehat{V}_{ij}^T = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (R_i^{(t)} - \widehat{m}_i^T)(R_j^{(t)} - \widehat{m}_j^T)$$

і використати їх для розрахунків оптимального портфеля як емпіричні значення m_j та V_{ij}.

На завершення розглянемо модель рівноваги на ринку цінних паперів, яка відображає взаємодію попиту та пропозиції на такі ризикові активи. Ця модель була розроблена У. Ф. Шарпом.

Нехай:

— на ринку цінних паперів діє скінченна кількість інвесторів I з номерами $i = \overline{1, I}$;

— безризиковим паперам відповідає індекс $j = 0$, а ризиковим — індекси $j = \overline{1, n}$;

— у початковий момент інвестор i має частку x_{ij}^0 кількості ризикових цінних паперів вигляду j, а початкова ринкова вартість цієї кількості (ринкова оцінка емітента) дорівнює W_j^0, за фіксованої кількості цінних паперів вона

пропорційна ціні одного паперу;

— інвестор вкладає суму b_i^0 у безризикові цінні папери.

Таким чином, початковий капітал інвестора

$$k_i^0 = b_i^0 + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^0 W_j^0.$$

Поведінка інвестора визначається такими припущеннями.

1. Усі інвестори однаково інформовані про ефективність вкладень у довільні цінні папери, виражену через відомі значення сподіваних ефективностей m_j та коваріацій V_{ij}.

2. Кожен інвестор намагається придбати портфель ризикових цінних паперів, оптимальний за своєю структурою, а частку безризикової частини вкладень він визначає максимізацією середнього значення квадратичної функції корисності

$$u_i(k\ R) = k\ R - A_i\ (k\ R - k\ m_R)^2,\ m_R = E(R),$$

де R — випадкова ефективність при вибраній структурі портфеля; k — капітал, тобто

$$E(u_i(k\ R)) = k\ m_R - A_i\ k^2\ \sigma_R^2 \qquad (4.180)$$

Коефіцієнти $A_i > 0$ характеризують схильність інвестора до ризику: за малих A_i схильність велика (тобто мірою схильності до ризику слід вважати величину A_i^{-1}).

Із наведених припущень випливає, що всі інвестори прагнуть придбати однакові за структурою портфелі ризикових цінних паперів, тобто ефективності ризикової частини у всіх інвесторів одинакові і дорівнюють R^*.

Якщо *i*-й інвестор вкладає частку x_{i0} свого первісного капіталу в безризикові цінні папери, то наприкінці інтервалу часу, для якого визначено всі ефективності, його капітал становитиме

$$k_i^1 = x_{i0}\ k_i^0\ (1 + r_0) + (1 - x_{i0})\ k_i^0\ (1 + R^*),$$

де r_0 — ефективність безризикового вкладення.

Сподівана корисність цього капіталу

$g_i(x_{i0}) = E(u_i(k_i^0 R)) = x_{i0}\ k_i^0\ r_0 + (1 - x_{i0})\ k_i^0\ m^* - A_i\ (1 - x_{i0})^2\ (k_i^0)^2\ V^*,$

де $m^* = E(R^*)$; V^* — дисперсія R^*.

Оскільки

$$\frac{dg_i}{dx_{i0}} = k_i^0\ (r_0 - m^*) + 2\ A_i\ (1 - x_{i0})\ (k_i^0)^2\ V^*,$$

то максимум сподіваної корисності досягається під час вибору частки безризикових вкладень

$$x_{i0} = 1 - \frac{m^* - r_0}{2\ A_i\ k_i^0\ V^*},$$

тобто всі інвестори вкладають у ризикові цінні папери такий капітал:

$$\sum_{i=1}^{I} (1 - x_{i0})\ k_i^0 = \frac{m^* - r_0}{2\ V^*} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i}.$$

Рівновага фінансового ринку визначається як рівність попиту та пропозиції

$$\frac{m^* - r_0}{2\ V^*} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i} = W^0, \qquad (4.181)$$

де W^0 — сумарна вихідна вартість ризикових цінних паперів.

За визначенням ефективностей

$$R_l = \frac{W_l^1 - W_l^0}{W_l^0},\ R = \frac{W^1 - W^0}{W^0},$$

де W_l^0, W_l^1 — сумарні вихідна і майбутня вартості ризикових цінних паперів l-го виду; $W^1 = \sum_{l=1}^{n} W_l^1$ — сумарна майбутня вартість ризикових цінних паперів (W_l^0 та W^0 — детерміновані величини).

Звідси

$$m = E(R) = \frac{E(W^1) - W^0}{W^0} = m^*;\ m_l = E(R_l) = \frac{E(W_l^1)}{W_l^0} - 1; \quad (4.182)$$

$$V = E(R - m)^2 = \frac{1}{(W^0)^2}\ E(W^1 - E(W^1))^2 = V^*;$$

$$\beta_l = \frac{Cov(R_l,R)}{V} = \frac{W^0 \ Cov(W_l^1,W^1)}{W_l^0 \ \sigma_{W^1}^2}.$$

Підставивши останні вирази в рівняння (4.178) і розв'язавши кожне із них щодо W_l^0, отримаємо

$$W_l^0 = \frac{1}{1 + r_0} \ (E(W_l^1) - \frac{Cov(W_l^1,W^1)}{\sigma_{W^1}^2} \times$$

$$\times \ (E(W^1) - (1 + r_0) \ W^0)).$$

Аналогічно, підставивши вирази $m, \ V$ з (4.182) в рівняння балансу (4.181), знайдемо

$$W^0 = \frac{1}{1 + r_0} \ (E(W^1) - 2 \ \sigma_{W^1}^2 \ (\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i})^{-1}).$$

Тому остаточний вираз рівноважного значення загальної вартості паперів l-го виду матиме вигляд

$$W_l^0 = \frac{1}{1 + r_0} \ (E(W_l^1) - 2 \ Cov(W_l^1,W^1) \ (\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i})^{-1}).$$

Якщо ризик відсутній, тобто

$$W_l^1 = E(W_l^1); \ Cov(W_l^1,W_j^1) = 0, \ l \neq j,$$

то рівноважні ціни збігаються з цінами в майбутньому, дисконтованими відповідно до ефективності безризикових вкладень:

$$W_l^0 = \frac{W_l^1}{1 + r_0}.$$

Наявність невизначеності змінює картину. Рівноважна ціна збільшується щодо сподіваної, якщо їхня ефективність перебуває у зворотній кореляції до ринку, та знижується, якщо ефективність додатно корельована щодо ринку. Чим більше середнє відхилення від ризику A, тим чутливішими будуть ціни до ринкових випадковостей.

4.8. Задачі та завдання для самостійного розв'язання

Виділити основне/узагальнити, скласти модель, навести приклад з поясненням:

Завдання 4.1. Рішення про заощадження/виробництво в умовах невизначеності.

Завдання 4.2. Асиметричність інформації.

Завдання 4.3. Ринок «лимонів».

Завдання 4.4. Моральний ризик.

Завдання 4.5. Ринок цінних паперів/страхування — умови прийняття

Завдання 4.6. Порівняйте моделі Марковіца. Тобіна. Шарпа. Виділіть схожості та відмінності.

Завдання 4.7. Порівняйте різні підходи до оцінювання акцій та облігацій.

Завдання 4.8. Теорема фон Неймана — Моргенштерна.

Завдання 4.9. Поведінка агентів в умовах ризику.

Завдання 4.10 Задача вибору портфеля з двох активів.

Контрольні запитання

1. Наведіть основні принципи ризику, невизначеності та конфліктності розвитку соціально-економічних процесів.
2. Що ви знаєте про принцип асиметрії функцій розподілу економічних показників?
3. Які ви знаєте концептуальні підходи до моделювання випадкових величин із різними розподілами ймовірностей?
4. Які ви знаєте визначення тісноти взаємозалежності між випадковими чинниками і параметрами в економіко-математичній моделі?

5. Які ви знаєте способи побудови моделюючих алгоритмів з урахуванням принципів адаптивності, достатнього розмаїття, обмеженої раціональності?
6. Наведіть основні принципи прогнозування обсягів податкових надходжень з урахуванням ризику.
7. Наведіть модель вибору інвестиційного проекту із множини альтернативних варіантів.
8. Сформулюйте основні принципи політичного ризику, валовий внутрішній продукт та зовнішній борг.
9. Наведіть модель оцінювання ринкової вартості підприємства.
10. Що ви знаєте про концепцію рейтингового управління?
11. Які є моделі системи рейтингового управління?
12. Підтвердіть тезу «рейтинг як засіб класифікації».
13. Наведіть моделі та методи процесу обчислення рейтингу економічної системи.
14. Назвіть системи переваг споживача та ієрархії його цінностей.
15. Сформулюйте «Золоте» правило накопичення.

Розділ 5. Поведінкові аспекти моделювання економіки

5.1. Розв'язання задач класичної економіки на обмеженому ринку з елементами поведінкової економіки

Розглянемо класичну задачу споживання економічними агентами за умов обмеженості бюджету.

У процесі дослідження використані методи некооперативної теорії ігор на прикладі неокласичної моделі рівноваги товарів на обмеженому товарному ринку між фіксованою кількістю економічних агентів. Знайдено їх розподіл за Парето, обережні рівноваги, рівноваги за Нешем і Берже. На знайдених рівноважних ситуаціях показано, в яких випадках економічним агентам властива ірраціональна поведінка.

Припустимо на ринку є N гравців і M товарів, де N, M — цілі додатні числа. У кожного гравця є свій бюджет $\gamma_i, i \in [1, N]$, ціна кожного товару $p_k, k \in [1, M]$, корисність кожного товару $\mu_k, k \in [1, M]$.

Бюджет кожного з гравців коливається і залежить від його бажання витратити суму не більше, ніж $\gamma_{i\,max}$, і його розуміння, що суму менше, ніж $\gamma_{i\,min}$ він витратити не зможе, для задоволення своїх потреб.

Кількість товару, що купується кожним гравцем, задається лінійно і залежить від бюджету кожного гравця.

$$x_k^i = a_k^i + b_k^i \gamma_i, \qquad (5.1)$$

де a_k^i — мінімальна кількість k товару, що має бути спожита кожним агентом; b_k^i — коефіцієнт залежності k товару від бюджетного обмеження.

Таким чином, для i-го агента можна записати корисність його набору товарів U_i

$$U_i = \sum_{k=1}^{M} (x_k^i)^{\mu_k^i}, \qquad (5.2)$$

та його обмеження бюджету:

$$\sum_{k=1}^{M} x_k^i p_k \leq \gamma_i, \qquad (5.3)$$

та обмеження за кількістю товару:

$$\sum_{k=1}^{M} x_k^i \leq L_k. \qquad (5.4)$$

Споживач максимізує корисність вибором такого споживчого набору, який задовольняє бюджетному обмеженню.

Якщо кількість товару обмежена L_k одиницями, то вибір кращого набору кожного наступного гравця так само обмежений товарами, наявними на ринку. З чого випливає обернена залежність між наборами U_i, адже чим більше корисність набору одного гравця, тим менша корисність набору іншого гравця. Напишемо таку зведену корисність кожного гравця через взаємовідношення його корисності до сукупної корисності гравців.

$$\breve{U}_i = \frac{U_i}{\sum_{h=1}^{N} U_h}, h \neq i. \qquad (5.5)$$

Дослідимо, як змінюється індивідуальна корисність гравців та загальна корисність усієї системи за різних умов та рівноваг теорії некооперативних ігор.

Для розв’язання конкретної задачі був написаний програмний продукт, на мові програмування VBA, який використовує метод узагальненого градієнта (УЗГ) для розв’язання негладких задач оптимізації. Основна ідея методу УЗГ полягає в тому, щоб скоротити розмірність задачі за допомогою виключення залежних (базисних) змінних і застосувати метод зведеного градієнта для визначення напрямку спуску як критерію під час встановлення оптимальності.

Для отримання конкретних результатів було розглянуто ситуацію з трьома гравцями, а також обрані такі вихідні параметри, задані в табл. 5.1. У цьому випадку непрямі обмеження виконуються, оберемо такі модельні данні (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Вхідні елементи системи для моделювання

Параметр	Гравець 1			Гравець 2			Гравець 3		
μ_k^i	1	2	3	1	2	3	1	2	3
p_k	1	2	3	1	2	3	1	2	3
a_k^i	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b_k^i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
L_k	10			10			10		
$\gamma_{i\,min}$	16			16			16		
$\gamma_{i\,max}$	20			20			20		

Другим етапом були обрані інші значення, за яких гравці мають різні коефіцієнти, доходи, інше, показано в табл. 5.2. У цьому випадку непрямі обмеження можуть не виконуватися, тобто економічні агенти не мають можливості купити ту кількість благ, яку вони б хотіли, що призводить до певних змін в їх поведінці.

Таблиця 5.2

Елементи системи для другого випадку

Параметр	Гравець 1			Гравець 2			Гравець 3		
μ_k^i	3	1	2	2	1	3	1	3	2
p_k	10	20	25	10	20	25	10	20	25
a_k^i	0	1	1	1	1	2	1	4	1
b_k^i	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,015	0,01	0,005	0,01
L_k	12			12			12		

$\gamma_{i\,min}$	150	200	150
$\gamma_{i\,max}$	300	300	250

Розглянемо першу рівновагу на ринку — оптимальність за Парето. Це такий стан деякої системи, за якого значення кожного окремого показника, що характеризує систему, не може бути покращено без погіршення інших. Розв'язок шукатимемо у вигляді лінійної згортки

$$\mathrm{U} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{\mathrm{i}}\, \breve{U}_i;\;\; \alpha_{\mathrm{i}} \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_{\mathrm{i}} \neq 0. \qquad (5.6)$$

За фіксованого вектора α кожна точка, в якій досягається максимум функції U, буде максимальною за Парето. Завдання максимізації функції U реалізується методом проекції градієнта.

Для розрахунків $\breve{U}_i$ використовуємо показники, задані в табл. 5.1 і формули, зазначені вище. Результатом буде крива Парето, яка в разі трьох гравців має вигляд поверхні. Для розрахунку використовуємо крок α_i, рівний 0,3, отже матимемо усі можливі комбінації α_{i} для кожного з гравців.

Приклад одного з розв'язків подано в табл. 5. 3:

Таблиця 5.3

Приклад розв'язання для фіксованих альфа з набору

α_1	1	$\breve{U}_1$	0,724
α_2	1	$\breve{U}_2$	0,409
α_3	1	$\breve{U}_3$	0,409
		$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$	1,541

Таблиця 5.4

Приклад рішення для фіксованих альфа з набору другого випадку

α_1	1	$\breve{U}_1$	0,483
α_2	1	$\breve{U}_2$	0,670
α_3	1	$\breve{U}_3$	0,376
		$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$	1,529

Використавши всі знайдені розв'язки можна побудувати Парето-оптимальні альтернативи у вигляді поверхні.

Для оцінювання кожної рівноваги будемо порівнювати $\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$, так в цьому випадку вони становлять 1,541 та 1,529 у першому і другому прикладі відповідно.

Гравці діють кооперативно, при цьому ставлячи інтереси системи вище, ніж свої власні, замість того, щоб максимізувати свою корисність гравці свідомо йдуть на жертви зменшуючи її для більшого добробуту системи. В такому випадку можемо спостерігати поведінковий ефект, який приводить до максимізації $\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$ серед всіх ситуацій.

Далі розглянемо кілька рівноваг теорії некооперативних ігор, коли економічні агенти діють незалежно один від одного.

Першою такою рівновагою є гарантована рівновага або максимін — правило прийняття рішень для мінімізації можливих втрат з тих, яких особі, що приймає рішення, не можна запобігти у разі розвитку подій за найгіршим для неї сценарієм. Критерій «максимін» спочатку був сформульований у теорії ігор для гри двох осіб з нульовою сумою в випадках послідовних і одночасних ходів, згодом отримав розвиток у більш складних іграх і під час прийняття рішень в

умовах невизначеності. Для знаходження розв'язків цієї ситуації побудуємо матрицю рішень для трьох гравців і знайдемо відповідні розв'язки, що задовольняють визначенню.

Таблиця 5.5

Розв'язки за стратегією максиміну

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,345	0,345	0,345	1,036

Таблиця 5.6

Розв'язки за стратегією максиміну другого випадку

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,483	0,638	0,376	1,496

У цій ситуації спостерігається поведінковий ефект, який приводить до найменших результатів серед $\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$, тому що кожен з гравців сконцентрований на отриманні гарантованого виграшу і не схильний до ризику або кооперації, що також негативно позначається на результаті всієї системи.

Друга рівновага – рівновага за Нешем. Так називають набір стратегій у грі для двох і більше гравців, в якому жоден учасник не може збільшити виграш, змінивши свою стратегію, якщо інші учасники своїх стратегій не змінюють. Джон Неш довів існування такої рівноваги в змішаних стратегіях у будь-якій кінечній грі. Для знаходження розв'язку в цій ситуації необхідно вирішити систему таких

нерівностей: $\begin{cases} \breve{U}_1(I_1\ , I_2^N, I_3^N \leq \breve{U}_1(I_1^N) \\ \breve{U}_2(I_1^N, I_2\ , I_3^N \leq \breve{U}_2(I_2^N). \\ \breve{U}_3(I_1^N, I_2^N, I_3\ \ \leq \breve{U}_3(I_3^N) \end{cases}$

Обґрунтування системи таке: гравець діє з точки зору стратегії за Нешем, але припускає, що інші гравці можуть діяти за будь-якими стратегіями. Так розглядаються усі гравці, але окремо, оскільки вони не кооперуються між собою.

Вирішивши цю систему, отримаємо значення, які подано в табл. 5.7 і 5.8.

Таблиця 5.7

Розв'язок моделі за стратегією за Нешем

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,5	0,5	0,5	1,5

Таблиця 5.8

Розв'язок за стратегією за Нешем другого прикладу

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,493	0,646	0,383	1,523

На відміну від випадку оптимальності за Парето кожен гравець – діє у своїх інтересах, максимізує корисність свого вибору.

У цій ситуації $\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$ дорівнює 1,5 та 1,523 відповідно, що вище, ніж у ситуації максимін, але нижче, ніж за Парето.

Третя рівновага – рівновага за Берже.) Вона ґрунтується на модифікованому підході до формалізації «рівноваги за Нешем». Відмінність у тому, що стійкість виграшів тут постулюється до відхилень всіх гравців, окрім того, кому «належить» ця функція виграшу (у визначенні рівноваги за Нешем, «дії» стратегії окремого гравця і всіх інших «міняються місцями»). Таку поведінку важко назвати раціональною, проте подібні альтруїстичні погляди притаманні родинним

стосункам, наявні в релігійних громадах, під час благодійності, спонсорській допомозі, в задачах охорони навколишнього середовища і т. п., тобто така рівновага застосовується на «інтуїтивному рівні».

Для знаходження рівноваги за Бержу необхідно розв'язати систему таких нерівностей:

$$\begin{cases} \breve{U}_1(I_1^B, I_2\ , I_3\ \ \leq \breve{U}_1(I_1^B) \\ \breve{U}_2(I_1\ , I_2^B, I_3\ \ \leq \breve{U}_2(I_2^B). \\ \breve{U}_3(I_1\ , I_2\ , I_3^B \leq \breve{U}_3(I_3^B) \end{cases}$$

Обґрунтування системи таке — гравець діє з точки зору стратегії за Берже, але припускає, що інші гравці можуть діяти за будь-якими стратегіями. Так розглядаються усі гравці, але окремо, оскільки вони не кооперуються між собою.

Розв'язавши цю систему, отримаємо значення, подані у табл. 5.9 і 5.10.

Таблиця 5.9

Розв'язок моделі за стратегією Берже

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,5	0,5	0,5	1,5

Таблиця 5.10

Розв'язок за стратегією Берже для другого прикладу

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,492	0,657	0,377	1,526

У цій ситуації $\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$ дорівнює 1,5 та 1,526 відповідно, особливо важливим

в такому випадку є те, що в умовах обмежених ресурсів результуюча сума за Берже є вищою, порівняно з Нешем, і саме в умовах обмеженості проявляється поведінковий ефект, що приводить до такого результату, тому що в умовах необмеженості ресурсів результат за Берже дорівнює результату за Нешем.

5.2. Принцип часткової інформованості гравців та вплив на прийняття рішень

Найбільш привабливими концепціями оптимальності в умовах повної інформованості гравців є принципи оптимальності за Парето і за Нешем. Концепція оптимальності за Парето заснована на ідеї кооперативної поведінки гравців, коли вони колективно обирають свої стратегії та спільно враховують функції виграшу. Тому не має ситуацій, які будуть для всіх гравців одночасно кращими, чим будь-яка Парето-оптимальна. У разі, коли гравці обирають основою для угоди між собою концепцію Парето-оптимальності, у деяких із них може виникнути спокуса вибору конкретної Парето-оптимальної ситуації, щоб змінити свою стратегію на іншу, яка буде краще для них. У цьому випадку така ситуація буде нестабільною та їх домовленість може бути зруйнована.

Концепція рівноваги за Нешем ґрунтується на ідеї некооперативної поведінки гравців, коли вони індивідуально обирають свої стратегії й кожен враховує лише свою функцію виграшу. Ситуацію гри називають «рівновагою за Нешем», якщо від неї невигідно відхилятися будь-якому одному гравцю (всі інші гравці свої стратегії не змінюють), оскільки значення його функції виграшу не покращиться (буде для нього оптимальним). Якщо гравці укладають угоду про свою майбутню поведінку і її основою є «рівновага за Нешем», то вона буде стабільною. «Ціною» привабливості «рівноваги за Нешем» є серйозні проблеми, які пов’язані з її існуванням, складністю знаходження, проблемою вибору єдиної рівноваги. У певному сенсі ці принципи оптимальності є крайнощами в поведінці гравців між колективним і індивідуальним вибором стратегій з урахуванням функцій виграшу гравців. Проте вони обидві є раціональними з погляду гравця, що максимізує свою корисність, не зважаючи на цілі оточення. Така поведінка не є єдиною можливою. Принцип індивідуальної оптимальності [17,18], надає

можливість кожному гравцю обирати свої стратегії індивідуально (некооперативно), але враховувати при цьому інтереси всіх інших гравців (компроміс заради розв'язання конфлікту). Цей принцип обґрунтований в одноцільових іграх, де у всіх гравців одна мета, але вона характеризується для кожного гравця своєю функцією виграшу. Наприклад, у процесі будівництва споруди є організація підрядник і організації субпідряду. Підрядник має мету, витративши певну суму грошей, отримати найкращий результат, а субпідрядник виконати завдання так, щоб підряднику було достатньо мінімальної суми витрачених коштів. Хоча в них обох єдина мета будування споруди, функція виграшу для кожного своя, яка характеризується компромісом між ними. В ідеалі, ця мета полягає у виборі гравцями своїх стратегій так, щоб склалася найкраща ситуація для всіх гравців. Оскільки таких ситуацій може і не бути, то гравці можуть погодитися на компроміс заради спільної мети. З погляду раціональності компроміс не є прямою максимізацією своїх потреб, саме тому виникає завдання перевірки, чи може така ірраціональна поведінка мати свої переваги.

У цьому підрозділі розглянуто ірраціональну поведінку економічних агентів на обмеженому ринку матеріальних благ, а також з'ясовано вплив принципу індивідуальної оптимальності в класичних ігрових задачах.

Розглянемо задачу з підрозділі 5.1, при цьому використаємо методи некооперативної теорії ігор, метод «намацування Курно» та принцип індивідуальної оптимальності. Задачу розв'яжемо за допомогою принципу індивідуальної оптимальності.

Випадок часткової інформованості гравців. Нехай кожен гравець i знає функції виграшу U_i всіх інших гравців, але вектори параметрів йому невідомі. Така інформованість природна, оскільки перевага кожного гравця на безлічі функцій виграшу інших гравців, зазвичай, є конфіденційною інформацією. Крім того, ця перевага може не завжди повністю усвідомлюватися гравцем і

змінюватися (уточнюватися) у процесі прийняття рішення. Для реалізації процедури пошуку індивідуально-оптимальної рівноваги гри в умовах часткової інформованості гравців необхідно вирішувати систему нерівностей так, щоб кожен гравець оперував лише тією інформацією, яка йому відома. Найбільш універсальною схемою, яку можна застосувати в умовах часткової інформованості гравців є процедура «намацування Курно».

Пояснимо, що означає «намацуванням Курно». Нехай задана гра Г = < N, u_1,…, $u_т$, g_1,…, g_n>. Послідовність ситуацій u_1, u_2,… ($u_i \in U$) назвемо послідовністю Курно, якщо для всіх i та для всіх t виконуються умови $u_{t+1}^i \in \mathrm{Arg}\max_{v^i \in U^i} g^i(u_t \| v^i)$.

Нехай у грі Г = < N, u_1,…, $u_т$, g_1,…, g_n> функції g_1,…, g_n неперервні, а деяка послідовність Курно u_1, u_2,… збігається до точки u_0. Тоді u_0 — ситуація рівноваги Неша.

У багатьох економічних моделях рівновага Неша виникає, як результат подібних процедур недалекоглядного «намацування».

Зауважимо, що для того, щоб реалізувати процедуру намацування за Курно, не потрібно припускати, що гравці знають функції виграшу і можливості партнерів. У багатьох ситуаціях це дуже істотна інформація.

Таким чином, кожен гравець i оперує лише відомою йому інформацією (функції виграшу всіх гравців і вектор параметрів, який характеризує його власну перевагу на безлічі функціях виграшу інших гравців).

Якщо процедура «намацування Курно» збігається, то отримаємо деякий індивідуально-оптимальний баланс, який відповідає набору переваг всіх гравців. Така процедура може і не збігатися. Недоліком процедури «намацування Курно» є також низька швидкість збіжності, яка в загальному випадку не піддається оцінюванню.

У зв'язку з малою ймовірністю і низькою швидкістю збіжності, були запропоновані інші методи пошуку індивідуально-оптимальних рівноваг, які засновані на розподілених методах розв'язання оптимізаційних задач.

Загальна схема розподіленого розв'язання оптимізаційних задач заснована на визначенні функції неузгодженості. Ця функція може визначатися різними способами, але має бути кількісною оцінкою, що характеризує неузгодженість рішень, які обрані окремими гравцями за їх належністю до розв'язання всього завдання в цілому. Загальна ідея побудови розподіленого рішення систем взаємопов'язаних завдань полягає в покроковому узгодженні їх рішень з метою забезпечити отримання наступного наближення до розв'язання завдання, з меншою величиною функції неузгодженості, ніж на попередньому кроці. Збіжність таких процедур забезпечується корекцією моделей задач на кожному кроці.

Для цього запишемо такі рівняння, розподіливши змінні для кожного гравця окремо:

$$\omega^i = \frac{1}{N}\sum_{\mathrm{j}\in\mathrm{N}} \omega^{\mathrm{j}}. \qquad (5.7)$$

Тут кожному гравцю i відповідають вектори розподілених змінних $\omega^i = \omega_j^i$. Побудуємо допоміжну задачу з квадратичною цільовою функцією неузгодженості, розв'язок якої буде збігатися:

$$g(\omega) = \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} \left\| \omega^{\mathrm{i}} - \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}\in\mathrm{N}} \omega^{\mathrm{j}} \right\|^2 \to \min. \qquad (5.8)$$

Для розв'язання цієї допоміжної задачі використовуємо ітераційний метод спуску, в якому будемо вибирати допустимі напрямки спуску з використанням лінійної апроксимації цільової функції за векторами змінних ω^i.

Візьмемо початкове наближення ω^0. Підставивши k-те наближення, після чого, відкинувши константи і постійні множники, будемо шукати напрямок

спуску на (k + 1)-му кроці, за допомогою розв'язання таких задач:

$$\sum_{i\in N}\left(\omega^{i(k)}-\frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^{j(k)},w^{i}\right)\to \min. \qquad (5.9)$$

Ці задачі, в свою чергу, декомпозуються на n незалежних підзадач:

$$\left(\omega^{i(k)}-\frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^{j(k)},\omega^{i}\right)\to \min \qquad (5.10)$$

Наступне $(k+1)$-те наближення визначається з умов зменшення функції вздовж допустимого напрямку таким чином:

$$\omega^{i(k+1)}=\omega^{i(k)}+\lambda^{(k)}\left(\overline{\omega}^{i(k+1)}-\omega^{i(k)}\right), \qquad (5.11)$$

де $\lambda^{(k)}$ знаходимо з умов найбільшого зменшення значення функції неузгодженості:

$$\lambda^{(k)}=\arg\min_{\lambda\epsilon[0,1]} g(\,\omega^{(k)}-\lambda(\omega^{(k)}-\overline{\omega}^{(k)}))=$$

$$\sum_{i\in N}\left(\omega^{i(k)}-\frac{1}{N}\sum_{j\in N}\omega^{j(k)},\omega^{i(k)}-\overline{\omega}^{i(k+1)}\right)\Bigg/\sum_{i\in N}\left\|\omega^{i(k)}-\overline{\omega}^{i(k+1)}\right\|^{2}. \qquad (5.12)$$

Таким чином, відповідно до заданих уподобань на безлічі функцій виграшу, гравці пропонують один одному на розгляд ситуації гри. Ці задачі описуються на основі тільки тієї інформації, якою володіє відповідний гравець, тобто інформацією про функції його виграшу і ситуації гри, яка спостерігається усіма гравцями разом [17,18].

Розв'яжемо задачу із застосуванням описаного вище методу (табл. 5.11, 5.12).

Таблиця 5.11

Розв'язок за стратегією індивідуально-оптимальної рівноваги

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N}\breve{U}_i$

0,5	0,5	0,5	1,5

Таблиця 5.12

Розв'язок за стратегією індивідуально-оптимальної рівноваги другого випадку

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,493	0,652	0,380	1,525

У першому випадку, за рівних умов, гравці, знаючи виграші, погодяться на рівний виграш кожного. За цих умов, значення функції корисності збігається з рівновагою за Парето, оскільки гравці не є конкурентними та їх узгодженість досягає одиниці.

Нагадаємо, що у другому випадку кількість товарів на ринку обмежена, що призводить до конкуренції вибору. Під час оптимальності за Парето отримуємо значення функції корисності 1,529 це ідеально можливий варіант для усіх гравців, за Нешем — 1,523, у разі повної не кооперації гравців. Завдяки зменшенню функції неузгодженості, вони досягнуть кращих результатів 1,525, ніж за рівноваги за Нешем, наближених до результатів за Парето.

5.3. Аналіз впливу гіперболізованого дисконтування на прийняття рішень

«Дисконтована корисність» (Discount Utility, DU) широко використовується для моделювання міжчасового вибору в економіці й інших галузях, наприклад, у поведінковій екології в біології. Модель DU передбачає, що особи, які приймають рішення, роблять поточні вибори, які максимізують дисконтовану суму миттєвих благ у майбутніх періодах. Найбільш поширеним припущенням є те, що особи, які приймають рішення, дисконтують майбутню корисність у момент часу t за допомогою експоненційно зменшуваного коефіцієнта дисконтування, $d(t) = \delta^t$ (де $0 < \delta < 1$). Формально, якщо u_t є миттєвою корисністю агента в момент часу t, то його міжчасова корисність U^t в період t, визначається як

$$U^t(u_t, u_{t+1} \dots u_T) = u_t + \sum_{\tau=t+1}^{T} \delta^{\tau-1} u_\tau.$$

Модель DU була вперше представлена Полом Ентоні Самуельсоном (1937) й отримала широке поширення здебільшого завдяки аналітичній зручності «підсумовування» майбутніх переваг агентів за допомогою єдиного постійного параметра δ. Експоненціальна функція $d(t) = \delta^t$, також є єдиною формою, яка задовольняє узгодженості в часі, коли агенти будують плани на основі очікуваних майбутніх компромісів, що провокує ці компроміси, коли настає майбутнє (за умови, що нової інформації немає).

Незважаючи на свою простоту і нормативну привабливість, багато досліджень показали, що модель DU емпірично проблематична. В економіці Р. Талер (1981) був першим, хто показав, що коефіцієнт дисконтування δ за період з часом зменшується (після Дж. Ейнслі (1975) у психології). Річард Талер попросив випробовуваних вказати суму грошей, яка їм буде потрібна через 3 місяці, 1 рік і 3 роки в обмін на негайне отримання суми в 15 доларів. Відповідні медіанні відповіді

становили 30, 60 і 100 доларів США, що передбачає середньорічну ставку дисконтування 277 % протягом 3 місяців, 139 % протягом 1 року і 63 % протягом 3 років. Виявлення того, що ставки дисконтування з часом знижуються, підтверджується багатьма іншими дослідженнями (наприклад, П. Холкомб і Р. Нельсон, 1992, Дж. Пендер, 1996). Було показано, що гіперболічна функція дисконтування в формі $d\ (t)\ =\ 1\ /\ (1\ +\ mt)$ підходить для даних про тимчасові переваги краще, ніж експоненціальна форма.

Гіперболічне дисконтування передбачає, що агенти відносно далекоглядні, коли оцінюють нагороди в різний час у майбутньому, але прагнуть до негайного задоволення, коли це можливо. Дослідження в галузі нейроекономіки (С. МакКлюр 2004) показують, що гіперболічне дисконтування може бути пов'язане з конкуренцією нейронної активності між афективною і когнітивною системами мозку. Основним наслідком гіперболічного дисконтування є те, що поведінка осіб, що приймають рішення, буде непослідовною: особи, які приймають рішення, можуть не прийняти того рішення, яке планували прийняти, (коли вони оцінювали рішення в більш ранні періоди), коли настане фактичний час. Ця властивість корисна, тому що вона створює спосіб для моделювання проблем самоконтролю і зволікання (наприклад, Т. О'Донох'ю і М. Рабін, 1999).

Метою цього підрозділу є вивчення поведінки економічних агентів на ринку матеріальних благ, а також з'ясування впливу принципу гіперболізованого дисконтування в ігрових задачах.

Розглянемо наступну модель для апроксимації гіперболічного дисконтування: введемо один додатковий параметр у стандартну структуру DU. Ця узагальнена модель відома як «квазігіперболічна» або «зміщена у теперішньому часі» модель. Уперше вона була введена Е. Фелпсом і Р. Поллаком (1968) для вивчення трансфертів від батьків до дітей, а потім запозичена і популяризована Д.

Лайбсоном (1997). У разі квазігіперболічного дисконтування особа, що приймає рішення, на поточному часі (t) має корисність 1, тоді як цінність корисності в період τ' $(\tau > t)$ дорівнює $\beta\delta^{\tau-1}$. Отже, міжчасова корисність особи, яка приймає рішення $U^{\,t}$, у період t, може бути подана як

$$U^{\,t}(u_t, u_{t+1} \dots u_T) = u_t + \sum_{\tau=t+1}^{T} \beta\delta^{\tau-1} u_\tau. \quad (5.113)$$

У моделі $\beta\delta$, параметр δ відображає «довгострокові» переваги особи, що приймає рішення, а β (де $0 < \beta < 1$) вимірює «силу смаку» для негайного задоволення або, інакше кажучи, ступінь поточного зміщення. Більш низькі значення β означають «сильніший смак» до неупередженості. Коефіцієнт дисконтування, розміщений у наступному періоді після поточного, дорівнює $\beta\delta$, але коефіцієнт прирощеного дисконту між будь-якими двома періодами в майбутньому становитиме $\frac{\beta\delta^{t+1}}{\beta\delta^{t}} = \delta$. Особи, які приймають рішення, діють сьогодні так, як ніби вони будуть більш терплячими в майбутньому (використовуючи співвідношення δ), але, коли настане майбутнє, коефіцієнт дисконтування для наступного періоду дорівнюватиме $\beta\delta$. В окремому випадку $\beta = 1$ модель зводиться до стандартної структури DU. Цей особливий випадок також важливий тим, що він іноді використовується як орієнтир, за допомогою якого проводяться ефекти гіперболічного дисконтування для добробуту. Модель (β, δ) була застосована для вивчення проблем самоконтролю, таких як прокрастинація, (Т. О'Донох'ю та М. Рабін, 1999) і наркоманія (Т. О'Донох'ю та М. Рабін, 1999).

Виникає природне запитання: чи знають особи, які приймають рішення, що вони гіперболічно дисконтують? Один із способів оцінювання самосвідомості агентів про їх самоконтроль полягає в тому, щоб представити переконання щодо їх власної майбутньої поведінки (Т. О'Донох'ю та М. Рабін, 2001, 2003). Нехай $\hat{\beta}$ позначає «віру» агента у β. Агенти можуть бути розділені на два типи. Перший тип наївний, який зовсім не знає, що він гіперболічний дискаунтер і вважає, що він

дисконтує експоненційно ($\beta < \hat{\beta} < 1$). Другий тип розсудливий ($\beta = \hat{\beta} < 1$), який повністю усвідомлює свою непослідовність у часі і приймає рішення, які раціонально передбачають ці проблеми. Розважлива людина буде шукати зовнішні способи самоконтролю, щоб взяти на себе зобов'язання діяти терпляче в майбутньому (Д. Аріелі та К. Вертенброх 2002), але наївний не буде.

Для першого прикладу розглянемо ситуацію з покупкою та споживанням чипсів, щоб дослідити, як гіперболічне дисконтування і переконання агентів про свої переваги впливають на поведінку. Для простоти приймемо $\delta = 1$. Особа, яка приймає рішення, стикається з двома послідовними рішеннями:

1. Рішення про покупку. В період 0 він повинен вирішити, купити маленьку (що містить 1 порцію) або велику (містить 2 порції) пачку чипсів. Великий пакет чипсів поставляється зі знижкою за кількість, тому він має більш низьку ціну за порцію.

2. Рішення про фактичне споживання. В період 1 він повинен прийняти рішення про кількість споживаних порцій. Якщо він купив маленьку пачку, він може споживати тільки 1 порцію. Однак, якщо він купив велику пачку, він повинен вирішити, чи їсти 2 порції одночасно або з'їсти 1 порцію і зберегти другу порцію для майбутнього споживання.

Споживач отримує безпосередню вигоду від споживання залежно від кількості порцій, які він їсть, а також менша ціна за порцію, яку він заплатив. Однак, оскільки чипси не поживні для здоров'я, в період 2 будуть понесені «витрати», які залежать від розміру порції, спожитої в період 1. Чисельні вигоди і витрати для кожного рішення про покупку і споживання наведені в табл. 5.13.

Таблиця 5.13

Корисність і витрати на споживання за рішенням про покупку

Рішення про покупку	**Миттєва корисність період 1**	**Миттєва корисність період 2**
Маленька пачка: 1 порція	2,5	−2
Велика пачка: 1 порція	3	−2
2 порції	6	−7

По-перше, незважаючи на те, що споживач їсть 1 порцію, виграш у споживанні вище, коли він купує велику упаковку завдяки дисконту кількості (ціна за порцію нижче). По-друге, вживання 2 порцій у 3,5 рази гірше, ніж вживання 1 порції, що відображає витрати на перевищення щоденного «порога» для нездорової їжі.

Тепер можемо з'ясувати, як будуть поводитися наївний ($\beta < \hat{\beta} = 1$) і розважливий ($\beta = \hat{\beta} < 1$) агенти, припускаючи, що $\beta = 0{,}5$. Також зіставляємо їх поведінку з поведінкою узгодженого за часом раціонального споживача з $\beta = 1$. Використовуючи нашу узагальнену модель, міжчасова корисність споживача, який обирає рішення про покупку і споживання в період 0 та період 1, показано в табл. 5.14.

Таблиця 5.14

Корисність споживання за рішенням про покупку (3 типи поведінки)

Розмір споживання	**Раціональний**	**Наївний**	**Розважливий**
Рішення про покупку період 0			
Маленька пачка	$2{,}5 - 2$	$\beta * (2{,}5 - 2)$	$\beta * (2{,}5 - 2)$
Велика пачка	$Max\{U_{1L}, U_{2L}\}$ = $Max\{3 - 2{,}6 - 7\}$	$\beta \cdot Max\{U_{1L}, U_{2L}\}$= $\beta \cdot Max\{3 - 2{,}6 - 7\}$	$\beta \cdot U_{j^*L}$, де j^* = argmax {Велика J-порцій у період 1}
Споживання період 1			
Маленька пачка, перше споживання	$2{,}5 - 2$	$2{,}5 - \beta \cdot 2$	$2{,}5 - \beta \cdot 2$
Велика пачка, перше споживання	$3 - 2$	$3 - \beta \cdot 2$	$3 - \beta \cdot 2$
Велика пачка друге споживання	$6 - 7$	$6 - \beta \cdot 7$	$6 - \beta \cdot 7$

Величина U_{j^*L} є чистим потоком корисності споживання *j* порцій, оціненим у період 0, за умови покупки великої пачки. Отже, три типи поведінки: раціональний, наївний і розважливий приймають такі рішення про покупку і споживання в табл. 5.15.

Таблиця 5.15

Рішення трьох типів поведінки

Розмір споживання	Раціональний	Наївний	Розважливий
Рішення про покупку в період 0			
Маленька пачка	0,5	0,25	0,25
Велика пачка	1	0,5	−0,5
Споживання в період 1			
Маленька пачка, перше споживання	–	–	1,5
Велика пачка, перше споживання	1	2	–
Велика пачка, друге споживання	−1	2,5	–

Почнемо з раціонального споживача. У період 0 він купує велику пачку, щоб скористатися знижкою за кількість. Коли настає період 1, у нього не виникає проблем з самоконтролем, і він з'їдає лише 1 порцію і зберігає іншу порцію на майбутнє. Його прогнозована корисність дорівнює 1, і це його фактична корисність (табл. 5.15).

Наївний також купує великий пакет у період 0, але з іншої причини. Приймаючи рішення про покупку в період 0, він помилково передбачає застосування коефіцієнта дисконтування 1, коли стикається з вибором «одна проти двох порцій» у період 1 (табл. 5.14). У результаті він думає, що він буде споживати тільки 1 порцію в період 1. З огляду на цей план, покупка великого пакета, здається, перевершує поточну дисконтну корисність ($\beta \cdot 1$) над купівлею маленького пакета, однак, коли настає період 1, вживання 2 порцій дає корисність у цей момент часу ($6 - \beta \cdot 7$), що більше ($3 - \beta \cdot 2$) за приймання тільки 1 порції. Ключовим моментом є те, що наївний робить помилку в прогнозуванні його власної

майбутньої поведінки. В періоді 0 він обирає так, як би він порівнював лише період 1 між корисністю (3–2) і (6–7), нехтуючи вагою β, яка фактично з'явиться і дасть велику майбутню вартість у період 1, змушуючи його прагнути з'їсти обидві порції одночасно. В результаті фактична корисність, оцінена в період 0, становить не (0,5), а $0{,}5 \cdot (6 - 7) = -0{,}5$.

Розсудливий точно пророкує, що він зробить, якщо купить великий пакет. Тобто записи в табл. 5.14 для споживання великої пачки, коли настає період 1, абсолютно однакові для наївного і розсудливого. Різниця в тому, що розсудлива людина очікує цей фактичний вибір під час планування того, який пакет купити в період 0.

У результаті розважлива людина навмисно купує маленький пакет, з'їдає тільки одну порцію і має як прогнозовану, так і фактичну дисконтовану корисність 0,25. Важливим моментом тут є те, що наївний не збирається їсти обидві порції, тому він купує великий пакет. Розсудливий знає, що не може встояти, тому він купує малий пакет.

Гіперболічне дисконтування найчастіше використовується для продуктів, які пов'язані або з безпосередніми витратами з відстроченими вигодами (відвідування тренажерного залу, перевірки здоров'я), або з негайними вигодами з відстроченими витратами (куріння, використання кредитних карт, приймання їжі) і спокусою. Розглянемо оптимальні цінові контракти фірми в присутності споживачів з гіперболічними уподобаннями для членства в спортзалі. Уявімо таку модель.

У момент часу $t = 0$ фірма-монополіст пропонує споживачеві тариф, що складається з двох частин: з членського внеску F і плати за використання p. Споживач або приймає, або відхиляє договір. Якщо він відхиляє контракт, він отримує виплату $\bar{u}$ за $t = 1$, фірма нічого не заробляє, і гра закінчується.

Якщо він приймає контракт, споживач платить F за $t = 1$, а потім приймає рішення між ходити (E) або не ходити (N). Якщо він вибирає E, він бере на себе

витрати c і платить фірмі плату за використання p за $t = 1$. А також отримує відстрочувану корисність для здоров'я $b > 0$ за $t = 2$.

Якщо він вибирає N, його вартість дорівнює 0, і його виплати за $t = 2$ теж дорівнюють 0. Передбачається, що споживач дізнається вартість c у кінці $t = 0$ після того, як він вирішив прийняти або відхилити контракт. Однак, перш ніж він прийме це рішення, він знає сукупний розподіл $G\ (c)$.

Фірма задає початкову вартість $K > 0$ щоразу, коли споживач приймає контракт і вартість одиниці товару a, якщо клієнт вибирає E. Споживач є гіперболічним дискаунтером з параметрами $(\beta, \hat{\beta}, \delta)$. Для простоти також передбачається, що фірма відповідає часу з коефіцієнтом дисконтування δ. Плата за використання є вартістю відвідування, одноразового візиту. Членство – це вартість абонемента на період, де середня вартість відвідування вираховується як вартість абонемента, розділена на кількість реальних відвідувань.

Для наївного гіперболічного споживача, який бажає займатися спортом, процес прийняття рішення може бути описаний таким чином: за $t = 0$ корисність вибору E дорівнює $\beta\delta \cdot (\delta\, b - p - c)$, а виграш від N дорівнює 0. Отже, він вибирає E, якщо $c \leq \delta\, b - p$. Однак, коли $t = 1$, вибір E дає тільки $\beta\delta\, b - p - c$, і тому споживач фактично вибирає E, тільки якщо $c \leq \beta\delta\, b - p$. Наївний гіперболічний споживач неправильно прогнозує свій власний процес дисконтування в майбутньому і, отже, переоцінює чисту корисність E, коли він купує абонемент. Таким чином, фактична ймовірність того, що споживач вибере ходити це відсоткова ймовірність того, що його вартість буде нижче порога вартості $\beta\delta\, b - p$, який дорівнює $G(\beta\delta\, b - p)$. Отже, споживач віддає перевагу тренуватися рідше, ніж він планує, коли купує членство. Різниця між очікуваною і фактичною ймовірністю відвідування відображається у $G(\delta\, b - p) - G(\beta\delta\, b - p)$, яка завжди позитивна (оскільки $\beta < 1$ та $G\ (c)$ менше, якщо c менше). Крім

того, якщо врахувати проміжний випадок, коли споживач може бути частково наївним ($\beta < \hat{\beta} < 1$) щодо своєї поведінки, несумісної з часом, ступінь, з якою він переоцінює свою ймовірність вибору E, дорівнює $G(\hat{\beta}\delta\, b - p) - G(\beta\delta\, b - p)$. На відміну від наївних або частково наївних споживачів, повністю розсудливий споживач ($\beta = \hat{\beta} < 1$) не проявляє надмірну впевненість у тому, як часто він буде вибирати E. В цілому, очікувана чиста вигода споживача за $t = 0$, коли він приймає контракт, становить

$$\beta\delta\left[-F + \int_{-\infty}^{\hat{\beta}\delta b - p}(\delta \cdot b - p - c)\, dG(c)\right]. \qquad (5.14)$$

Раціональна фірма передбачає це і її проблема максимізації прибутку визначається таким чином:

$\max\limits_{F,p} \delta\{F - K - G(\beta\delta b - p)(p - a)\}$, таке, що $\beta\delta\left[-F + \int_{-\infty}^{\hat{\beta}\delta b - p}(\delta \cdot b - p - c)\, dG(c)\right] = \beta\delta\bar{u}$. (5.15)

Обмеження відображає те, що фірма як монополіст може встановлювати умови контракту, які роблять споживача байдужим до переходу і отримання очікуваної вигоди або відхилення і отримання дисконтованої винагороди за відмову $\beta\delta\bar{u}$. Фірма максимізує свій власний дисконтований прибуток, який є фіксованою комісією F за вирахуванням фіксованих витрат K, помножених на відсоток часу, протягом якого фірма збирає плату з користувачів, оскільки споживач вибирає E ($G(\beta\delta b - p)$, та ймовірність E , яка відображається в розрахунку очікуваної корисності споживача за (t = 1), помножена на чистий прибуток від зборів з користувачів $(p - a)$.

Почнемо з випадку, коли споживачі не залежать від часу ($\beta = 1$). Тоді фірма просто встановлює p^* рівним граничним витратам a і вибирає F^*, щоб задовольнити обмеження участі споживача зазначене вище. Коли $\beta < 1$, оптимальний договір фірми включає встановлення плати за використання нижче

граничних витрат ($p^* < a$) і членського внеску F вище оптимального рівня F^* для постійних споживачів. Цей результат можна пояснити двома причинами: по-перше, плата за використання з меншими витратами служить зобов'язанням для розважливого збільшити ймовірність відвідування. (Розважливий, наприклад, з великим бажанням заплатить вищий членський внесок у поєднанні з більш низькою платою за використання, оскільки він знає, що у нього буде спокуса пропустити тренажерний зал, якщо плата за використання є низькою). По-друге, фірма використовує більше низьку вартість за використання в поєднанні зі збільшенням F^* для використання надмірної впевненості наївного щодо майбутніх відвідувань: наївний прийме контракт і заплатить F^*, але відвідує (затрати $p^* < a$) рідше, ніж він думає. Наприклад, у США середній членський внесок становить близько 300 доларів на рік. Для більшості спортивних залів споживачі також мають можливість платити не членський внесок, а більш високу плату за використання (близько 15 доларів США за відвідування). Середньостатистичний споживач, який заплатив типову плату в 300 доларів, ходить у спортзал настільки рідко, що його ефективна вартість за відвідування становить 19 доларів на день; їм було б краще не купувати членство і платити тільки за використання. Цей тип помилки прогнозування саме те, що робить наївний гіперболічний споживач.

5.4. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача у динамічному моделюванні

Якщо запитати у людей, що їм здається краще: отримати 1000 грн зараз або 1100 грн завтра, більшість відповість, що краще 1000 грн зараз. А якщо запитаємо, чому вони надають перевагу: отримати 1000 грн через 30 днів або 1100 грн через 31 день, то більшість відповість, що краще 1100 грн через 31 день. Це пояснюється тим, що людям цікавіша гарантована вигода в короткій перспективі, а в довшій перспективі пара днів значення вже не має.

З позиції раціонального мислення ці відповіді є не найбільш очевидними, але з позиції психології вони вважаються найпопулярнішими. І це є прикладом ірраціональності в міжчасових виборах. Поведінкова економіка вивчає подібні відхилення і намагається зрозуміти, з якої причини в такій, схожій або зовсім іншій фінансово-економічній ситуації людина реагує нераціонально, а також, як це можна застосувати на практиці. Крім того, поведінкова економіка також досліджує, як на економіку впливає сприйняття медійної інформації, чуток, думок політиків і експертів. Є, наприклад, припущення, що людей у компаніях скорочують швидше, якщо про це йде поголос серед працівників. Це ж стосується і економічної кризи. Бізнесмени, підприємці і топ-менеджери психологічно налаштовуються на «режим кризи», що незабаром починає проявлятися в прийнятих ними рішеннях (кадрових, фінансово-економічних і т. д.).

Поведінкова економіка спирається як на індивідуальну, так і на масову психологію. Багато досліджень показали, що навіть невелика група, налаштованих певним чином людей, може вплинути на ринок у цілому.

Однак, щоб поведінкова економіка могла повноцінно займатися явищами глобального масштабу, потрібно з’ясувати, чим насправді є такі суб’єктивні чинники та поняття, як, наприклад, смак: як людина його розуміє і використовує.

Як окремі частини економіки складаються в єдине ціле, формуючи фінансово-економічні ситуації й відносини.

Проблема впливу смаків та поведінкової економіки на вибір споживача розглядають у своїх дослідженнях Нуреєв Р. М., Макара О. В. та ін.

Метою цього підрозділу є вивчення впливу суб'єктивних чинників, таких як смаки і пріоритети економічних агентів на обмеженому ринку матеріальних благ у динамічній системі.

Припустимо, що на ринку є N гравців і M товарів, де N т а M цілі додатні числа. У кожного гравця є свій бюджет $\gamma_i, i \in [1, N]$, ціна кожного товару $p_k, k \in [1, M]$, корисність кожного товару $\mu_k, k \in [1, M]$.

Бюджет кожного з гравців коливається і залежить від його бажання витратити суму не більше, ніж $\gamma_{i\,\max}$, і, в його розумінні, суму, менше ніж $\gamma_{i\,\min}$, він витратити не зможе для задоволення своїх потреб.

Кількість товару, що купується кожним гравцем, задається лінійно відносно бюджету кожного гравця. Додаємо до моделі суб'єктивний чинник S_k^i пріоритетності купівлі певного товару для кожного гравця, його бажання придбати саме цей товар, а не інший, тобто

$$x_k^i = (a_k^i + b_k^i \gamma_i) S_k^i \qquad (5.16)$$

Динаміка полягає в тому, що на кожному кроці модель буде адаптуватися, тобто на відміну від класичних моделей у 0 період не можна сформувати модель кінцевого періоду, цей алгоритм нагадує алгоритми розвитку штучного інтелекту, відмінність у тому, що вивчається поведінка людей, що має схильність до змін.

Таким чином, для кожного гравця можна записати корисність його набору товарів U_i формулою (5.2), а його обмеження по бюджету формулою (5.3), при цьому обмеження товару формулою (5.4).

Споживач максимізує корисність вибором такого споживчого набору, який задовольняє бюджетному обмеженню.

Якщо кількість товару обмежена L_k одиницями, то вибір кращого набору кожного наступного гравця так само обмежений товарами, наявними на ринку. З чого випливає обернена залежність між наборами U_i, адже чим більше корисність набору одного гравця, тим менша корисність набору іншого гравця. Запишемо таку зведену корисність кожного гравця через взаємовідношення його корисності до сукупної корисності гравців формулою (5.5), за стратегії ω^i при стратегіях ω^j, $j \in [1, N] \setminus \{i\}$, $i \in [1, N]$.

Для отримання конкретних результатів була розглянута ситуація з трьома гравцями, а також обрані такі вихідні параметри, які задані в табл. 5.1. У цьому випадку непрямі обмеження виконуються.

Для початку, розглянемо період t_0 (0) — період на якому споживач лише розмірковує про свої наміри та не знаходиться на фазі купівлі.

Хоча споживач і має межі бюджету, який він готовий витратити, він також має уявлення про фактичну кількість грошей, що він витратить, щоб здобути максимальну для себе корисність.

Для заданих умов гравець 1 у період 0 може міркувати так, що його фактична кількість витрачених грошей, що належить його бюджетному обмеженню, становитиме 160, гравець 2 — 280, гравець 3 — 209. Розрахункові значення корисності для кожного гравця подано у табл. 5.16.

Таблиця 5.16

Калькуляція у період t_0

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,302	0,983	0,375	1,659
$Y_1 = 160$	$Y_2 = 280$	$Y_3 = 209$	—

Якщо не змінювати жодних умов, розв'язок за Нешем у період 1 на фазі купівлі товарів буде таким, як показано у табл. 5.17.

Таблиця 5.17

Розв'язок за стратегією за Нешем у період t_1

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,493	0,646	0,383	1,523
$Y_1 = 180$	$Y_2 = 246$	$Y_3 = 209$	—

Як видно з табл. 5.17, можливі три випадки: гравець 1 недооцінив свої потреби та кількість товарів, що йому необхідна, та гадав, що витратить менше; гравець 2, навпаки, переоцінив; гравець 3 був точним в оцінці своїх потреб.

Варто звернути увагу на те, що цей і подальші розв'язки не є суто за Нешем, накладається обмеження формування кількості витрачених грошей і залежних від них кількості товарів, саме цей обсяг є рівноважним.

Розглянемо два висновки з цієї ситуації. Один – з погляду економічної корисності, другий з – погляду здобутої корисності з урахуванням психологічних аспектів.

З одного боку, корисність гравця 1 збільшилась відносно його початкового прогнозу через те, що він недооцінив свої ж потреби та той рівень благ, що йому необхідний. Корисність гравця 2 зменшилась відносно його початкового прогнозу, адже на лімітованому ринку він не зміг купити все, що хотів купити спочатку та витратив меншу суму грошей. Корисність гравця 3 також трохи

збільшилася через зміну дій інших гравців.

З другого боку, можна розглянути один з багатьох результуючих чинників поведінкової економіки, такий аспект, як передчуття результату. Кожен з гравців матиме різну корисність від передчуття результату. Гравець 1 матиме її від'ємну, адже він витратив більше ніж хотів, гравець 2 додатну та гравець 3 також додатну, адже він зміг точно розрахувати свої потреби та задовольнити їх.

Як видно з цього прикладу, такий поведінковий аспект не суперечить рівновазі Неша, а навпаки доповнює її та допомагає розглянути з іншого боку.

Зробимо ще декілька різних циклів. Повернемося до періоду 0. На другому циклі всі гравці стали більш досвідченні й одразу можуть точно сказати, скільки грошей вони витратили б за тих самих умов, табл. 5.17.

Однак у період 1 відбулися такі зміни. Під впливом зовнішніх чинників з симетричним ефектом (наприклад, ЗМІ), привабливість продукту 1 S_k^i змінилась однаково для всіх із 1 до 0,6. Маючи попередній суб'єктивний досвід (ефект є не симетричним), наприклад, товар міг сподобатися одному покупцеві і не сподобатися іншому з його власних переконань, сподівань і т. п. Через це відношення до продукту 2 S_k^i також змінилось. Зміни подано у табл. 5.18.

Таблиця 5.18

Значення S_k^i період t_1, другого циклу

Парамет р	**Гравець 1**			**Гравець 2**			**Гравець 3**		
S_k^i	0,6	1,2	1	0,6	1,32	1	0,6	0,8	1

Розв'яжемо задачу за нових умов та надамо її розв'язок у табл. 5.19.

Таблиця 5.19

Рішення по стратегії за Нешем у період t_1, другого циклу

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,094	2,549	0,244	2,887
$Y_1 = 148$	$Y_2 = 272$	$Y_3 = 156$	—

Як видно з табл. 5.19, корисність кожного гравця суттєво змінилася, причому по-різному, порівняно з табл. 5.17. Незважаючи на те, що вплив смаків для гравця 3 для обох товарів був негативним, його корисність, з одного боку, змінилася не суттєво (у 1,5 рази), на відміну від гравця 1 та 2, у яких корисність змінилася у 5 разів. З другого боку, корисність гравців 1 та 2 змінилася кардинально протилежно, хоча смаки змінилися подібно. Також першому гравцеві вигідно переглянути своє нижнє обмеження за бюджетом через те, що найкращий свій результат він досягає нижче бюджетного обмеження мінімуму.

Можна зробити такі висновки:

- зміна смаків та пріоритетів може призвести як до кращої, так і до гіршої індивідуальної корисності та загальної корисності;
- зміна смаків є індивідуальною для кожного, причини можуть бути як зовнішні, так і внутрішні, симетричні чи асиметричні;
- вплив смаків на результат є також індивідуальним та важко передбачуваним;
- схожі смаки не свідчать про однакові результати, адже є дуже багато інших чинників моделі, що вносять свої корективи.

Для наступного циклу повернемося до періоду 0. На третьому циклі всі гравці також можуть одразу точно сказати, скільки грошей вони витратили б за

тих самих умов, табл. 5.17.

Однак у період 1 відбулися такі зміни: покупець досі не має уявлення, як йому ставитися до інформації, яку він отримує, та до власних бажань. Він вирішує спонтанно, його пріоритет купівлі кожного продукту не є постійним, S_k^i належить проміжку від 0,6 до 1. Отже, для будь-якого споживача, для будь-якого продукту у період 1, S_k^i приймає випадкове допустиме значення. Для розв'язку використаємо імітаційне моделювання усіх можливих станів системи та, приспускаючи рівну вірогідність набуття стану, за допомогою математичного сподівання розрахуємо результати та подамо їх у табл. 5.20.

Таблиця 5.20

Рішення за стратегією за Нешем у період t_1, третього циклу

$\breve{U}_1$	$\breve{U}_2$	$\breve{U}_3$	$\sum_{i=1}^{N} \breve{U}_i$
0,209	0,536	1,112	1,857

Ґрунтуючись на цих даних, можна зробити такі висновки.

Результат не є середнім арифметичним можливих розв'язків. Смаки та сила їх впливу є індивідуальними, тому кожне моделювання розглядалося окремо і, ґрунтуючись на розглянутих випадках, був побудований ймовірний прогноз поведінки та його кінцева корисність.

Знову-таки, через індивідуальність впливів, зміна корисності кожного гравця є не лінійною та змінюється з різною силою у різних напрямках, наприклад, гравець 1 отримав вдвічі більший результат корисності, ніж у попередньому циклі розв'язку, а гравець 2 у п'ять разів менший.

5.5. Задачі та завдання для самостійного розв'язання

Виділити основне, скласти модель, навести приклад з поясненням.

Завдання 5.1. Поведінкові аспекти моделювання економіки.

Завдання 5.2. Принцип часткової інформованості.

Завдання 5.3. Принцип гіперболізованого дисконтування.

Завдання 5.4. Смаки пріоритети та інші суб'єктивні чинники, що впливають на формування моделей.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип виграш у поточному споживанні — програш у найближчій перспективі.
2. На що впливає обмеженість ринку?
3. Які поведінкові чинники чи елементи поведінкової економіки ви знаєте?
4. Як змінюються розв'язки за різних рівноваг?
5. Коли може бути використаний принцип часткової інформованості?
6. Як можна динамічно моделювати зміну смаків, в чому полягає складність?
7. Чим обумовлюється принцип гіперболізованого дисконтування?
8. Які перспективи та складнощі поведінкової економіки?

Література

1. Арієлі Д. Передбачувана ірраціональність. Приховані сили, що визначають наші рішення / Д. Арієлі // Сер. Книги Стокгольмської школи економіки. — М. : Манн, Іванов і Фербер, 2010. — 400 с.
2. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1984. — 201 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 548 с.
4. Захаров А. В. Теорія ігор у громадських науках: підручник для вузів / А. В. Захаров. — М. : Вид. будинок Вищ. шк. екон., 2015. — 304 с.
5. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. — М. : Прогресс, 2002. — 565 с.
6. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. «Оптимальное управление» - М. Наука, 1979. – 429 с.
7. Капустян О. В. Методи нелінійного аналізу в математичній економіці / О. В. Капустян, А. В. Сукретна. — Київ : КНУ, 2011. — 213 с.
8. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 542 с.
9. Мажара Г. А. Moral hazard in market transactions and options for mitigation and limitation / Г. А. Мажара // Актуальні проблеми економіки та управління : зб. наук. пр. молодих учених ф-ту менеджменту та маркетингу КПІ ім. Ігоря Сікорського. — 2018. — № 12. — С. 1–7.

10. Мажара Г. А. Управління діяльністю кадрової підсистеми туристичної агенції за допомогою когнітивного моделювання / Г. А. Мажара // Економічний вісник КПІ. — 2019. — № 16. — С. 443—451.
11. Мажара Г. А. Behavioral components in relationships of economic agents in the automobile market / Г. А. Мажара, В. О. Капустян // Eureka: social and humanities. — 2020. — № 2. — С. 8—14.
12. Мажара Г. А. Вплив смаків і пріоритетів купівлі на вибір споживача на прикладі задачі динамічного моделювання / Г. А. Мажара, В. О. Капустян // Економічний журнал Одеського політехнічного університету. — 2019. — № 3(9). — С. 45—50.
13. Мажара Г. А. Ірраціональні стратегії в умовах часткової інформованості гравців на прикладі індивідуально-оптимальних рівноваг / Г. А. Мажара, В. О. Капустян // Академічний огляд. — 2019. — № 2(51). — С. 61—68.
14. Мажара Г. А. Поведінкова складова у класичних підходах в ігрових задачах / Г. А. Мажара, В. О. Капустян // Академічний огляд. — 2018. — № 1. — С. 33—39.
15. Мажара Г. А. Гіперболізоване дисконтування на прикладах поведінки економічних агентів з різними когнітивними функціями / Г. А. Мажара, В. О. Капустян // Modern Economic: електрон. наук. фахове вид. з екон наук. — 2019. — № 17. — С. 133—138.
16. Макара О. В. Соціально орієнтована національна економіка: теоретико-методологічні засади та механізми інституційного забезпечення: монографія / О. В. Макара. — Луцьк, 2012. — 416 с.

17. Мащенко С. О. Дослідження стабільності рівноваги на основі принципу індивідуальної оптимальності. Кібернетика і системний аналіз. 2007. № 4. С. 162–169.
18. Мащенко С. О. Пошук індивідуально-оптимальних рівноваг в умовах часткової інформованості гравців. Supplement to International Journal "Information Technologies and Knowledge". 2009. № 3. С. 180–188.
19. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз. 1. Мікроекономіка / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — Київ : Вищ. шк., 2004. — 262 с.
20. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз. 2. Макроекономіка / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — Київ : Вищ. шк., 2004. — 204 с.