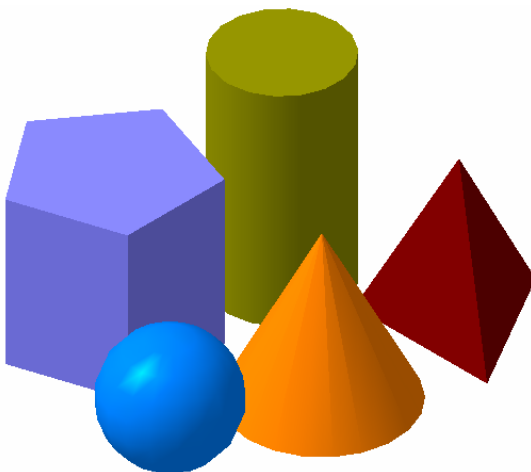


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Бовкун С.А., Скоробогата М.В., Корнієнко О.Б.

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ. ПОВЕРХНІ

Навчальний посібник



2020 рік

УДК 514.18
Б72

*Рекомендовано до видання вченою радою
Національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 9 від 01 червня 2020 року)*

Рецензенти:

Бриков М.М. – доктор технічних наук, професор, кафедри «Обладнання та технології зварювального виробництва» Національного університету «Запорізька політехніка»;

Турпак С.М. – доктор технічних наук, професор, кафедри «Транспортних технологій» Національного університету «Запорізька політехніка»;

Рижова І.С. – доктор філософських наук, професор кафедри «Дизайн» Національного університету «Запорізька політехніка».

Бовкун С.А., Скоробогата М.В., Корнієнко О.Б.
Б72 Нарисна геометрія. Поверхні: навч. посіб. / С.А.Бовкун,
М.В.Скоробогата, О.Б.Корнієнко. – Запоріжжя : НУ
«Запорізька політехніка», 2020. – 134 с.
ISBN 978-617-529-279-2

Навчальний посібник призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів, що вивчають курс «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка».

Посібник відповідає програмі курсу «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка» і може бути використано для виконання практичних та самостійних робіт студентами технічних спеціальностей усіх форм навчання.

УДК 514.18

ISBN 978-617-529-279-2

© Бовкун С.А.
© Скоробогата М.В.
© Корнієнко О.Б.
© Національний університет
«Запорізька політехніка», 2020

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Поверхні	6
1.1 Гранні поверхні і багатогранники	7
1.2 Поверхні обертання	9
2 Проекціювання геометричних тіл	11
3 Побудова проєкцій точок, розташованих на основних геометричних тілах	17
4 Перерізи поверхонь геометричних тіл проєкціюючими площинами	27
4.1 Загальні відомості	27
4.2 Переріз призми	27
4.3 Переріз піраміди	30
4.4 Переріз циліндра	32
4.5 Переріз конуса	34
4.6 Переріз сфери	36
5 Перетин поверхонь геометричних тіл прямими лініями	39
5.1 Загальні принципи розв'язування задач	39
5.2 Побудова точок перетину прямих ліній із поверхнями	39
5.2.1 Точки перетину прямої з призмою	39
5.2.2 Точки перетину прямої з пірамідою	39
5.2.3 Точки перетину прямої з циліндром	41
5.2.4 Точки перетину прямої з поверхнею сфери	42
5.2.5 Точки перетину прямої з конусом	46
6. Приклади практичного завдання	49
6.1 Призма з отвором	49
6.2 Конус з отвором	69
6.3 Піраміда з отвором	89
6.4 Циліндр з отвором	100
6.5 Сфера з отвором	110
Використана та рекомендована література	118
Додаток А. Таблиця А.1 – Варіанти завдань до теми «Геометричне тіло з отвором»	119

ВСТУП

Цей навчальний посібник призначений для студентів, які вивчають курс «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка» денної та заочної форми навчання.

Нарисна геометрія належить до дисциплін, що складають основу інженерної освіти. У цьому курсі вивчають методи і способи зображення просторових фігур на плоскому кресленні, алгоритми вирішення позиційних, метричних і конструктивних завдань.

Нарисна геометрія вчить грамотно володіти технічною мовою - мовою креслення, створювати креслення і вільно читати їх. Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторової уяви і навичок розвитку логічного мислення. Отримані при цьому знання та навички є основними в системі спеціальної підготовки інженера.

Даний навчальний посібник представляє розділ нарисної геометрії «Поверхні», який складено у відповідності до навчальної програми з курсу «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка». Навчальний посібник знайомить студентів із завданнями та прикладами виконання графічних робіт.

1 ПОВЕРХНІ

Поверхня - безліч послідовних положень лінії при переміщенні її в просторі. Таку лінію називають твірною поверхні. Вона може бути прямою або кривою. Закон переміщення твірної може бути заданий теж лініями, але іншого напрямку, ніж твірна. Ці лінії називають напрямними. Сукупність декількох послідовних положень твірної та напрямних створює каркас поверхні (рис. 1.1).

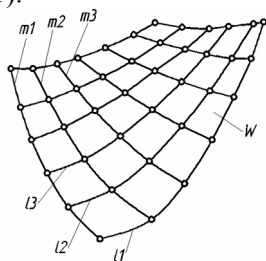


Рисунок 1.1 – Визначники поверхонь

Будь-яку поверхню можна отримати різними способами. Так, прямий циліндр (рис. 1.2) можна утворити обертанням твірної ℓ навколо осі i . Той же циліндр можна теж утворити переміщенням кола m з центром в точці O вздовж осі i . Кожна крива k , яка лежить на поверхні циліндра, утворює цю поверхню при обертанні навколо осі i .

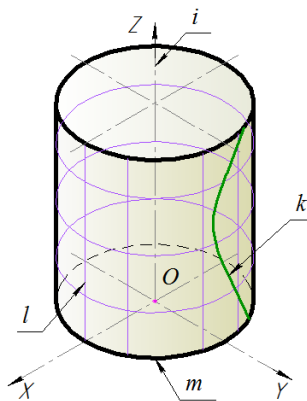


Рисунок 1.2 – Утворення циліндричної поверхні

Залежно від форми твірної всі поверхні можна розділити на лінійчасті (твірна – пряма лінія) і нелінійчасті (твірна – крива лінія). Поверхні лінійчасті поділяються на поверхні, що розгортаються і можуть бути накладені на площину без розривів і складок (циліндрична, конічна тощо), і ті, що не розгортаються і не можуть бути суміщені з площиною без деформації (циліндроїд, коноїд тощо).

1.1 Гранні поверхні і багатогранники

Гранні поверхні утворюються переміщенням прямолінійної твірної ℓ за ламаною напрямною m . При цьому, якщо одна з точок твірної S нерухома, створюється пірамідальна поверхня (рис. 1.3, а), коли твірна при переміщенні паралельна заданому напрямку S , тоді утворюється призматична поверхня (рис. 1.3, б).

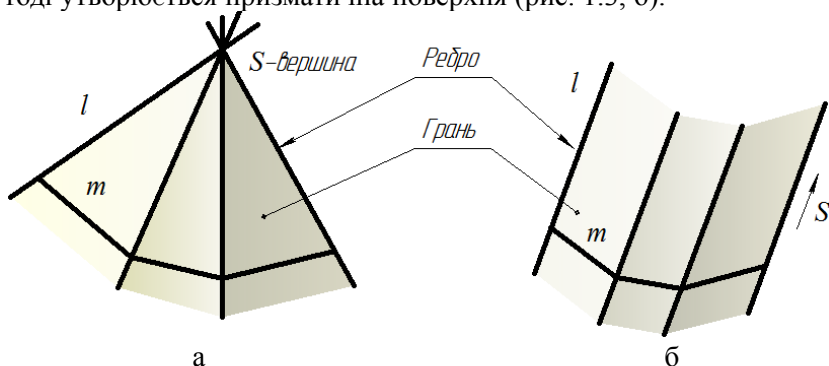


Рисунок 1.3– Утворення гранних поверхонь:
а) пірамідальної; б) призматичної

Елементами гранних поверхонь є : вершина S , грань, ребро (рис. 1.3).

Замкнуті гранні поверхні, утворені деякою кількістю (не менше чотирьох) граней, називаються багатогранниками.

Піраміда – багатогранник, в основі якого лежить багатокутник, а бічні грані – трикутники з загальною вершиною S (рис. 1.4).

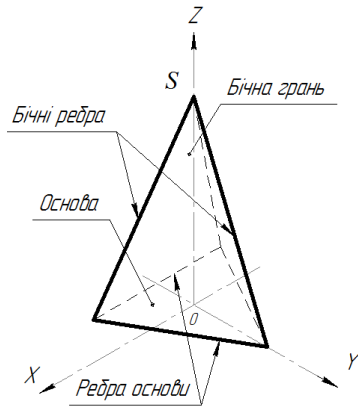


Рисунок 1.4 – Назви складових елементів піраміди

На комплексному кресленні піраміда задається проекціями її вершин і ребер з урахуванням видимості, яка визначається за допомогою конкуруючих точок (рис. 1.5).

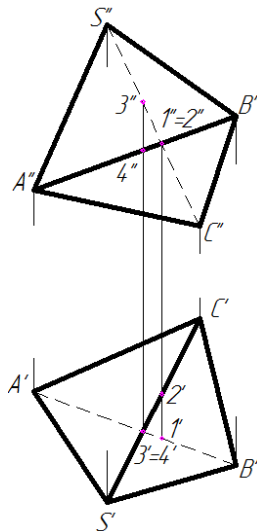


Рисунок 1.5 – Визначення видимості ребер піраміди

Призма – багатогранник, у якого основи – два однакових і взаємно паралельних багатогранника, а бічні грані – паралелограми (рис. 1.6).

Якщо ребра призми перпендикулярні площині основи, таку призму називають прямою. На рисунку 1.7 наведено комплексне креслення прямої чотирикутної призми з горизонтально-проекціовальною поверхнею.

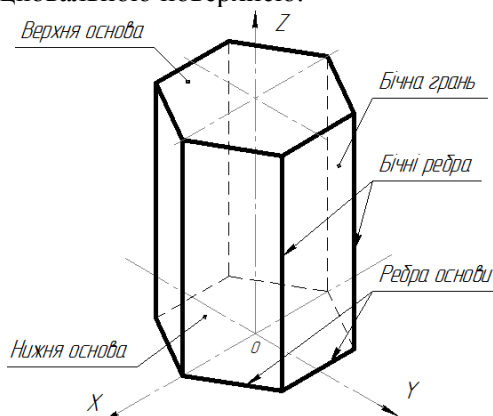


Рисунок 1.6 – Назви складових елементів призми

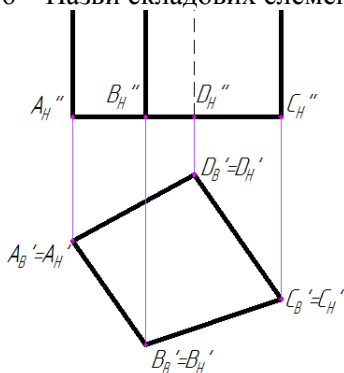


Рисунок 1.7 – Креслення чотирикутної призми з горизонтально-проекціовальною поверхнею

1.2 Поверхні обертання

Конус - геометричне тіло, обмежене бічною конічною поверхнею і площиною основи, яка перерізає всі його твірні (рис. 1.8).

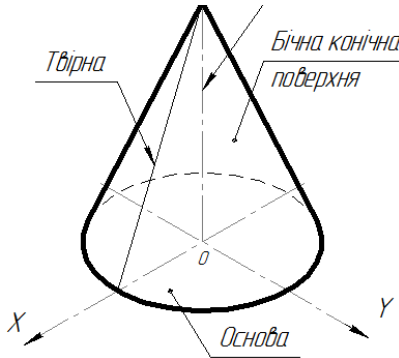


Рисунок 1.8 - Назви складових елементів конуса

Циліндром називається тіло, яке обмежене циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами (основи) (рис. 1.9).

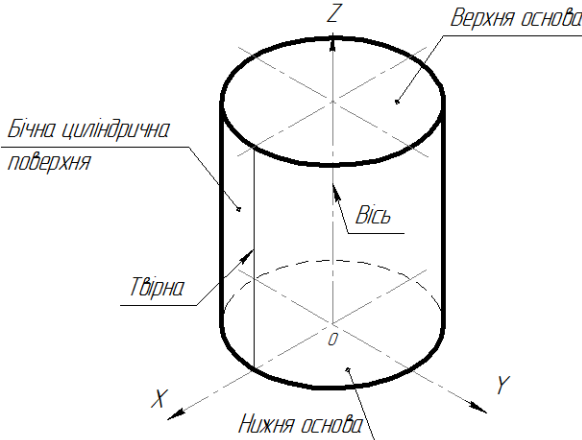


Рисунок 1.9 – Назви складових елементів циліндра

Сфера утворюється обертанням дуги АКВ півкола навколо діаметра АВ (рис. 1.10).

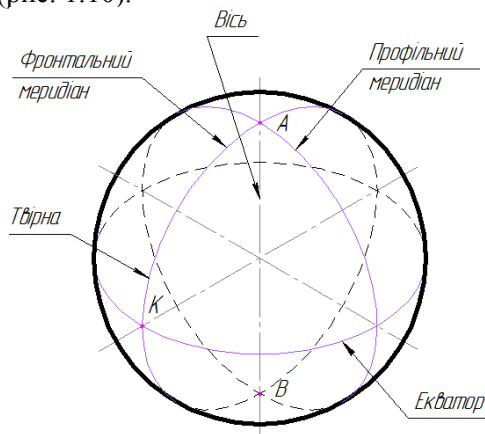


Рисунок 1.10 – Назви складових елементів сфери

Тор утворюється обертанням кола або його дуги навколо нерухомої осі, що знаходиться з ним в одній площині. Якщо вісь обертання знаходиться за межами кола, тор називається відкритим. Відкритий тор називають кільцем (рис. 1.11, а). Коли вісь розташована в межах твірної кола, тоді такий тор називається закритим (рис. 1.11, б).

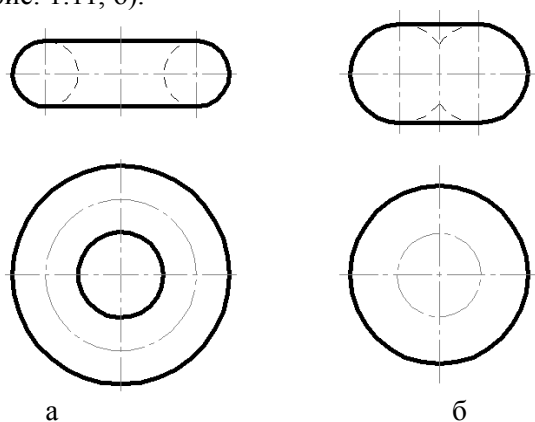


Рисунок 1.11 – Утворення поверхні тора:
а) відкритого; б) закритого

2 ПРОЕКЦІЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Проекціювання геометричних тіл ведеться за правилами проектування точок, відрізків прямих, плоских фігур. При побудові прямокутних проекцій геометричним тілам надають таке положення, при якому найбільша кількість елементів тіл буде спроекційоване в дійсну величину.

Припустимо, що чотирикутна піраміда розташована в системі π_1, π_2, π_3 (рис. 2.1, а). Її основа паралельна π_1 .

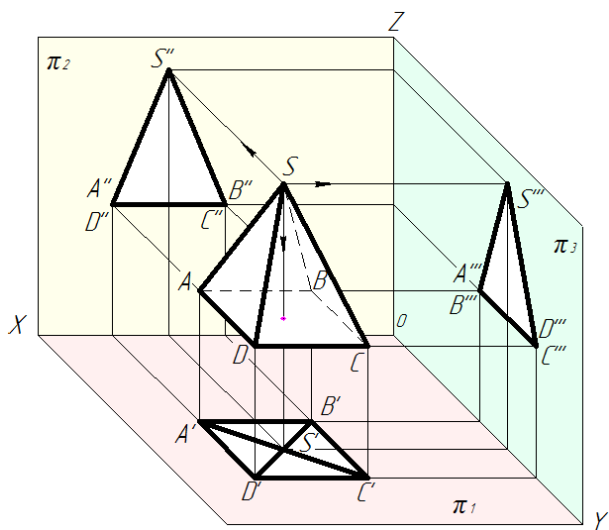
Побудову зображень починають з зображення фронтальної проекції піраміди на площину π_2 . Для цього, з вершин А, В, С і D її основи, опускають перпендикуляри на площину π_2 .

В точках зустрічі перпендикулярів з площиною π_2 отримуються фронтальні прямокутні проекції вершини піраміди (S'') і вершин її основи (A'', B'', C'' і D''). Вершини D і A основи, які лежать на лінії, перпендикулярній площині π_2 , будуть спроекційовані в одну точку $D'' \equiv A''$, а вершини С і В основи – в точку $C'' \equiv B''$.

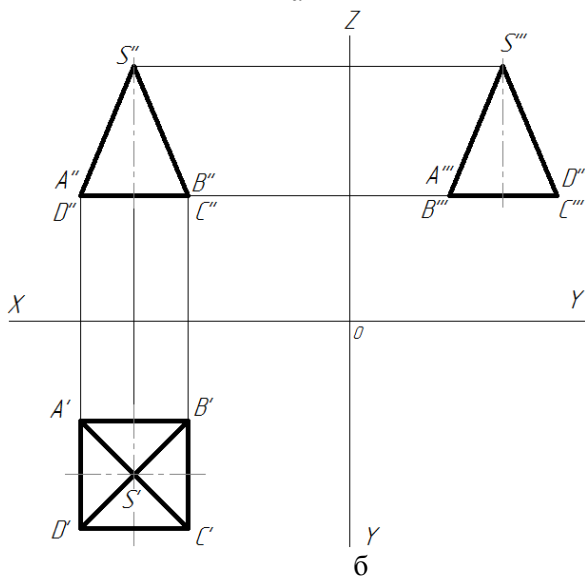
Сполучають проекції точок прямими лініями, отримують фронтальну прямокутну проекцію піраміди, яка на кресленнику буде зображена у вигляді рівнобедреного трикутника $S'' - D'' \equiv A'' - C'' \equiv B''$. Проекції сторін основи піраміди ($D''C''$ і $A''B''$) зливаються в одну пряму $D'' \equiv A'' - C'' \equiv B''$, проекції чотирьох ребер піраміди $S''A''$, $S''D''$, $S''B''$ і $S''C''$ теж зливаються в дві прямі лінії.

Для побудови горизонтальної проекції піраміди опускають перпендикуляри з вершини піраміди і вершин її основи на площину π_1 до зустрічі з нею. Отримують горизонтальні прямокутні проекції точок S', A', B', C' і D' . Сполучають їх між собою і з точкою S' (горизонтальною проекцією вершини піраміди) і отримують горизонтальну прямокутну проекцію піраміди.

Таким же чином будують проекції вершин піраміди на площину π_3 . Отримують профільну проекцію піраміди у вигляді рівнобедреного трикутника $S''' - D''' \equiv C''' - A''' \equiv B'''$.



а



б

Рисунок 2.1 – Проекціювання піраміди:
а) наочне зображення; б) кресленик

Суміщене положення площин π_1 і π_3 з площиною π_2 (епюр) та проєкції піраміди на ці площини зображено на рисунку 2.1, б.

Аналогічно виконують побудови проєкцій інших геометричних тіл.

На рисунку 2.2 показана побудова прямої шестикутної призми.

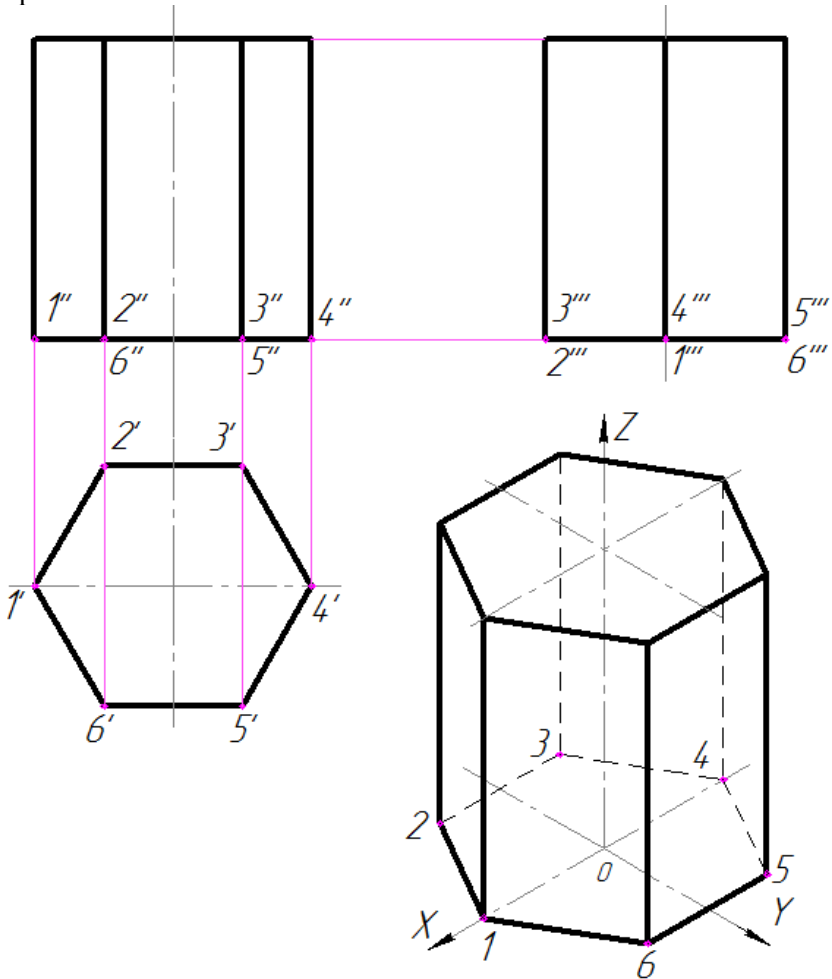


Рисунок 2.2 – Проєкції шестикутної призми

На рисунку 2.3 зображено три проекції кругового циліндра, основа якого розташована в горизонтальній площині проекцій π_1 . Горизонтальна проекція циліндра - коло, діаметр якого дорівнює діаметру основи циліндра, а фронтальна і профільна проекції – однакові прямокутники, висота яких дорівнює висоті циліндра, а ширина – діаметру його основи.

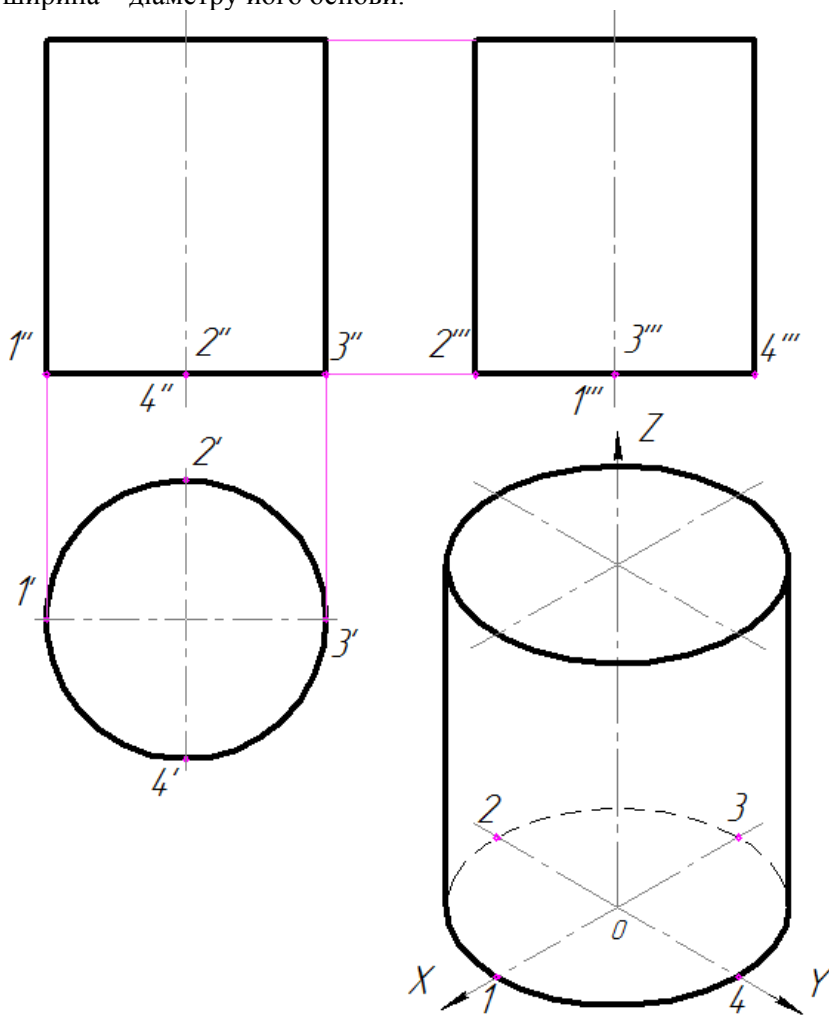


Рисунок 2.3 – Проекції циліндра

Три проєкції прямого кругового конуса, основа якого розташована в горизонтальній площині проєкцій π_1 , зображені на рисунку 2.4.

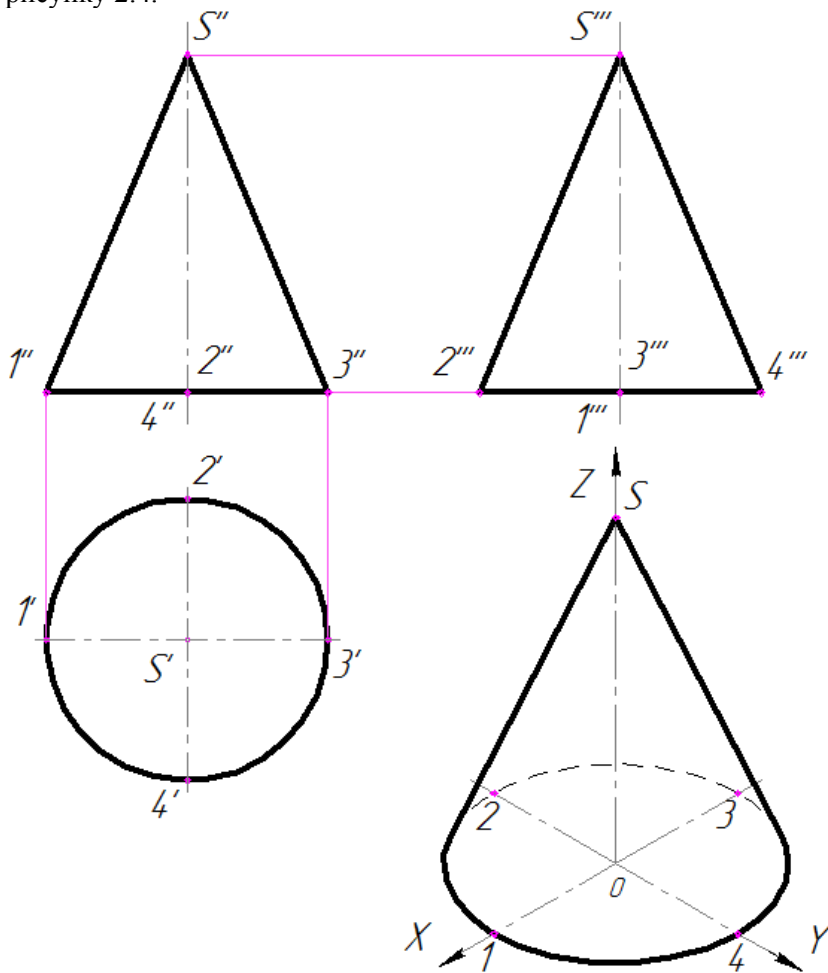


Рисунок 2.4 – Проєкції конуса

З креслення видно, що горизонтальна проєкція конуса є коло, а фронтальна і профільна – однакові рівнобедрені трикутники з

висотою, яка дорівнює висоті конуса, а основа – дорівнює діаметру основи конуса.

На рисунку 2.5 показано три проекції сфери. Кожна проекція є коло, діаметр якого дорівнює діаметру сфери.

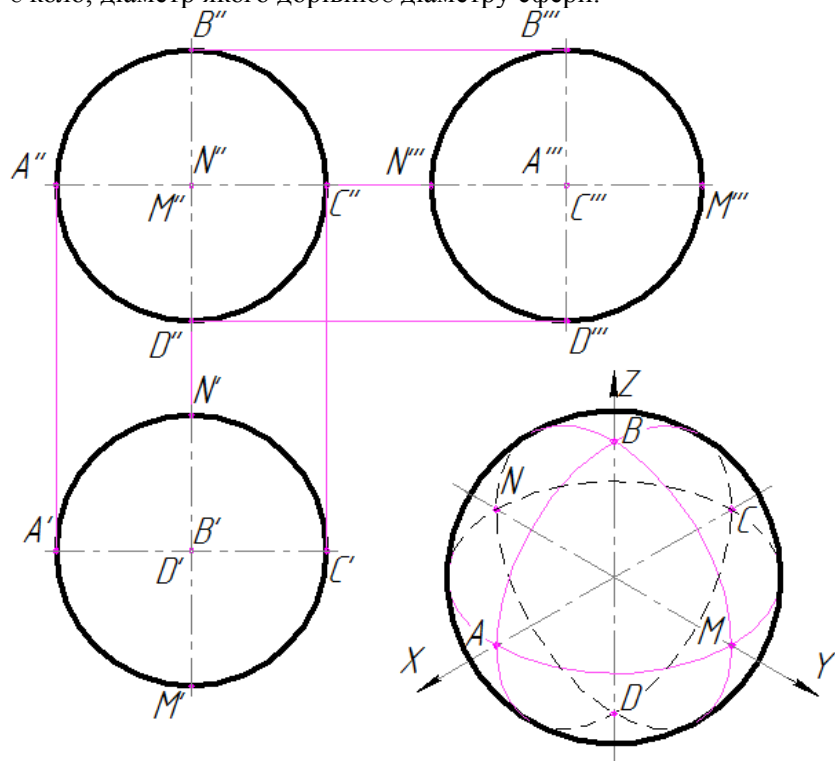


Рисунок 2.5 – Проекції сфери

3 ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ ТОЧОК, РОЗТАШОВАНИХ НА ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ

Положення точки, яка лежить на поверхні, задано, якщо відома одна проекція і показано, на якій частині цієї поверхні точка розташована.

Зазвичай вважають, що точка розташована на видимій частині поверхні.

Проекції точок, які належать основним проєкціювальним поверхням (бічним поверхням прямої призми і циліндра), будують за допомогою ліній зв'язку (рис. 3.1, 3.2).

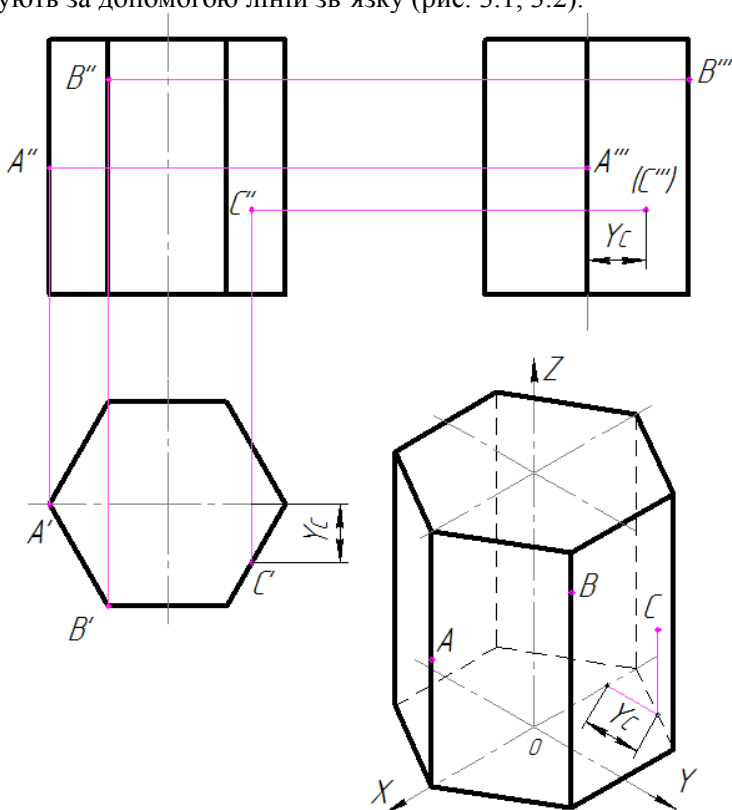


Рисунок 3.1 – Побудова проєкцій точок на поверхні призми

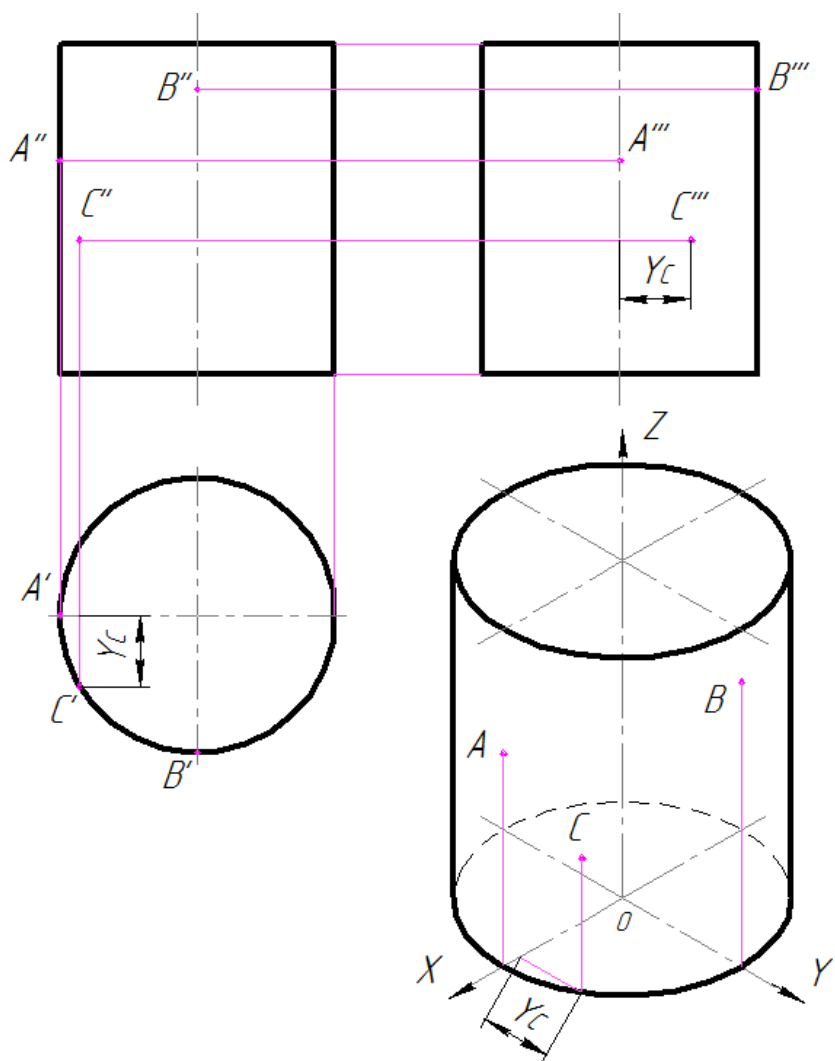


Рисунок 3.2 – Побудова проєкцій точок на поверхні циліндра

Для того, щоб спроектувати точку, що лежить на бічній поверхні піраміди, наприклад точку A , необхідно скористатися одним з двох методів:

1) методом допоміжної січної площини. Наприклад, горизонтальна січна площина α (рис 3.3);

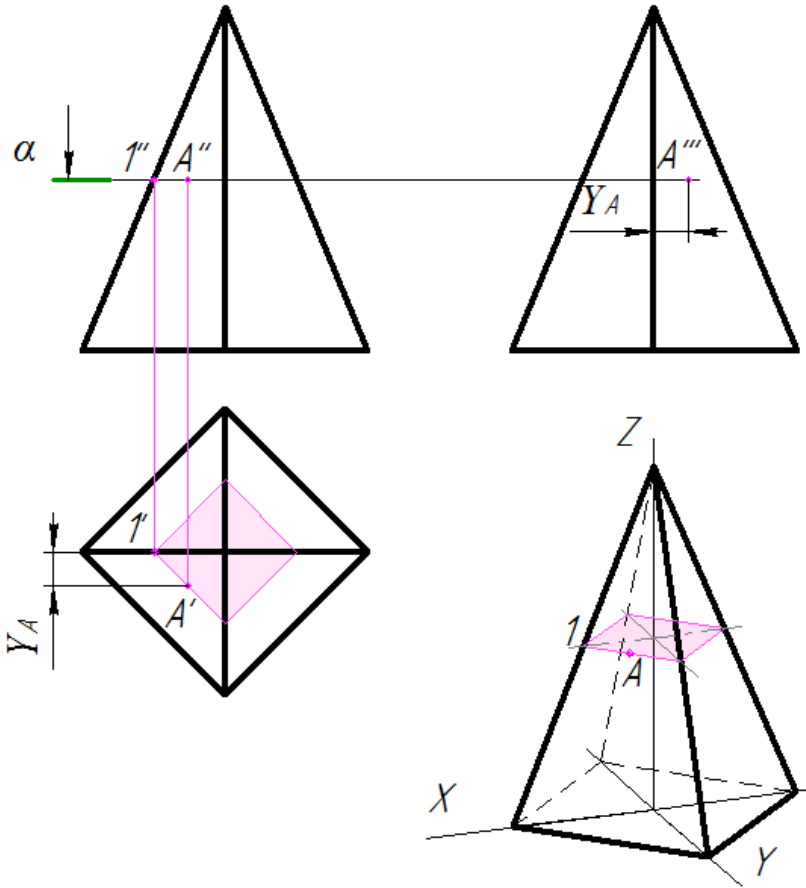


Рисунок 3.3 – Побудова проекцій точок на поверхні піраміди методом допоміжної січної площини

2) методом допоміжної прямої. Пряма 1-2 (рис. 3.4).

Через вершину піраміди (точку $1''$) і задану проекцію точки A'' проводять пряму лінію до основи піраміди і отримують точку $2''$.

Далі будують горизонтальну проекцію цієї прямої. Опускають лінію зв'язку з точки $2''$ до основи піраміди і

отримують точку $2'$. Далі з'єднують отриману точку $2'$ з горизонтальною проекцією вершини піраміди $1'$. Так як шукана точка A належить прямій $1-2$, то її горизонтальна проекція повинна лежати на лінії $1'-2'$, опускають лінію зв'язку з A'' і отримуємо горизонтальну проекцію A' .

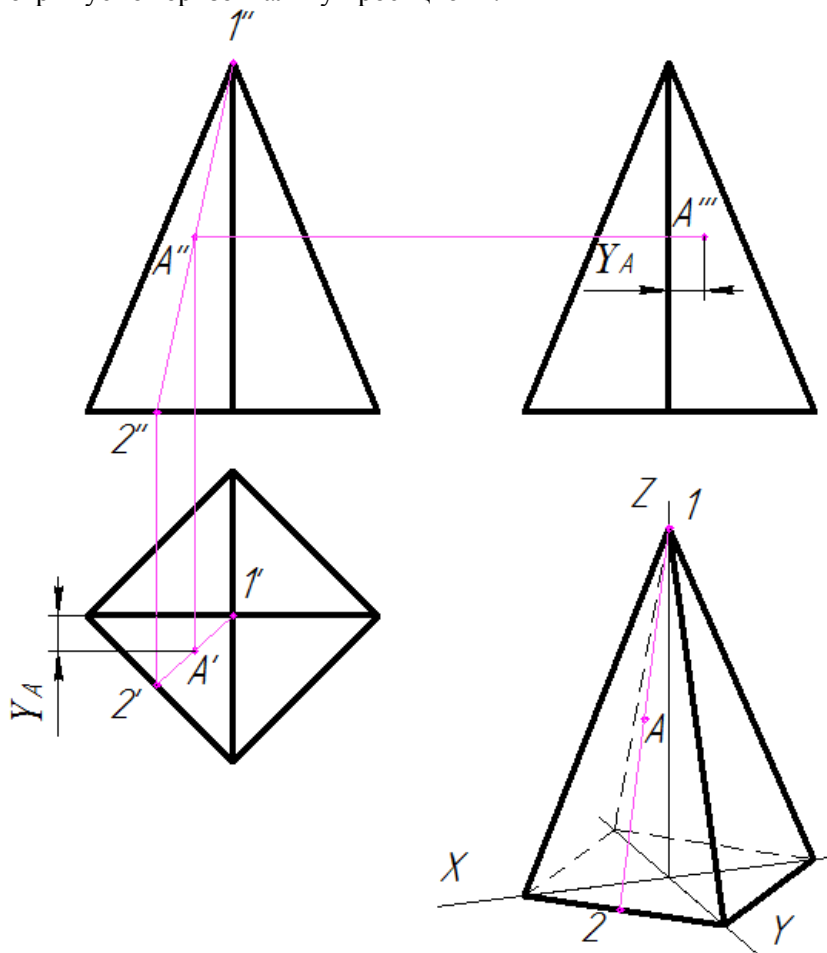


Рисунок 3.4 – Побудова проекцій точок на поверхні піраміди методом допоміжної прямої

Точки, що знаходяться на ребрах піраміди (рис 3.5), переносять по лініях зв'язку на відповідні ребра на горизонтальній проекції, наприклад, точка B (проекції B'' і B'). Побудова профільної проекції B''' має бути зрозуміла з рисунку 3.5.

Для побудови горизонтальної проекції точки C' застосовують, згаданий вище, метод січних площин. Або спочатку знаходять профільну проекцію точки C''' , а потім горизонтальну C' .

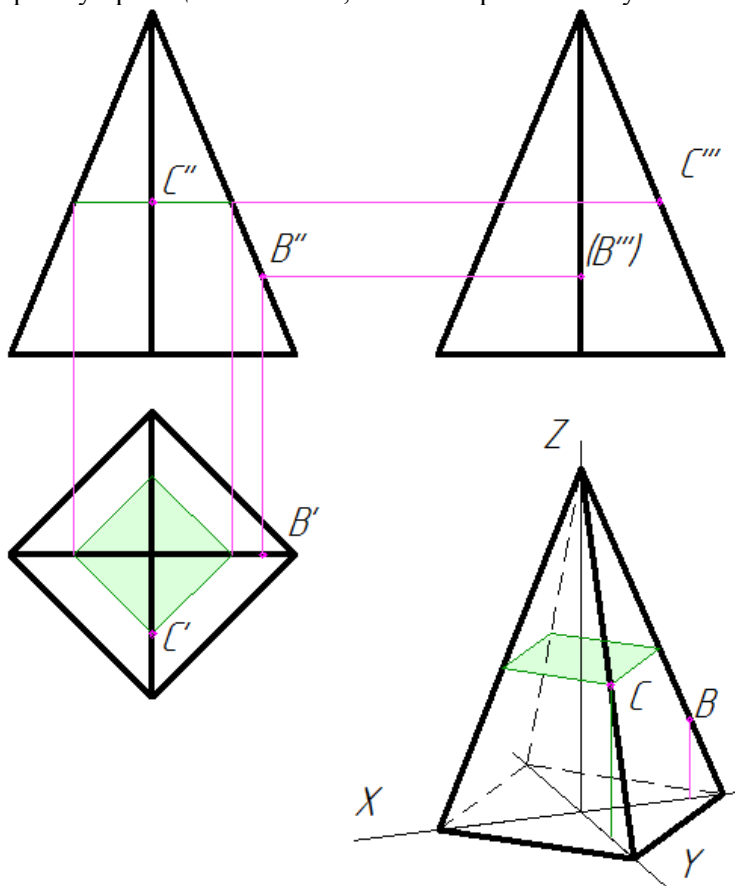


Рисунок 3.5– Побудова проекцій точок на поверхні піраміди

Щоб побудувати довільну точку A на конічній поверхні слід скористатися методом допоміжної прямої (твірної - рис. 3.7) або методом січної площини α (рис. 3.8), що дає в перетині конуса окружність, яка на горизонтальну площину проєкцій проектується без спотворень, а на фронтальну та профільну площини проєкцій в прямі лінії.

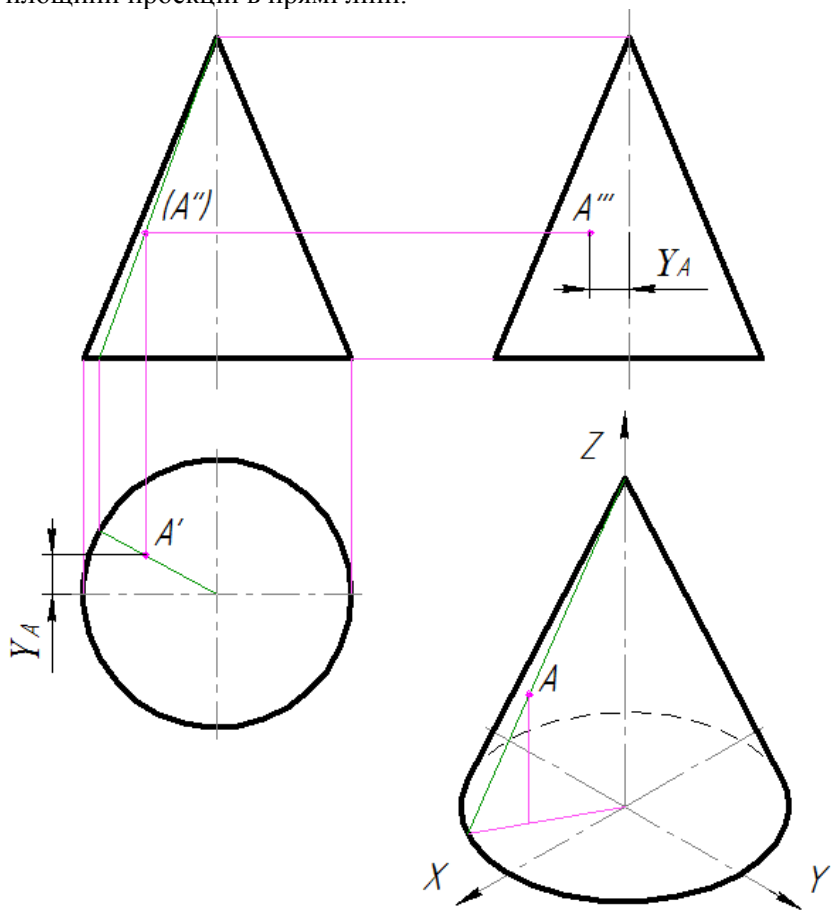


Рисунок 3.7 – Побудова проєкцій точок на поверхні конуса методом допоміжної прямої

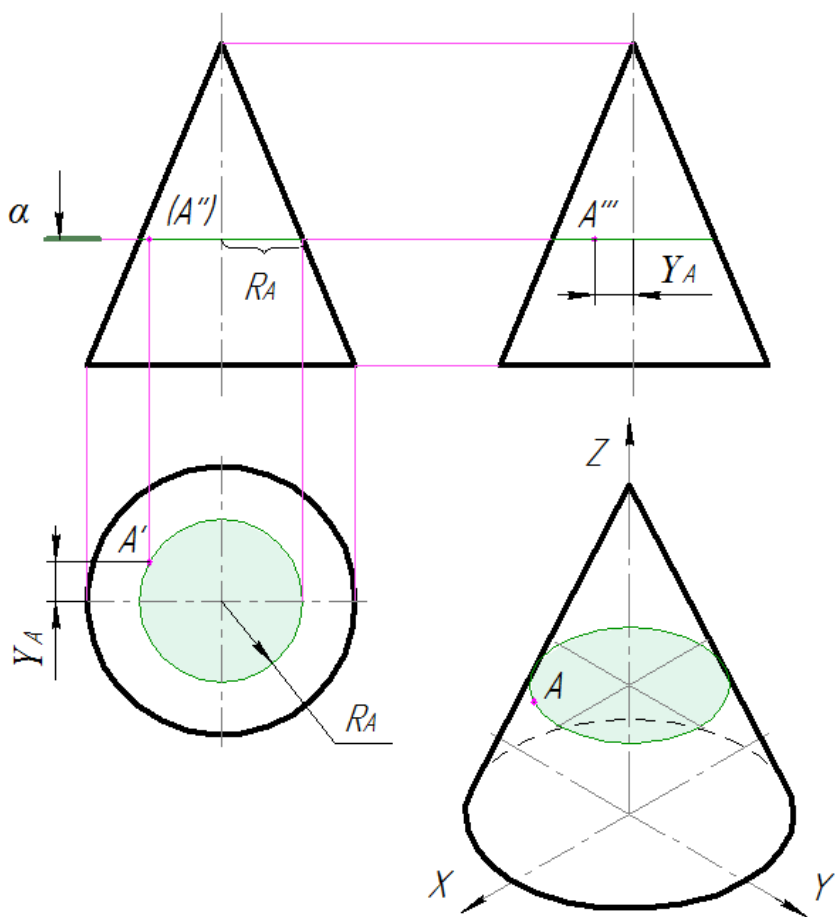


Рисунок 3.8– Побудова проекцій точок на поверхні конуса методом січної площини α

На рисунках 3.9; 3.10 надані приклади побудови проекцій точок, що лежать на обрисних твірних конуса.

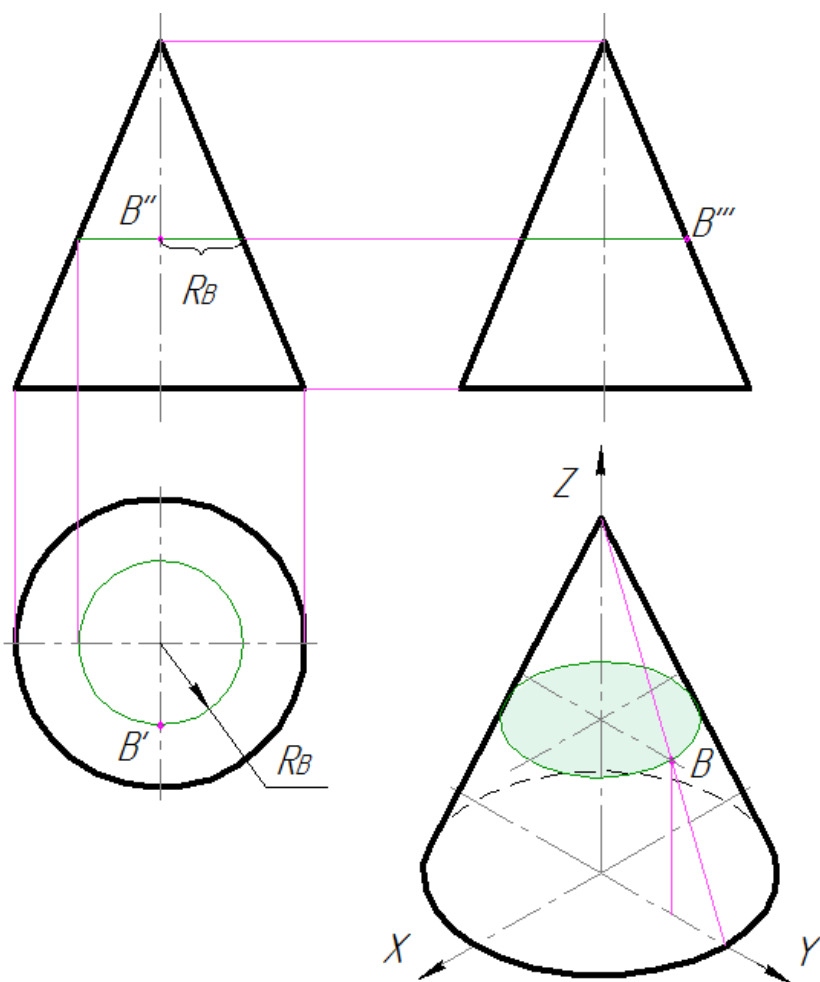


Рисунок 3.9 – Побудова проєкцій точок на поверхні конуса

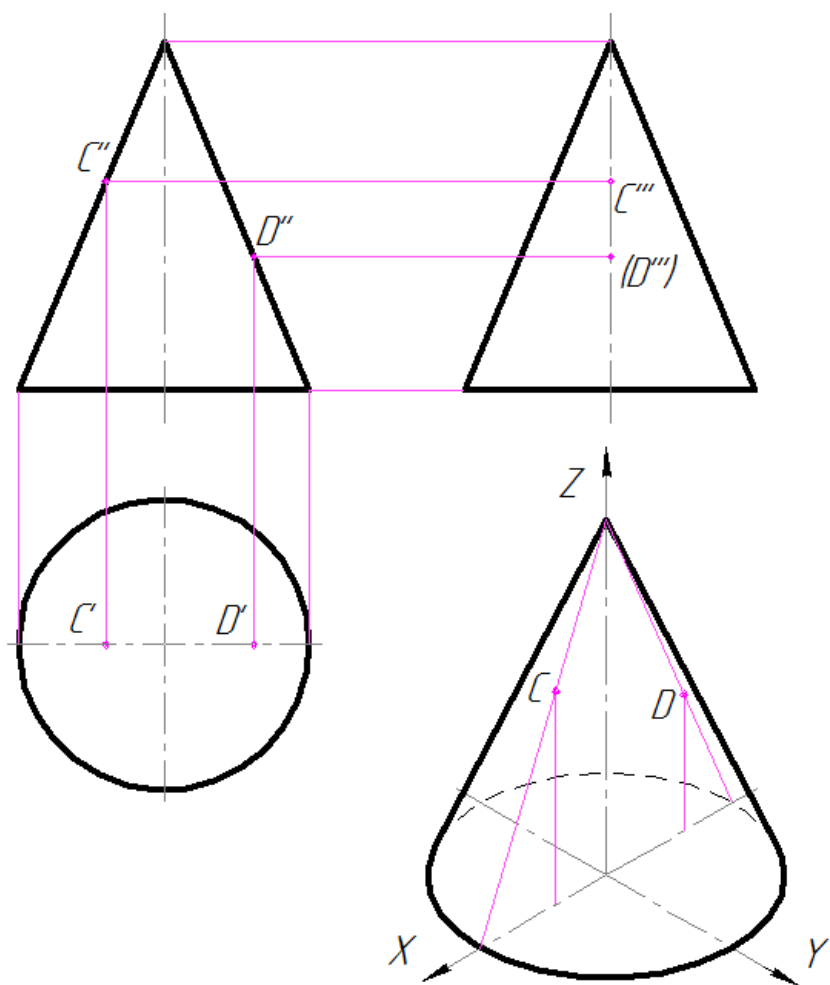


Рисунок 3.10 – Побудова проекцій точок на поверхні конуса

Точки на поверхні сфери будують за допомогою кіл, розташованих паралельно площинам проекцій (рис. 3.11-3.13).

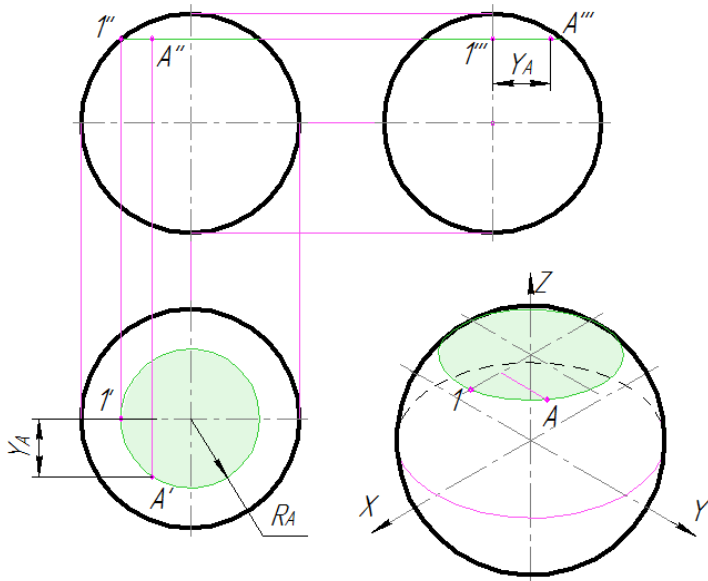


Рисунок 3.11 – Побудова проєкцій точок на поверхні сфери

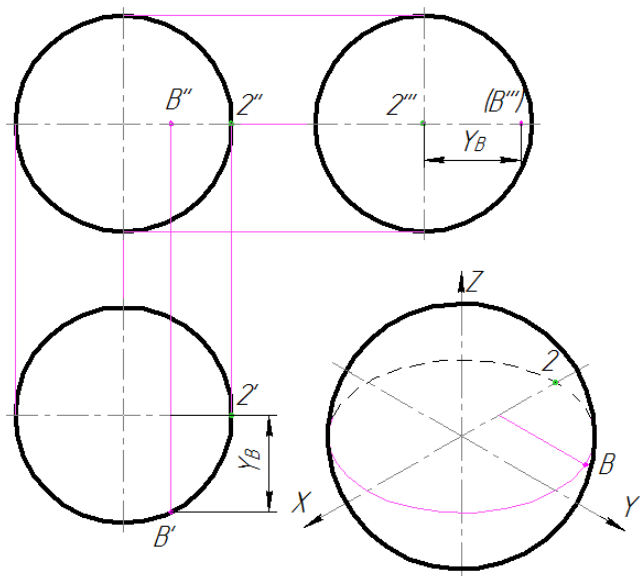


Рисунок 3.12 – Побудова проєкцій точок на поверхні сфери

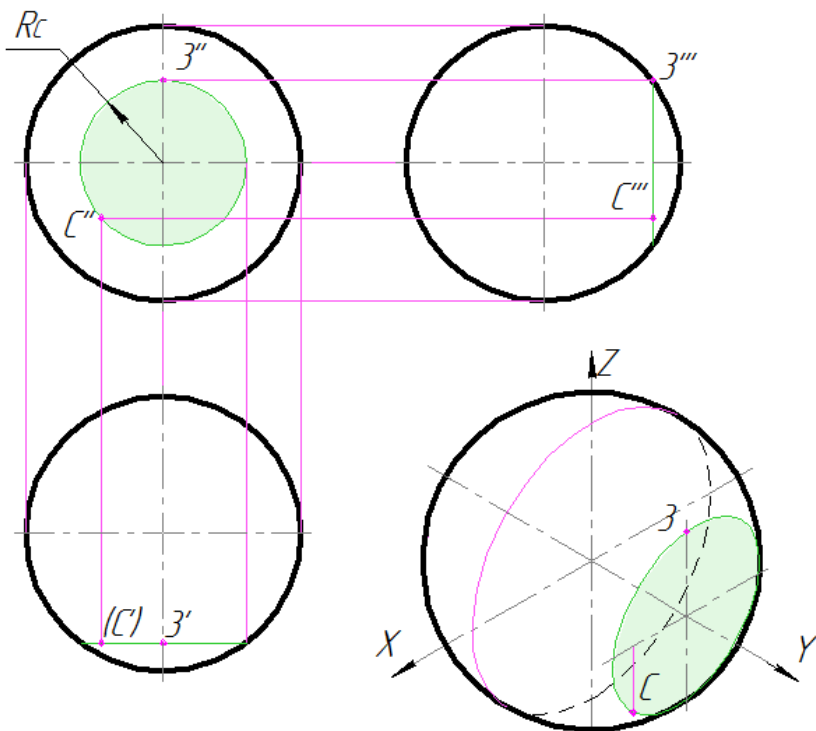


Рисунок 3.13 – Побудова проєкцій точок на поверхні сфери

4 ПЕРЕРІЗИ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ ПРОЄКЦІЮЮЧИМИ ПЛОЩИНАМИ

4.1 Загальні відомості

При перерізі поверхонь отримуються лінії, які називають лініями перерізу. Деякі лінії перерізу (наприклад, ребра багатогранників, кола основ циліндрів і конусів і таке інше) не потребують ніяких допоміжних побудов для зображення їх проєкцій. Для отримання інших ліній перерізу необхідні допоміжні побудови з використанням поверхонь-посередників, у ролі яких, як правило, використовують площини або сфери.

Серед точок ліній перерізу відрізняють опорні і проміжні. Кожну точку лінії перерізу будують на всіх необхідних проекціях і тільки після цього приступають до визначення наступної точки.

4.2 Переріз призми

Залежно від положення січної площини, в перерізі призми можна отримати:

- багатокутник, паралельний і подібний основі, якщо січна площина α паралельна основі призми (рис. 4.1, а, б);
- багатокутник, не рівний і не подібний основі, якщо січна площина β нахилена до ребер призми (рис. 4.1, а, в);
- прямокутник – для прямої призми (рис. 4.1, а, г), якщо площина γ паралельна ребрам призми.

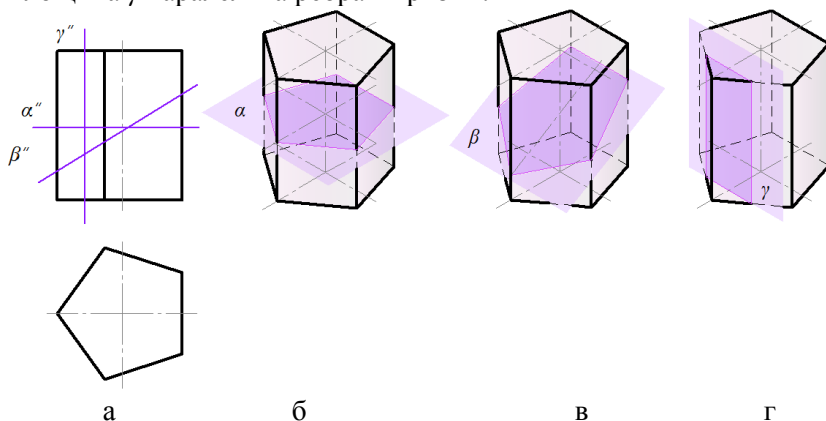


Рисунок 4.1 – Форми проекцій фігур перерізу при перерізі призми проєкційвальними площинами

На комплексному кресленні (рис. 4.2) правильна шестикутна призма перерізнана фронтально-проєкційвальною площиною $A-A$.

Фронтальна проекція фігури перерізу співпадає з фронтальним слідом січної площини $A-A$, який має збирану властивість. Проекції вершин фігури перерізу – точки $1''$, $2''$, $3''$ - визначаються на перетині фронтальних проекцій бічних ребер

призми зі слідом площини $A-A$, а точка $4''$ - на перетині фронтальних проекцій ребер верхньої основи призми з слідом січної площини $A-A$.

Горизонтальні проекції точок $1'$, $2'$, $3'$ співпадають з горизонтальними проекціями відповідних ребер, а проекції $4'$ отримують на перетині вертикальних ліній зв'язку з горизонтальною проекцією верхньої основи призми. З точок $1''$, $2''$, $3''$ проводять горизонтальні лінії зв'язку до перетину з профільними проекціями відповідних бічних ребер і отримують проекції $1'''$, $2'''$, $3'''$, а проекції $4'''$ будують координатним методом, використовуючи координати Y_4 . Отримані точки з'єднують прямими лініями і переріз заштриховують.

Побудова дійсної величини фігури перерізу зрозуміла з рисунку 4.2.

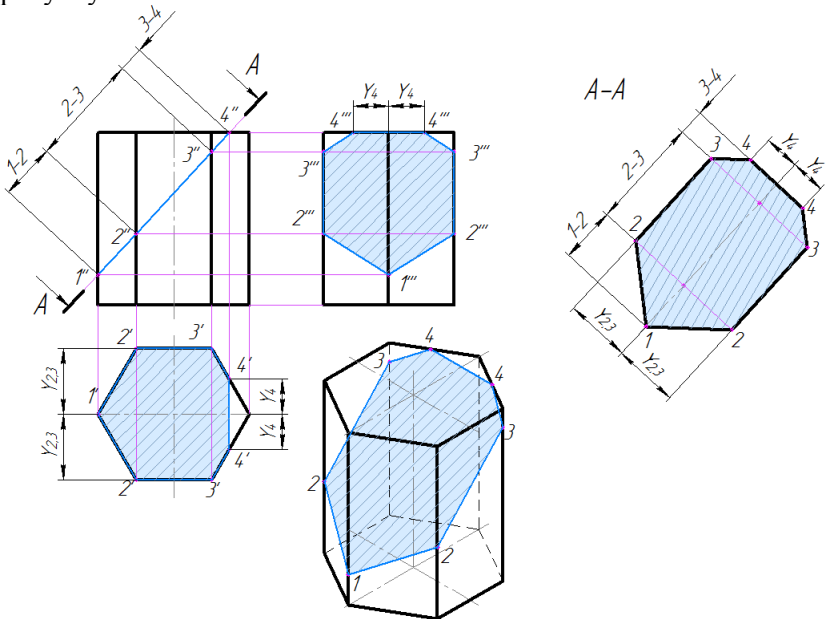


Рисунок 4.2 – Побудова проекцій фігури перерізу призми

4.3 Переріз піраміди

Залежно від положення січної площини, в перерізі піраміди можна отримати:

- фігуру подібну основі, якщо площина α розташована паралельно основі (рис. 4.3, а, б);
- багатокутник, якщо січна площина β нахилена до основи (рис. 4.3, а, в);
- трикутник (рис. 4.3, а, г) або чотирикутник (рис. 4.3, а, д), якщо площина розташована перпендикулярно до основи піраміди.

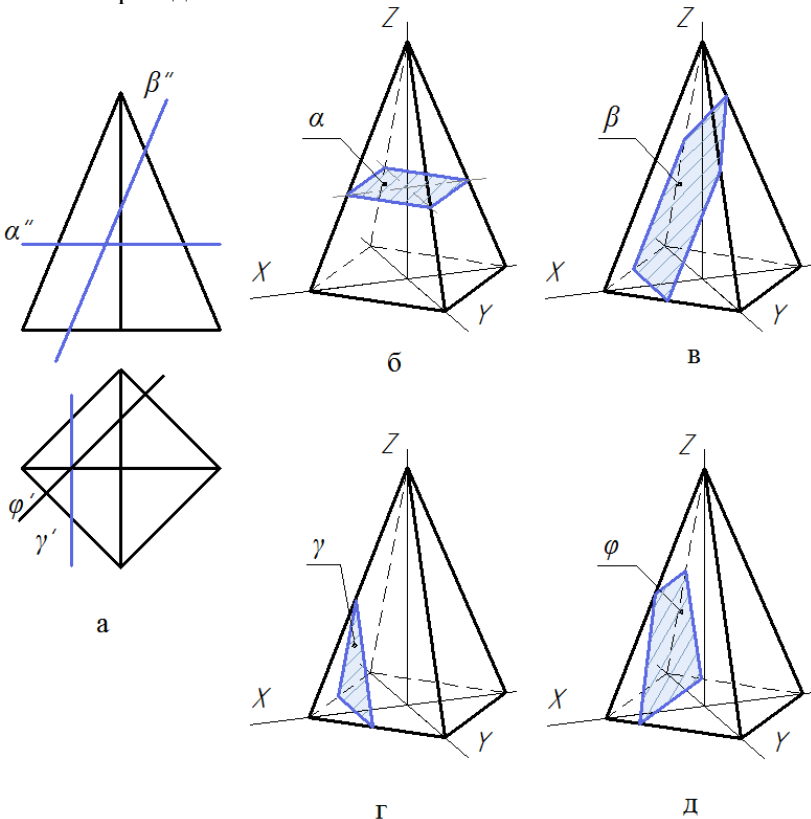


Рисунок 4.3 – Форми проєкцій фігур перерізу при перерізі піраміди

На рисунку 4.4 правильна чотирикутна піраміда перерізна фронтально-проекціовальною площиною α'' . Фронтальна проекція фігури перерізу співпадає з слідом площини α'' . Проекції точок $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ визначають на перетині сліду площини α і фронтальних проекцій відповідних ребер. Горизонтальні і профільні проекції точок $1'$, $3'$; $1'''$, $3'''$ отримують на горизонтальних та профільних проекціях відповідних ребер.

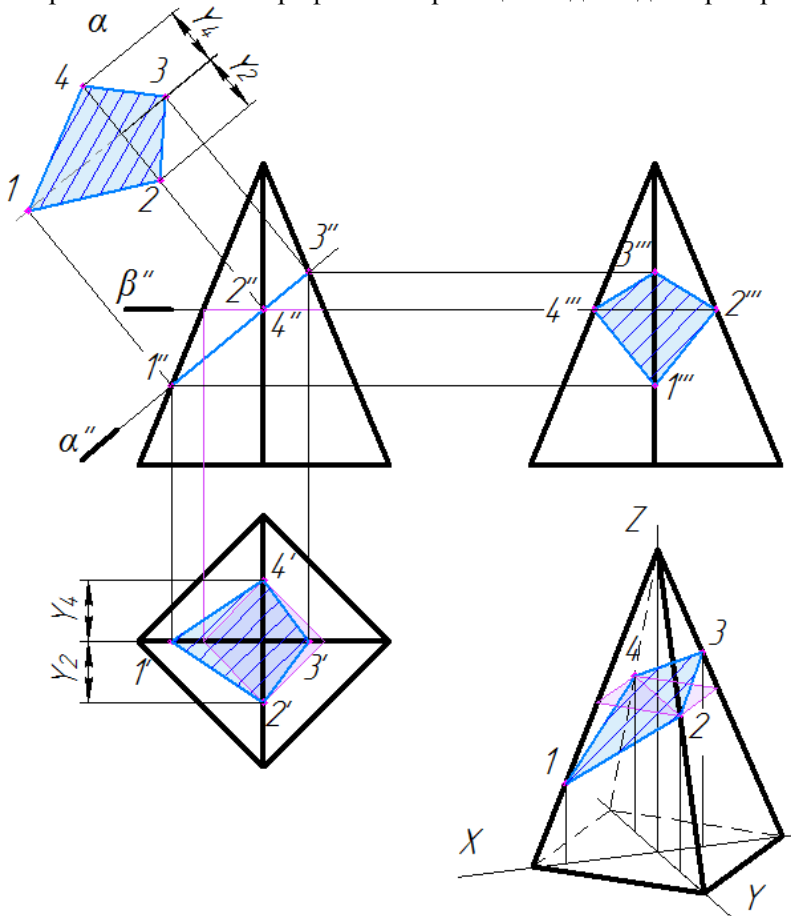


Рисунок 4.4 – Побудова проекцій фігури перерізу на піраміді

Для визначення горизонтальних проекцій точок $2'$ і $4'$ використовують допоміжну площину β'' , яку проводять через т. $2''$ і $4''$ паралельно основі піраміди (рис. 4.4). Від цієї площини на горизонтальній проекції піраміди будують фігуру перерізу, подібну основі. Вона перетинає відповідні ребра піраміди в точках $2'$ і $4'$. Для побудови профільних ($2'''$ і $4'''$) проекцій точок із $2''$ і $4''$ проводять горизонтальні лінії зв'язку на відповідні ребра.

Дійсна величина фігури перерізу визначена способом заміни площин проекцій.

4.4 Переріз циліндра

При перерізі прямого колового циліндра площиною можуть утворитися такі фігури:

- прямокутник, якщо січна площина паралельна до осі циліндра (рис. 4.5, а);
- коло, якщо площина перпендикулярна до осі (рис. 4.5, б);
- еліпс – якщо площина нахилена до осі циліндра (рис. 4.5, в).

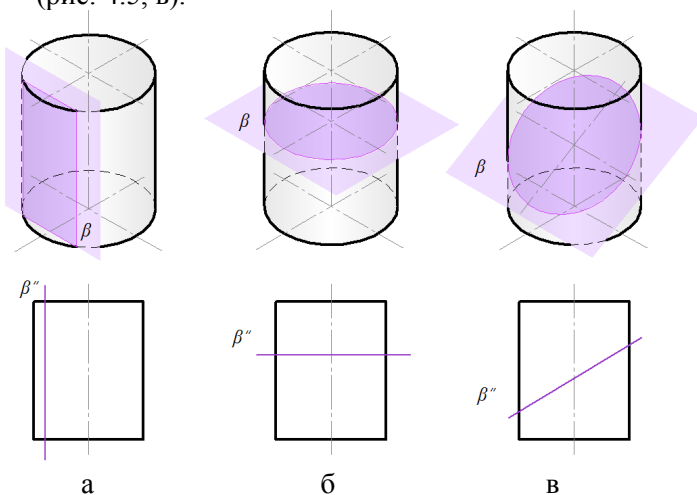


Рисунок 4.5 – Форми проекцій фігур перерізу при перерізі циліндра

На рисунку 4.6 зображено прямий коловий циліндр, який перерізано фронтально-проекціовальною площиною α'' .

Для побудови проєкцій фігури перерізу спочатку в тонких лініях виконують три проєкції циліндра і проводять слід січної площини α'' . Горизонтальну проєкцію основи циліндра розподіляють на рівні частини, наприклад, на вісім.

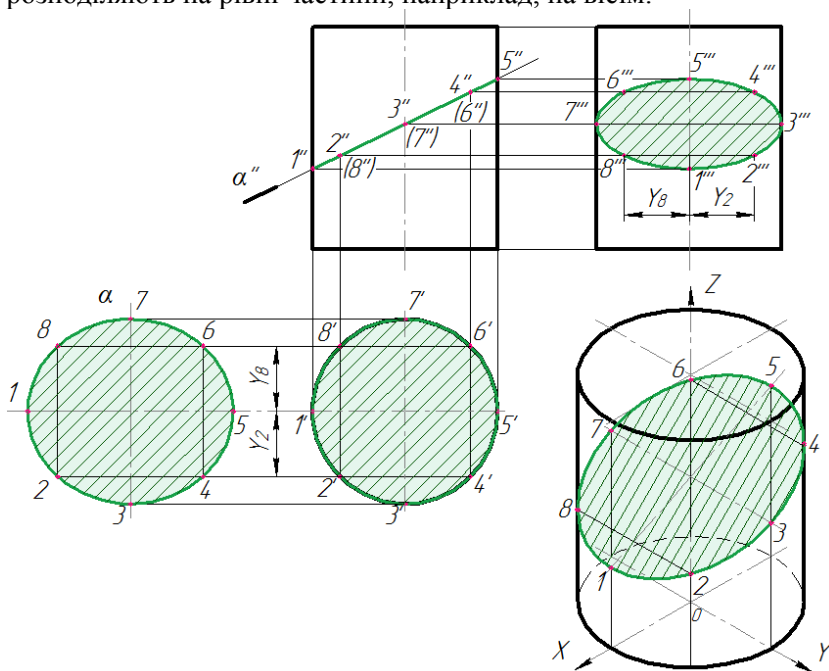


Рисунок 4.6 – Побудова проєкцій фігури перерізу на циліндрі

Точки розподілу $1'$, $2'$, $3'$, ... є горизонтальними проєкціями твірних циліндра. Проводять вертикальні лінії зв'язку до перетину з слідом α'' - отримують фронтальні проєкції $1''$, $2''$, $3''$, ... Профільні проєкції точок фігури перерізу - $1'''$, $2'''$, $3'''$, ... отримують за допомогою горизонтальних ліній зв'язку і координатного метода. Як видно з рисунку 4.6, фронтальна проєкція фігури перерізу – відрізок $1''$ - $5''$, а горизонтальна

проекція еліпса співпадає з колом (горизонтальна проекція циліндричної поверхні). Профільна проекція – еліпс.

Велика вісь еліпса – відрізок 1-5, а мала – 3-7. точки 1, 5, 3, 7 служать опорними, а між ними – проміжні точки 2, 4, 6, 8. Побудову лінії перерізу починають з визначення опорних точок кривої.

Дійсна величина фігури перерізу визначена способом плоско-паралельного переміщення.

4.5 Переріз конуса

Від напряду січної площини в перерізі конуса можуть бути отримані такі фігури (рис. 4.7):

- коло, якщо січна площина розташована паралельно основі конуса (рис. 4.7, а);
- трикутник – площина проходить через вершину конуса (рис. 4.7, б);

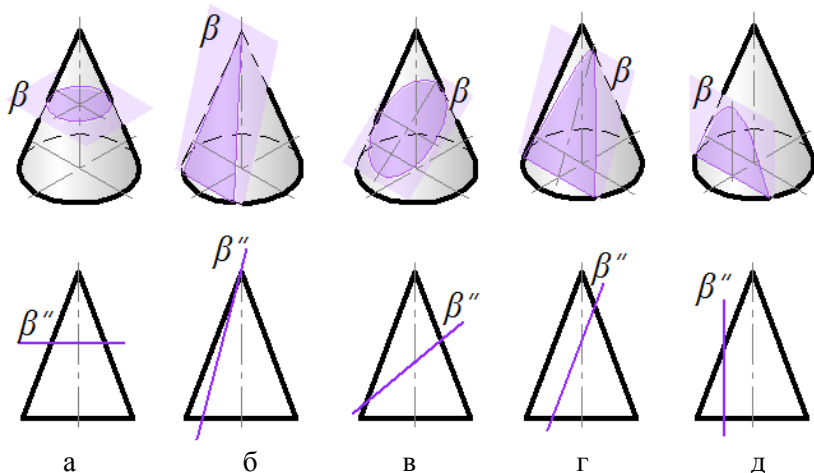


Рисунок 4.7 – Форми проекцій фігур перерізу при перерізі конуса

- повний або зрізаний еліпс, коли січна площина нахилена до осі конуса під кутом, який більше кута нахилу твірної до осі

(рис. 4.7, в). Зрізаний еліпс отримується тоді, коли площина перерізає основу конуса;

- парабола, якщо січна площина розташована паралельно твірній конуса, не проходить через його вершину і нахилена до осі конуса під кутом, який дорівнює куту нахилу твірної до осі (рис. 4.7, г);

- гіпербола – січна площина паралельна двом твірним конуса, не проходить через вершину або паралельна осі (рис. 4.7, д).

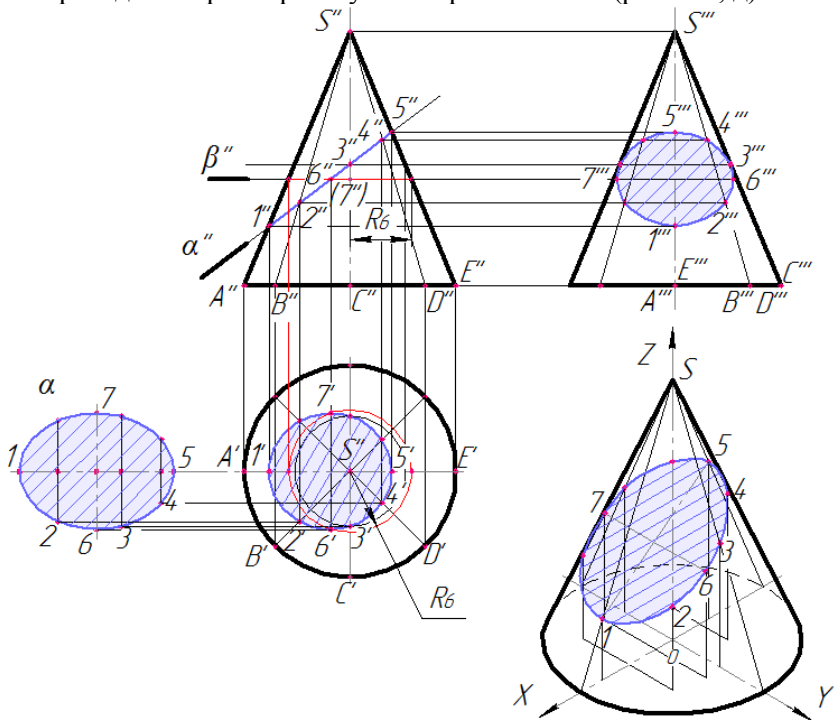


Рисунок 4.8 – Побудова проєкцій фігури перерізу на конусі

Розглянемо переріз прямого кругового конуса фронтально проєкціовальною площиною α'' (рис. 4.8).

Розділимо основу конуса на вісім частин (точки A' , B' , C' , D' , E'). Через фронтальні проєкції точок A'' , B'' , C'' , D'' , E'' і вершину S'' проводимо твірні конуса. При перерізі конуса площиною α''

отримується повний еліпс. При побудові лінії перерізу, в першу чергу, визначають її характерні точки, які є вершинами еліпса. Велика вісь еліпсу на фронтальну площину проєкцій спроектована в дійсну величину та визначається відрізком $1''-5''$. Мала вісь спроектована на площину π_2 в точку $6'' \equiv (7'')$, яка розташована на середині відрізка $1''-5''$. Горизонтальні ($1', 2', 3', \dots$) та профільні ($1''', 2''', 3''', \dots$) проєкції точок еліпсу знаходять на перетині ліній зв'язку з відповідними проєкціями твірних. Точки за допомогою лекала сполучають в плавні криві лінії.

Побудову проєкцій точок фігури перерізу можна виконувати і за допомогою допоміжних січних площин. На рисунку 4.8, наприклад, через т. $6''$ проведена горизонтальна площина β'' . Ця площина перерізає конус за колом радіуса R_6 . На горизонтальній проєкції конуса проводять коло радіусом R_6 , а з точки $6''$ вертикальну лінію зв'язку до перетину з ним у точці $6'$. Подібно можна побудувати і інші проєкції точок без проведення твірних.

Дійсна величина фігури перерізу знайдена способом плоско-паралельного переміщення (рис. 4.8).

4.6 Переріз сфери

При перерізі сфери будь-якою площиною утворюється коло. Від положення січної площини це коло буде спроекційоване:

- в дійсну величину (рис. 4.9, а), якщо площина паралельна площині проєкцій ($\alpha // \pi_1$);
- в пряму лінію (рис. 4.9, а), якщо площина перпендикулярна площині проєкцій ($\alpha \perp \pi_2$);
- еліпс, якщо січна площина, нахилена відносно площини проєкцій (β'' нахилена відносно π_2 , рис. 4.9, б).

Розглянемо побудову фігури перерізу сфери фронтально-проєкціовальною площиною α'' . В перерізі утворюється коло, фронтальна проєкція якого співпадає зі слідом січної площини α'' . На площину π_1 коло проєкціюється як еліпс (рис. 4.10).

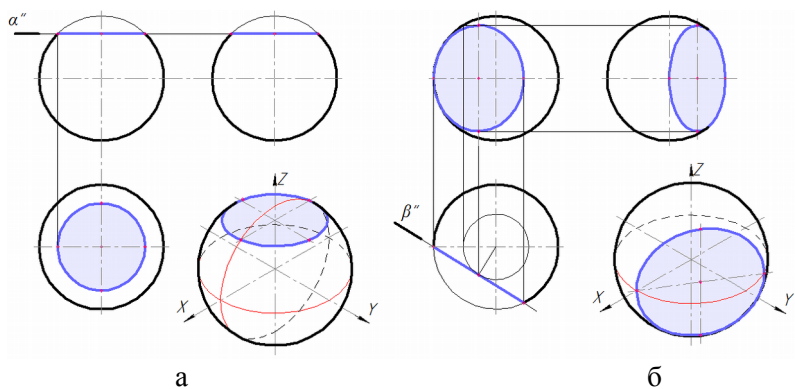


Рисунок 4.9 – Форми проєкцій фігур перерізу при перерізі сфери

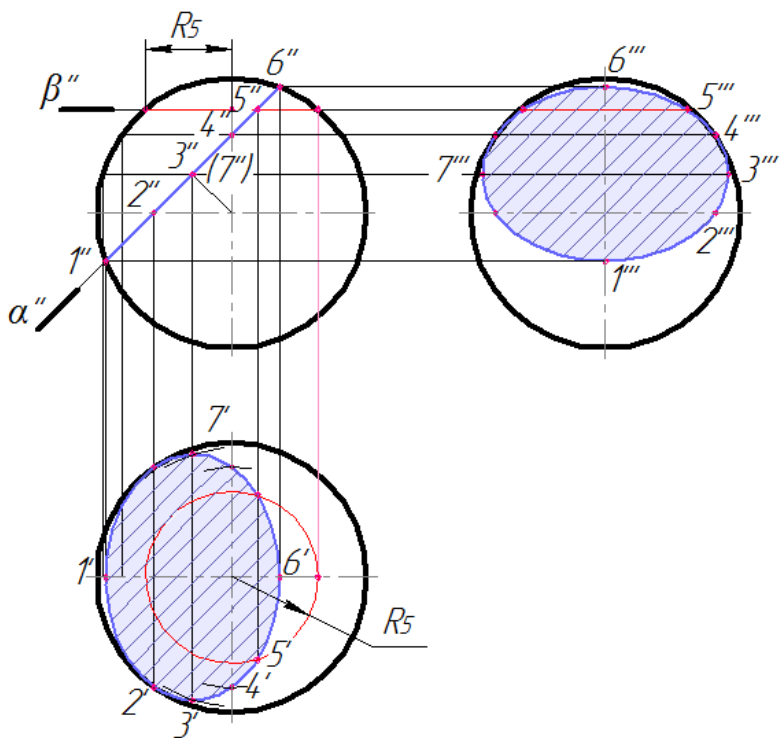


Рисунок 4.10 – Побудова проєкцій фігури перерізу на сфері

Для побудови фігури перерізу сфери призначають спочатку характерні точки, які є вершинами еліпса. Мала вісь еліпса - це відрізок $1''-6''$, який співпадає з фронтальним слідом площини α'' . Велика вісь еліпса – перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій π_2 , тому проєкціюється на цю площину у точки $3'',(7'')$, які лежать на середині відрізка $1''-6''$.

Горизонтальні проєкції точок $1', 2', 6'$ будують за допомогою вертикальних ліній зв'язку. Для побудови горизонтальних проєкцій точок $3', 4', 5'$ проводять (наприклад, для точки 5) допоміжну січну площину β'' , яка перерізає сферу за колом радіусом R_5 . Перетин горизонтальної проєкції цього кола з лінією зв'язку дасть проєкцію точки $5'$. Подібно будується і точки $3', 4'$. За двома проєкціями визначають профільну проєкцію фігури перерізу.

Дійсна величина фігури перерізу від площини α'' є коло, діаметр якого дорівнює відрітку $1''-6''$.

5 ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ

5.1 Загальні принципи розв'язування задач

Пряма, яка перетинає поверхню, має звичайно з цією поверхнею дві спільні точки: точку входу і точку виходу. Визначення таких точок засновано на проведенні через задану пряму допоміжної площини, знаходження фігури перерізу і визначення точок перетину прямої з побудованою фігурою перерізу.

5.2 Побудова точок перетину прямих ліній із поверхнями

5.2.1 Точки перетину прямої з призмою

В окремому випадку, коли поверхня, з якою перетинається пряма, перпендикулярна одній із площин проекцій, точки перетину визначаються без додаткових побудов. Так, наприклад, точки K і F перетину прямої DC з бічними гранями трикутної призми (рис. 5.1) проєкціюються на площину π_1 в точки K' і F' перетину горизонтальних проєкцій двох передніх граней призми з проєкцією $D'C'$ прямої DC . Фронтальні проєкції точок K'' , F'' визначаються за допомогою ліній зв'язку.

На рисунку 5.1 показана також побудова точок E і L перетину прямої AB з поверхнею призми.

5.2.2 Точки перетину прямої з пірамідою

На рисунку 5.2 зображені приклади побудов точок перетину прямих окремого положення: A – фронтально-проєкціовальної; B – горизонтальної; C – горизонтально-проєкціовальної.

Для побудови точок перетину (3, 4) прямої A використана допоміжна площина α'' ; точок (1, 2) перетину прямої B – площина β'' ; точок (5, 6) прямої C – площина γ'' .

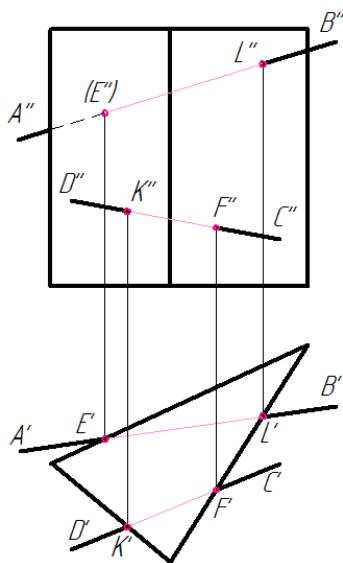


Рисунок 5.1 – Перетин прямих ліній із поверхнею призми

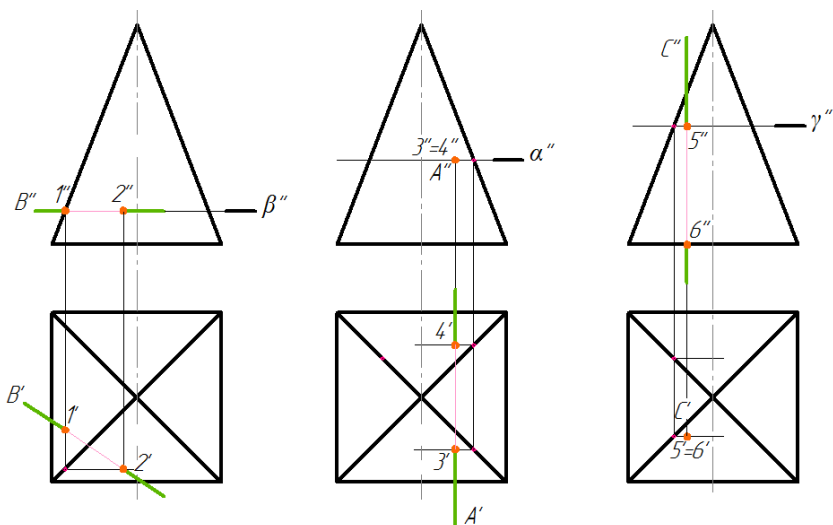


Рисунок 5.2 – Перетин прямих окремого положення із поверхнею піраміди

На рисунку 5.3 пряма AB займає загальне положення. Проводимо через неї фронтально - проєкціовальну площину α'' і будуємо лінію її перерізу з заданою пірамідою. Там, де пряма перетинає лінію перерізу піраміди з площиною α , і будують точки K' і N' . За допомогою ліній зв'язку отримуємо проєкції K'' і N'' - точок перетину AB і піраміди.

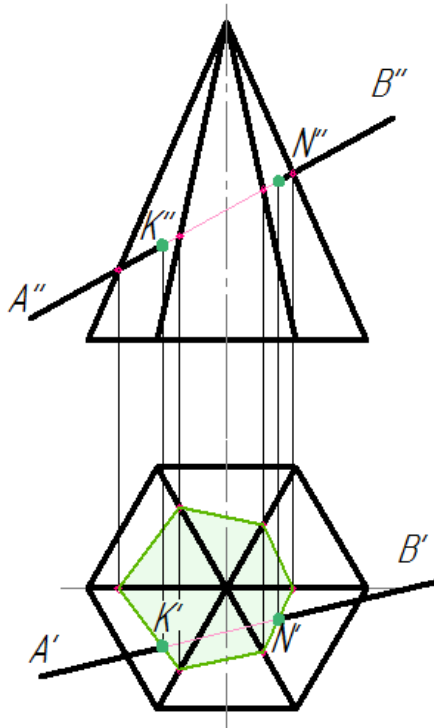


Рисунок 5.3 – Перетин прямих загального положення з поверхнею піраміди

5.2.3 Точки перетину прямої з циліндром

Точки перетину D, F прямої AB (точки K, L прямої CS) з поверхнею прямого циліндра, вісь якого розташована перпендикулярно площині проєкцій π_1 , будуються без додаткових побудов (рис. 5.4).

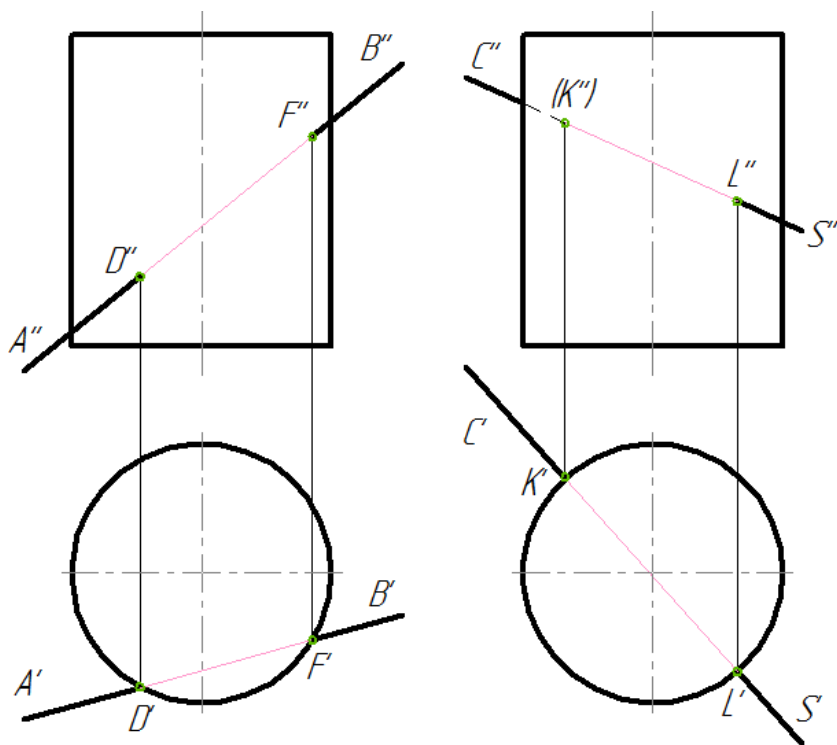


Рисунок 5.4 – Перетин прямої лінії з поверхнею циліндра

5.2.4 Точки перетину прямої з поверхнею сфери

На рисунку 5.5 зображено побудову точок перетину прямої окремого положення зі сферою. У прикладі пряма D – горизонталь. Проводимо через пряму D допоміжну горизонтальну площину α'' , яка перерізає сферу колом.

Точки B' і F' отримуємо при перетині горизонтальних проекцій площини α (коло) і прямої D' . Фронтальні проекції B'' і F'' – за допомогою ліній зв'язку.

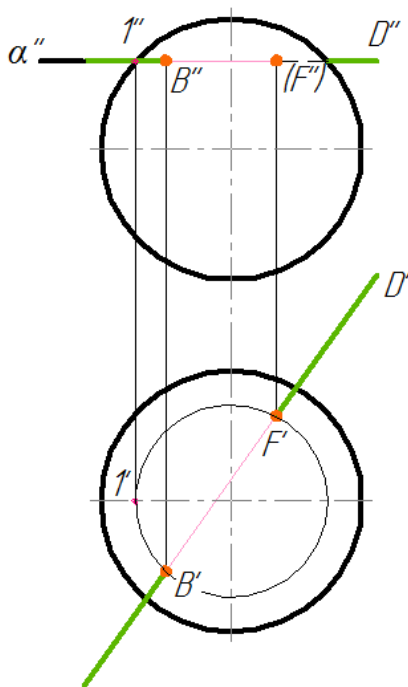


Рисунок 5.5 – Перетин прямих ліній окремого положення з поверхнею сфери

На рисунку 5.6 показано, як можна за допомогою допоміжної площини будувати точки перетину прямої загального положення АВ зі сферою.

Через задану пряму АВ проведено горизонтально-проекціювальну площину α' , що перерізає сферу по колу, фронтальна проекція якого – еліпс (заштрихована площина). Фронтальні проекції точок перетину (M'' , K'') отримуємо при перетині проекцій еліпса і прямої $A''B''$. Горизонтальні – за допомогою ліній зв'язку (M' , K').

Побудову точок К, М перетину прямої загального положення АВ (рис.5.7) з поверхнею сфери визначають за допомогою методу заміни площин проекцій.

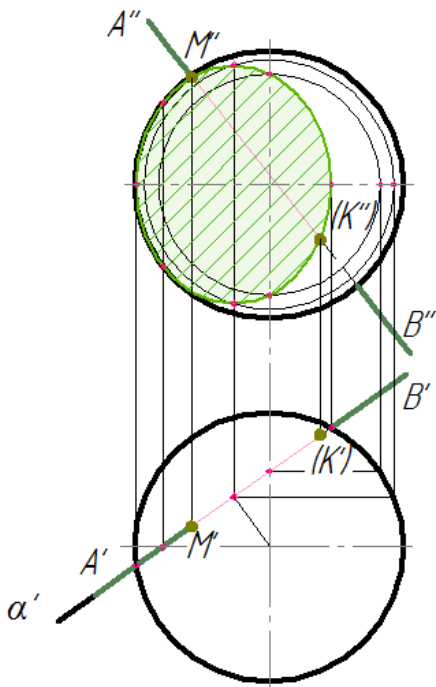


Рисунок 5.6 – Приклад побудови проекцій точок перетину прямої лінії загального положення з поверхнею сфери

Замість площини проекції π_2 , вводять додаткову площину π_4 , паралельну площині α , яка утворює з площиною π_1 нову систему площин проекцій π_1/π_4 . На площину π_1 фігура перерізу площини α і сфери (коло) спроекціюється в дійсну величину. Будемо нову проекцію заданої прямої AB у новій системі площин проекцій $\pi_1/\pi_4 - A^{IV}, B^{IV}$.

Для побудови проекцій точок A^{IV}, B^{IV} використовують координати Z проекцій точок $A''; B''$. З'єднують проекції A^{IV}, B^{IV} прямою лінією і відмічають точки її перетину (M^{IV} і K^{IV}) з колом фігури перерізу, радіус якої дорівнює R_1 . Потім знаходять проекції K' і M' і $K''M''$.

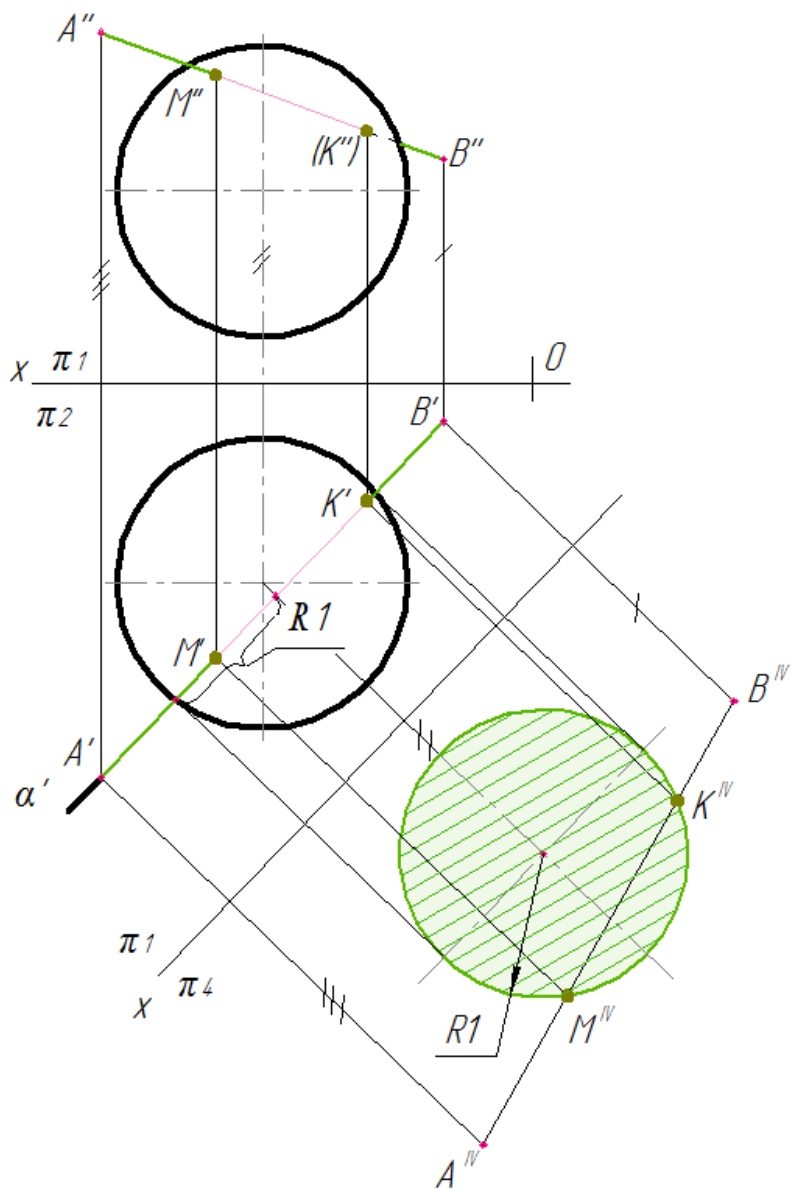


Рисунок 5.7 – Приклад побудови проєкцій точок перетину прямої лінії загального положення з поверхнею сфери

5.2.5 Точки перетину прямої з конусом

На рисунку. 5.8 наведено приклад побудови перетину прямих окремого положення з конусом:

– пряма C – горизонталь (рис.5.8, а). Через пряму C – проведено допоміжну горизонтальну площину γ'' , яка перерізає конус за колом. На горизонтальній проекції лінія фігури перерізу площини γ з конусом (коло) перетинається з заданою прямою в точках A' і N' , які і є точки перетину прямої з конусом. За лініями зв'язку отримують проекції точок A'' , N'' .

– пряма H – горизонтально-проекціювальна (рис.5.8,б). Для побудови точки перетину прямої H з конусом використана твірна. Спочатку будують горизонтальну проекцію твірної ($S'1'$), а потім її фронтальну проекцію, яка перетинає задану пряму в т. L'' – фронтальній проекції точки перетину прямої H з поверхнею конуса.

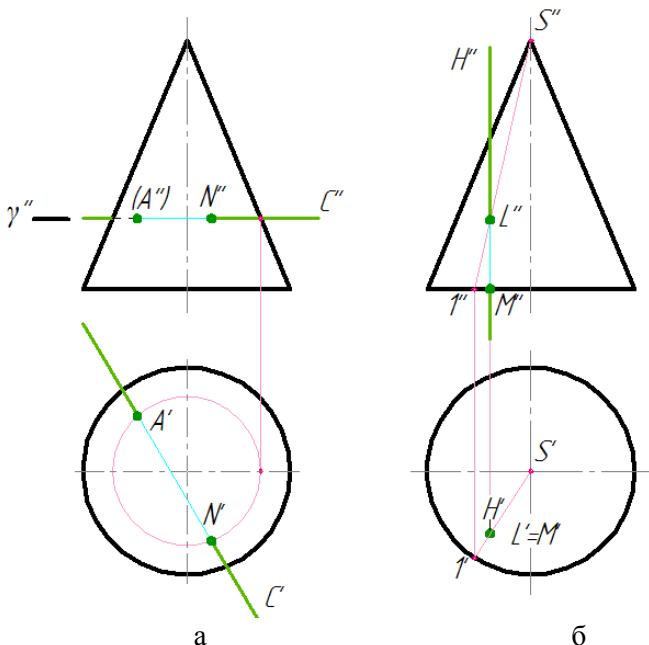


Рисунок 5.8 – Перетин прямих окремого положення з поверхнею конуса

При перетині конуса прямою лінією загального положення розв'язування задачі виконують двома способами:

– за допомогою допоміжної площини загального положення α (рис.5.9), що проходить через вершину і задану пряму лінію АВ та перерізає його за прямими лініями;

– за допомогою проєкціувальної площини. На рисунку 5.10 застосована фронтально-проєкціувальна площина β'' .

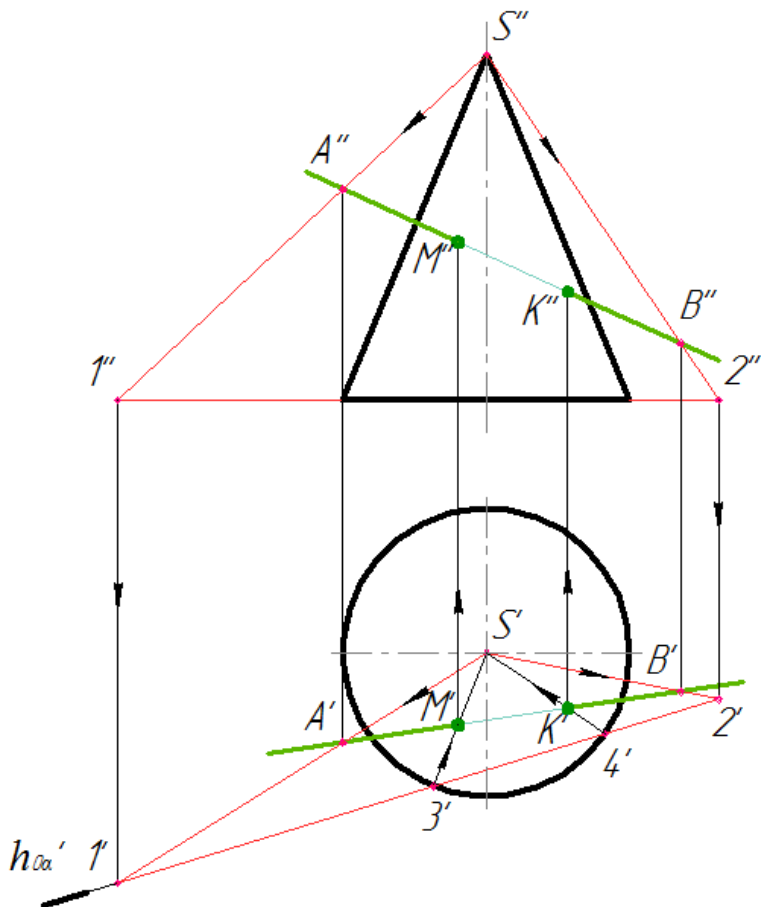


Рисунок 5.9 – Приклади побудови проекцій точок перетину
прямої лінії загального положення з поверхнею конуса

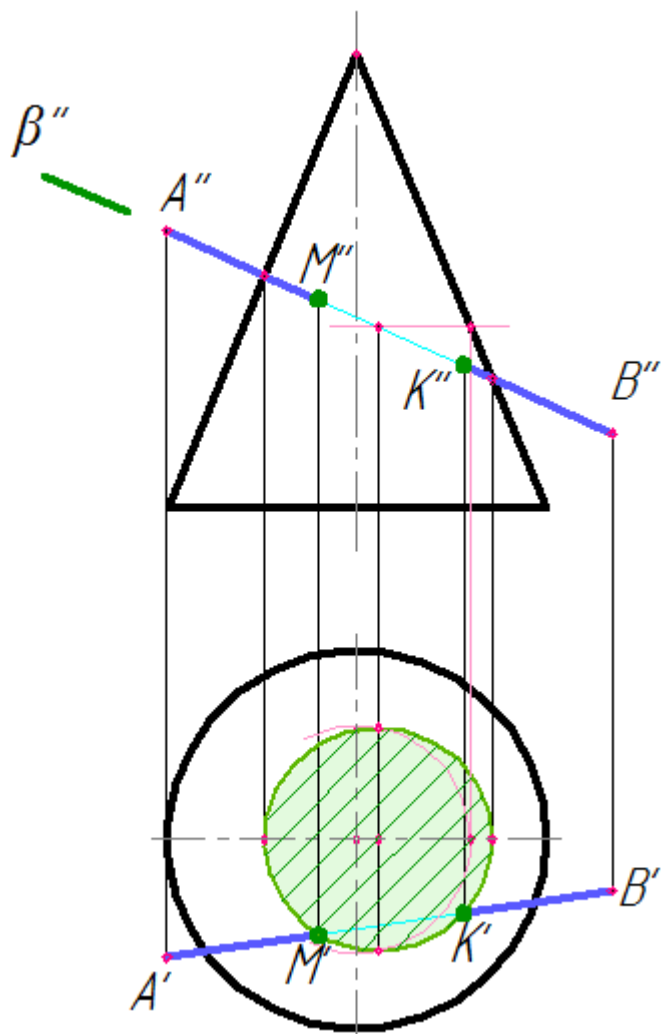


Рисунок 5.10 – Приклади побудови проекцій точок перетину
прямої лінії загального положення з поверхнею конуса

6. ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНОГО ЗАВДАННЯ

6.1 Призма з отвором

Завдання:

- за двома заданими (фронтальною та горизонтальною) проєкціями шестиграної призми з наскрізним отвором побудувати профільну проєкцію (рис. 6.1, а);
- побудувати натуральну фігуру перерізу горизонтально-проектувальною або фронтально-проектувальною площиною;
- побудувати аксонометричне зображення шестиграної призми з наскрізним отвором.

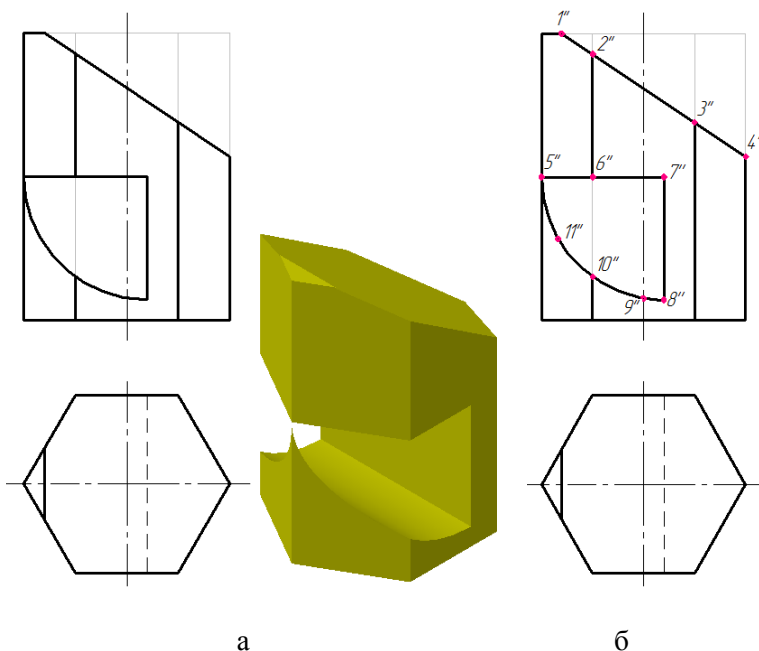


Рисунок 6.1 – Завдання до прикладу «Призма з отвором»

Побудову (рис. 6.1, б) починають з визначення точок на зрізі (точки $1'' - 4''$) та на отворі (точки $5'' - 11''$). Будують профільну проекцію призми.

Точка $1''$ лежить на верхній основі призми (рис. 6.2), тому горизонтальну проекцію $1'$ шукають за допомогою лінії зв'язку. Профільну проекцію $1'''$ будують відкладанням координати y_1 , яку вимірюють з горизонтальної проекції.

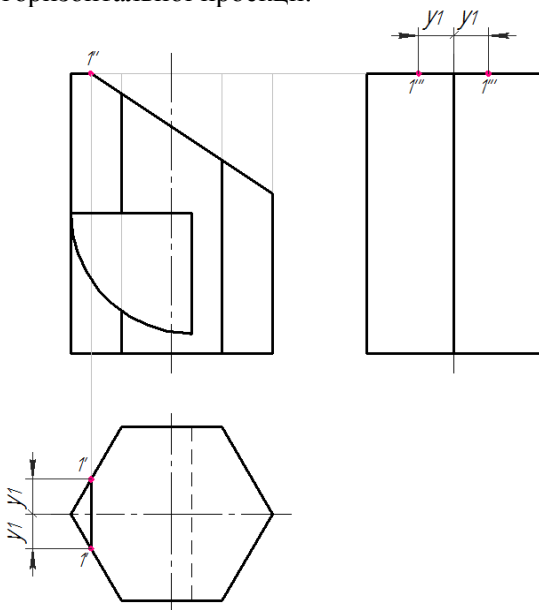


Рисунок 6.2 – Побудова проекцій точки 1

Точки $2''$, $6''$, $10''$ (рис. 6.3) та точки 3 , 4 , 5 (рис. 6.4) лежать на ребрах призми, тому горизонтальні та профільні проекції цих точок знаходять на горизонтальних та профільних проекціях відповідних ребер призми.

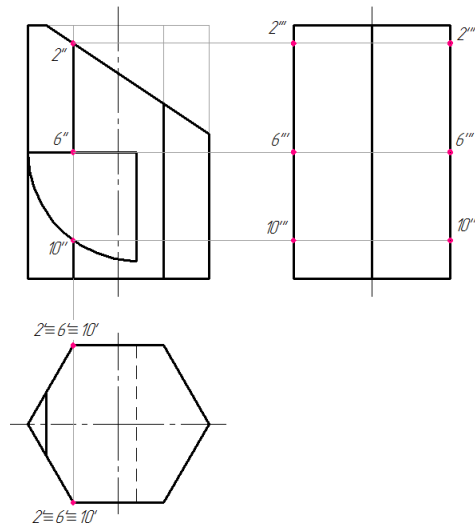


Рисунок 6.3 – Побудова проекцій точок 2,6,10

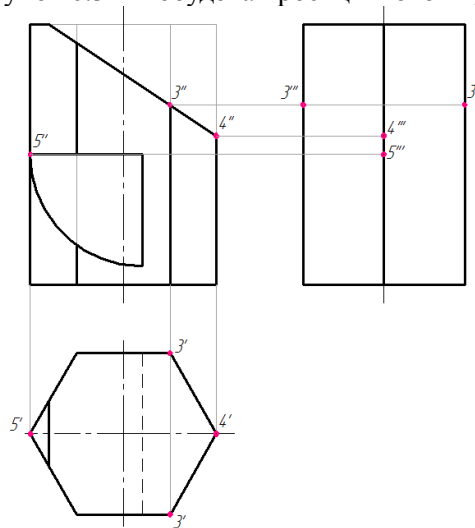


Рисунок 6.4 – Побудова проекцій точок 3,4,5

Точки 7'', 8'' (рис 6.5) та точки 9'', 11'' (рис. 6.6) лежать на гранях призми, тому горизонтальні та профільні проекції цих

точок знаходять на горизонтальних та профільних проекціях граней.

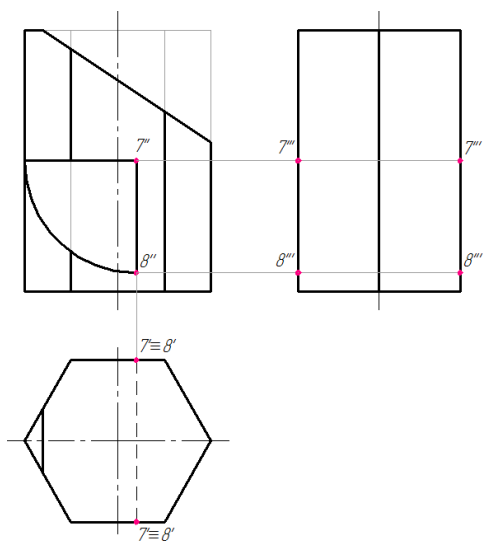


Рисунок 6.5 – Побудова проекцій точок 7,8

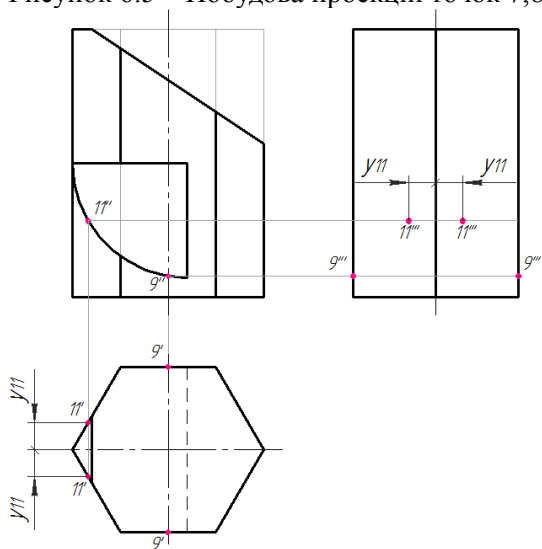


Рисунок 6.6 – Побудова проекцій точок 9,11

Профільну проекцію зрізаної призми з отвором (рис 6.7) отримують послідовним з'єднанням профільних проекцій всіх точок.

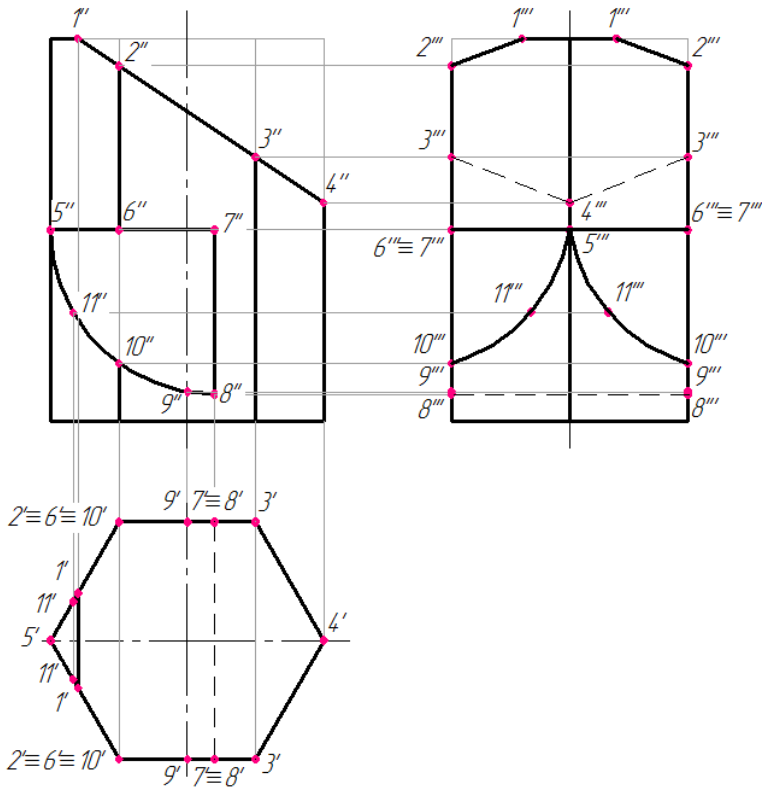


Рисунок 6.7 – Побудова профільної проекції призми

Побудову перерізу А-А фронтально-проектувальною площиною (рис. 6.8,а) починають з визначення точок на лінії перерізу (рис. 6.8,б).

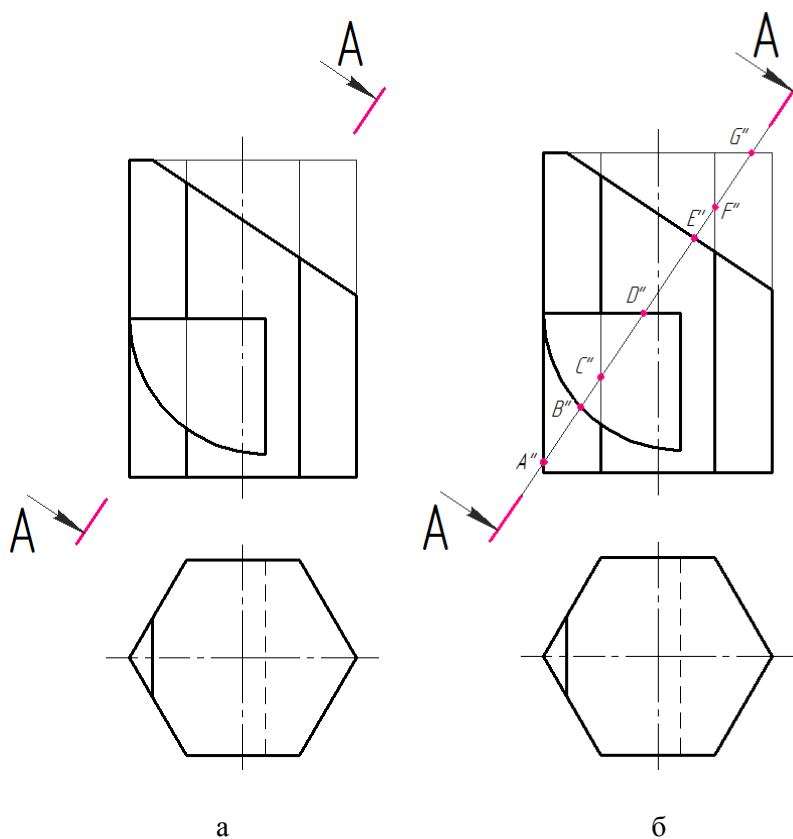


Рисунок 6.8 – Визначення точок на лінії перерізу призми

Спочатку визначаються горизонтальні проекції зазначених точок (рис. 6.9,а), які визначають горизонтальну проекцію фігури перерізу (рис. 6.9,б).

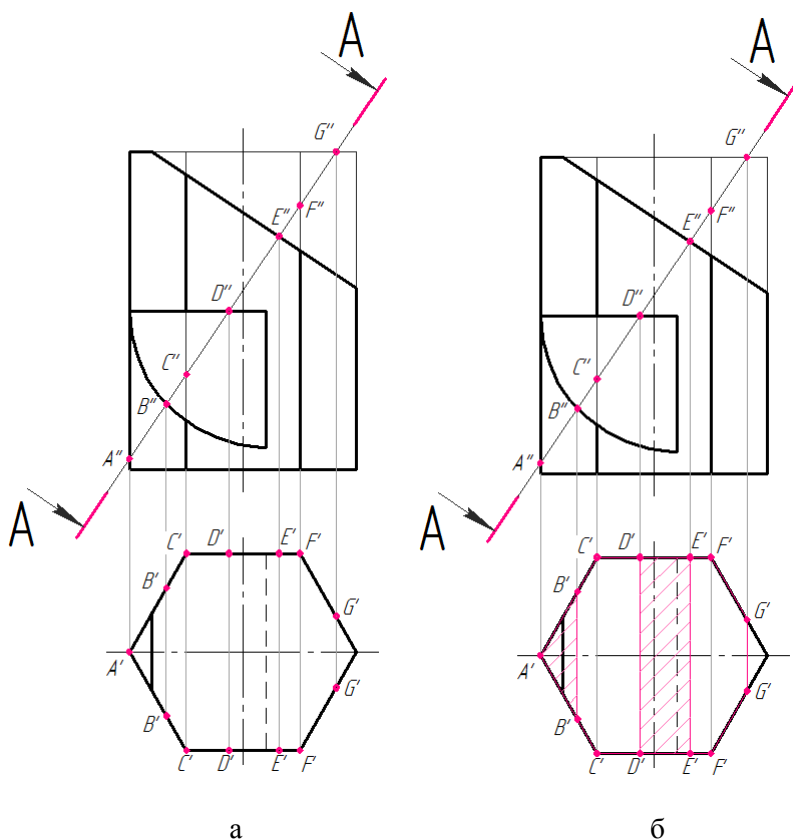


Рисунок 6.9 – Визначення горизонтальної проекції фігури перерізу призми

Побудова дійсної величини фігури перерізу дана на рисунках 6.9, 6.10.

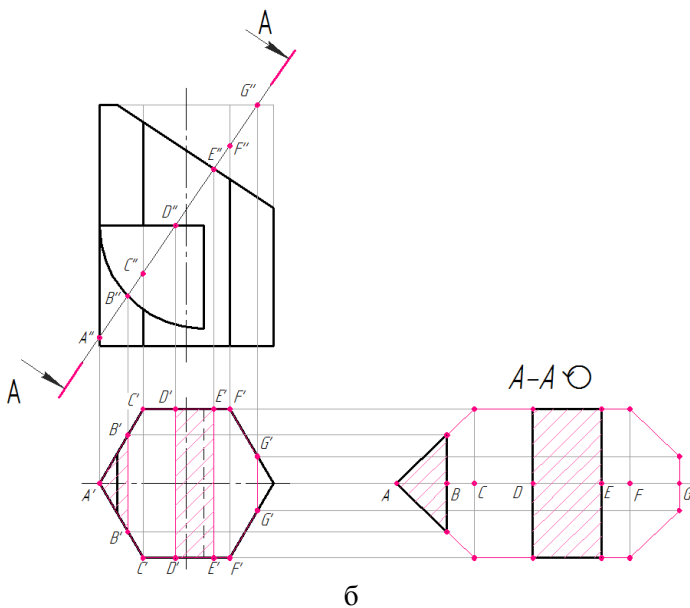
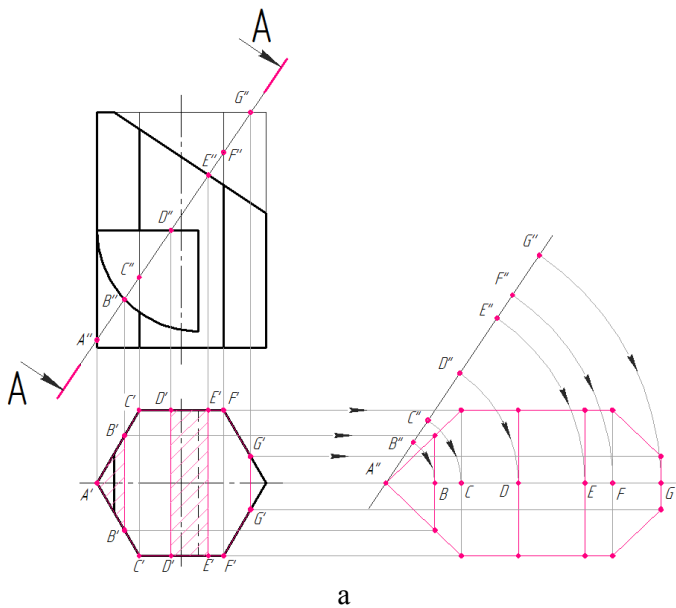


Рисунок 6.10 – Визначення дійсної фігури перерізу призми

Аналогічно виконують побудову перерізу Б-Б (рис. 6.11,а,б), горизонтально-проектувальною площиною. Визначають точки на лінії перерізу.

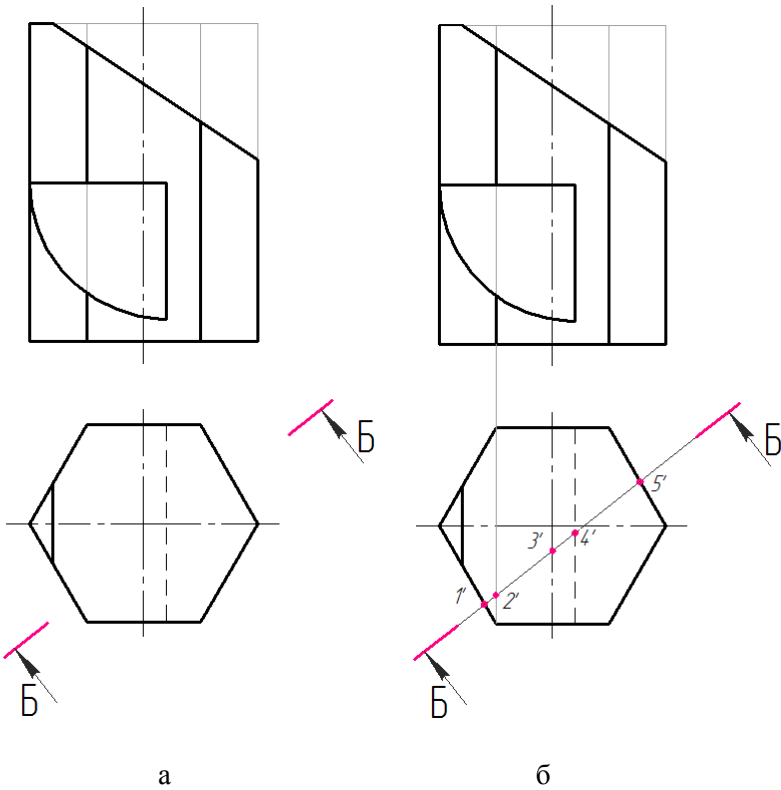


Рисунок 6.11 – Визначення точок лінії перерізу призми

Далі визначаються фронтальні проекції зазначених точок (рис. 6.12,а), які визначають фронтальну проекцію фігури перерізу (рис. 6.12,б).

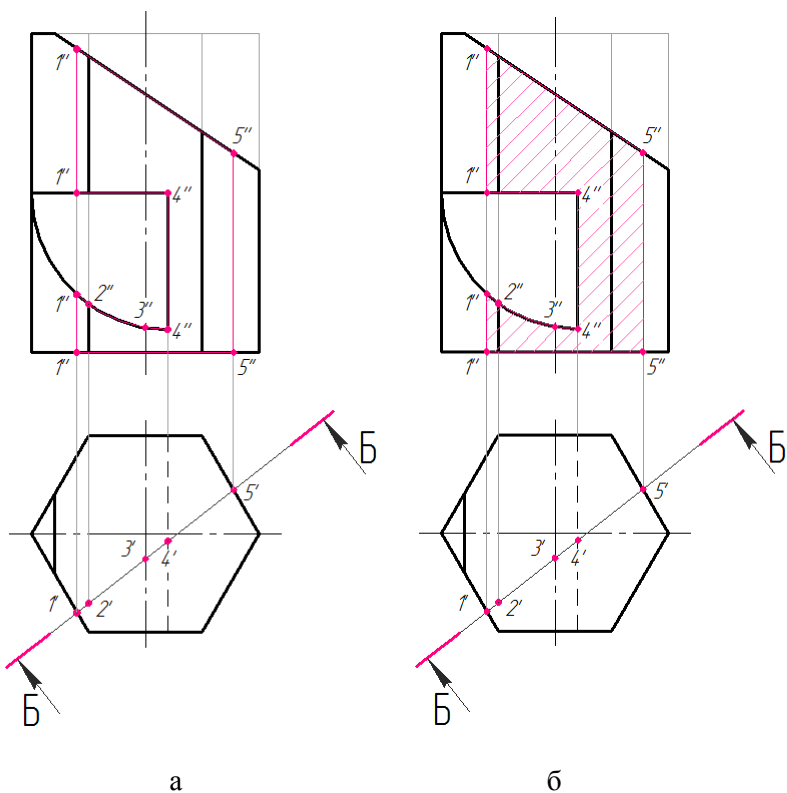


Рисунок 6.12 – Визначення фронтальної проекції фігури перерізу призми

На рисунках 6.13 – 6.15 подана послідовність побудови дійсної фігури перерізу.

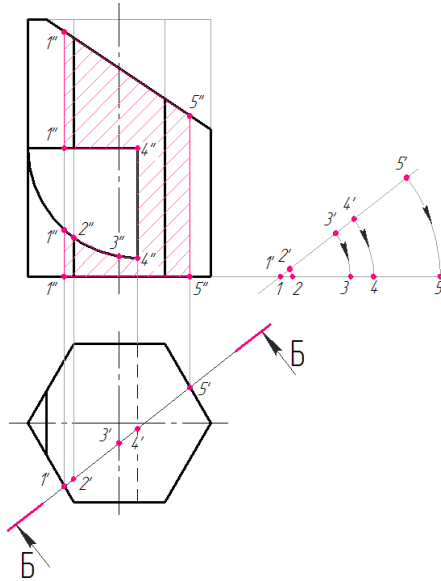


Рисунок 6.13 – Визначення дійсної фігури перерізу призми

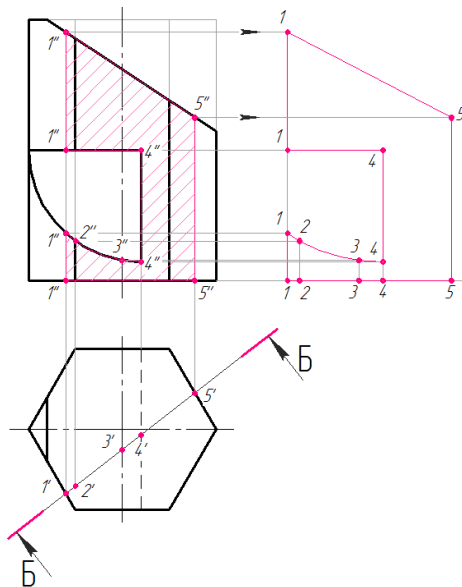


Рисунок 6.14 – Визначення дійсної фігури перерізу призми

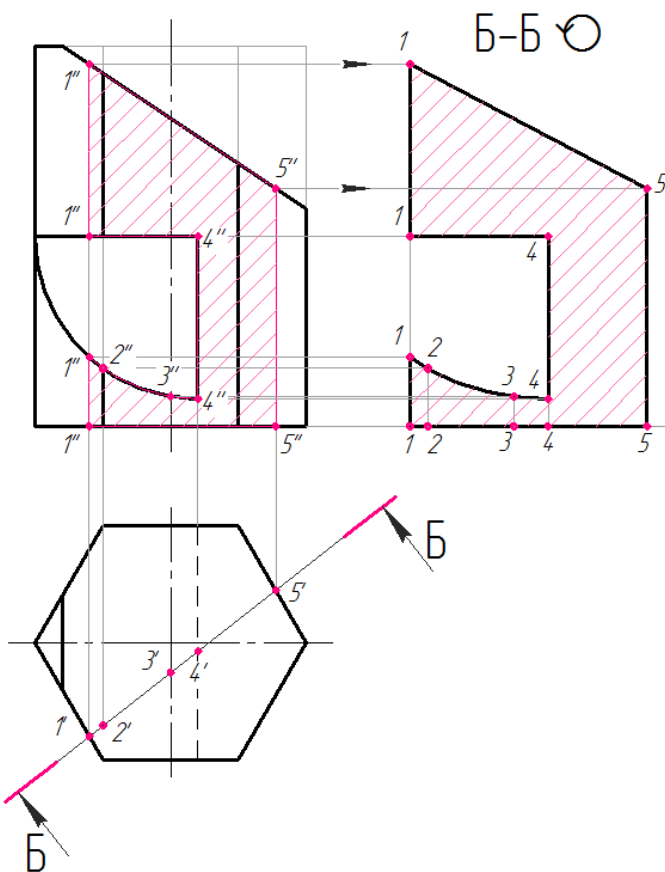


Рисунок 6.15 – Визначення дійсної фігури перерізу призми

Аксонетричне зображення призми будується у прямокутній ізометрії, аксонетричні осі якої утворюють між собою кут 120° (рис. 6.16).

Починають з побудови нижньої основи призми – шестикутника (рис. 6.17 – 6.21). Верхня основа призми будується підняттям вершин нижньої основи на висоту призми (рис. 1.22 – 1.23).

Побудову ізометрії точок виконують координатним методом (рис. 1.24 – 1.30).

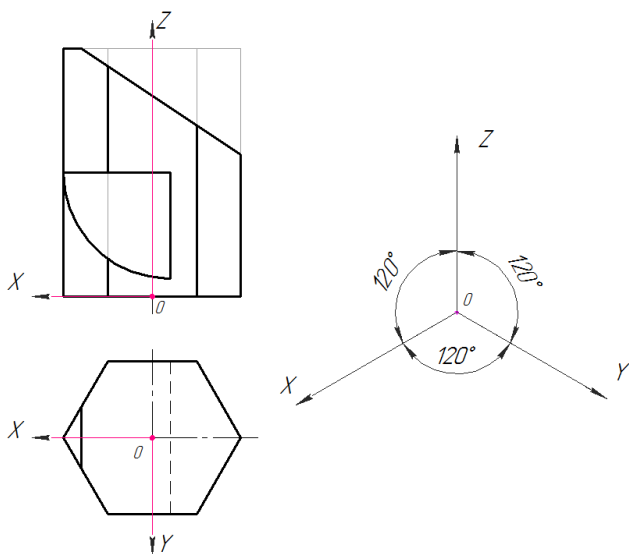


Рисунок 6.16 – Осі у прямокутній ізометрії

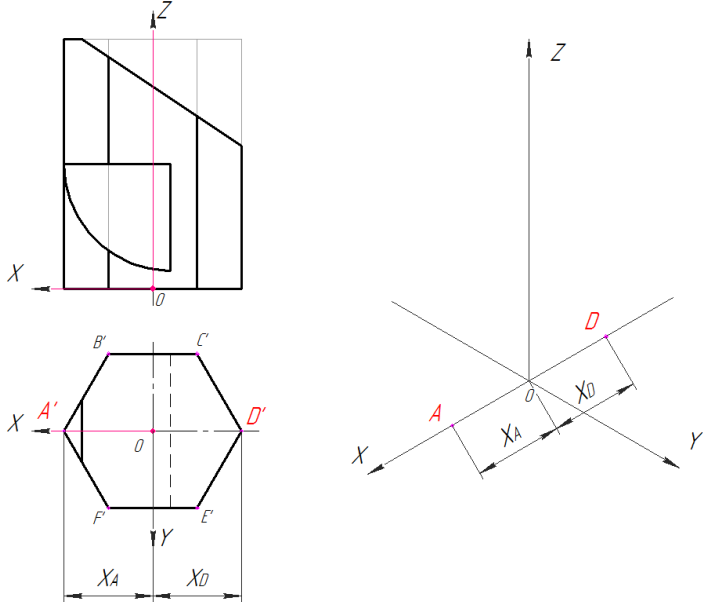


Рисунок 6.17 – Побудова нижньої основи призми – шестикутника

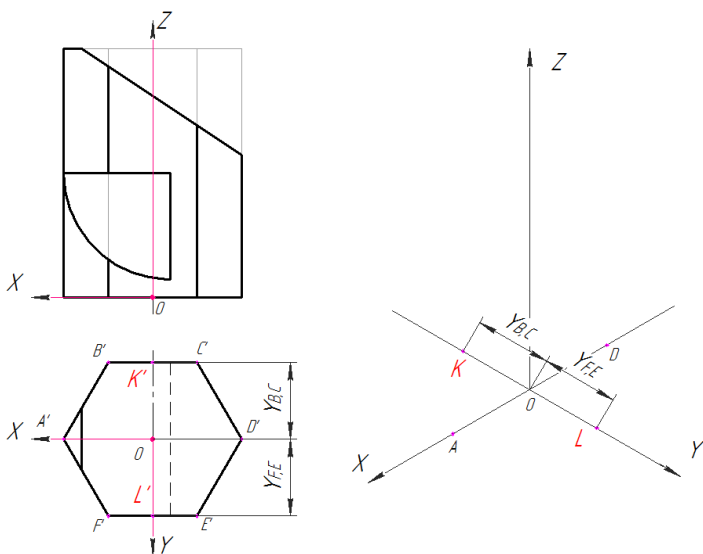


Рисунок 6.18 – Побудова нижньої основи призми – шестикутника

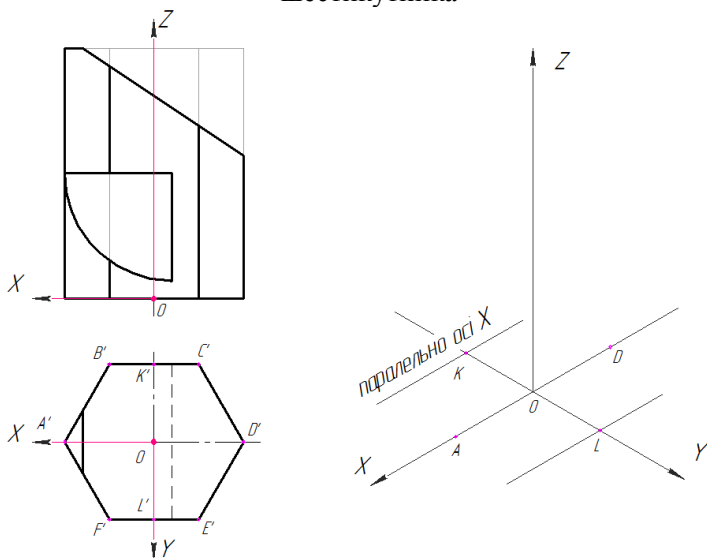


Рисунок 6.19 – Побудова нижньої основи призми – шестикутника

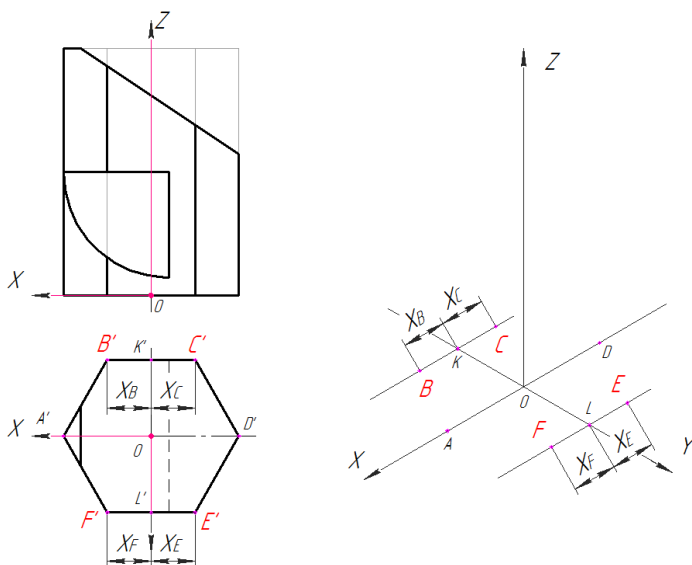


Рисунок 6.20 – Побудова нижньої основи призми – шестикутника

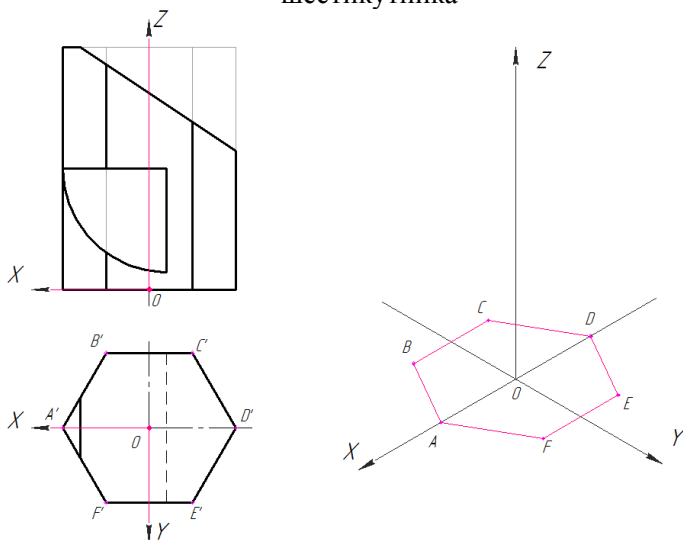


Рисунок 6.21 – Побудова нижньої основи призми – шестикутника

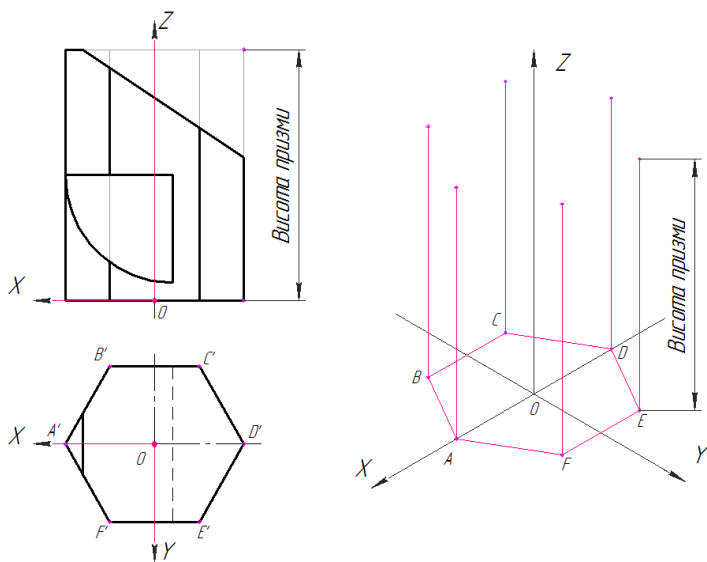


Рисунок 6.22 – Побудова верхньої основи призми

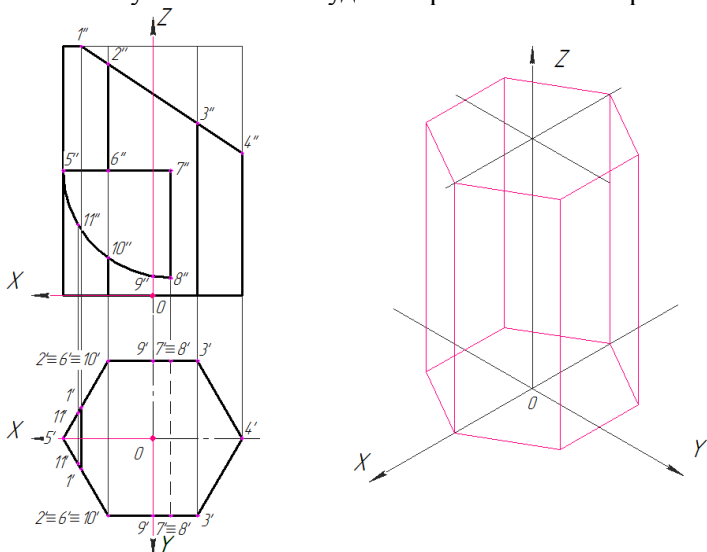


Рисунок 6.23 – Побудова верхньої основи призми

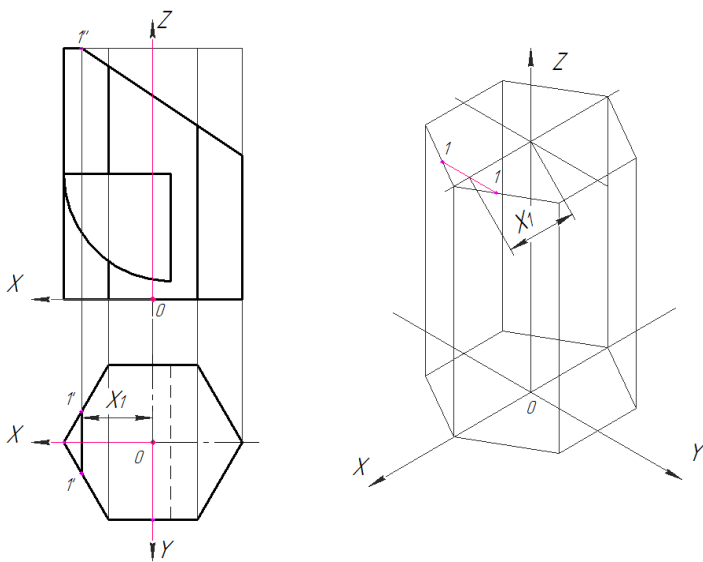


Рисунок 6.24 – Побудова ізометрії точок

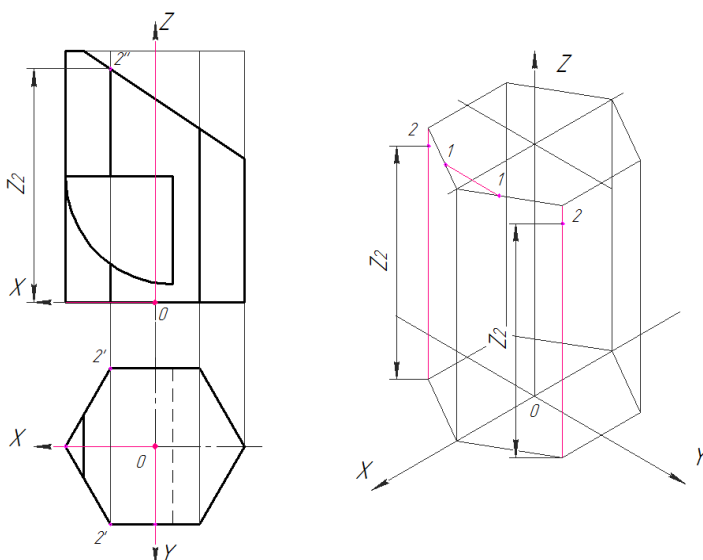


Рисунок 6.25 – Побудова ізометрії точок

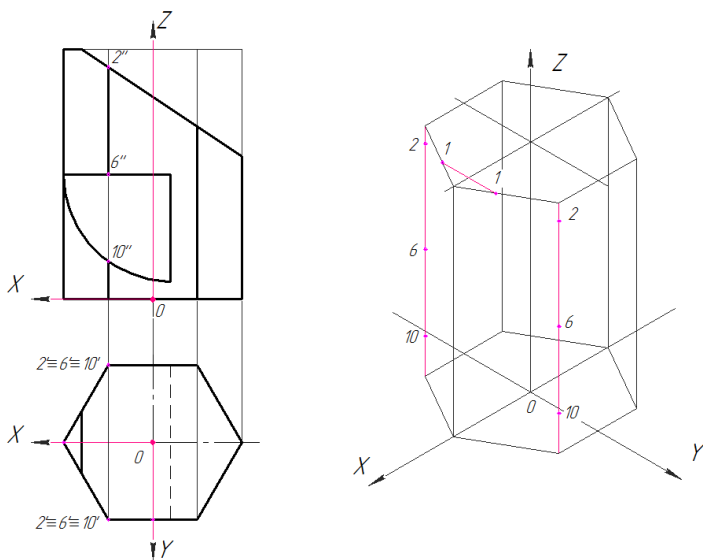


Рисунок 6.26 – Побудова ізометрії точок

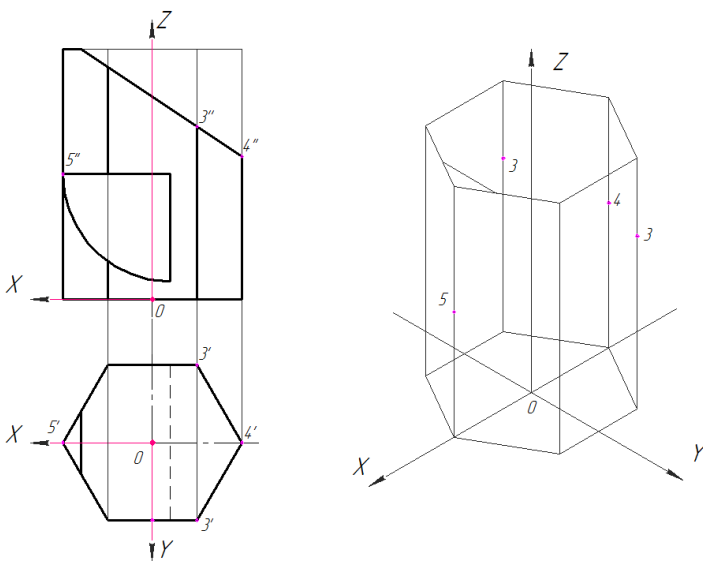


Рисунок 6.27 – Побудова ізометрії точок

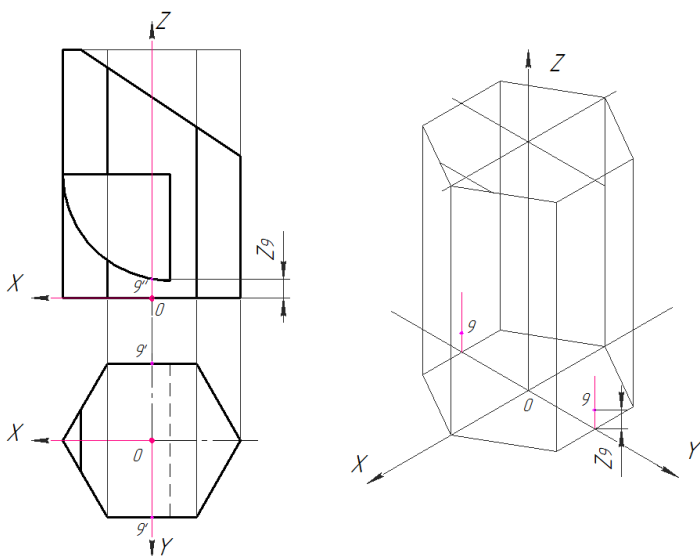


Рисунок 6.28 – Побудова ізометрії точок

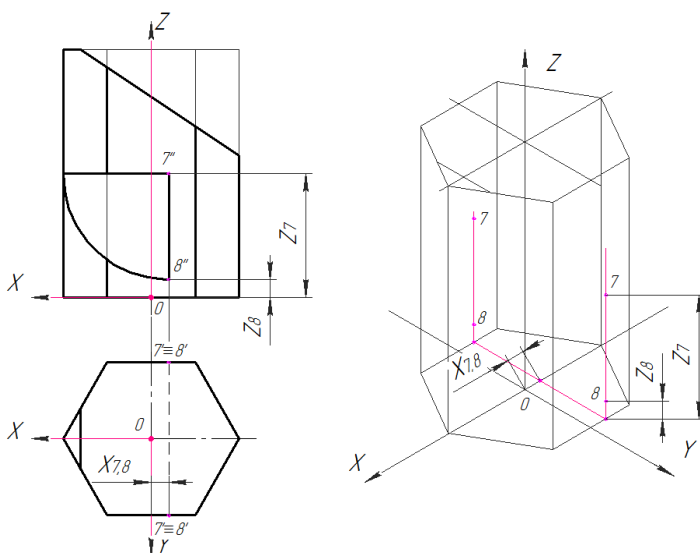


Рисунок 6.29 – Побудова ізометрії точок

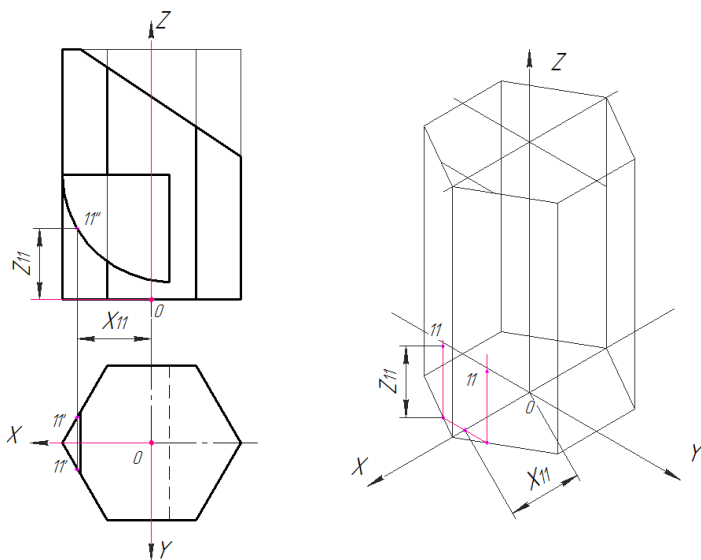


Рисунок 6.30 – Побудова ізометрії точок

Послідовно з'єднують всі отримані точки (рис. 6.31). Невидимі лінії отвору та ребра призми показують штриховою лінією (рис. 6.32).

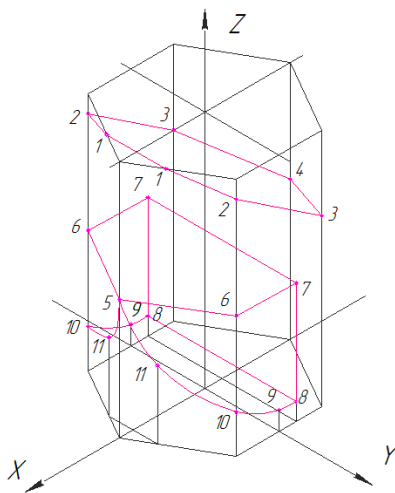


Рисунок 6.31 – Побудова ізометричної проекції призми

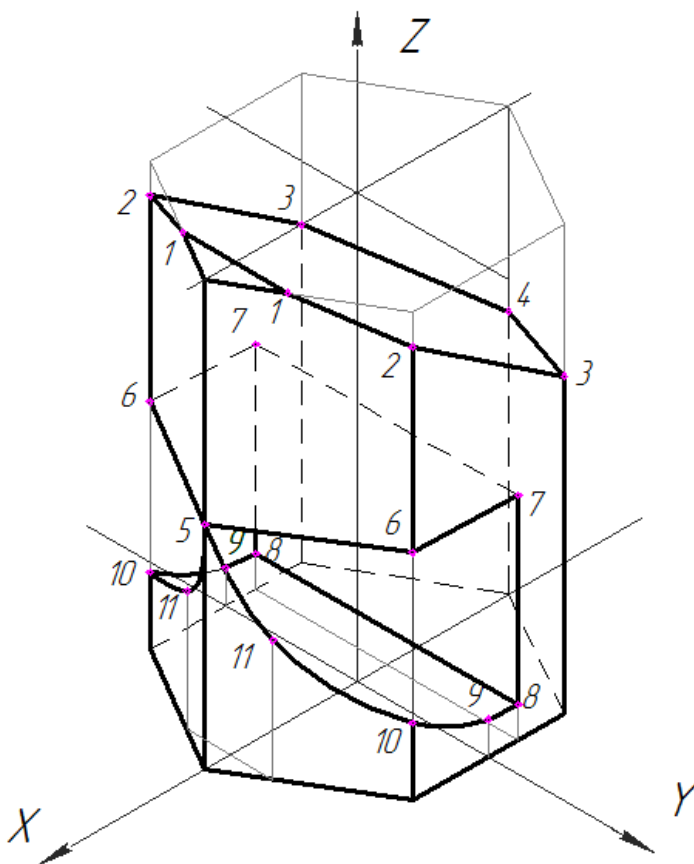


Рисунок 6.32 – Ізометрична проекція призми

6.2 Конус з отвором

Завдання:

за двома заданими (фронтальною та горизонтальною) проекціями конуса з наскрізним отвором побудувати профільну проекцію (рис. 6.33, а);

- побудувати натуральну фігуру перерізу горизонтально-проектувальною або фронтально-проектувальною площиною;

- побудувати аксонометричне зображення конуса з наскрізним отвором.

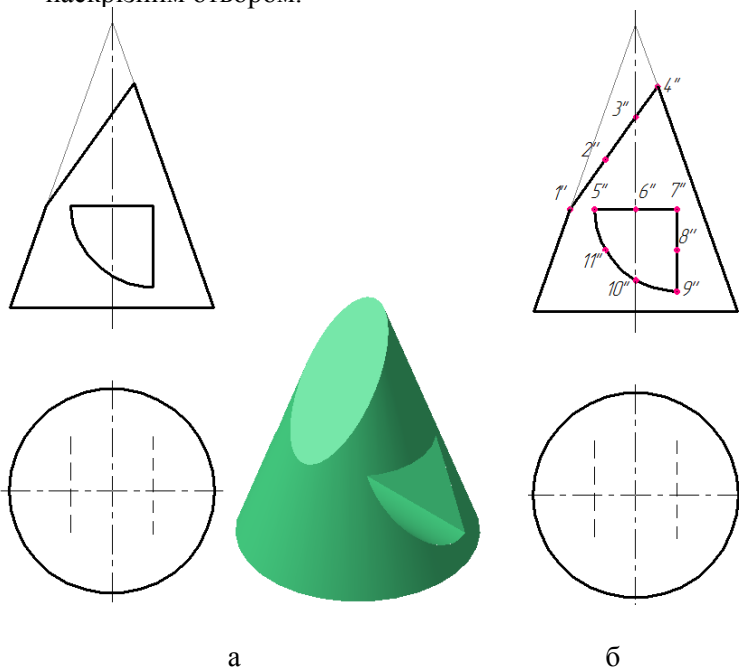


Рисунок 6.33 – Завдання до прикладу «Конус з отвором»

Побудову (рис. 6.33, б) починають з визначення точок на зрізі (точки 1'' – 4'') та на отворі (точки 5'' – 11''). Будують профільну проекцію конуса.

Точки 1'' та 4'' лежать на бічних твірних конуса (рис. 6.34), тому горизонтальні проекції 1' та 4' шукають на горизонтальній осьовій лінії проекції. Профільні проекції 1''' та 4''' – на вертикальній осьовій лінії проекції.

Проекції інших точок знаходять методом січних площин (рис. 6.35 – 6.39)

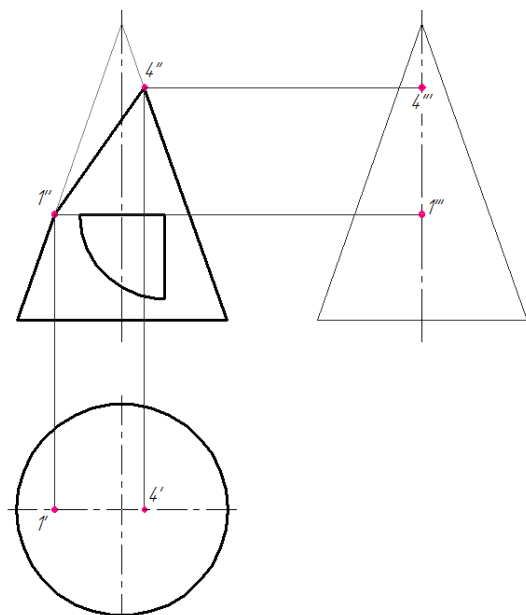


Рисунок 6.34 – Побудова проекцій точок 1 та 4 конуса

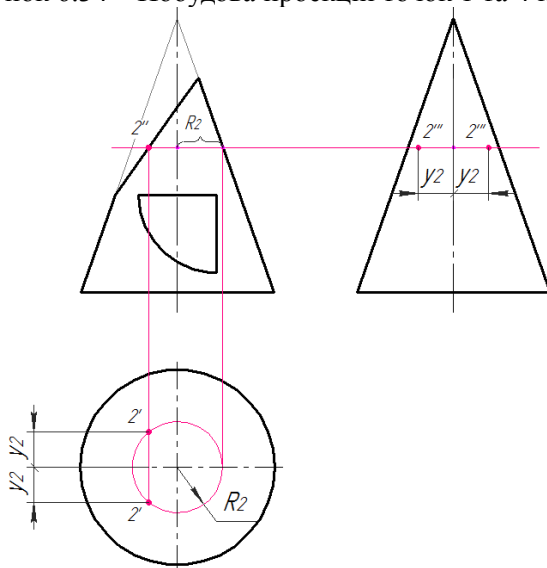


Рисунок 6.35 – Побудова проекцій точок конуса

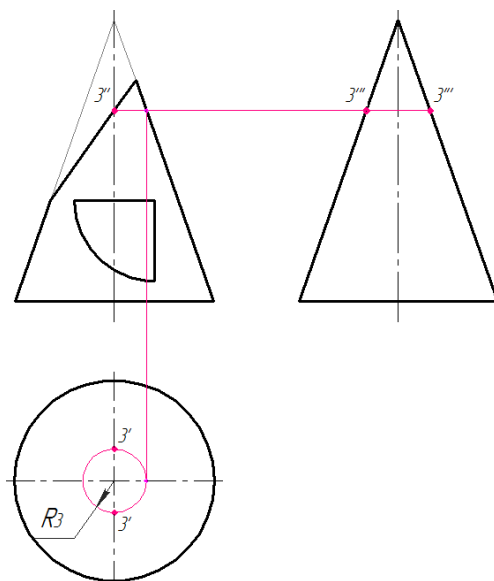


Рисунок 6.36 – Побудова проєкцій точок конуса

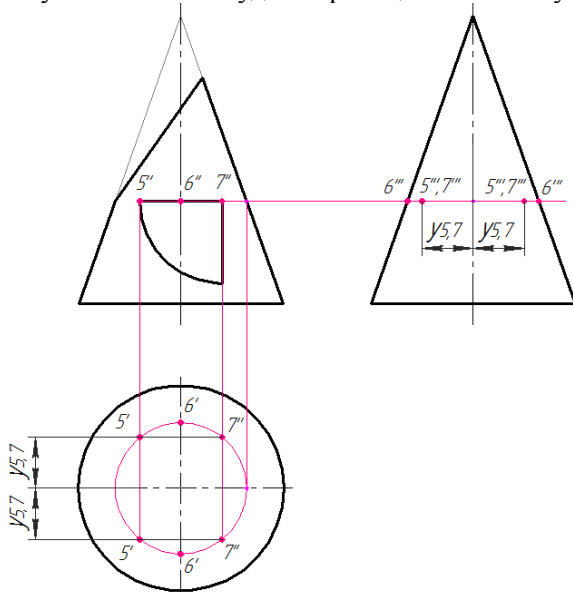


Рисунок 6.37 – Побудова проєкцій точок конуса

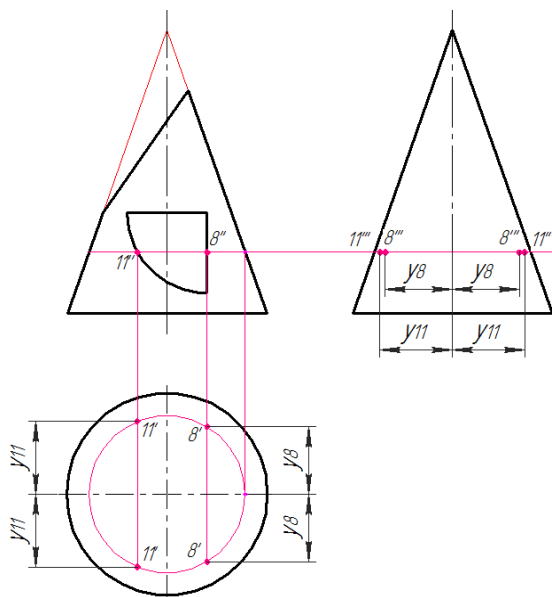


Рисунок 6.38 – Побудова проєкцій точок конуса

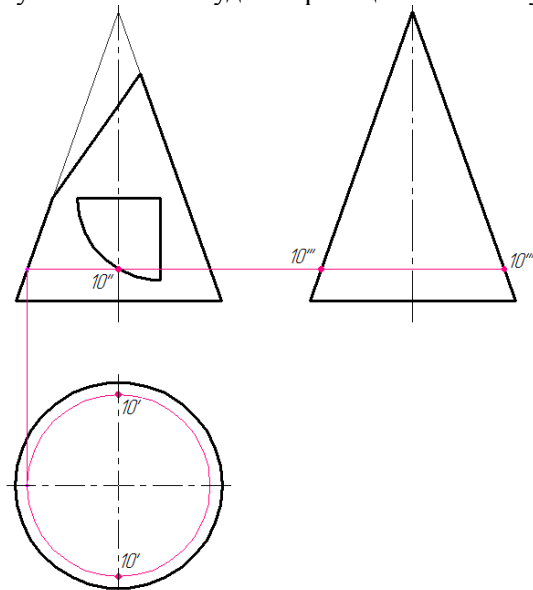


Рисунок 6.39 – Побудова проєкцій точок конуса

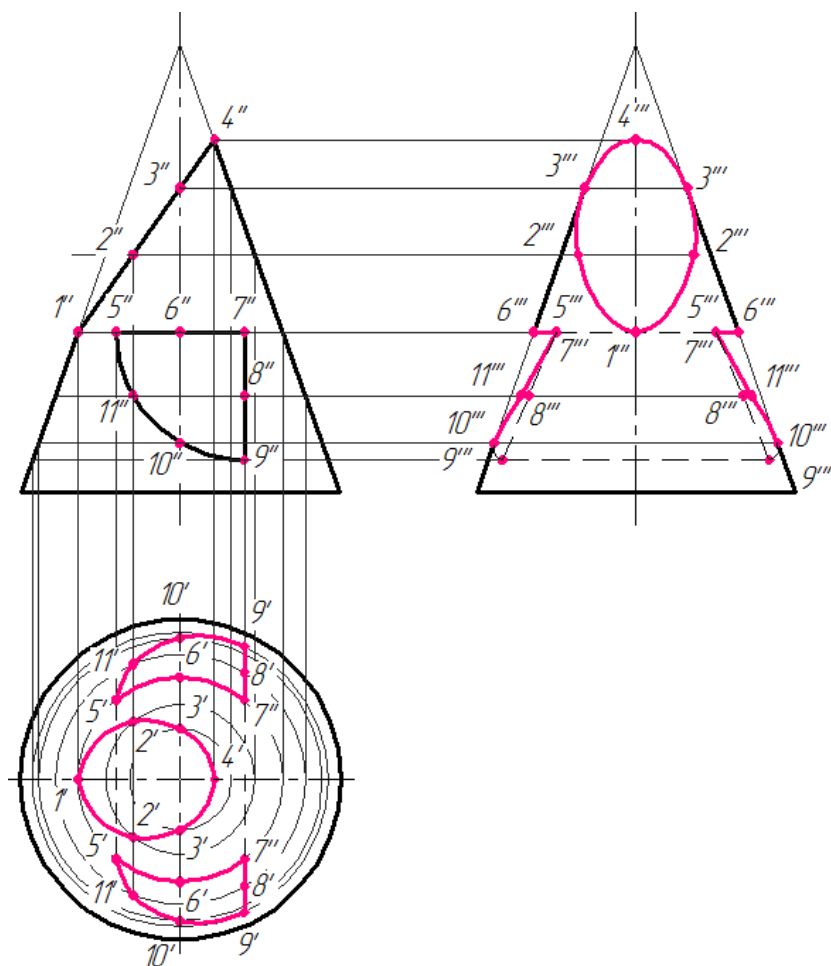


Рисунок 6.40 – Побудова профільної проекції конуса

Профільну проекцію зрізаного конуса з отвором (рис. 6.40) отримують послідовним з'єднанням профільних проекцій всіх точок. Невидимі лінії отвору показують штриховою лінією.

Побудову перерізу А-А фронтально-проектувальною площиною (рис. 6.41,а) починають з визначення точок на лінії перерізу (рис. 6.41,б)

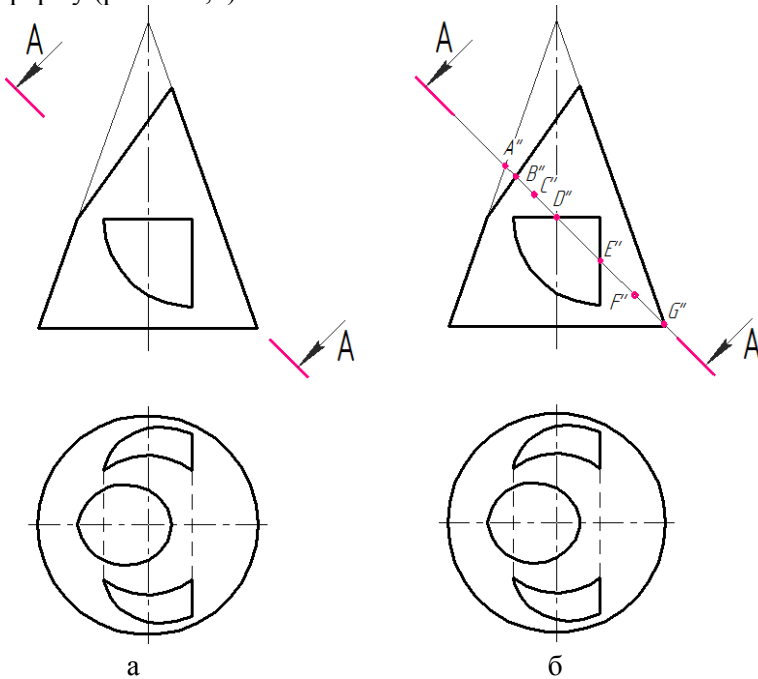


Рисунок 6.41 – Визначення точок на лінії перерізу конуса

Спочатку визначаються горизонтальні проекції зазначених точок (рис. 6.42,а), які визначають горизонтальну проекцію фігури перерізу (рис. 6.42,б).

Точка А лежить на бічній твірній конуса (рис. 6.42,а), тому горизонтальну проекцію A' шукають на горизонтальній осьвій лінії проекції.

Точка G лежить на основі конуса (рис. 6.42,а), тому горизонтальну проекцію G' шукають на горизонтальній проекції основи конуса – на колі.

Точки B та D лежать на зрізі та отворі (рис. 6.42,а), тому горизонтальні проекції цих точок B' та D' шукають на горизонтальній проекції відповідних поверхонь.

Горизонтальні проекції точок C , E , F знаходять методом січних площин (рис. 6.42,б).

Послідовним з'єднанням побудованих проекцій точок отримують горизонтальну проекцію фігури перерізу (рис. 6.43).

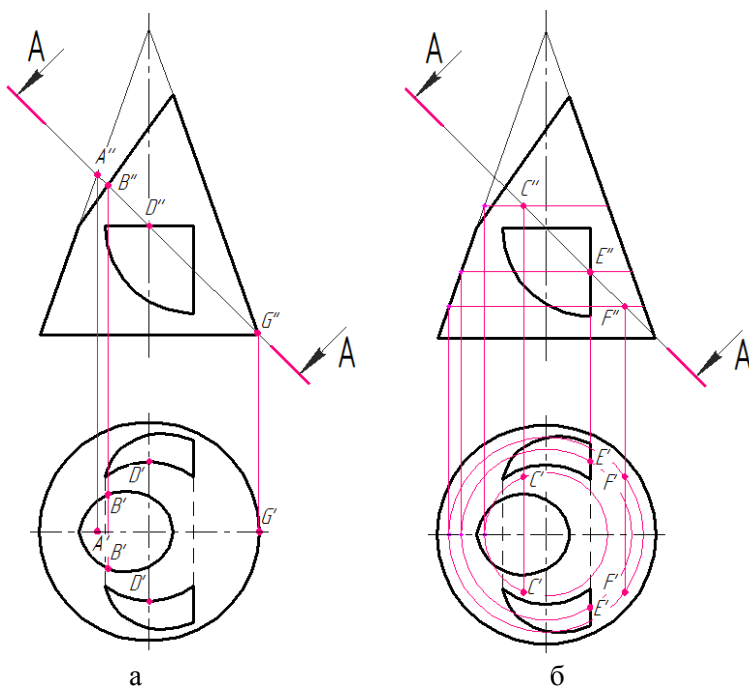


Рисунок 6.42 – Визначення точок на лінії перерізу конуса

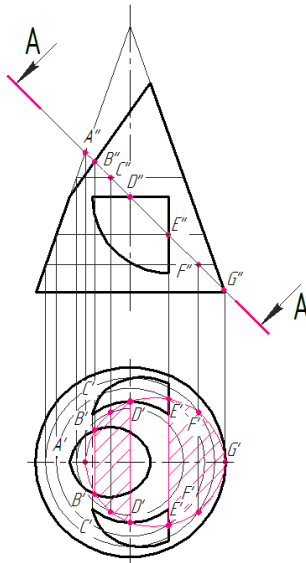


Рисунок 6.43 – Визначення горизонтальної проєкції фігури перерізу

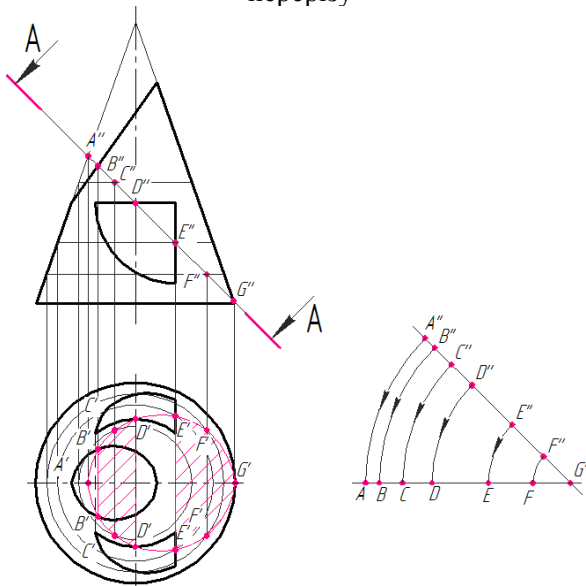


Рисунок 6.44 – Визначення дійсної фігури перерізу конуса

Побудова дійсної величини фігури перерізу подана на
 рисунках 6.44 – 6.46.

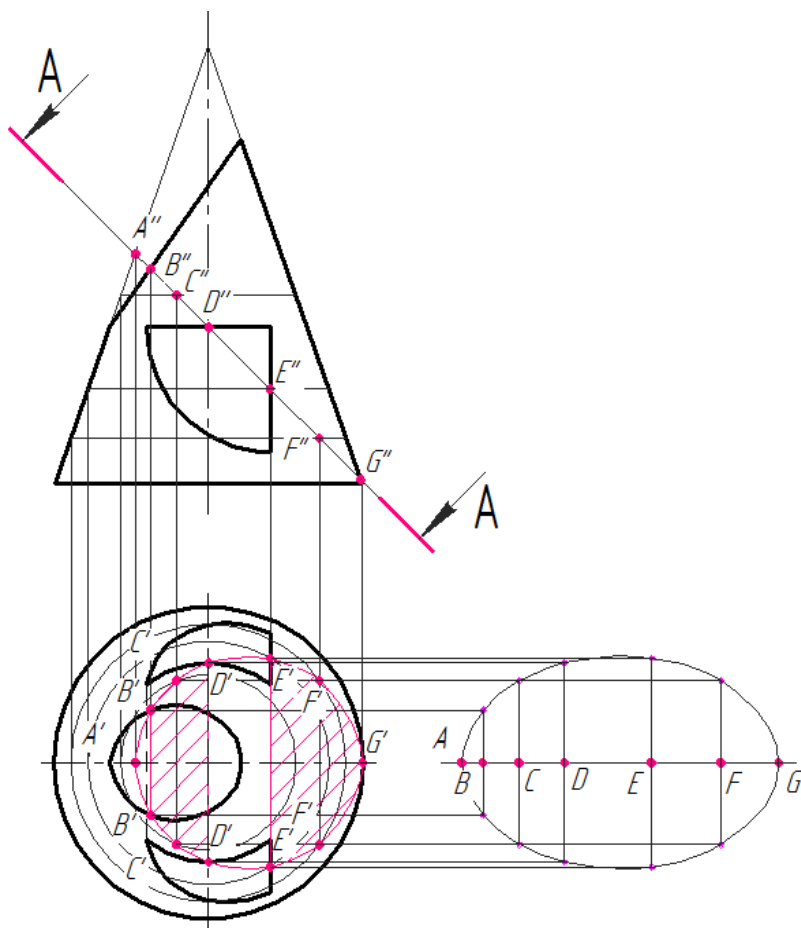


Рисунок 6.45 – Визначення дійсної фігури перерізу конуса

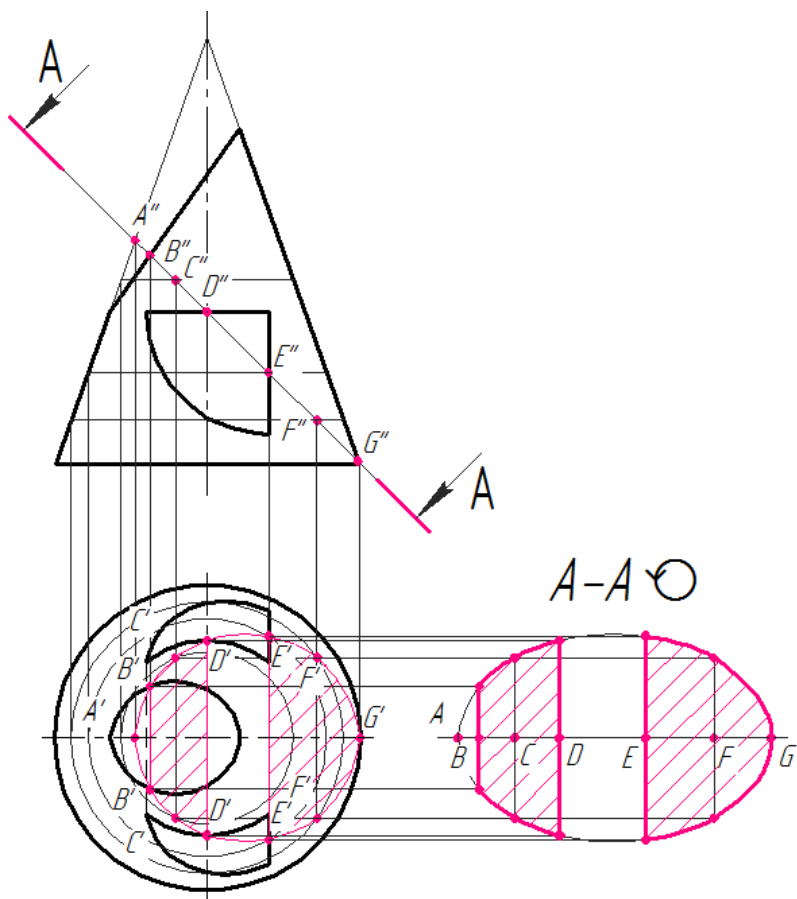


Рисунок 6.46 – Визначення дійсної фігури перерізу конуса

Аналогічно виконують побудову перерізу Б-Б, горизонтально-проекувальною площиною. Визначають точки на лінії перерізу (рис 6.47,а).

Далі визначаються фронтальні проекції зазначених точок (рис 6.47,б, 6.48, а,б), які визначають фронтальну проекцію фігури перерізу (рис 6.49).

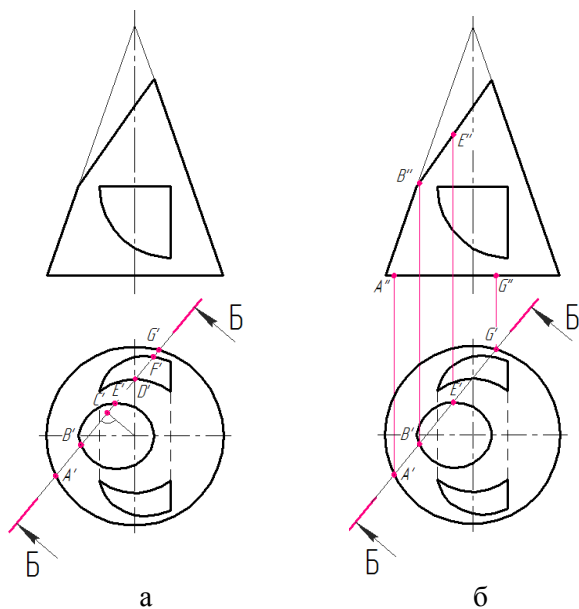


Рисунок 6.47 – Визначення точок на лінії перерізу конуса

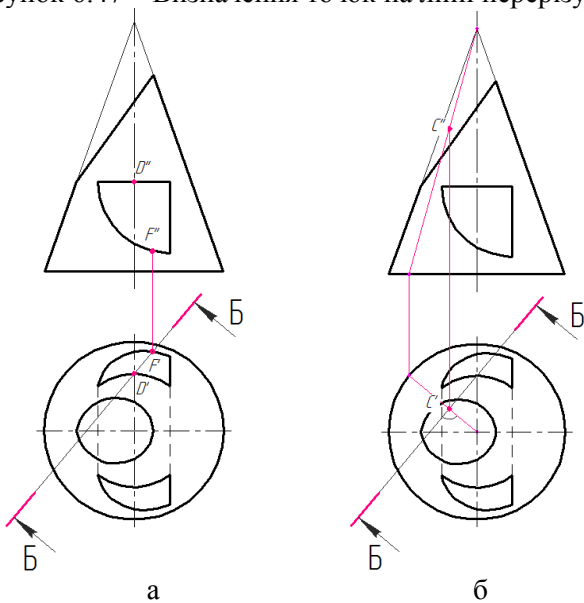


Рисунок 6.48 – Визначення точок на лінії перерізу конуса

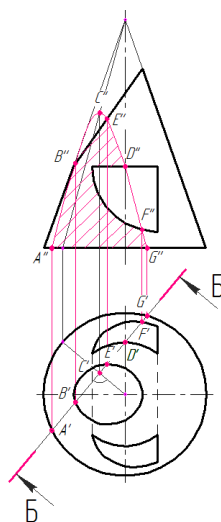


Рисунок 6.49 – Визначення фронтальної проекції фігури перерізу

На рисунках 6.50, 6.51 подана послідовність побудови дійсної фігури перерізу.

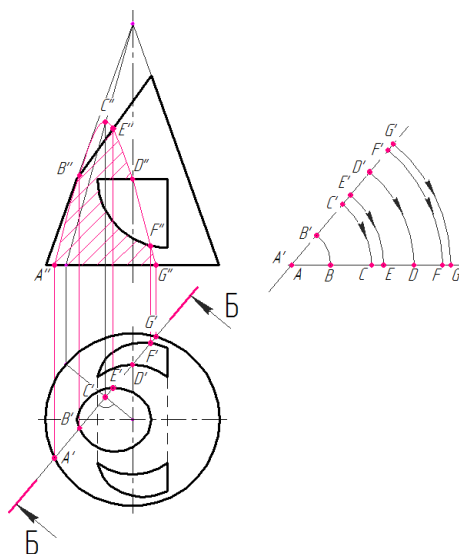


Рисунок 6.50 – Визначення дійсної фігури перерізу конуса

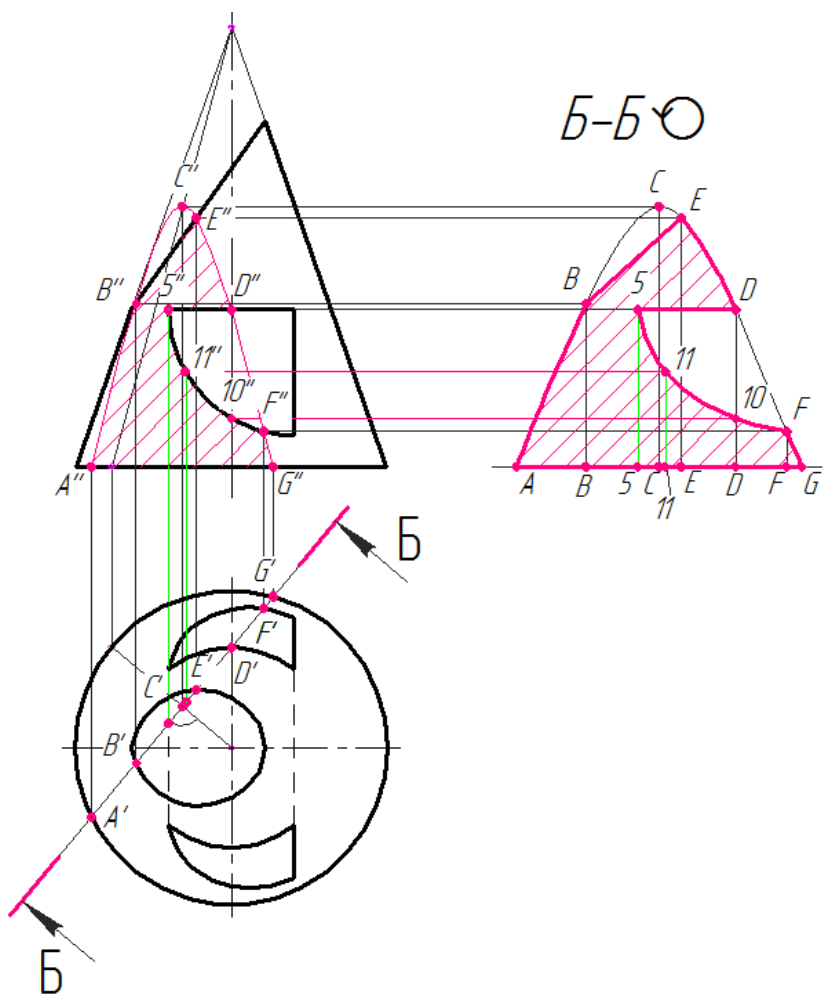


Рисунок 6.51 – Визначення дійсної фігури перерізу конуса

Аксонетричне зображення конуса будується у прямокутній ізометрії, аксонетричні осі якої утворюють між собою кут 120° (рис 6.16).

Починають з побудови основи конуса. В ізометрії коло проектується у вигляді еліпса. Послідовність побудови еліпса показана на рисунках 6.52, 6.53).

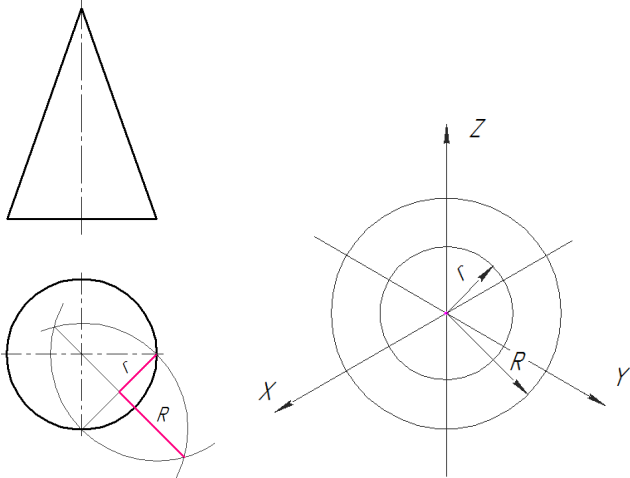


Рисунок 6.52 – Послідовність побудови еліпса

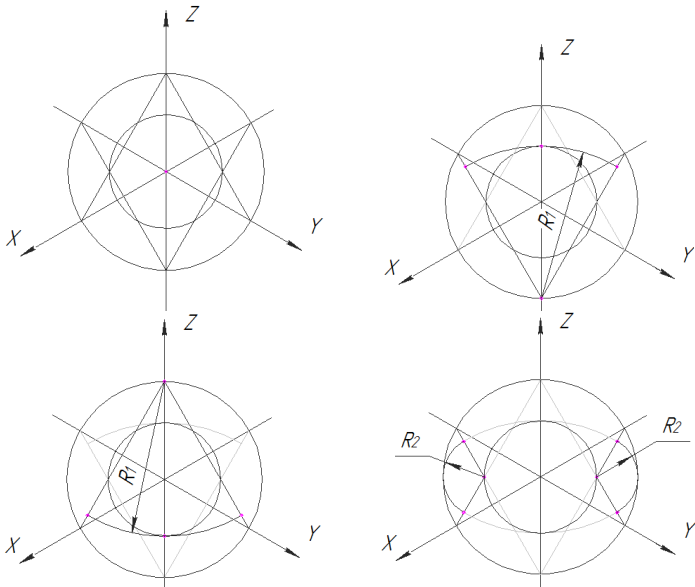


Рисунок 6.53 – Послідовність побудови еліпса

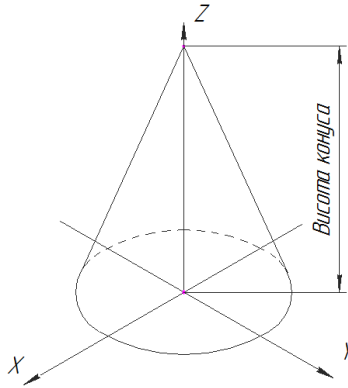


Рисунок 6.54 – Ізометрична проекція конуса

З точки центру еліпса по осі Z відкладають висоту конуса та з отриманої вершини проводять дотичні лінії до основи конуса (рис 6.54).

Побудову ізометрії точок виконують координатним методом (рис 6.55 – 6.61).

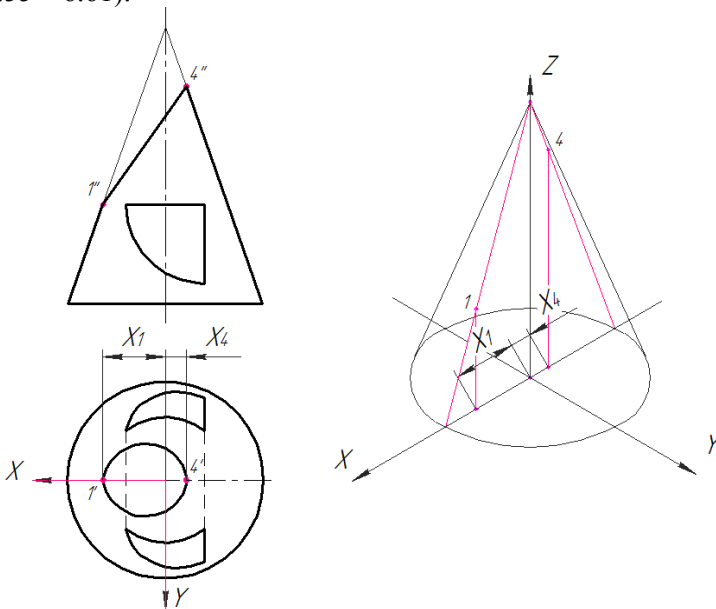


Рисунок 6.55 – Побудова ізометрії точок

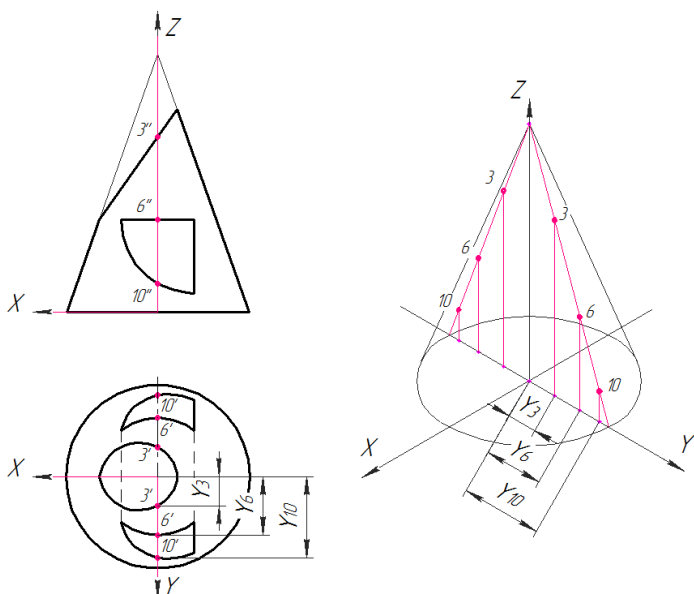


Рисунок 6.56 – Побудова ізометрії точок

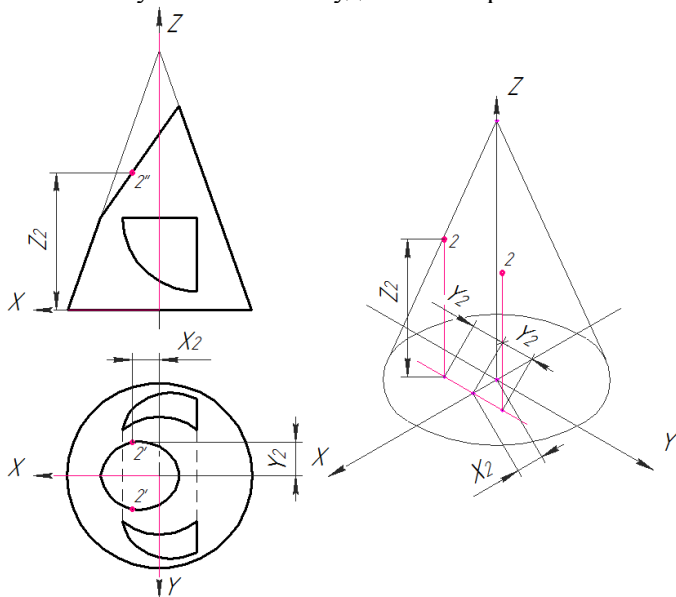


Рисунок 6.57 – Побудова ізометрії точок

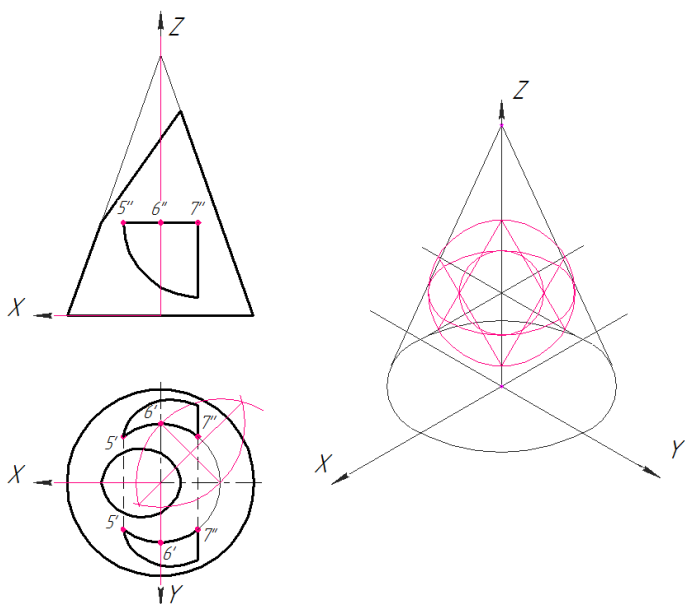


Рисунок 6.58 – Побудова ізометрії точок

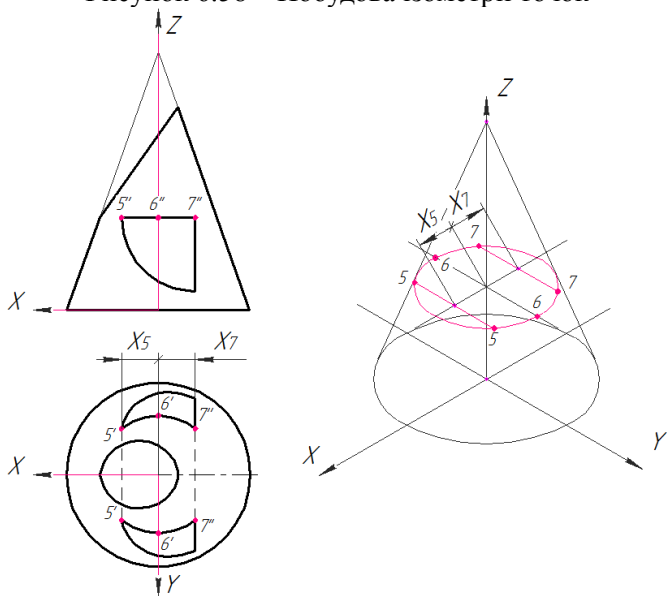


Рисунок 6.59 – Побудова ізометрії точок

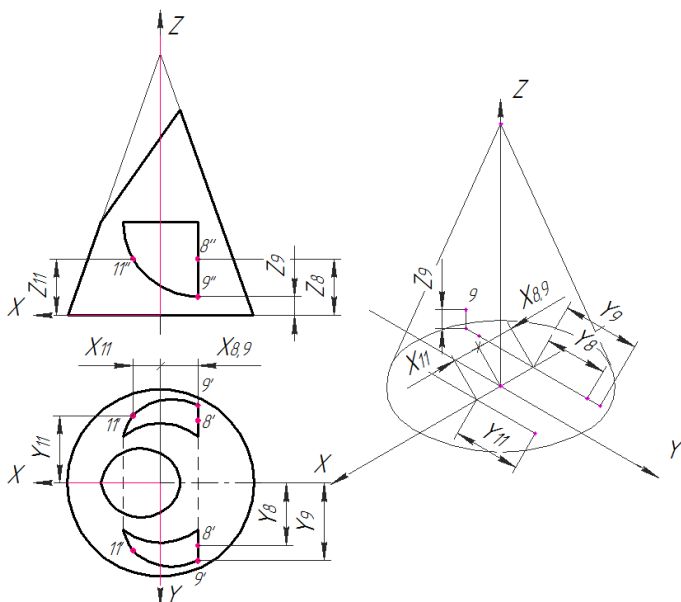


Рисунок 6.60 – Побудова ізометрії точок

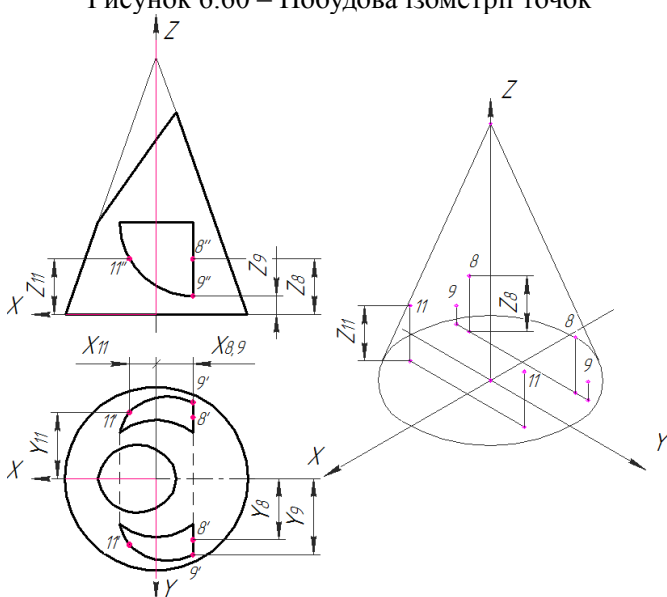


Рисунок 6.61 – Побудова ізометрії точок

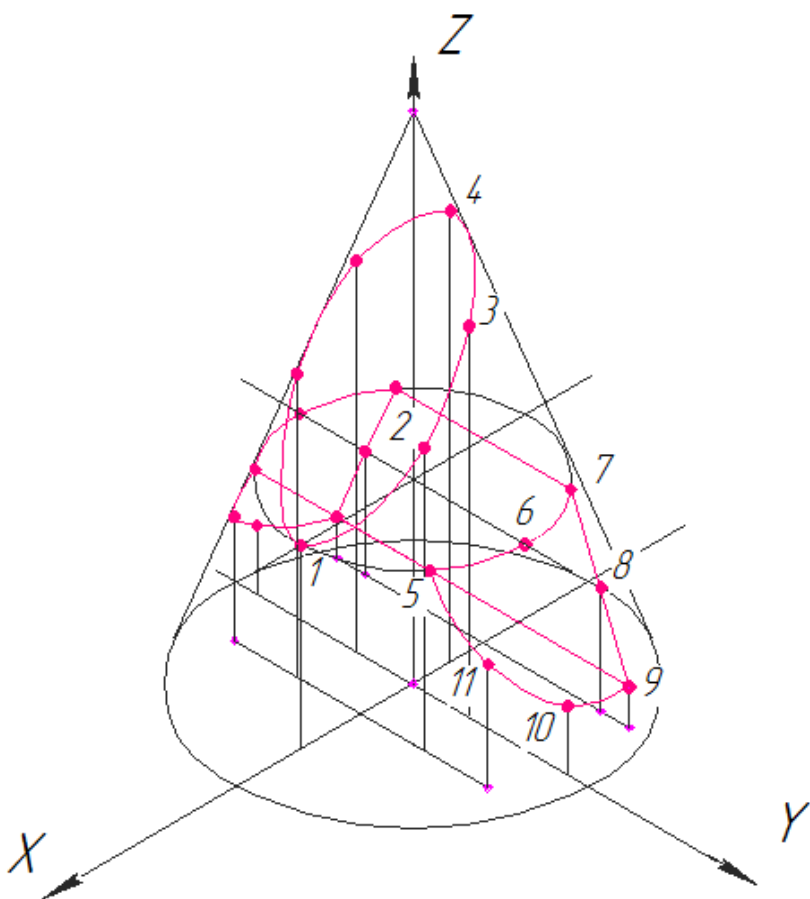


Рисунок 6.62 – Побудова ізометрії точок

Послідовно з'єднують всі отримані ізометричні проекції точок (рис 6.62). Невидимі лінії отвору та основи конуса показують штриховою лінією (рис 6.63).

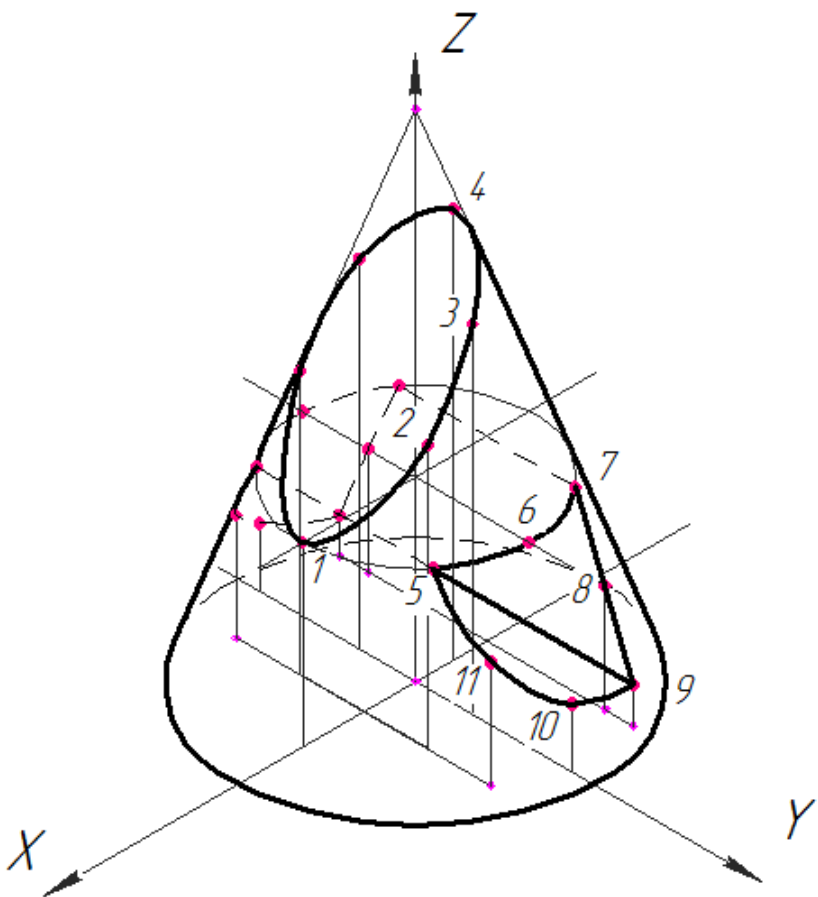


Рисунок 6.63 – Ізометрична проекція конуса

6.3 Піраміда з отвором

Завдання:

- за двома заданими (фронтальною та горизонтальною) проекціями піраміди з наскрізним отвором побудувати профільну проекцію піраміди (рис. 6.64);

- побудувати натуральну фігуру перерізу горизонтально-проекціовальною або фронтально проекціовальною площиною;
- побудувати аксонометричне зображення піраміди з наскрізним отвором.

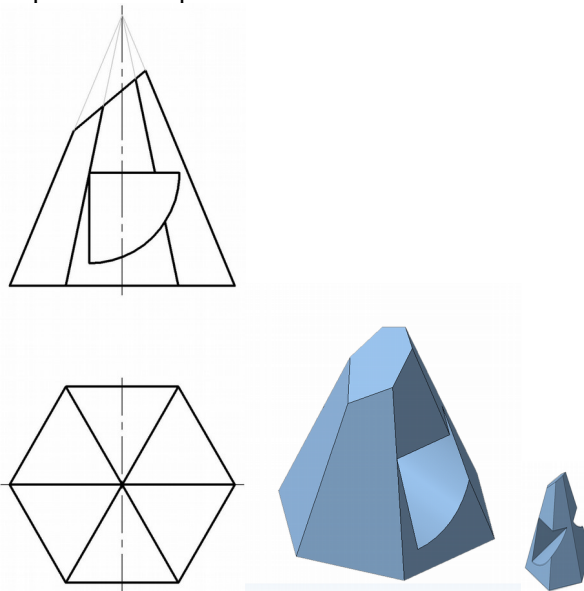


Рисунок 6.64 – Завдання до прикладу «Піраміда з отвором»

При аналізуванні складових площин отвору та їх фігур перерізу визначають необхідну кількість точок для побудови наскрізного отвору та зрізу, а саме :

- зріз (точки 1-4) являє собою багатокутник, тому що січна площина нахилена до основи. Для його побудови обрані точки на ребрах піраміди, що є характерними точками;

- наскрізний отвір (точки 5-10), утворений трьома площинами, для побудови якого позначені необхідні, а саме: характерні або опорні точки (до характерних відносяться крайні точки отвору); проміжні або допоміжні точки.

При визначенні характеру заданого отвору на головному вигляді геометричного тіла, обирають необхідну кількість точок:

- площина (точки 5-7), яка розташована паралельно основі являє собою фігуру подібну основі. Для побудови обирають крайні точки -- 5, 7 та точки, які належать бічним ребрам піраміди - 6;

- площина (точки 7-10) є фігура перерізу площин з геометричним тілом, яка проєкціюється у криву другого порядку (еліпс, гіперболу, параболу, коло). Для побудови якої обирають окрім крайніх точок - 7, 10, точки перетину з ребрами піраміди - 8 та допоміжні точки - 9;

- площина (точки 5-10), розташована перпендикулярно до основи піраміди, яка являє собою багатокутник. Тому обирають крайні точки - 5, 10 (рис. 6.65).

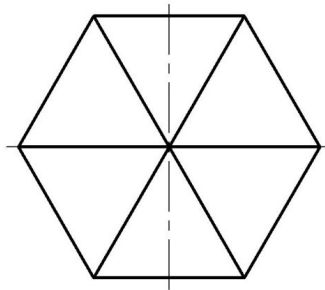
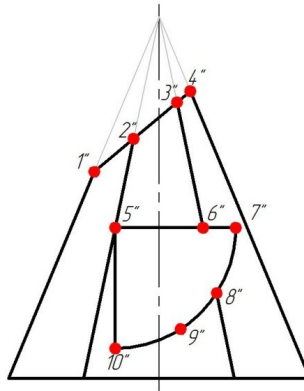


Рисунок 6.65 — Вибір необхідних точок

Точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 лежать на ребрах піраміди, тому горизонтальні та профільні проекції точок знаходять на відповідних горизонтальних та профільних проекціях ребер за допомогою ліній зв'язку (рис. 6.66).

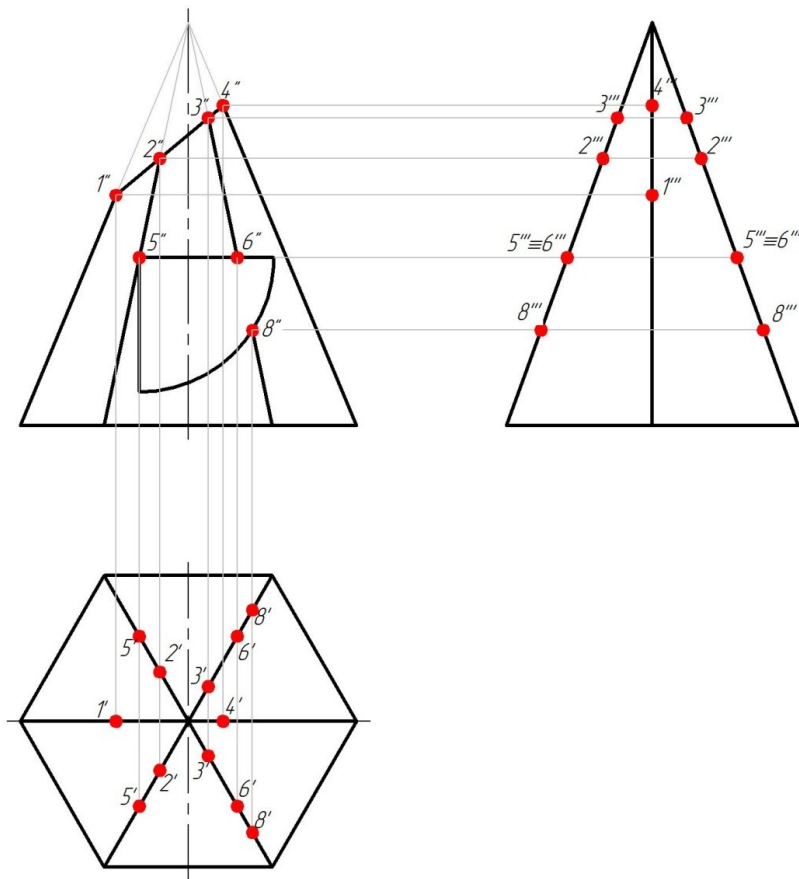


Рисунок 6.66 – Побудова проекцій точок

Точки 7, 9, 10, 11 належать боковій поверхні піраміди. Для знаходження горизонтальних проекцій точок використаний метод січних площин.

Побудова точок 7, 9, 10.

Через фронтальні проекції точок 7'', 9'', 10'' проводять січні площини, які розташовані паралельно основі піраміди. Горизонтальні проекції цих площин являють собою шестикутники, подібні основі. Горизонтальні проекції точки 7', 9', 10' знаходяться в перетині вертикальних ліній зв'язку з даними шестикутниками. Інші точки будують аналогічно.

Для знаходження профільної проекції точки, на горизонтальній проекції вимірюють відстань від осі симетрії до точки в обидві сторони (y). Відстань відкладають на профільній проекції в обидві сторони від осі симетрії, за проекційним зв'язком (рис. 6.67).

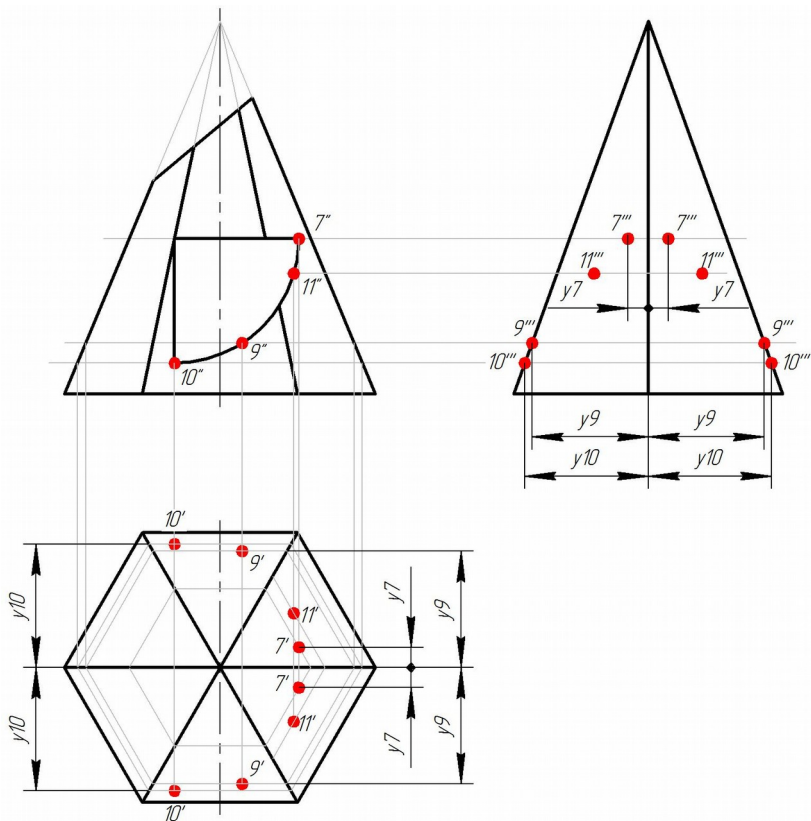


Рисунок 6.67 – Побудова проєкцій точок

Послідовно з'єднують всі точки побудованої лінії перерізу у вигляді плавної кривої лінії або ламаної лінії з урахуванням видимості елементів: видимі лінії позначені суцільною основною лінією, невидимі – штриховою лінією (рис. 6.68).

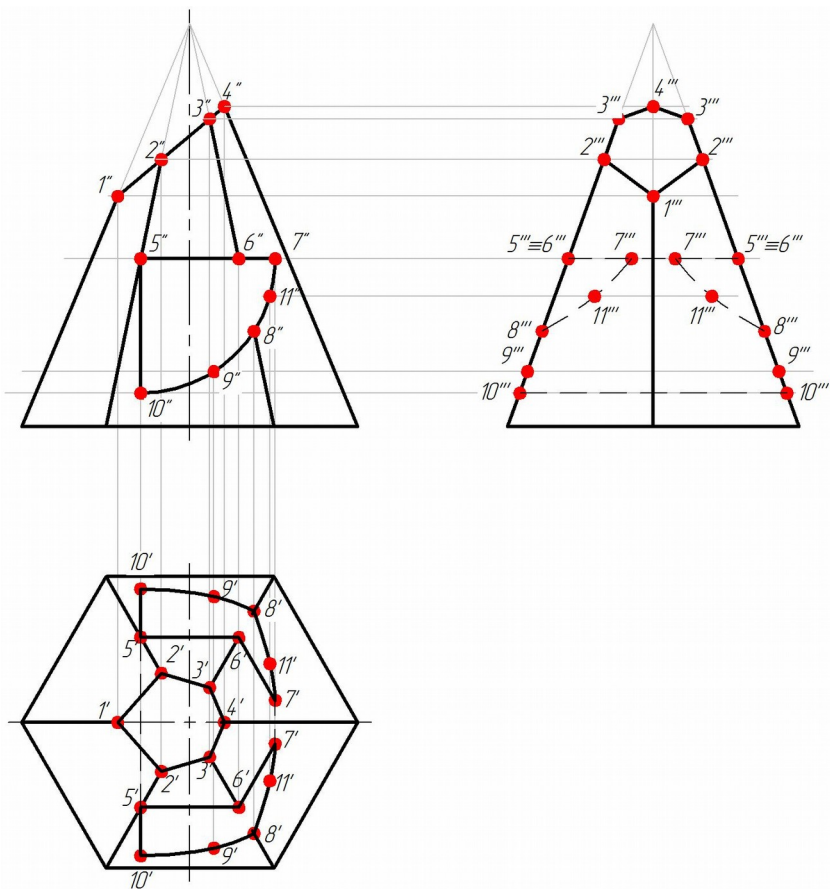


Рисунок 6.68 – Побудова профільної проєкцій пірамід

Наступним кроком розглядають побудову фігури перерізу піраміди фронтально-проєкціуювальною площиною $A-A$.

Побудову перерізу починають з визначення точок на лінії перерізу. Ці точки позначаються літерами латинського алфавіту.

Переріз $A-A$ являє собою багатокутник, так як січна площина нахилена до основи. Відмічені характерні точки на елементах піраміди $A''-E''$.

Спочатку будують горизонтальні проекції зазначених точок, які визначають горизонтальну проекцію фігури перерізу.

Точки A , B лежать на ребрах піраміди, тому горизонтальні проекції цих точок A' , B' , знайдені на відповідних горизонтальних проекціях цих ребер за допомогою ліній зв'язку.

Точка A лежить на зрізі, тому горизонтальна проекція цієї точки знаходиться на горизонтальній проекції зрізу.

Точки C та D лежать на отворі, тому горизонтальні проекції цих точок C' та D' знаходяться на горизонтальній проекції відповідної поверхні.

Точка E лежить на основі піраміди, тому горизонтальну проекцію E' знаходять на горизонтальній проекції основи піраміди, на шестикутнику.

На горизонтальній проекції, накладена фігура перерізу від площини $A-A$, виділена суцільною тонкою лінією і отримана фігура заштрихована під кутом 45° вважаючи, що геометричне тіло металеве.

Фігура перерізу має розрив в області отвору $C''-D''$. В зв'язку з цим на горизонтальній проекції фігури перерізу в цій області лінії штриховки не наносять.

Натуральна величина фігури перерізу $A-A$ побудована на рисунку 6.69. Побудову розташовують на вільному місці поля креслення з поворотом, позначивши це відповідно до ГОСТ 2.305-2008.

Слід січної площини $A-A$ переносять паралельно на місце побудови перерізу і застосовують метод обертання разом з характерними та проміжними точками, зберігаючи натуральні відстані з площини $A-A$. На перпендикулярах, проведених з цих точок, відкладають відстань від осі симетрії до точки в обидві сторони (y) (рис. 6.69).

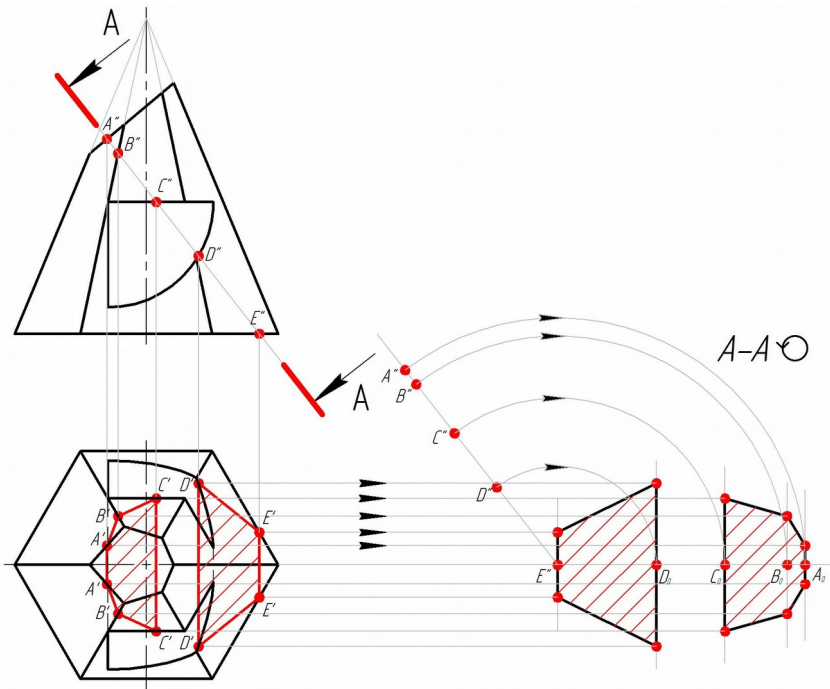


Рисунок 6.69 – Визначення дійсної фігури перерізу піраміди

Побудова фігури перерізу піраміди горизонтально-проекціовальною площиною $B-B$.

Побудову перерізу $B-B$ горизонтально-проекціовальною площиною починають з визначення точок на лінії перерізу.

Переріз $B-B$ являє собою багатокутник, так як січна площина перпендикулярна до основи.

Відмічають характерні точки на елементах піраміди $A'-E'$.

Знаходять фронтальні проекції позначених точок.

На фронтальній проекції, накладена фігура перерізу від площини $B-B$, виділена суцільною тонкою лінією і отриману фігуру заштриховують під кутом 45° вважаючи, що геометричне тіло металеве.

Натуральна величина фігури перерізу $B-B$ побудована на рисунку 6.70 на вільному місці поля креслення з поворотом, позначивши це відповідно до ГОСТ 2.305- 2008.

Слід січної площини $B-B$ переносять паралельно на місце побудови перерізу і застосовують метод обертання разом з характерними та проміжними точками, зберігаючи натуральні відстані з площини $B-B$. На перпендикулярах, проведених з цих точок, відкладають координати z (рис.6.70).

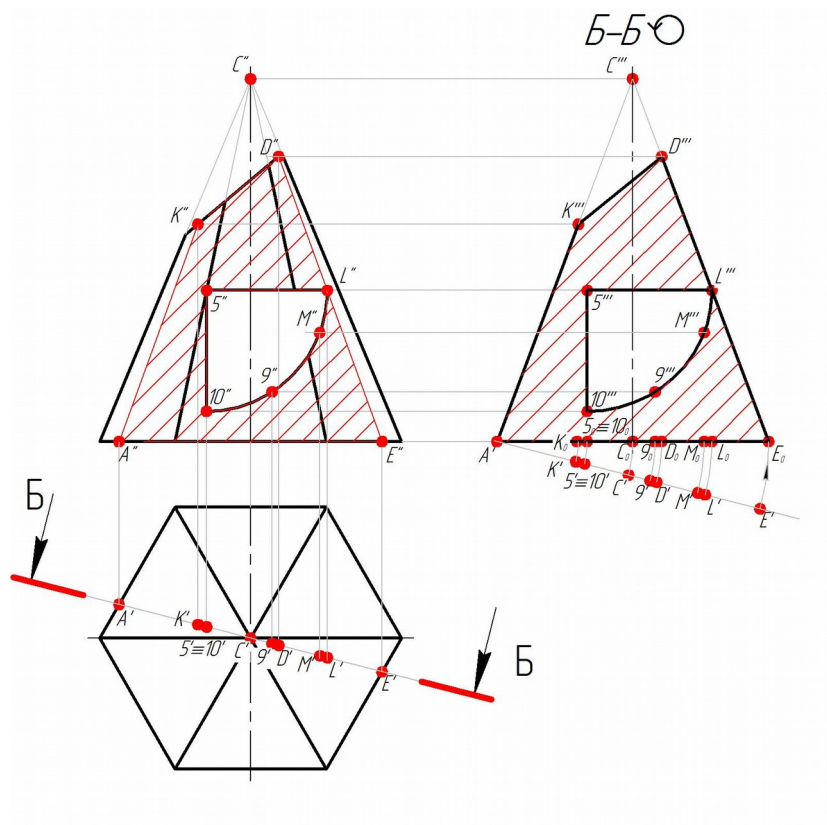


Рисунок 6.70 – Визначення дійсної фігури перерізу піраміди

АксонOMETричне зображення піраміди будують в прямокутній ізометрії відповідно ДСТУ ГОСТ 2.317:2014.

Побудова ізометричної проекції шестикутника (основи піраміди) приведена на рис.6.19-6.21. Для побудови вершини піраміди з точки перетину ізометричних осей відкладають висоту піраміди. Цю точку з'єднують з вершинами шестикутника.

Побудова ізометрії точок виконана координатним методом та розглянута на прикладі побудови ізометрії точок 5 і 7 (рис.6.71).

Відповідні координати для побудови взяті з ортогональних проекцій креслення. На осі OX відкладають координати x точок 5 і 7. Через отримані точки проводять прямі, паралельні осі OY . На цих прямих відкладають координати y точок 5, 7. Через отримані точки проводять прямі паралельні осі OZ , на яких відкладають координати z точок 5, 7 (рис.6.71).

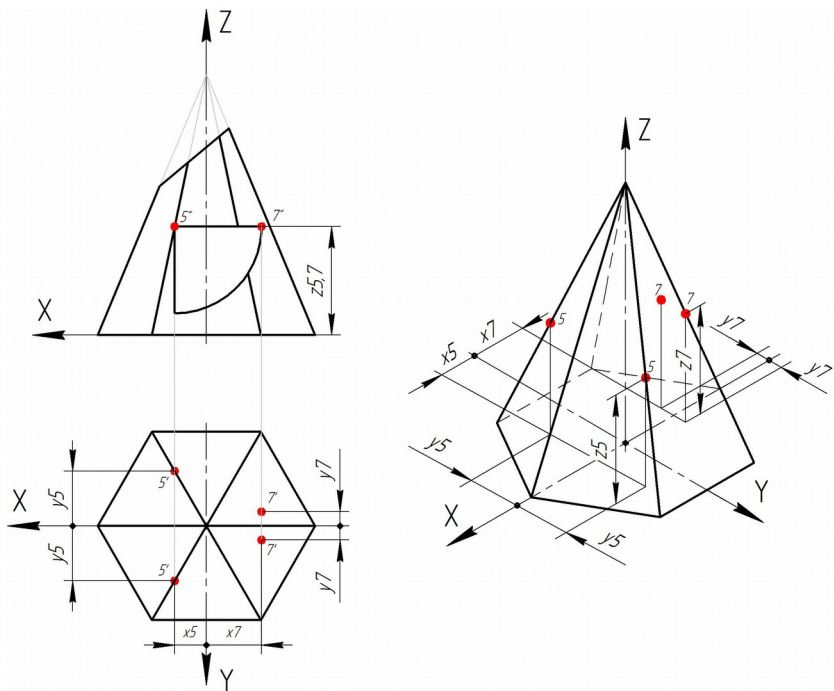


Рисунок 6.71 – Побудова ізометрії точок

Всі інші точки знаходять аналогічно.

Послідовно з'єднують всі отримані ізометричні проекції точок. Невидимі лінії отвору та елементів піраміди показані штриховою лінією (рис. 6.72).

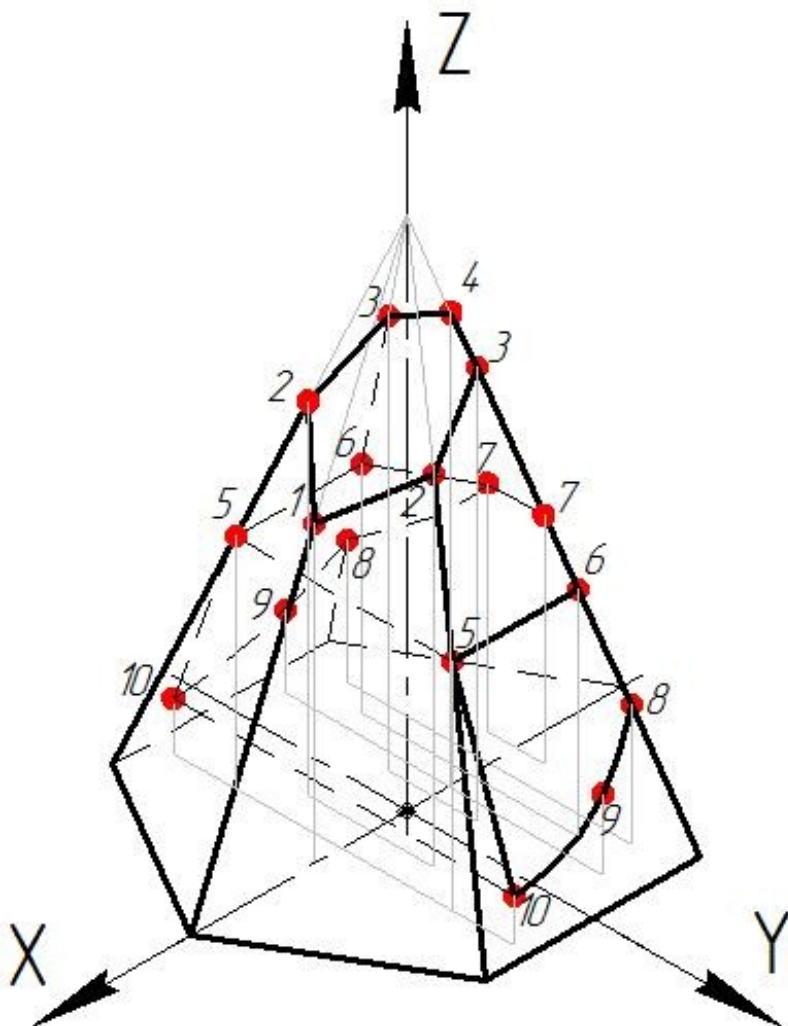


Рисунок 6.72 – Ізометрична проекція піраміди

6.4 Циліндр з отвором

Завдання:

- за двома заданими (фронтальною та горизонтальною) проекціями циліндра з наскрізним отвором побудувати профільну проекцію циліндра (рис. 6.73)
- побудувати натуральну фігуру перерізу горизонтально-проекціовальною або фронтально проекціовальною площиною;
- побудувати аксонометричне зображення циліндра з наскрізним отвором.

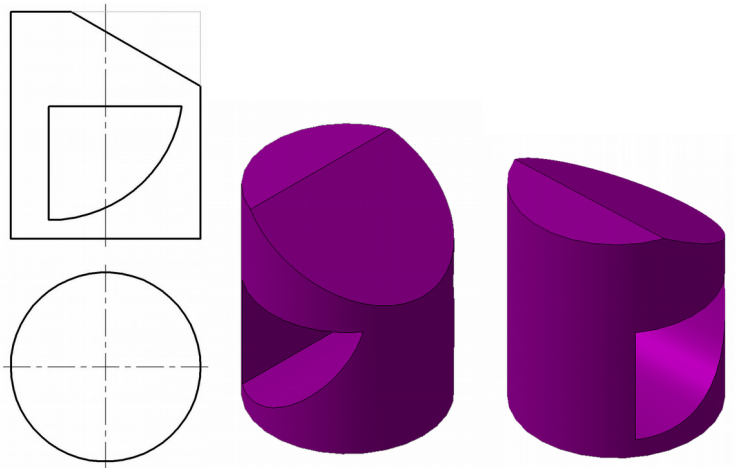


Рисунок 6.73 – Завдання до прикладу 4

При аналізуванні складових площин отвору та їх фігур перерізу визначають необхідну кількість точок для побудови наскрізного отвору та зрізу (рис. 6.74).

Зріз (точки 1-4) являє собою еліпс, так як січна площина нахилена до осі. Тому для побудови обирають такі точки:

- характерні (крайні точки отвору) точки - 1 та 4;

- точки що лежать на твірної циліндра, точка - 2;
- проміжні, точка - 3

Наскрізний отвір (точки 5-10), утворений трьома площинами, для побудови якого, позначають необхідні, а саме: характерні або опорні точки, проміжні або допоміжні точки.

Визначають характер заданого отвору на головному вигляді геометричного тіла:

- площина (точки 5-7), яка розташована перпендикулярна до осі є коло. Для побудови обирають крайні точки - 5, 7 та точка, що лежить на твірній - 6;
- площина (точки 7-10) є фігура перерізу площин з геометричним тілом яка проєкціюється у криву другого порядку. Для побудови обирають окрім крайніх точок - 7, 10, точку, що лежить на твірної циліндра - 9 і допоміжну точку - 8;
- площина (точки 5-10), розташована паралельно до осі циліндра, являє собою прямокутник. Для побудови обирають крайні точки - 5, 10 (рис. 6.74).

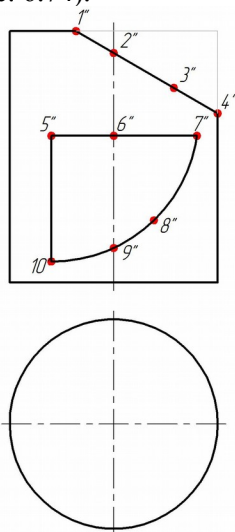


Рисунок 6.74 — Вибір необхідних точок

Бокова поверхня циліндра являє собою горизонтально-проекціювальну поверхню. Отже, горизонтальні проєкції точок

співпадають з горизонтальною проекцією бічної поверхні циліндра (з колом). Тому всі проекції точок ($1-10$), обрані на поверхні циліндра будують за допомогою лінії зв'язку.

Для знаходження профільних проекцій точок, на горизонтальній проекції циліндра вимірюють відстані від осі симетрії до горизонтальних проекцій точок в обидві сторони (y). Ці відстані відкладають на профільній проекції в обидві сторони від осі симетрії, за проекційним зв'язком.

Для побудови відмічають на зрізі та отворі крайні точки – точки перетину складових отвору ($1, 4, 5, 7, 10$).

Знаходять горизонтальні проекції точок на вигляді зверху. Для цього з фронтальних проекцій точок ($1'', 4'', 5'', 7'', 10''$) проводять вертикальні проекційні лінії зв'язку до перетину з колом (горизонтальною проекцією бічної поверхні циліндра) і отримують горизонтальні проекції точок ($1', 4', 5', 7', 10'$). Профільні проекції ($1''', 4''', 5''', 7''', 10'''$) побудовані за допомогою горизонтальних ліній зв'язку проведених з фронтальних проекцій точок і координатного метода (рис. 6.75).

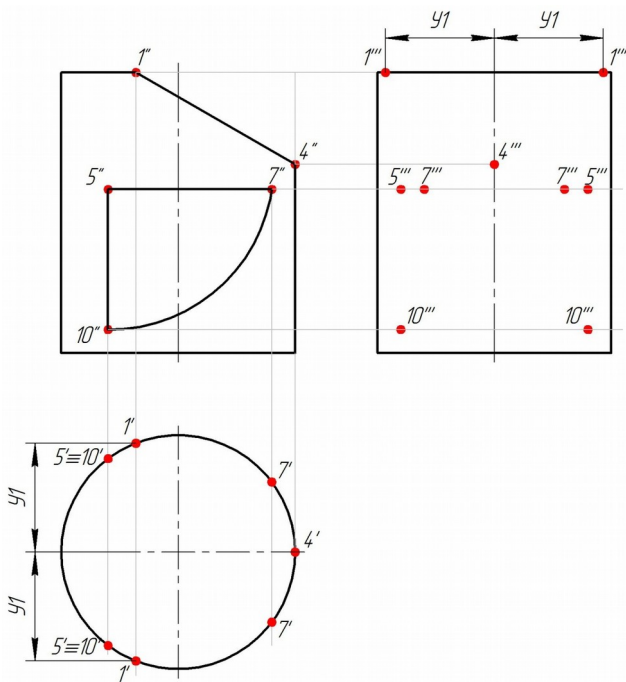


Рисунок 6.75 – Побудова проекцій точок

Другим етапом позначають обов'язкові точки, що належать твірним контуру (2, 6, 9), так як циліндр відноситься до тіл обертання.

Горизонтальні проекції точок (2', 6', 9') знайдені за допомогою ліній зв'язку.

Профільні проекції точок (2''', 6''', 9''') отримують на перетині горизонтальних ліній зв'язку, проведених з фронтальних проекцій точок (2'', 6'', 9''), з бічною поверхнею циліндра (рис. 6.76)

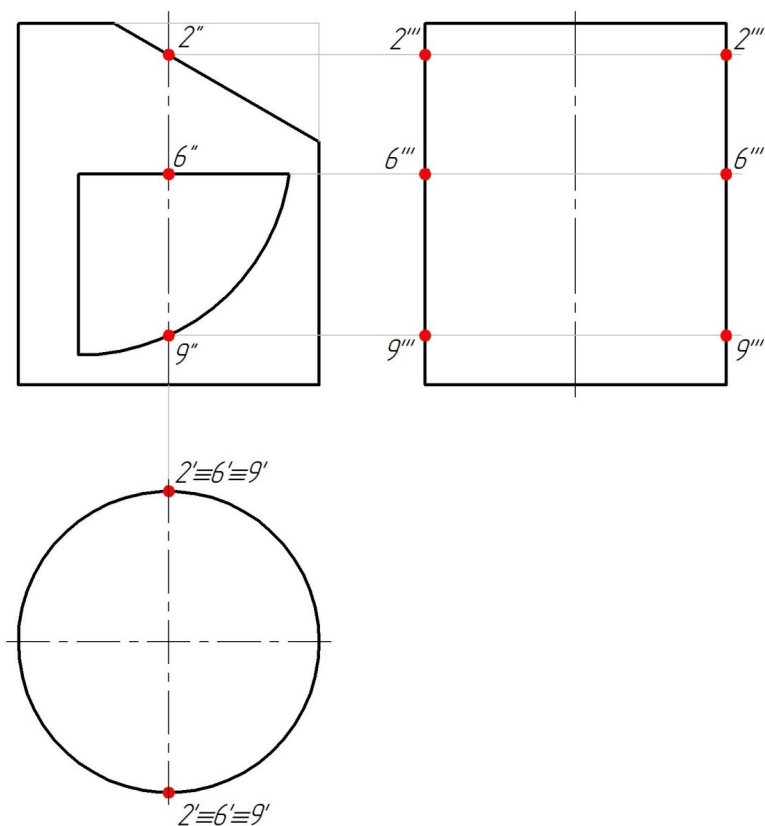


Рисунок 6.76 – Побудова проєкцій точок

На останньому етапі відмічають допоміжні точки (3, 8).

З фронтальних проєкцій точок (3'', 8'') проводять вертикальні лінії зв'язку до перетину з горизонтальною проєкцією циліндра (коло) та отримують горизонтальні проєкції точок (3', 8'). Профільні проєкції (3''', 8''') побудовані за допомогою горизонтальних ліній зв'язку проведених з фронтальних проєкцій точок і координатного метода (рис. 6.77).

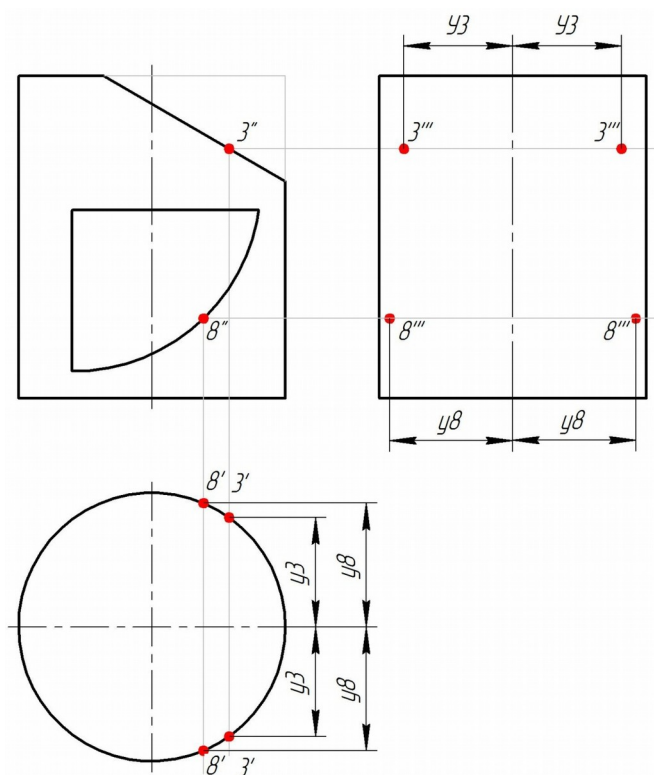


Рисунок 6.77 – Побудова проекцій точок

Послідовно з'єднують всі точки побудованої лінії перерізу у вигляді плавної кривої лінії з врахуванням видимості елементів: видимі лінії позначають суцільною основною лінією, невидимі – штриховою лінією(рис. 6.78).

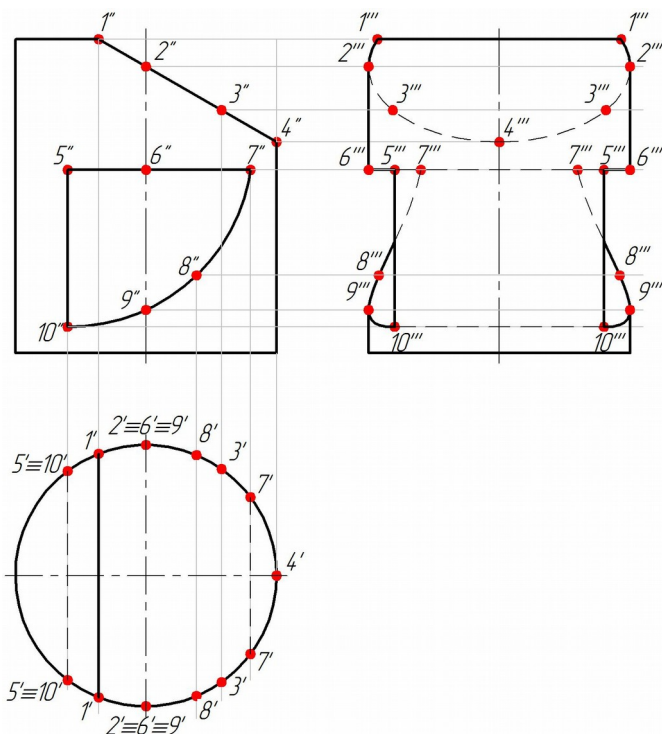


Рисунок 6.78 – Побудова профільної проекцій циліндра

Побудову перерізу $A-A$ фронтально-проекціовальною площиною починають з визначення точок на лінії перерізу. Ці точки позначені літерами латинського алфавіту (рис. 6.79).

Переріз $A-A$ являє собою еліпс, так як січна площина нахилена до осі. Тому відмічають необхідні точки на поверхні циліндра ($A-E$).

Спочатку будують горизонтальні проекції зазначених точок, які створюють горизонтальну проекцію фігури перерізу. Точки $A-E$ лежать на бічній поверхні циліндра, тому горизонтальні проекції точок знаходяться на горизонтальній проекції бічної поверхні циліндра (колі).

Проведять вертикальні лінії зв'язку до перетину з колом і отримують горизонтальні проекції точок $A'-E'$.

На горизонтальній проекції, накладена фігура перерізу від площини $A-A$, виділена суцільною тонкою лінією і отримана фігура заштрихована під кутом 45° вважаючи, що геометричне тіло металеве.

Фігура перерізу має розрив в області отвору ($B''-C''$). В зв'язку з цим на горизонтальній проекції фігури перерізу в цій області лінії штриховки не наносять.

На рисунку 6.79 побудована натуральна величина фігури перерізу $A-A$ на вільному місці поля креслення з поворотом, позначивши це відповідно до ГОСТ 2.305- 2008.

Слід січної площини $A-A$ переносять паралельно на місце побудови перерізу і застосовують метод обертання разом з характерними та проміжними точками, зберігаючи натуральні відстані з площини $A-A$. На перпендикулярах, проведених з цих точок, відкладають відстань від осі симетрії до точки в обидві сторони (y) (рис. 6.79).

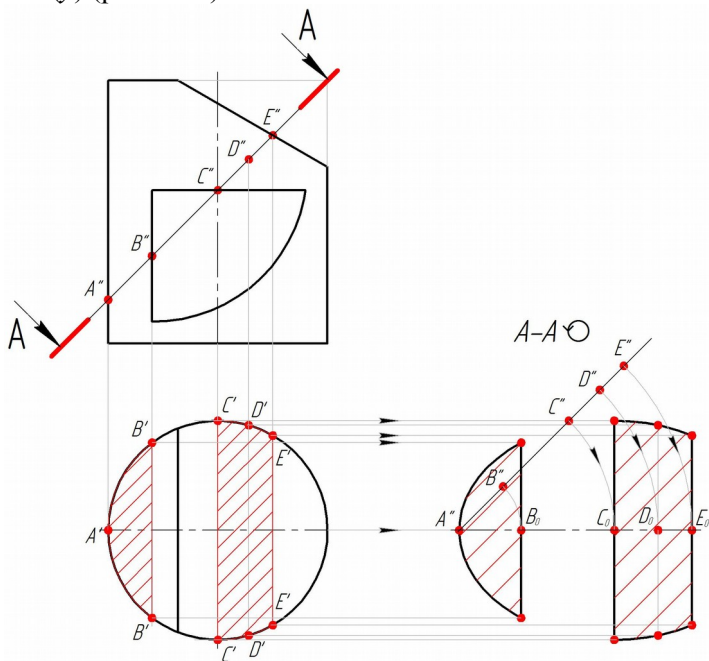


Рисунок 6.79 – Визначення дійсної фігури перерізу циліндра

Побудову перерізу $B-B$ горизонтально-проекційовальною площиною починають з визначення точок на лінії перерізу.

Переріз $B-B$ являє собою прямокутник, так як січна площина перпендикулярна до основи. Відмічають характерні точки на елементах циліндра ($A-F$). Знаходять фронтальні проекції позначених точок. На фронтальній проекції циліндра, накладена фігура перерізу від площини $B-B$, виділена суцільною тонкою лінією і отримана фігура заштрихована під кутом 45° .

На рисунку 6.80 побудована натуральна величина фігури перерізу $B-B$ на вільному місці поля креслення з поворотом, позначивши це відповідно до ГОСТ 2.305-2008.

Слід січної площини $B-B$ переносять паралельно на місце побудови перерізу і застосовують метод обертання разом з характерними та проміжними точками, зберігаючи натуральні відстані з площини $B-B$. На перпендикулярах, проведених з цих точок, відкладають відстань від осі симетрії до точки в обидві сторони (y) (рис. 6.80).

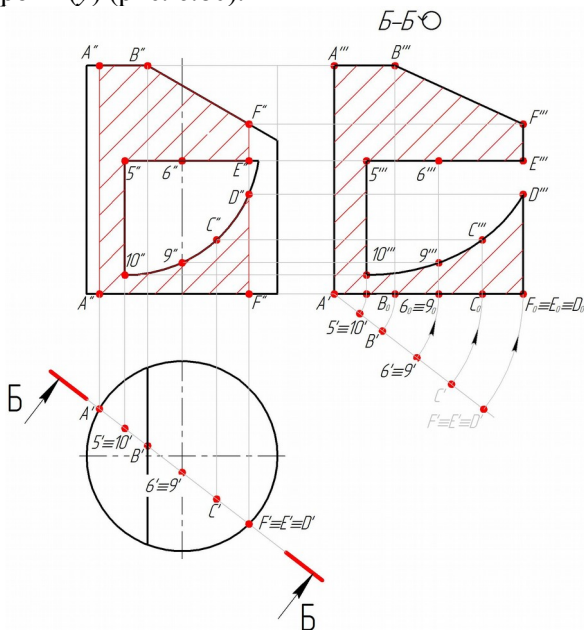


Рисунок 6.80 – Визначення дійсної фігури перерізу циліндра

АксонOMETричне зображення циліндра будують в прямокутній ізометрії відповідно ДСТУ ГОСТ 2.317:2014.

На ізометричних осях будують нижню основу циліндра (еліпс). Побудова ізометричної проекції кола (еліпс) приведена на рис.6.52,6.53. З точки перетину ізометричних осей нижньої основи відкладають висоту циліндра та будують верхню основу.

Побудову ізометрії точок виконують координатним методом та розглядають на прикладі побудови точки I .

Відповідні координати для побудови обирають з ортогональних проекцій креслення. Потім на осі OX відкладають координату x точки I . Через цю точку проводять пряму, паралельну осі OY до перетину з основою циліндра (еліпс). Через отримані точки проводять прямі паралельні осі OZ , на яких відкладають висоту– координату z точки I (рис 6.81).

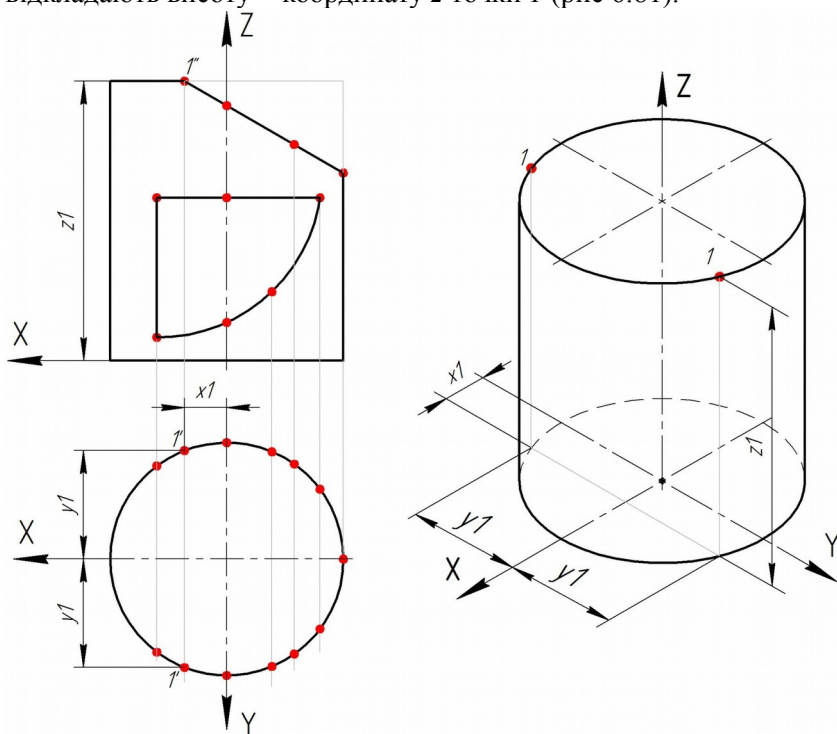


Рисунок 6.81 – Побудова ізометрії точок

Всі інші точки знаходять аналогічно.

Послідовно з'єднують всі отримані ізометричні проєкції точок.

Невидимі лінії отвору циліндра показують штриховою лінією (рис. 6.82).

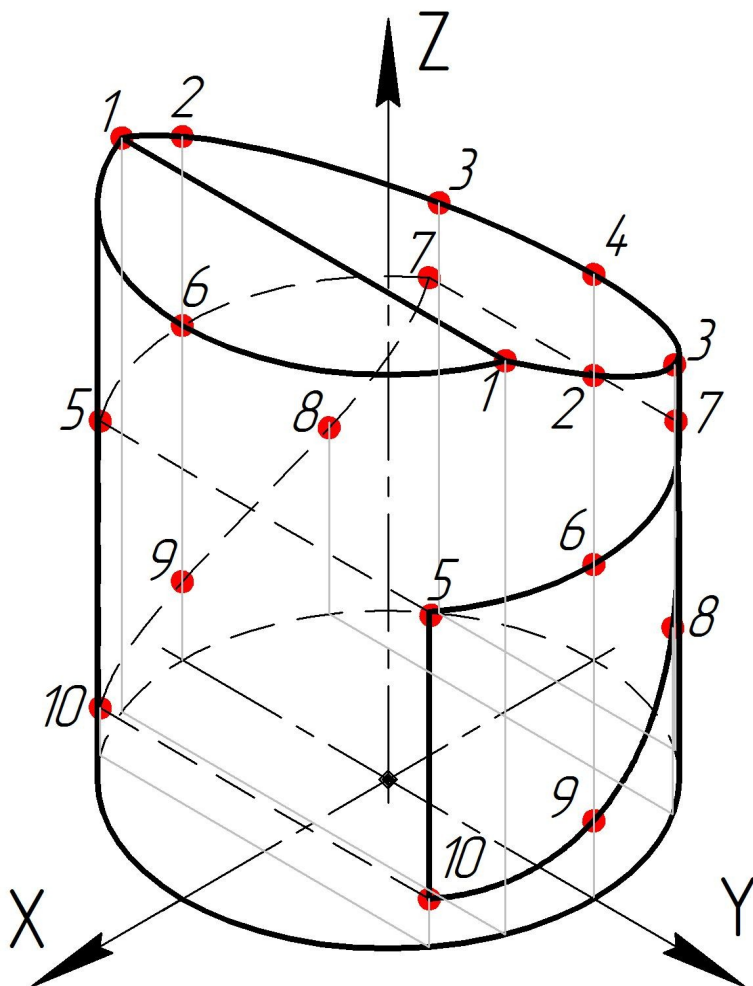


Рисунок 6.82 – Ізометрична проекція циліндра

6.5 Сфера з отвором

Завдання:

- за двома заданими (фронтальною та горизонтальною) проекціями сфери з наскрізним отвором побудувати профільну проекцію сфери (рис. 6.83);
- побудувати натуральну фігуру перерізу горизонтально-проекціовальною або фронтально-проекціовальною площиною;
- побудувати аксонометричне зображення сфери з наскрізним отвором.

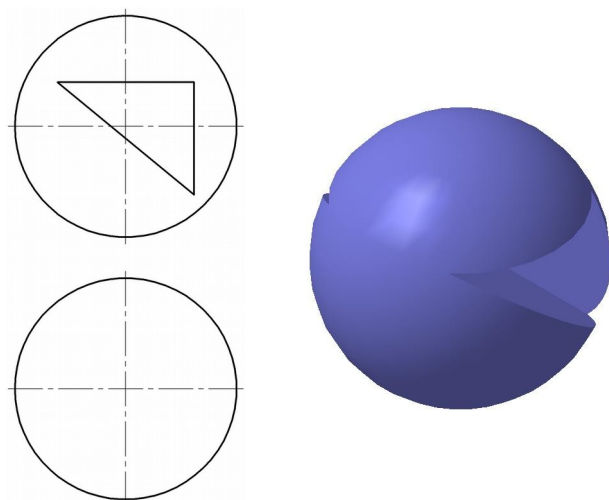


Рисунок 6.83 – Завдання до прикладу 5

При аналізуванні складових площин отвору та їх фігур перерізу визначають необхідну кількість точок для побудови наскрізного отвору.

При перерізі сфери будь якою площиною утворюється коло.

Наскрізний отвір (точки 1-9), утворений трьома площинами, для побудови якого позначають необхідні, а саме: характерні або опорні точки, проміжні або допоміжні точки (рис. 6.85).

Визначають характер заданого отвору на головному вигляді геометричного тіла.

Площина (точки $1-2$), яка розташована паралельно горизонтальній площині проєкцій проєкціюється в дійсну величину. В перерізі утворюється коло з радіусом, отриманим в цьому перерізі від осі сфери до обрису, а в профільній проєкції цей переріз проєкціюється у вигляді прямої лінії. Для побудови обирають крайні точки - 1 , 2 , та точку, що лежить на твірній - 4 .

Через фронтальні проєкції точок $1''$, $4''$, $2''$ проведена січна площина, яка розташована паралельно горизонтальній площині проєкцій. Горизонтальна проєкція цієї площини являє собою коло. Горизонтальні проєкції точки $1'$, $4'$, $2'$ знаходять на перетині вертикальних ліній зв'язку з даним колом.

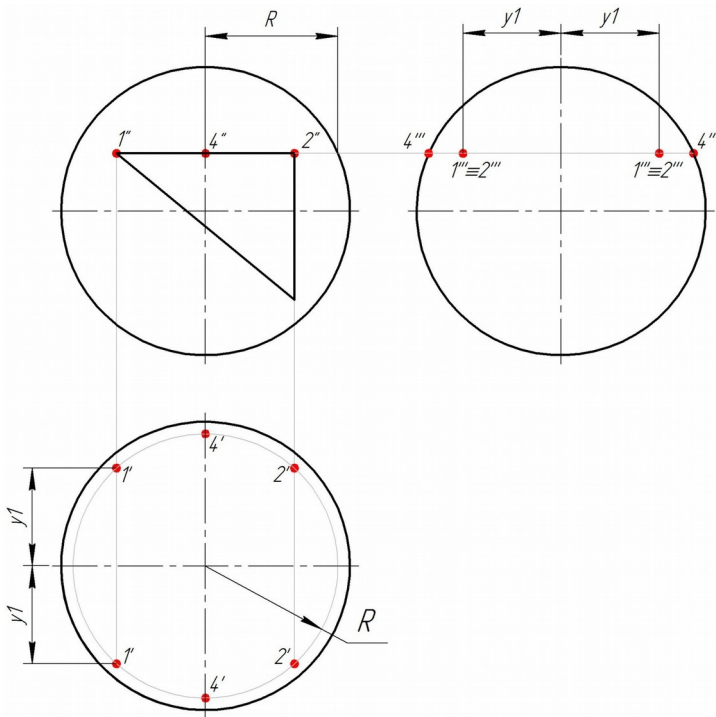


Рисунок 6.84 – Побудова проєкцій точок

Для знаходження профільних проекцій точок, на горизонтальній проекції вимірюють відстані від горизонтальної осі симетрії до точок в обидві сторони (y). Ці відстані відкладають на профільній проекції в обидві сторони від вертикальної осі симетрії, за проекційним зв'язком (рис. 6.84).

Площина (точки 1-3) є фігура перерізу площин з геометричним тілом, яка проектується у криву другого порядку (еліпс), так як вона нахилена відносно фронтальної площини проекцій. Для побудови обирають (окрім крайніх точок 1 і 3) точки, що лежать на твірній сфери (точки 6, 7) і допоміжні (точки 8,9) (рис. 6.85).

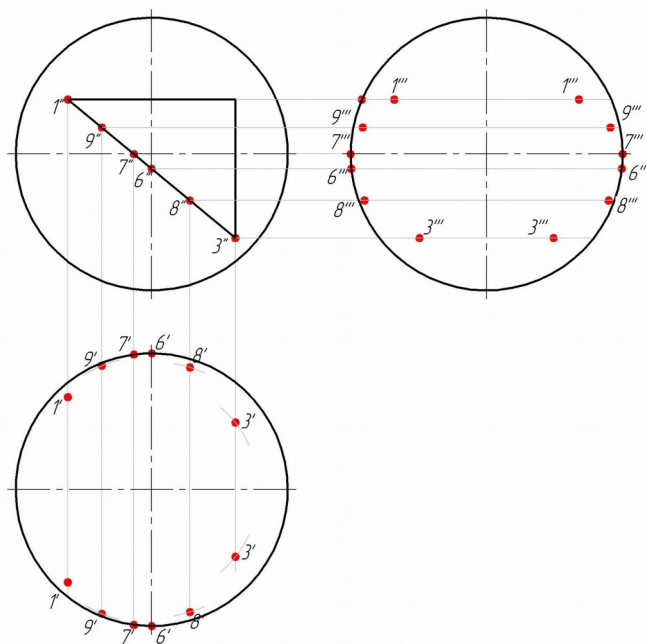


Рисунок 6.85 – Побудова проекцій точок

Площина (точки 2-3), розташована перпендикулярно горизонтальній площині проекцій. В горизонтальній проекції переріз проектується у вигляді прямої лінії, а в профільній — у вигляді кола з радіусом, отриманим в цьому перерізі від осі сфери

до обрису. Тому були обрані крайні точки - 2, 3, та точка що лежить на твірній – 5 (рис. 6.86).

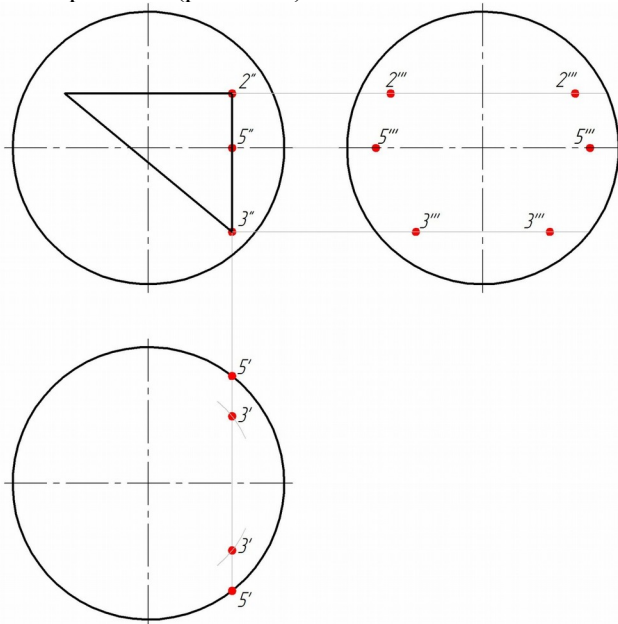


Рисунок 6.86 – Побудова проєкцій точок

Всі точки отвору належать боковій поверхні сфери. Для знаходження горизонтальних проєкцій точок використовують метод січних площин.

Для знаходження профільних проєкцій точок, на горизонтальній проєкції сфери виміряють відстані від горизонтальної осі симетрії до горизонтальних проєкцій точок в обидві сторони (y), та відкладають їх на профільній проєкції в обидві сторони від вертикальної осі симетрії, за проєкційним зв'язком.

Послідовно з'єднані всі точки побудованої лінії перерізу у вигляді плавної кривої лінії (за допомогою лекал), з врахуванням видимості елементів: видимі лінії позначені суцільною основною лінією, невидимі – штриховою лінією (рис. 6.87).

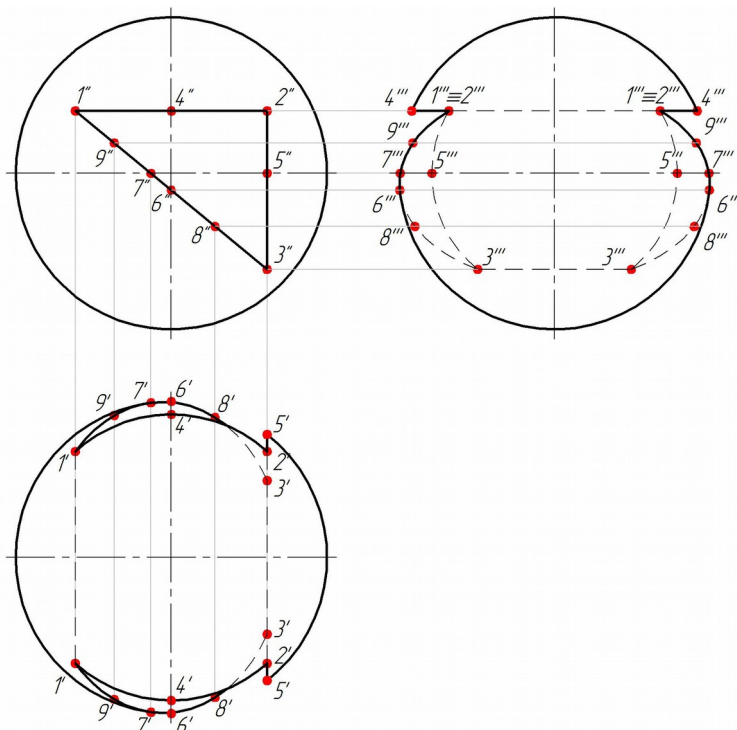


Рисунок 6.87 – Побудова профільної проекцій сфери

Наступним кроком розглянута побудова фігури перерізу сфери горизонтально-проекціуючою площиною $A-A$, яка почата з визначення точок на лінії перерізу.

Переріз $A-A$ являє собою еліпс. Відмічені характерні точки на елементах сфери ($K'-F'$).

Знайдені фронтальні проекції позначених точок ($K''-F''$), які створюють фронтальну проекцію фігури перерізу, методом січних площин.

На фронтальній проекції, накладена фігура перерізу від площини $A-A$, виділена суцільною тонкою лінією і отримана фігура заштрихована під кутом 45° , виключая контур отвору.

На рисунку 6.88 побудована натуральна величина фігури перерізу $A-A$ на вільному місці поля креслення з поворотом, позначивши це відповідно до ГОСТ 2.305-2008.

Слід січної площини $A-A$ перенесений паралельно на місце побудови перерізу і застосований метод обертання разом з характерними та проміжними точками, зберігаючи натуральні відстані з площини $A-A$. На перпендикулярах, проведених з цих точок, відкладена висота, яка береться з фронтальної проекції сфери (рис. 6.88).

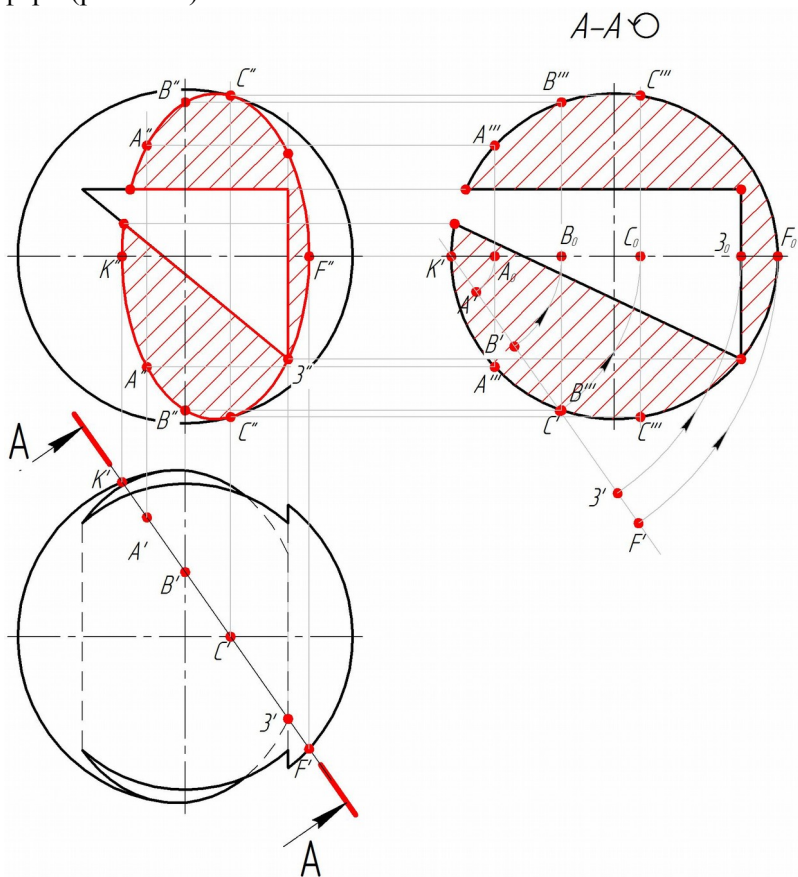


Рисунок 6.88 – Визначення дійсної фігури перерізу сфери

Аксометричне зображення сфери побудовано в прямокутній ізометрії відповідно ДСТУ ГОСТ 2.317:2014.

Сфера в прямокутній ізометрії зображується колом, діаметр якого дорівнює 1,22 істинного діаметра сфери.

Побудова ізометрії точок виконана координатним методом.

Розглянута побудова ізометрії точки I .

Відповідні координати для побудови обрані з ортогональних проєкцій креслення. На осі OX відкладені координати x точки I . Через отриману точку проведена пряма, паралельна осі OY . На цій прямій відкладена координата y точки I . Через отриману точку проведена пряма паралельна осі OZ , на якій відкладена висота (zI).

Всі інші точки знайдені аналогічно, враховуючи знаки координат z (рис. 6.89).

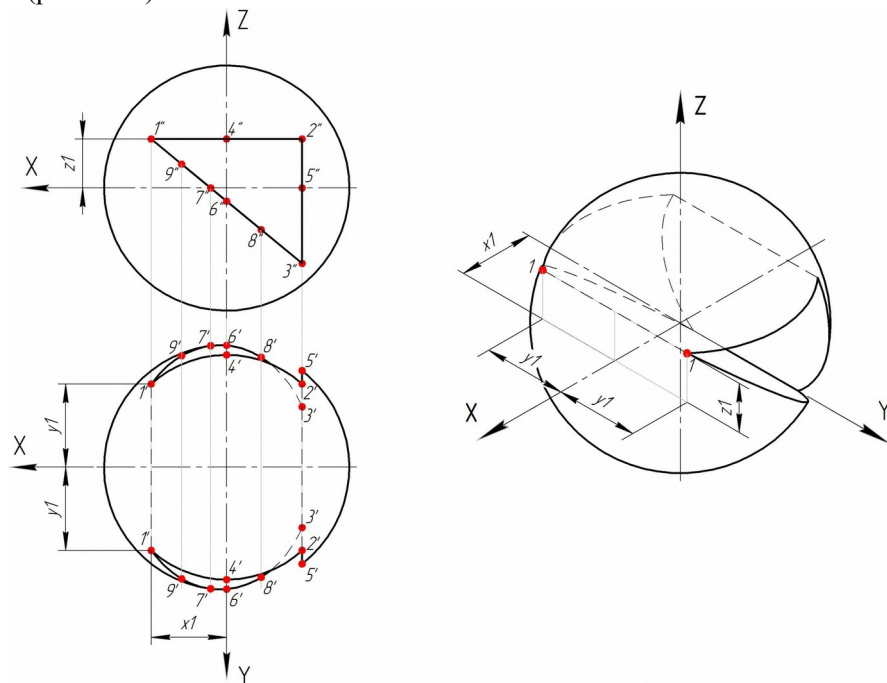


Рисунок 6.89 – Побудова ізометрії точок

Послідовно з'єднані всі отримані ізометричні проєкції точок. Невидимі лінії отвору циліндра показані штриховою лінією (рис 6.90).

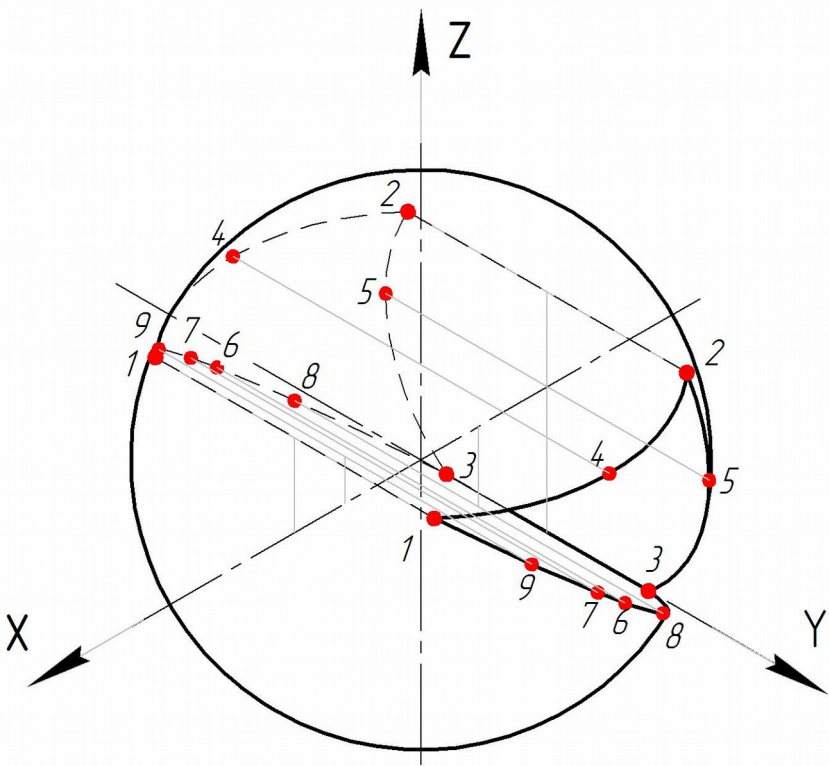


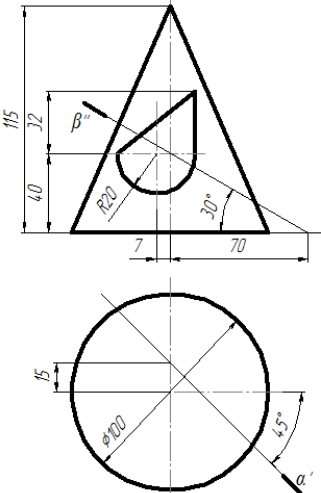
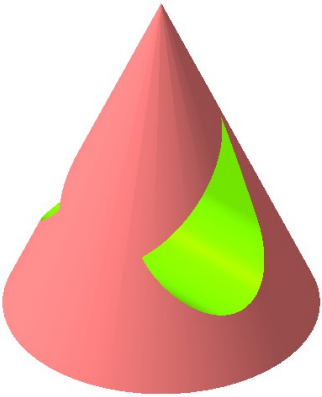
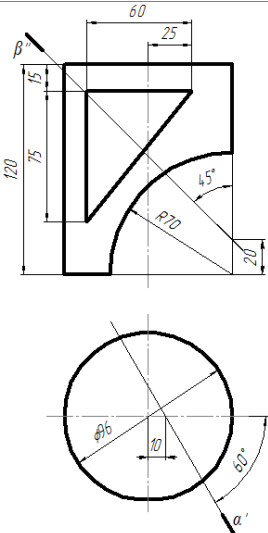
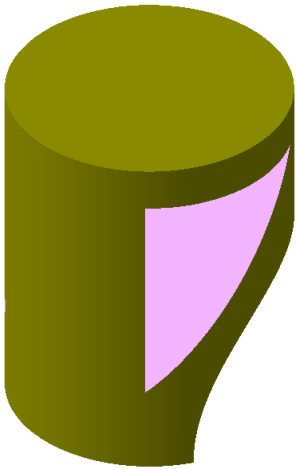
Рисунок 6.90 – Ізометрична проєкція сфери

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Гавров, Є.В.** Елементи нарисної геометрії. Курс лекцій. [Текст]: Посібник. / Є.В.Гавров. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2004 – 181 с.
2. **Антонович, Є.А.** Нарисна геометрія. Практикум [Текст]: Навч. посібник. / Є.А. Антонович, Я.В. Васишин, О.В. Фольта; під заг. ред. Є.А. Антонович. – Львів: Світ, 2004. – 528 с.
3. **Михайленко, В.Є.** Інженерна та комп'ютерна графіка [Текст]: підручник / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов; під заг. ред. В.Є. Михайленко. – Київ: Каравела, 2010. – 360 с.
4. Нарисна геометрія [Текст]: підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстіфеев, С.М.Ковальов, О.В.Кащенко; під заг. ред. В.Є. Михайленко. – Київ: Видавничий дом «Слово», 2013. – 304 с.
5. **Хаскін, А.М.** Креслення [Текст]: підручник / А.М. Хаскін. – Київ: Вища школа, 1976. – 436 с.
6. **ГОСТ 2.307–2011.** Нанесение размеров и предельных отклонений [Текст]. – Взамен ГОСТ 2.307-68 ; введ. 2012–01–01. – М.: Росстандарт, 2011. – 33 с. – (Единая система конструкторской документации).
7. **ДСТУ 3321–96.** Терміни та визначення основних понять [Текст]. – К. : Держстандарт України, 1996. – (Система конструкторської документації).
8. **ДСТУ 3321–96.** Терміни та визначення основних понять. [Текст]. – К. : Держстандарт України, 1996. – (Система конструкторської документації).
9. **ГОСТ 2.301–68 ... 2.317–73.** Общие правила выполнения чертежей. [Текст]. – Госкомстат, 1970. – 220 с. – (Единая система конструкторской документации).

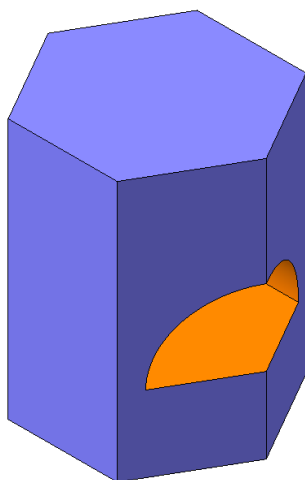
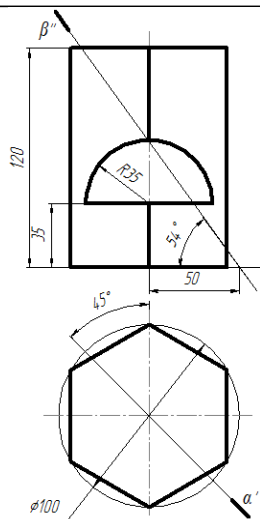
Додаток А

Таблиця А.1 – Варіанти завдань до теми: «Геометричне тіло з отвором»

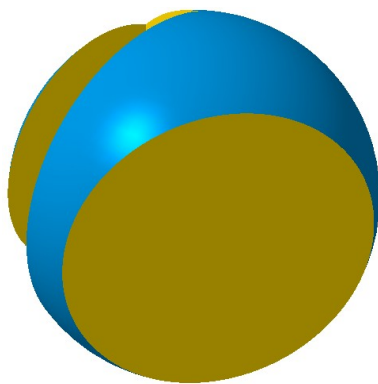
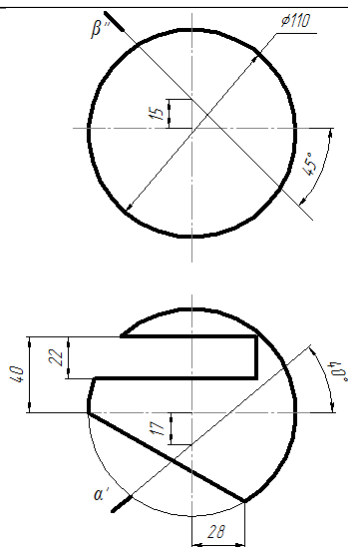
Варіант 1	
	
Варіант 2	
	

Продовження табл. А.1

Варіант 3

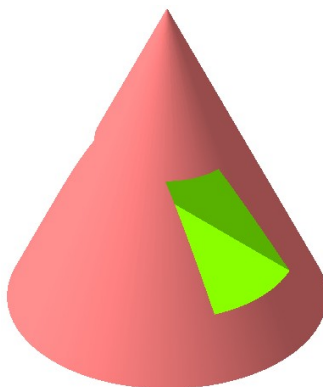
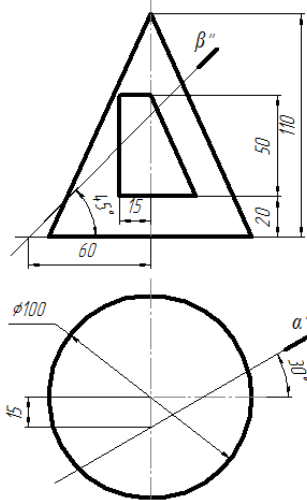


Варіант 4

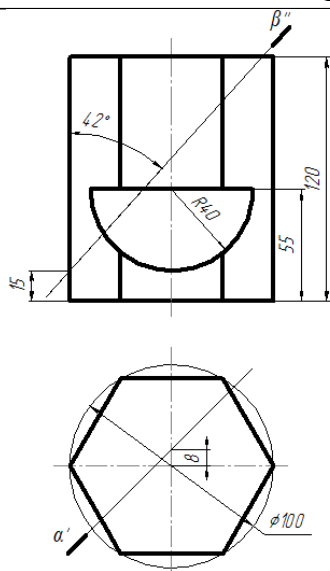


Продовження табл. А.1

Варіант 5

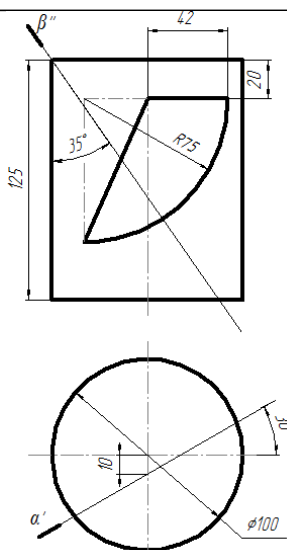


Варіант 6

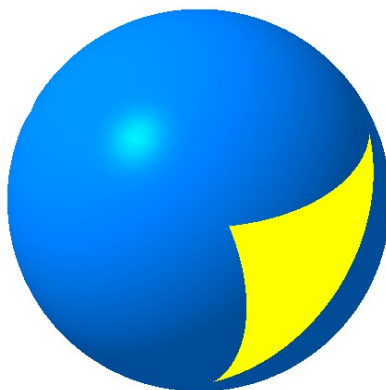
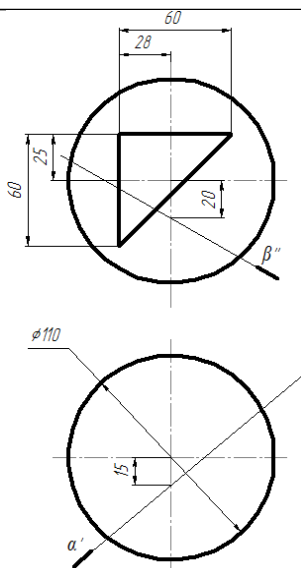


Продовження табл. А.1

Варіант 7

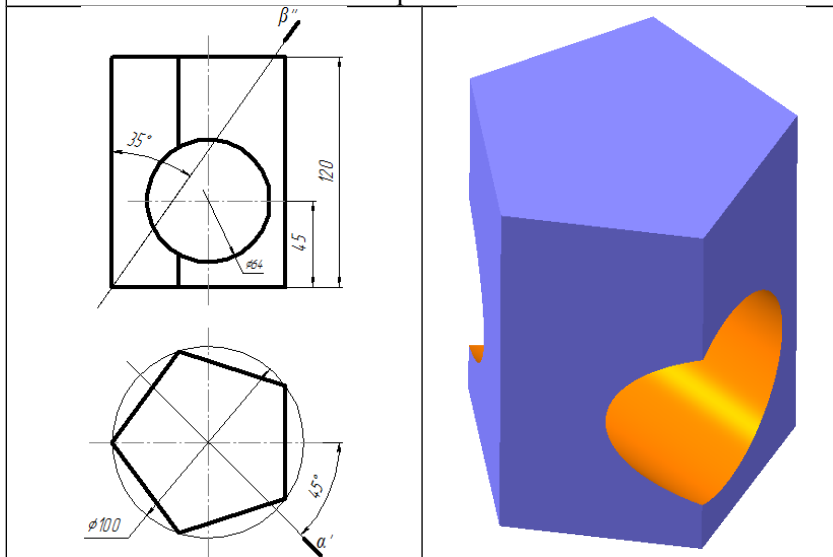


Варіант 8

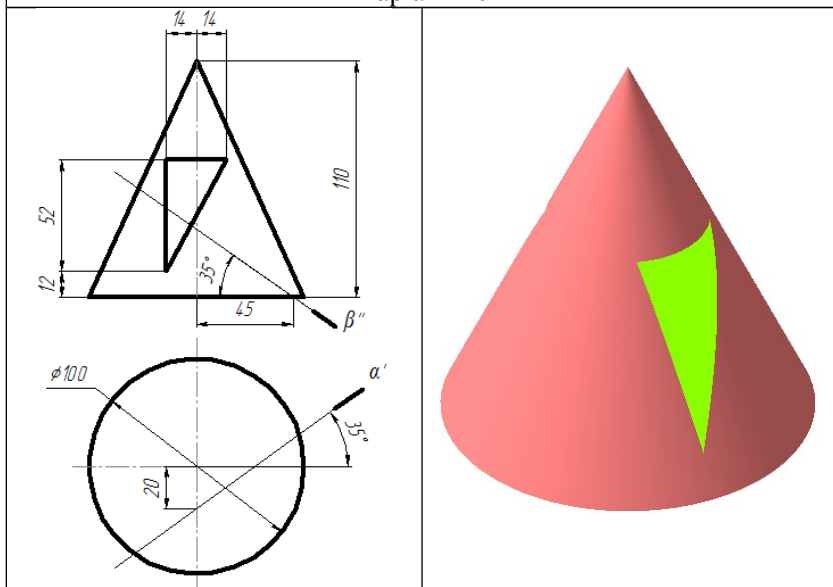


Продовження табл. А.1

Варіант 9

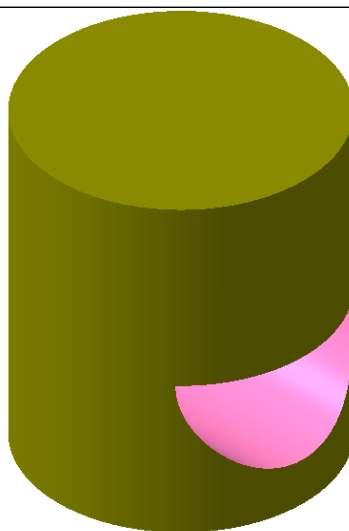
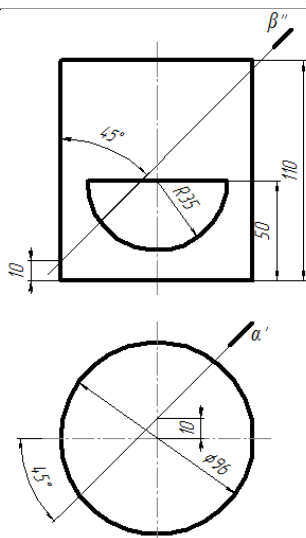


Варіант 10

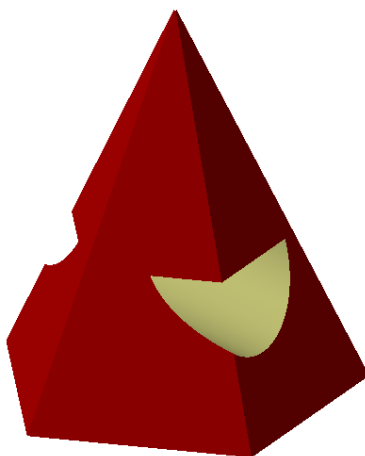
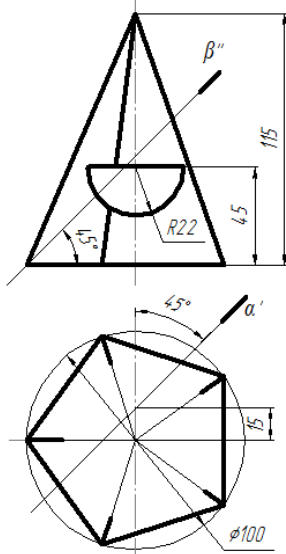


Продовження табл. А.1

Варіант 11

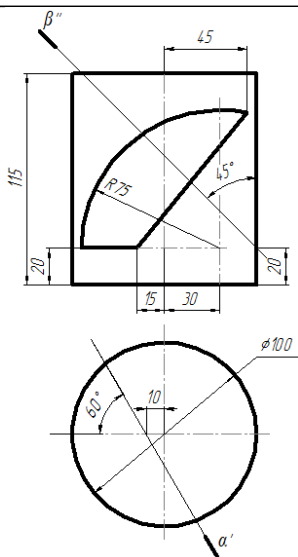


Варіант 12

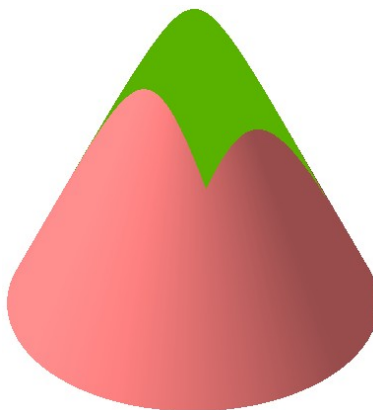
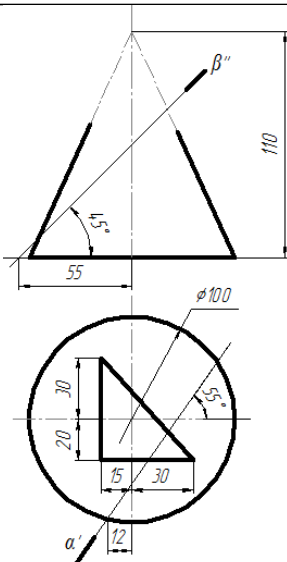


Продовження табл. А.1

Варіант 13

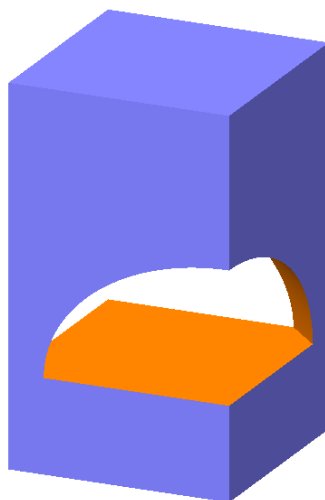
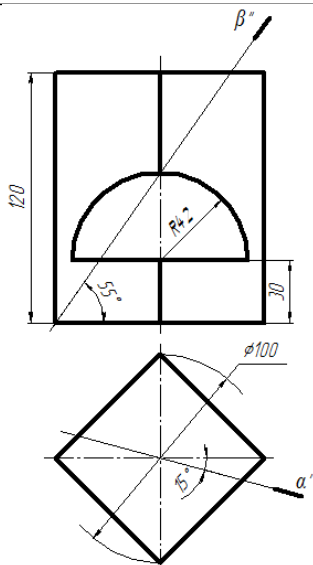


Варіант 14

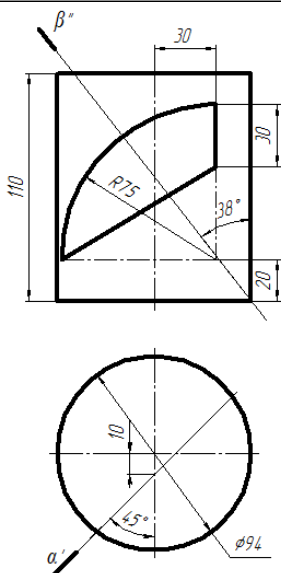


Продовження табл. А.1

Варіант 15

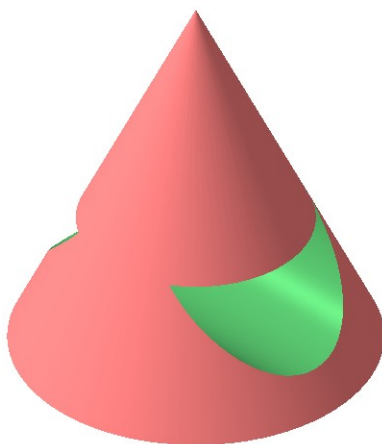
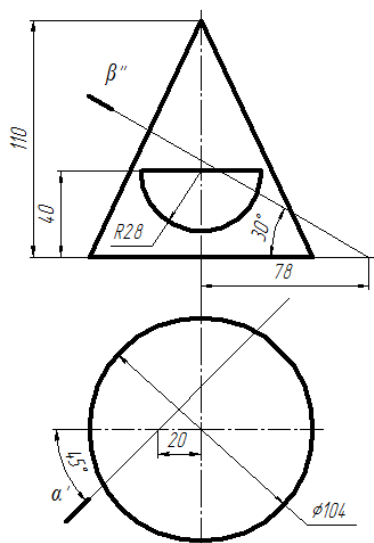


Варіант 16

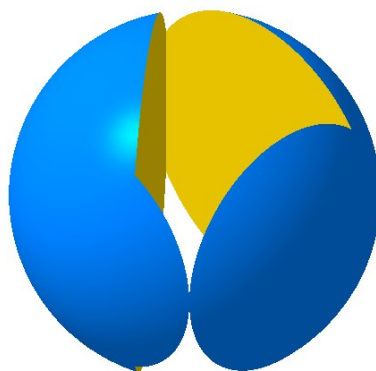
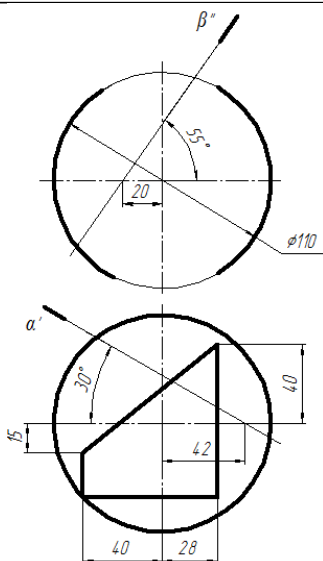


Продовження табл. А.1

Варіант 17

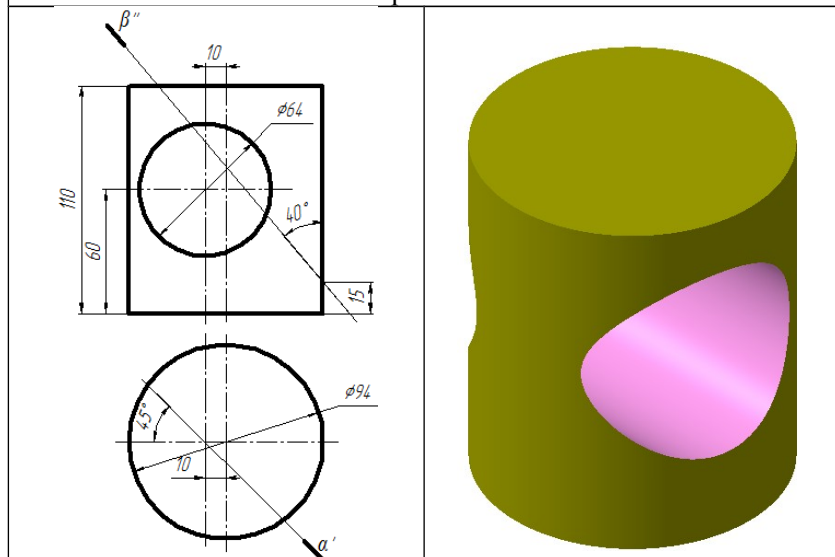


Варіант 18

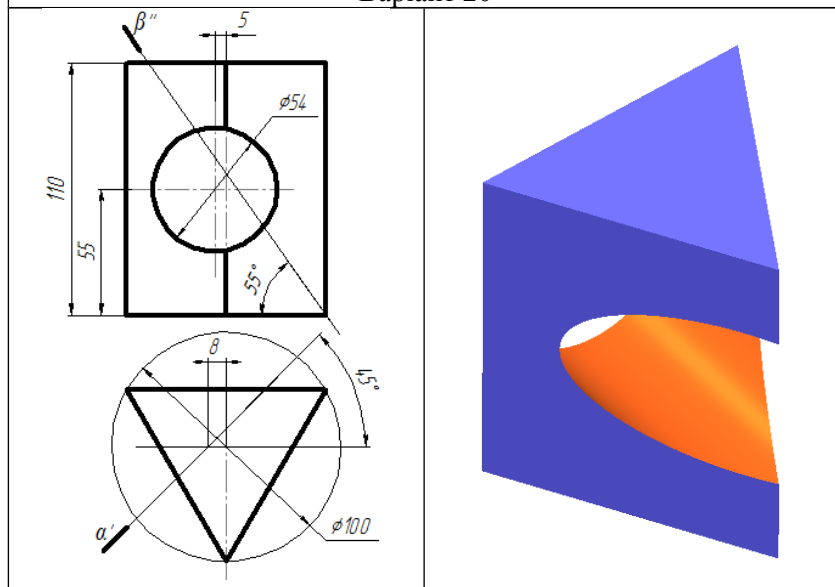


Продовження табл. А.1

Варіант 19

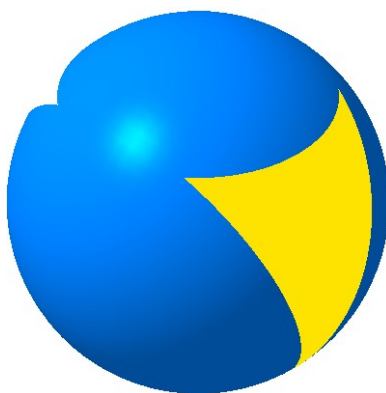
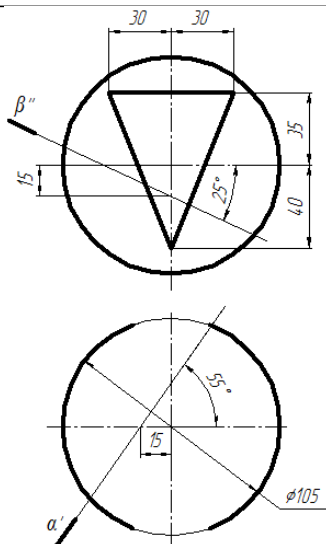


Варіант 20

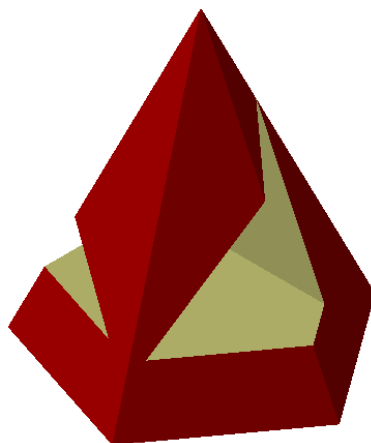
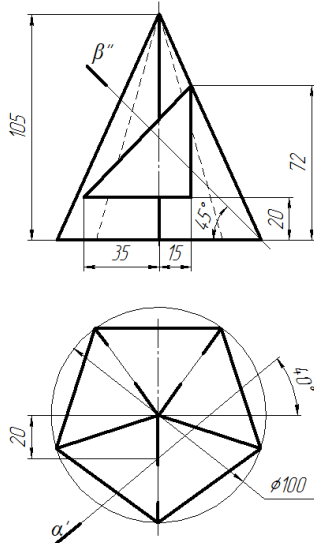


Продовження табл. А.1

Варіант 21

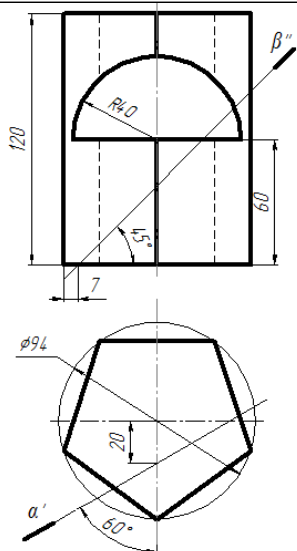


Варіант 22

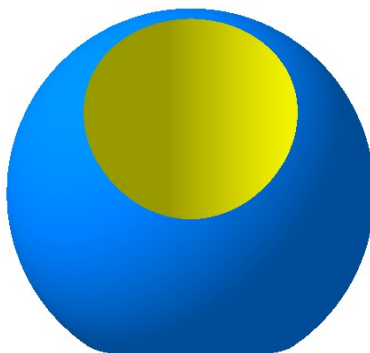
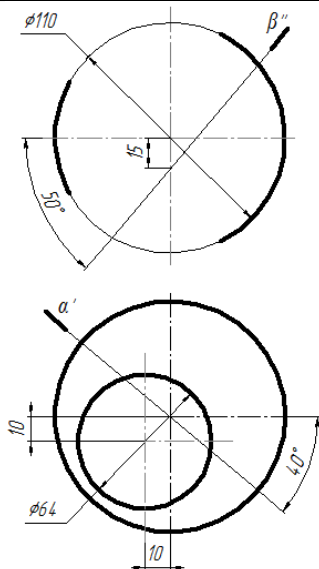


Продовження табл. А.1

Варіант 23

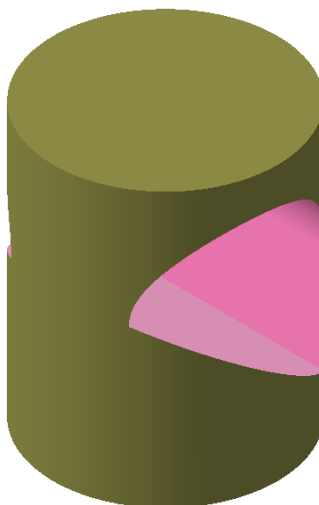
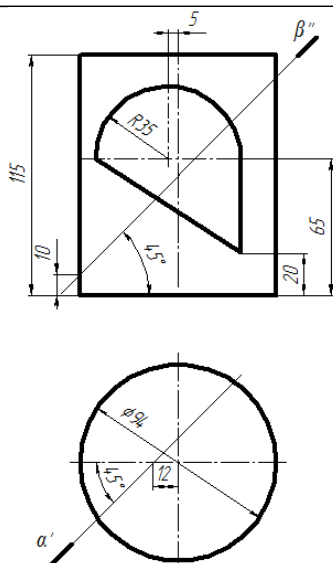


Варіант 24

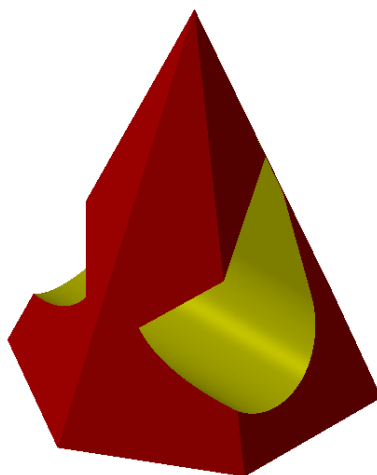
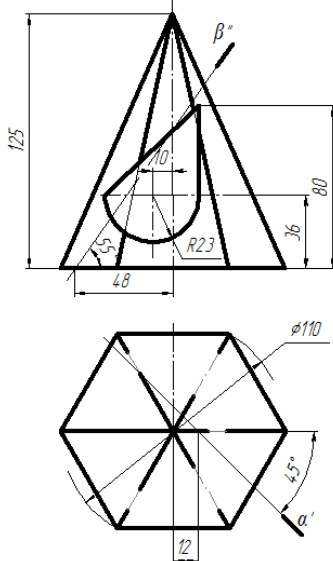


Продовження табл. А.1

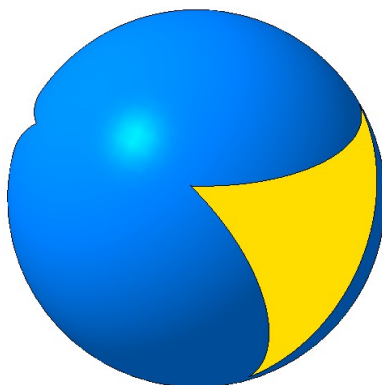
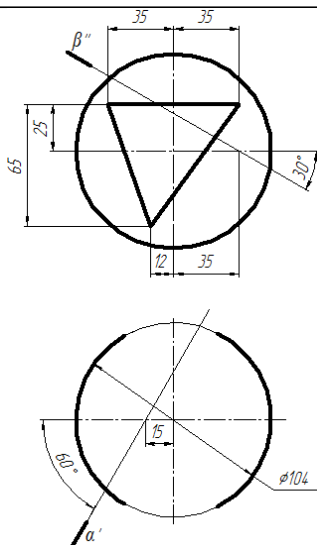
Варіант 25



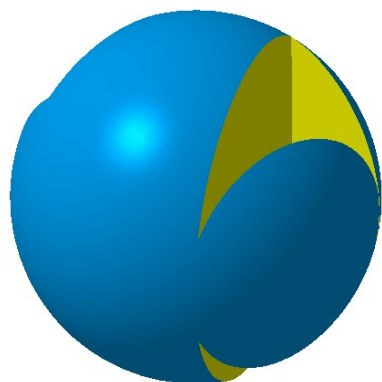
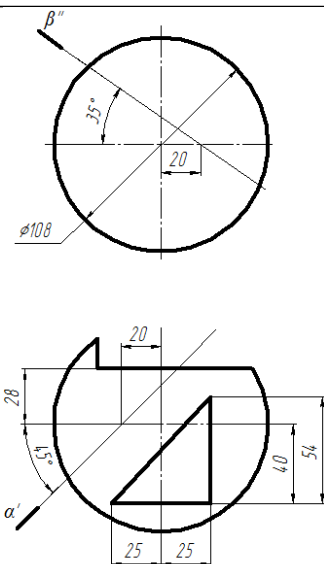
Варіант 26



Вариант 27



Вариант 28



Навчальне видання

**БОВКУН Світлана Анатоліївна
СКОРОБОГАТА Маріанна Василівна
КОРНІЄНКО Олена Борисівна**

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ. ПОВЕРХНІ

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір: *Корнієнко О.Б.*
Комп'ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 19.09.2020. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,73.
Тираж 100 прим. Зам. № 597.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.