

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. П. Шпачук, М. А. Засядько

Конспект лекцій
з курсу
«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

Спецкурс

Частина 1

**(для студентів 3-4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямом 6.060101 “Будівництво”)**

Харків
ХНУМГ
2014

Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» Спецкурс.
Частина 1 (для студентів 3-4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 «Будівництво») / В. П. Шпачук, М. А. Засядько; Харк.
нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х.: ХНУМГ, 2014. – 55 с.

Автори: В. П. Шпачук,
М. А. Засядько

Рецензент: завідувач кафедри будівельних конструкцій
д.т.н., проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 30.08.12 р

ЗМІСТ

	Стор.
1. Загальні визначення	3
2. Основи методу сил.....	5
2.1. Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил	5
2.2. Перевірка правильності обчислень. Переміщення у статично невизначуваних системах	13
Запитання для самоконтролю	15
3. Урахування симетрії в методі сил	15
Запитання для самоконтролю	21
4. Особливості розрахунку статично невизначуваних стержневих систем методом сил .	22
4.1. Розрахунок статично невизначуваних ферм	22
4.2. Розрахунок двохарної арки	25
4.3. Розрахунок безшарної арки та тонкостінних кілець.....	29
4.4. Попередньо напружені системи	34
Запитання для самоконтролю	37
5. Метод переміщень	38
5.1. Припущення. Кількість невідомих методу переміщень	38
5.2. Суть методу	39
5.3. Розрахунок симетричних систем методом переміщень	46
5.4. Розрахунок рам з похилими стояками	47
Запитання для самоконтролю	50
6. Вибір методу розрахунку. Змішаний метод	50
6.1. Вибір методу розрахунку	50
6.2. Змішаний метод.....	52
Запитання для самоконтролю	55
Список джерел	55

1. ЗАГАЛЬНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Статично невизначуваними називають системи, зусилля в яких неможливо обчислити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги. Це пояснюється наявністю у статично невизначуваній системі зайвих в'язей, тобто в'язей понад мінімальну їх кількість, необхідну для геометричної незмінюваності системи. Так, в рамі, наведеній на рис. 1.1, *а* для забезпечення геометричної незмінюваності достатньо мати три опорні в'язі, наприклад такі, що відповідають затисненню в точці *A*, отже, дві інші в'язі в точці *B* зайві.

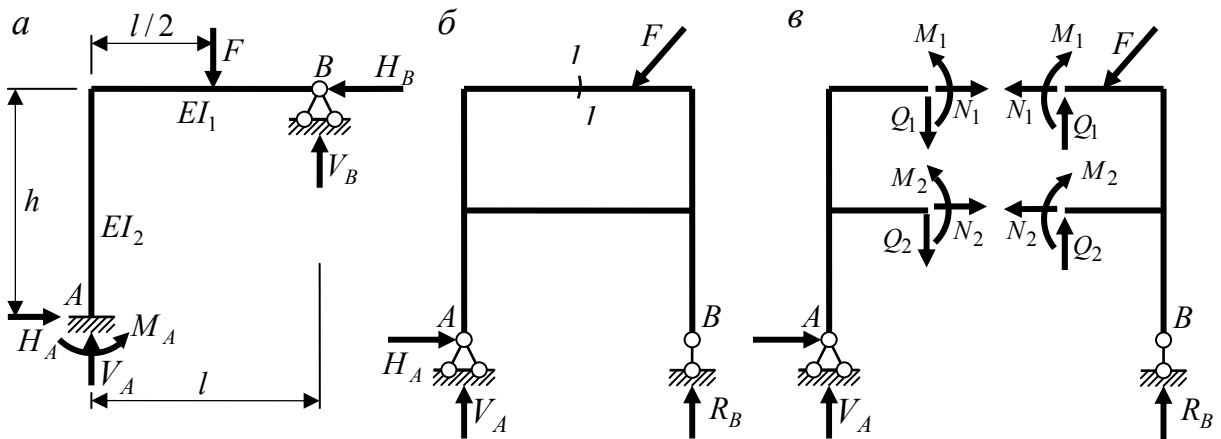


Рис. 1.1

Для забезпечення геометричної незмінюваності можна використати й інші опорні в'язі, наприклад, нерухому шарнірну опору в точці *B* та одну з в'язей в точці *A*. Тоді зайвими будуть дві інші опорні в'язі в точці *A*. Слід зазначити, що поняття "зайві в'язі" не слід розуміти буквально. Наявність цих в'язей робить систему більш жорсткою і в багатьох випадках дозволяє одержати більш раціональний розподіл зусиль.

Кількість зайвих в'язей n , що визначає *ступінь статичної невизначуваності системи*, можна виразити через кількість ступенів свободи системи

$$n = -W. \quad (1.1)$$

Так, для рами, показаної на рис. 1.1, *а*, за формулою Чебишова

$$W = 3D - 2 - C_o = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2 \text{ або } n = 2.$$

Для розглянутої рами характерним є те, що після визначення опорних реакцій усі внутрішні зусилля можна знайти з рівнянь статики. Таку систему називають *зовнішньо статично невизначуваною*. На відміну від неї в рамі на рис. 1.1, *б* три опорні реакції можна визначити з рівнянь рівноваги. Але при визначенні зусиль, наприклад, в перерізі I-I, доводиться розрізати замкнений контур ще в одному місці (рис. 1.1, *в*). Отже, маємо статично невизначувану задачу, оскільки шість зусиль (рис. 1.1, *в*) не можна знайти з трьох умов рівноваги. Така система називається *внутрішньо статично невизначуваною*.

У більшості випадків статично невизначувані системи містять як зовнішні, так і внутрішні зайві в'язі.

Як видно з розглянутого прикладу (рис. 1.1, *б*), замкнений контур без шарнірів містить три зайві в'язі (за кількістю недостатніх умов рівноваги). Формула Чебишова,

що не враховує наявність жорстких в'язей і, відповідно, рівняння (1.1) не дозволяють виявити такі зайві в'язі у замкнених контурах рами. Тому для визначення ступеня статичної невизначуваності рами звичайно застосовують таку формулу:

$$n = 3K - III + C_o - 3, \quad (1.2)$$

де III і C_o означають, як і у формулі Чебишова, відповідно число простих шарнірів і кількість опорних в'язей, а K - кількість замкнених контурів, що утворюються стержнями рами.

Для ферм, через відсутність жорстких з'єднань стержнів, співвідношення (1.1) завжди справедливе. Тому, беручи до уваги вираз для кількості ступенів свободи у фермах, одержуємо таку залежність:

$$n = C + C_o - 2Y. \quad (1.3)$$

Як зазначалося вище, для визначення зусиль у статично невизначуваній системі одних рівнянь статички недостатньо. Додаткові рівняння складають на основі дослідження переміщень точок системи.

Отже, сукупність рівнянь для розрахунку статично невизначуваної системи містить ряд невідомих зусиль і переміщень. У лінійно деформованих системах між зусиллями і переміщеннями існує однозначна відповідність, тому всі сили легко виразити через переміщення, і навпаки. Залежно від того, які величини (сили, переміщення або частина сил і частина переміщень) приймаються за основні невідомі, виділяють три основних методи розрахунку статично невизначуваних систем: *метод сил, метод переміщень, змішаний метод*.

2. Основи методу сил

2.1. Розрахунок статично невизначуваних рами методом сил

Метод сил є універсальним методом розрахунку статично невизначуваних систем. Його суть і основні етапи розрахунку покажемо на прикладі рами, що наведена на рис. 1.1, а. Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності.

Замкнуті контури й шарніри в заданій рамі відсутні, отже за (1.2) одержуємо:

$$n = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 - 3 = 2.$$

Зазначимо, що далі будемо заздалегідь вважати системи геометрично незмінюваними, інакше необхідно додатково перевіряти їх геометричну структуру.

Отже, розглядувана рама є двічі статично невизначуваною, тобто має дві зайві в'язі, для визначення зусиль в яких необхідно скласти додаткові рівняння – *рівняння сумісності деформацій*. Ці рівняння одержують, аналізуючи так звану *основну систему*.

Основною системою методу сил називають таку геометрично незмінювану й статично визначувану систему, яку одержують із заданої системи усуненням зайвих в'язей і заміною їх зусиллями. Ці зусилля у відкинутих зайвих в'язях є основними невідомими методу сил, їх називають *зайвими невідомими* і позначають $X_1, X_2, \dots, X_n$. Власне кажучи, ці сили діяли і в заданій системі як реакції у її внутрішніх або зовнішніх в'язях. Тепер же відносно до основної системи сили $X_1, X_2, \dots, X_n$ стали зовнішніми активними силами. Ці сили можуть набувати будь-

яких значень, у тому числі таких, що відповідають дійсним значенням внутрішніх зусиль у зайвих в'язях.

Як уже відзначалося, зайвими можуть бути різні в'язі, тому вибір основної системи можна зробити по-різному. Наприклад, для рами (рис. 1.1, *a*), на рис. 1.2, *a-v* наведено різні варіанти основної системи. Усі ці основні системи одержані усуненням опорних в'язей. Пізніше розглянемо й інші варіанти основної системи, що добуваються усуненням внутрішніх в'язей.

З усіх можливих варіантів необхідно обрати одну основну систему. При цьому раціонально взяти таку, в якій зусилля визначаються якомога простіше. З цих міркувань виберемо для розрахунку основну систему, зображену на рис. 1.2, *a*.

У подальшому розрахунок заданої рами замінимо розрахунком основної системи. Для того, щоб така заміна була еквівалентною, необхідно і достатньо, щоб в основній системі переміщення уздовж відкинутих в'язей (інакше, в напрямку зайвих невідомих) були відсутні.

Для визначення цих переміщень розкладаємо все навантаження в основній системі на окремо діючі зайві невідомі й задане навантаження (рис. 1.2, *г...е*). Тоді переміщення у напрямку зайвого невідомого X_1 дорівнюватиме сумі переміщень:

Δ_{11} - від сили X_1 (рис. 1.2, *г*), Δ_{12} - від сили X_2 (рис. 1.2, *д*), Δ_{1f} - від заданого навантаження (рис. 1.2, *е*). За умовою еквівалентності основної і заданої систем це переміщення повинно бути нульовим:

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1f} = 0. \quad (1.4)$$

Аналогічно для переміщення в напрямку X_2 запишемо таке рівняння:

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2f} = 0. \quad (1.4,a)$$

Для того, щоб записати рівняння (1.4) та (1.4,*a*) у явному вигляді через зайві невідомі, подамо кожне з переміщень Δ_{ik} як добуток одиничного переміщення δ_{ik} (в тому ж напрямку, тільки від $\bar{X}_k = 1$) на величину відповідного невідомого X_k :

$$\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12} \cdot X_2,$$

$$\Delta_{21} = \delta_{21} \cdot X_1, \quad \Delta_{22} = \delta_{22} \cdot X_2.$$

Тепер рівняння (1.4), (1.4,*a*) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ці рівняння відображають умови сумісності деформацій (відсутність переміщень у напрямку зайвих в'язей) і називаються *канонічними рівняннями методу сил*.

Отже, для визначення двох невідомих сил X_1 та X_2 ми одержали два рівняння (1.5).

Одиничні ($\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$) і вантажні (Δ_{1f}, Δ_{2f}) переміщення можна знайти за допомогою методу Мора. Оскільки рама є системою з переважним згином, у формулі Мора достатньо урахувати тільки згинаючі моменти. Тому спочатку побудуємо в основній системі епюри згинаючих моментів від кожного одиничного

зайвого невідомого і від заданого навантаження (рис. 1.3, а...в), тобто від тих впливів, від яких необхідно знайти переміщення.

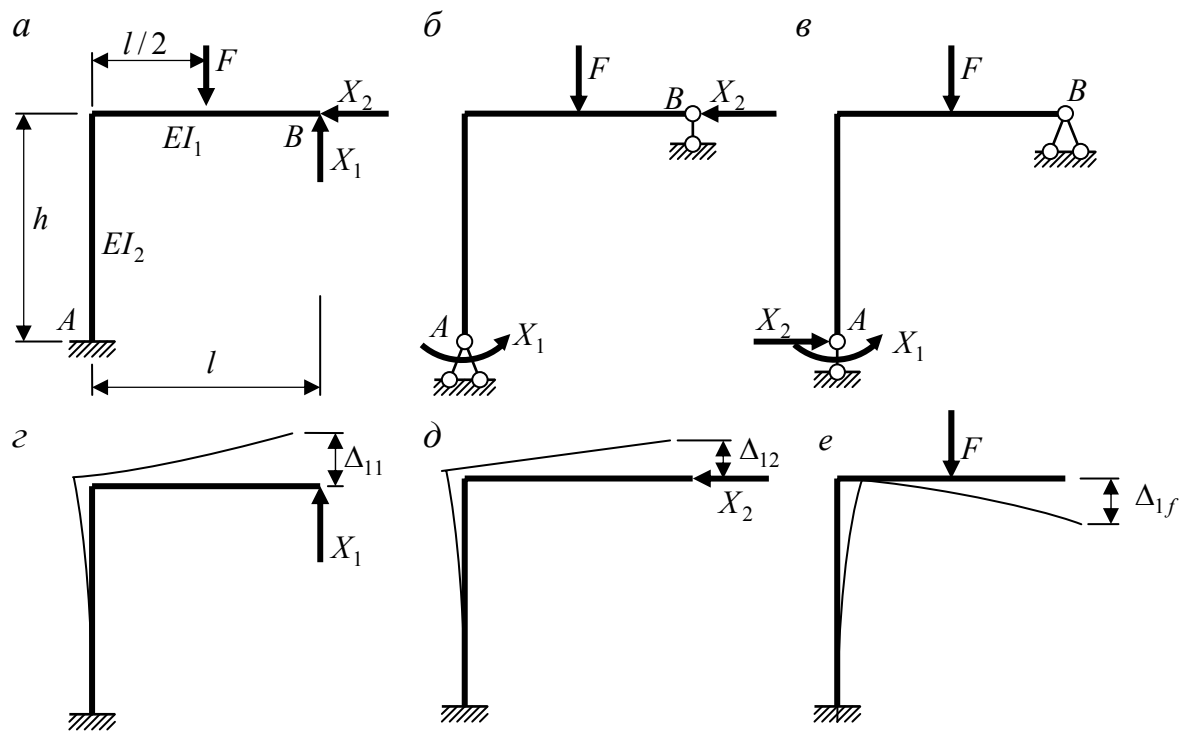


Рис. 1.2

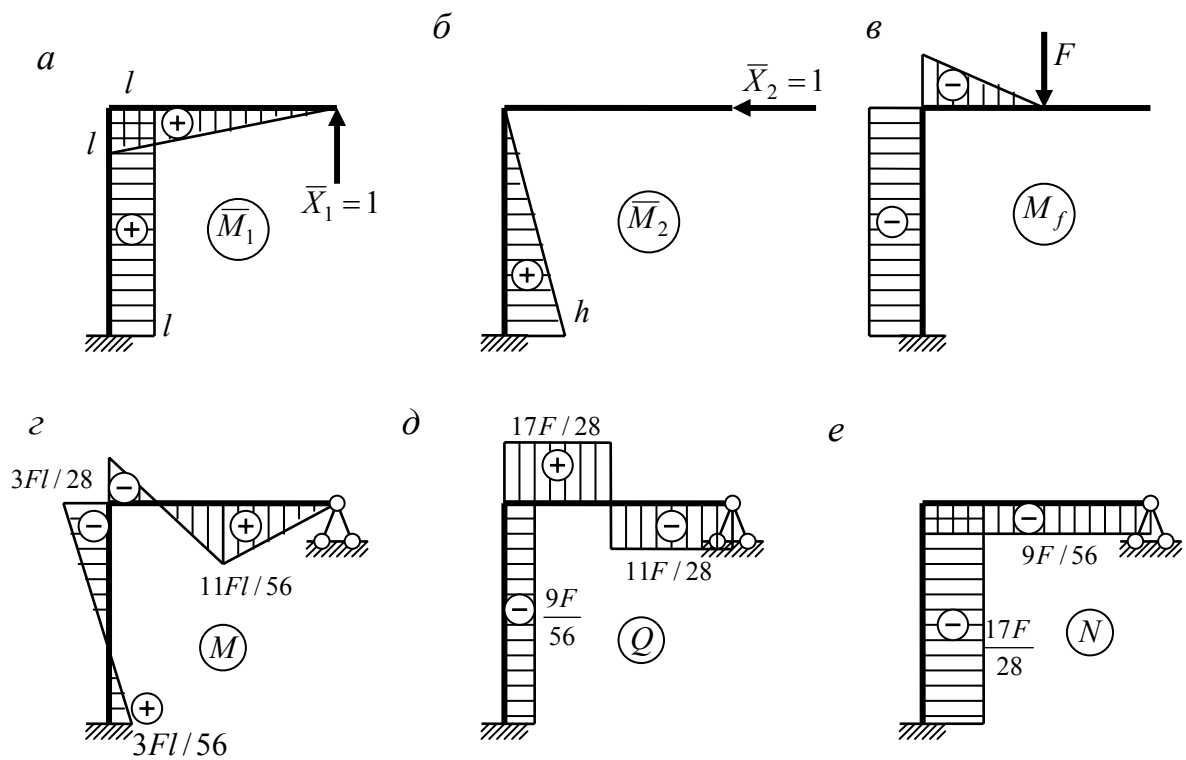


Рис. 1.3.

Застосовуючи правило Верещагіна, обчислюємо для розглядуваної рами:

$$\delta_{11} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 ds = \frac{1}{EI_1} \frac{l \cdot l}{2} \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI_2} l h l = \frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2 h}{EI_2};$$

$$\delta_{12} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \cdot h}{2} l = \frac{h^2 l}{2EI_2};$$

$$\delta_{22} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \cdot h}{2} \frac{2}{3} h = \frac{h^3}{3EI_2};$$

$$\Delta_{1f} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 M_f ds = -\frac{1}{EI_1} \frac{(Fl/2) \cdot l/2}{2} \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) -$$

$$-\frac{1}{EI_2} \frac{Fl}{2} h l = -\frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2 h}{2EI_2};$$

$$\Delta_{2f} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 M_f ds = -\frac{1}{EI_2} \frac{Fl}{2} h \frac{h}{2} = -\frac{Flh^2}{4EI_2}.$$

Зазначимо, що переміщення δ_{21} не обчислювалося тому, що за теоремою про взаємність переміщень $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Після підстановки переміщень у канонічні рівняння маємо таку систему рівнянь:

$$\left(\frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2 h}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2 l}{2EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2 h}{2EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2 l}{2EI_2} X_1 + \frac{h^3}{3EI_2} X_2 - \frac{Flh^2}{4EI_2} = 0.$$

Перетворимо її, помноживши кожне рівняння на EI_1 :

$$\left(\frac{l^3}{3} + l^2 h \frac{EI_1}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2 l}{2} \frac{EI_1}{EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48} - \frac{Fl^2 h}{2} \frac{EI_1}{EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2 l}{2} \frac{EI_1}{EI_2} X_1 + \frac{h^3}{3} \frac{EI_1}{EI_2} X_2 - \frac{Flh^2}{4} \frac{EI_1}{EI_2} = 0.$$

Як бачимо, у цих рівняннях замість абсолютних значень жорсткості елементів присутні лише їх відношення. Звідси випливає, що зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютних значень жорсткостей її елементів, а залежать тільки від співвідношень цих жорсткостей.

Задамо в нашому прикладі $EI_1/EI_2 = 1$ та $h = l$. Після підстановки цих співвідношень і нескладних перетворень приходимо до такої системи рівнянь:

$$\frac{4}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 - \frac{29F}{48} = 0;$$

$$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{F}{4} = 0.$$

Розв'язуючи цю систему будь-яким відомим способом, знаходимо значення зайвих невідомих:

$$X_1 = \frac{11}{28}F; \quad X_2 = \frac{9}{56}F.$$

Переходячи до визначення остаточних зусиль у заданій рамі, зазначимо, що, оскільки при одержаних зусиллях X_1 і X_2 канонічні рівняння задовольняються, основна система дійсно еквівалентна заданій. Розглядаючи основну систему (рис. 1.2, *a*) при відомих значеннях сил X_1 та X_2 , легко визначити внутрішні зусилля і побудувати епюри M , Q і N (рис. 1.3, *г...е*).

На основі розглянутого прикладу можна дати таку послідовність розрахунку статично невизначених систем методом сил:

1. Знайти ступінь статичної невизначуваності.
2. Обрати основну систему.
3. Записати канонічні рівняння.
4. Побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі від дії одиничних невідомих та заданого навантаження.
5. Визначити одиничні й вантажні зусилля в основній системі.
6. Визначити коефіцієнти й вільні члени канонічних рівнянь.
7. Розв'язати систему рівнянь і визначити зайві невідомі.
8. Визначити остаточні зусилля у заданій системі.

Розберемо докладніше етапи розрахунку статично невизначуваної системи методом сил на прикладі розрахунку рам.

Вибір основної системи. Як відзначалося вище, основна система обирається відкиданням зайвих в'язей. Раніше було показано, що зайвими можуть бути як зовнішні, так і внутрішні в'язі системи. Розглянемо можливі способи усунення зайвих в'язей.

1. *Відкидання опорних в'язей* здійснюється повним усуненням деяких опор або заміною їх опорами з меншою кількістю в'язей. Реакції, що діють в напрямку відкинутих в'язей, будуть зайвими невідомими. Відкидаючи ті чи інші в'язі в рамі (рис. 1.1, *a*), були одержані різні варіанти її основної системи (рис. 1.2, *a...в*).

2. *Постановка шарніра* у проміжному перерізі стержня дозволяє в кожному такому випадку усунути одну в'язь, що відповідає згинаючому моменту. Цей момент і буде зайвим невідомим. Для рами, зображеної на рис. 1.4, *a*, при виборі основної системи необхідно поставити три шарніри (ступінь статичної невизначуваності $n = 3$). Розміщення цих шарнірів повинно задовольняти вимогам геометричної незмінюваності основної системи, отже вони не можуть бути розташовані на одній прямій (рис. 1.4, *б*).

3. *Розрізання стержня* у загальному випадку усуває три в'язі, що відповідають внутрішнім зусиллям M , Q і N . Приклад такого розрізання для рами (рис. 1.4, *a*) наведено на рис. 1.4, *в*. В окремому випадку *розрізання стержня по шарніру* звільняє дві в'язі (рис. 1.4, *г*), а *розрізання ідеального стержня*— одну в'язь (рис. 1.4, *д, е*). Нагадаємо, що ідеальним називають прямий ненавантажений стержень з шарнірами на кінцях.

Серед в'язей статично невизначуваної системи розрізняють *абсолютно необхідні* й *умовно необхідні*. До абсолютно необхідних відносять в'язі, при усуненні яких система стає геометрично змінюваною. Прикладом такої в'язі може бути вертикальний опорний стержень у рамі, зображений на рис. 1.5, *а*. Дійсно, усунувши його, одержимо миттєво змінювану систему (рис. 1.5, *б*). Для абсолютно необхідних в'язей характерною є статична визначуваність зусиль у них. Так, у наведеному прикладі (рис. 1.5, *а*) реакція V_B у вертикальному опорному стержні може бути знайдена з умови рівноваги $\sum M_A = 0$.

В'язі, при усуненні яких система залишається геометрично незмінюваною, називають *умовно необхідними*. У наведеній на рис. 1.5, а рамі однією з таких в'язей буде горизонтальний опорний стержень. Система з відкинутим горизонтальним опорним стержнем може бути основною системою методу сил (рис. 1.5, в).

Канонічні рівняння. Кількість канонічних рівнянь завжди відповідає кількості невідомих. Ці рівняння записують за простими правилами: перші індекси одиничних переміщень відповідають порядковому номеру рівняння, а другі – номеру невідомого, біля якого це переміщення стоїть як коефіцієнт. Для n раз статично невизначуваної системи канонічні рівняння запишемо так:

Нагадаємо, що канонічні рівняння за фізичною суттю є статичними і відображають умови сумісності деформацій. Ліва частина i -го рівняння є переміщенням в основній системі в напрямку невідомого X_i .

Ці - *одиничні переміщення* можна визначити за допомогою формули Мора:

де $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ та $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ - зусилля в основній системі відповідно від зайвих невідомих $\bar{X}_i=1$ та $\bar{X}_k=1$.

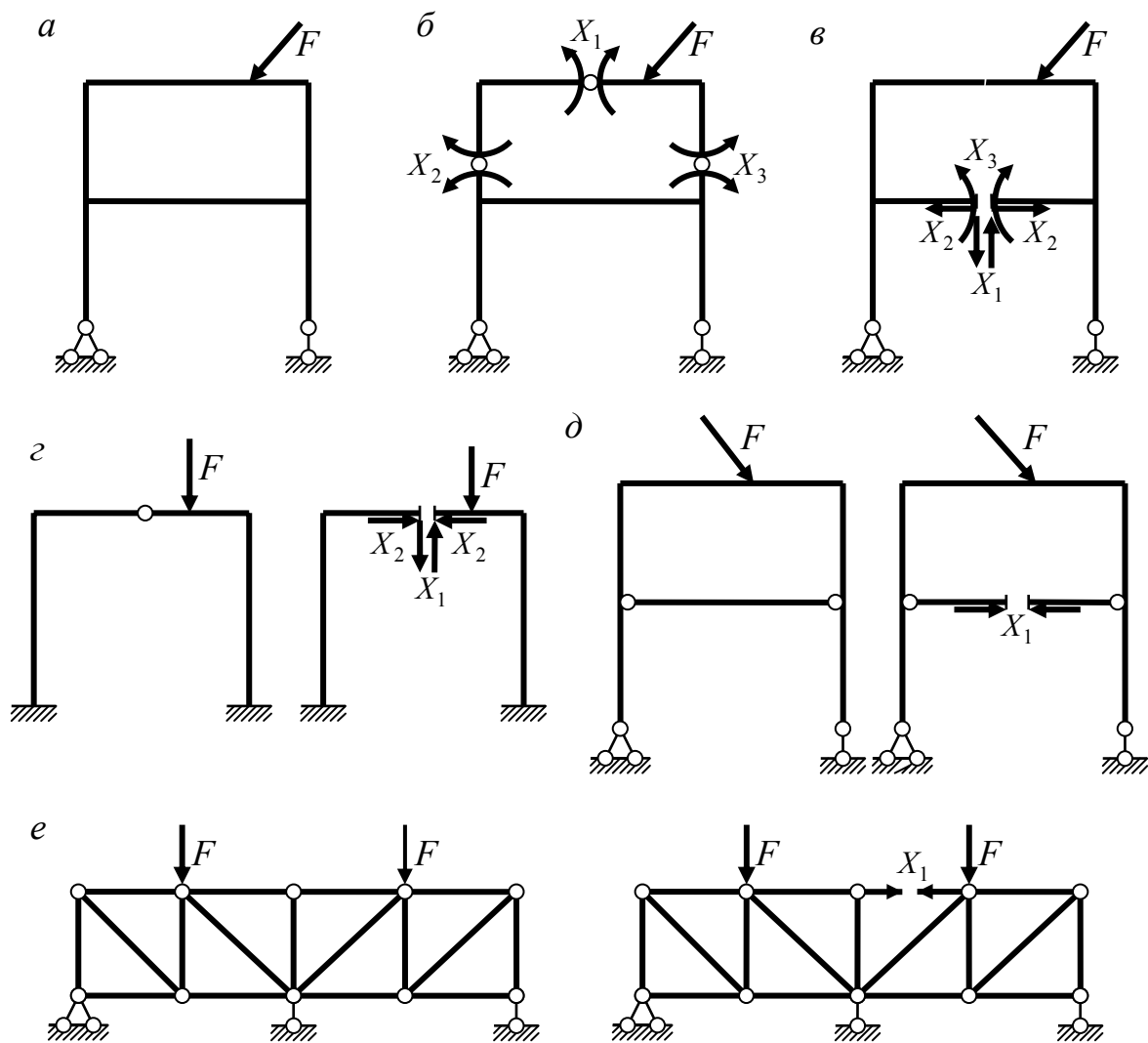


Рис. 1.4

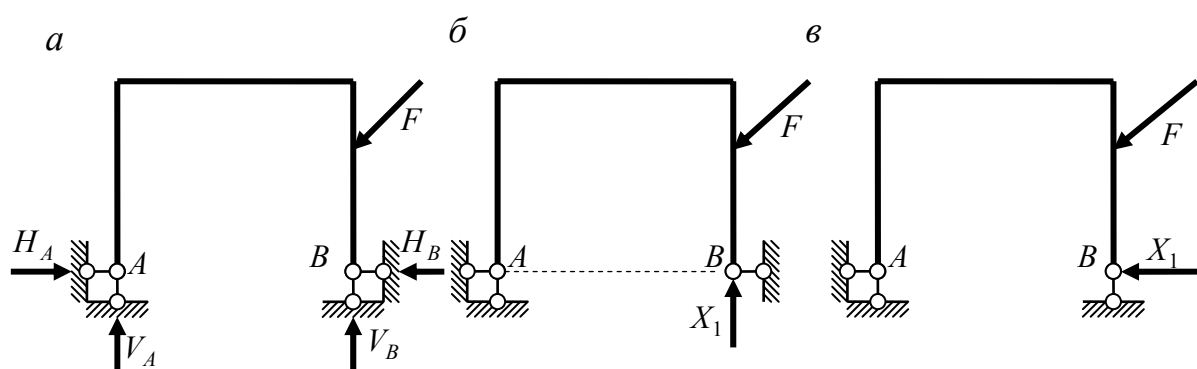


Рис. 1.5

Зокрема, як звичайно, для систем з переважним згином (балки, рами), зберігаємо у формулі (1.7) тільки перший доданок:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EI}$$

або

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_k ds, \quad (1.7, a)$$

де $\bar{M}_i$ та $\bar{M}_k$ - згинаючі моменти в основній системі відповідно від зайвих невідомих $\bar{X}_i = 1$ та $\bar{X}_k = 1$.

Одиничні переміщення, розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів канонічних рівнянь, називають головними переміщеннями, решту – побічними. Як випливає з (1.7, a), головні переміщення завжди додатні. Дійсно, при

$$k = i \text{ маємо: } \delta_{ii} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i^2 ds > 0.$$

Усі побічні переміщення задовольняють умові взаємності $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Аналогічно знаходять вільні члени канонічних рівнянь – *вантажні переміщення*. За формулою Мора для систем з переважним згином маємо:

$$\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_f ds, \quad (1.8)$$

де M_f - згинаючі моменти в основній системі від дії заданого навантаження.

Як завжди при обчисленні переміщень за формулами (1.7, a) та (1.8), можна користуватися правилом Верещагіна і формулою Сімпсона.

Побудова остаточних епюр внутрішніх зусиль у заданій системі. Оскільки при знайдених значеннях зайвих невідомих умови сумісності деформацій задовольняються, розрахунок основної системи дозволяє одержати шукані зусилля та переміщення заданої системи. Для цього зручно скористатися принципом незалежності дії сил. Тоді для згинаючих моментів одержимо

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n + M_f$$

або, беручи до уваги, що $M_1 = \bar{M}_1 X_1$, $M_2 = \bar{M}_2 X_2, \dots$, $M_n = \bar{M}_n X_n$,

приходимо до такого виразу:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_f = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_f. \quad (1.9)$$

Аналогічно можна визначити поперечні та поздовжні сили:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_f = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_f; \quad (1.10)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_f = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_f.$$

При побудові епюр M , Q , N в рамках звичайно діють у такій послідовності. Спочатку будують епюри згинаючих моментів $\bar{M}_i X_i$, а потім підсумовуванням за формулою (1.9) знаходять остаточну епюру M . Епюри $\bar{M}_i X_i$ повторюють обриси

відповідних епюр $\bar{M}_i$ і відрізняються від них лише величинами ординат. Тому епюри $\bar{M}_i X_i$ звичайно називають *виправленими*.

Далі на кожній ділянці рами визначають поперечні сили через згинаючі моменти

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{M_r + M_l}{l} \pm \frac{ql}{2}$$

і будують епюру Q .

Нарешті, для визначення поздовжніх сил розглядають рівновагу вузлів рами під дією заданих вузлових навантажень, а також поперечних та поздовжніх сил.

2.2. Перевірка правильності обчислень. Переміщення у статично невизначуваних системах

При виконанні розрахунків вручну бажано перевіряти проміжні та кінцеві результати.

Суть перевірок, як і раніше, покажемо на прикладі рами. Для цього спочатку побудуємо *сумарну одиничну епюру згинаючих моментів*:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i.$$

Як видно з наведеної формули, сумарна одинична епюра $\bar{M}_s$ відповідає одночасній дії одиничних зайвих невідомих в основній системі.

Перевірка одиничних переміщень. Помноживши сумарну одиничну епюру на епюру $\bar{M}_i$, одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}. \end{aligned}$$

Отже, результат помноження сумарної одиничної епюри на i -ту одиничну дає переміщення в напрямку i -ї в'язі від спільної дії одиничних зайвих невідомих. Це переміщення дорівнює сумі коефіцієнтів i -го канонічного рівняння:

$$\delta_{is} = \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_s ds = \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (1.11)$$

Ця перевірка називається *порядковою*. Вона повинна бути виконана для кожного канонічного рівняння, тобто для $i=1, 2, \dots, n$. Замість n порядкових перевірок можна виконати одну - *універсальну перевірку*, що полягає в помноженні сумарної одиничної епюри самої на себе та перевірці умови

$$\delta_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (1.12)$$

При перевірці одиничних переміщень раціонально діяти в такій послідовності. В першу чергу виконати універсальну перевірку. Якщо вона задовольняється,

переміщення знайдені правильно, якщо ні – треба виконати порядкові перевірки, що дають можливість уточнити, в якому саме переміщенні є помилка.

Перевірка вантажних переміщень виконується помноженням сумарної одиничної епюри на вантажну епюру згинаючих моментів:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_s M_f}{EI} ds &= \int \frac{M_f}{EI} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{\bar{M}_1 M_f}{EI} ds + \int \frac{\bar{M}_2 M_f}{EI} ds + \dots + \int \frac{\bar{M}_n M_f}{EI} ds = \Delta_{1f} + \Delta_{2f} + \dots + \Delta_{nf}. \end{aligned}$$

Таким чином маємо:

$$\Delta_{sf} = \int \frac{\bar{M}_s M_f}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{if}. \quad (1.13)$$

Перевірка остаточної епюри згинаючих моментів виконується двох видів: *статична і кінематична*. У статичній перевірці вирізають вузли і записують умови їх рівноваги під дією вузлових зосереджених моментів та згинаючих моментів на кінцях стержнів. Ця перевірка є допоміжною і задовольняється автоматично, якщо епюри згинаючих моментів в основній системі побудовані правильно і виконується кінематична перевірка.

Основною перевіркою в методі сил є кінематична. Вона може бути *порядковою або універсальною*.

У *порядковій перевірці* кожна одинична епюра моментів помножується на остаточно епюру M . Тоді, наприклад, для i -го помноження маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds &= \int \frac{\bar{M}_i}{EI} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_{f1}) ds = \\ &= \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} X_1 ds + \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} X_2 ds + \dots + \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} X_n ds + \int \frac{\bar{M}_i M_{f1}}{EI} ds = \\ &= \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{if} = 0. \end{aligned}$$

Отже, *результат перемноження кожної з одиничних епюр на остаточно епюру згинаючих моментів повинен дорівнювати нулю*:

$$\Delta_i = \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.14)$$

Підсумовуючи відповідні частини рівнянь (1.14), одержимо вираз, що служить для *універсальної кінематичної перевірки епюри M* :

$$\Delta_s = \int \frac{\bar{M}_s M}{EI} ds = 0. \quad (1.15)$$

Для **обчислення переміщення у статично невизначуваній системі** можна скористатися еквівалентністю заданої та основної систем. Дійсно, якщо умови сумісності деформацій (канонічні рівняння) задовольняються, переміщення в основній системі відповідають переміщенням заданої системи. Тоді, побудувавши в основній системі епюру згинаючих моментів $\bar{M}$ від одиничної сили, що прикладена в напрямку шуканого переміщення, знаходимо за формулою Мора

$$\Delta = \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds, \quad (1.16)$$

де M – згинаючі моменти від заданого навантаження, знайдені в заданій статично невизначуваній системі.

Слід зауважити, що епюра $\overline{M}$ може бути побудована в будь-якій статично визначуваній основній системі, не обов'язково в тій, що використовувалась для розрахунку на задане навантаження.

Запитання для самоконтролю

1. Яка система є статично невизначуваною?
2. Як ступінь статичної невизначуваності пов'язаний з кількістю ступенів свободи?
3. Чому дорівнює ступінь статичної невизначуваності замкненого безшарнірного контура?
4. Як визначити ступінь статичної невизначуваності рами, виходячи з поняття про замкнений контур?
5. Які системи відносять до внутрішньо статично невизначуваних?
6. Назвіть три основних методи розрахунку статично невизначуваних систем.
7. Що приймають за невідомі методу сил?
8. Дайте визначення основної системи методу сил.
9. У чому різниця між абсолютно необхідними та умовно необхідними в'язями?
10. Чи можуть абсолютно необхідні в'язі бути зайвими?
11. Наведіть можливі способи відкидання в'язей.
12. Що являють собою канонічні рівняння методу сил?
13. Що являють собою коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь методу сил?
14. Який метод звичайно застосовують для визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь?
15. Наведіть властивості головних та побічних коефіцієнтів канонічних рівнянь.
16. Як зусилля у статично невизначуваній системі при дії навантаження залежать від жорсткостей елементів системи?
17. Як можна знайти зусилля у заданій системі після визначення зайвих невідомих?
18. Як перевірити правильність обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь?
19. Як перевірити правильність розрахунку статично невизначуваної системи?
20. Як визначаються переміщення у статично невизначуваній рамі?

3. Урахування симетрії в методі сил

Статично невизначувана система буде симетричною, якщо виконується симетрія не лише її осей, в'язей і опорних закріплень, але й симетрія жорсткостей. Розрахунок таких систем суттєво спрощується, перш за все, за рахунок обернення на нуль усіх або деяких побічних одиничних переміщень. Для здійснення цих спрощень застосовують ряд заходів, найпростіший з яких – це вибір симетричної основної системи.

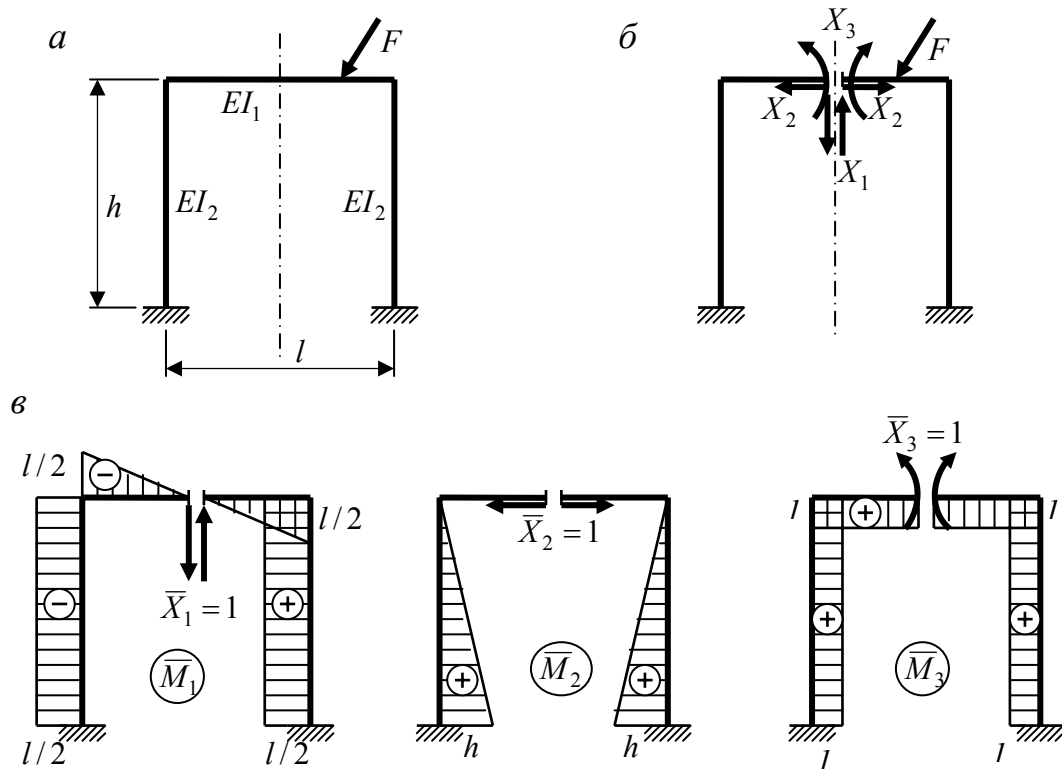


Рис. 1.6

Розглянемо раму, зображену на рис. 1.6, *a*. Рама має вертикальну вісь симетрії і довільно навантажена. Ступінь її статичної невизначуваності $n = 3$. Виберемо основну систему, розрізавши ригель на осі симетрії рами (рис. 1.6, *б*), і запишемо канонічні рівняння:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Побудувавши в основній системі одиничні епюри $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ (рис. 1.6, *в*), звертаємо увагу на те, що частина епюр ($\bar{M}_2, \bar{M}_3$) і відповідні невідомі X_2, X_3 симетричні ("с"), а друга частина - $\bar{M}_1$ і, відповідно, X_1 - косиметричні ("кс"). Зазначимо, що *косиметричною, інакше оберненосиметричною, є така епюра, яка у симетричних точках системи має однакові за модулем та протилежні за знаком значення*. Відповідно, сили, що спричиняють до таких зусиль, є косиметричними.

Як вже зазначалося, головні переміщення $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ завжди додатні. При обчисленні побічних переміщень неважко пересвідчитися в тому, що в результаті помноження симетричної епюри на косиметричну одержимо нуль. Тоді у нашому випадку $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{31} = 0$ і система (1.17) розпадається на дві частини, одна з яких (1.17,*а*) містить лише косиметричні, а друга (1.17,*б*) – тільки симетричні невідомі:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0; \quad (1.17,a)$$

$$\begin{aligned}\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2f} &= 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} &= 0.\end{aligned}\tag{1.17,б}$$

Ця обставина значно спрощує розрахунок.

Для окремих навантажень, що задовольняють умові симетрії або косої (оберненої) симетрії розрахунок можна ще далі спростити. Наприклад, при симетричному навантаженні вантажна епюра M_f буде симетричною і результат її перемноження на кососиметричну епюру $\bar{M}_1$ дорівнює нулю ($\Delta_{1f} = 0$). Тоді з першого канонічного рівняння випливає, що для *симетричного навантаження кососиметричне невідоме* (у нашому випадку X_1) *обертається на нуль*.

За умов кососиметричного навантаження з тих же міркувань одержуємо $\Delta_{2f} = \Delta_{3f} = 0$. Отже, *при кососиметричному навантаженні симетричні невідомі* (в рамі, що розглядається, - X_2 та X_3) *обертаються на нуль*.

Наведені вище властивості симетричних рам можна використати і при довільному навантаженні. Для цього застосовують розкладання навантаження на симетричну та кососиметричну складові. Суть цього способу пояснюється схемою, зображеною на рис. 1.7.

При розрахунку рами (рис. 1.6, а) з використанням симетричної основної системи (рис. 1.6, б) усі побічні переміщення, крім δ_{23} і, відповідно δ_{32} , дорівнюють нулю. Для обернення на нуль і цього побічного переміщення можна застосувати спосіб жорстких консолей (спосіб пружного центру). Покажемо цей спосіб на прикладі рами (рис. 1.6, а). Обираючи основну систему, як і раніше, розріжемо ригель на осі симетрії рами, а далі приєднаємо до кінців розрізу абсолютно жорсткі консолі, довжину яких попередньо приймемо a . Перенесемо зайві невідомі на кінці консолей (рис. 1.8, а). Оскільки консолі жорсткі, умови відсутності взаємних переміщень їх кінців еквівалентні умовам відсутності взаємних переміщень кінців розрізаного ригеля і мають вигляд (1.17).

Побудувавши одиничні епюри згинаючих моментів (рис. 1.8, б), зазначимо, що епюра $\bar{M}_1$, як і раніше, кососиметрична, а $\bar{M}_2$ та $\bar{M}_3$ - симетричні. Тому $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$.

Знайдемо переміщення δ_{23} :

$$\delta_{23} = -\frac{1}{EI_1} a \cdot l \cdot 1 - \frac{1}{EI_2} \frac{a - (h - a)}{2} h \cdot 1 \cdot 2$$

і зажадаємо, щоб воно обернулося на нуль: $\delta_{23} = 0$. З цієї умови знайдемо довжину консолей a :

$$a = \frac{h^2 / (EI_2)}{l / (EI_1) + 2h / (EI_2)}.$$

Отже, при такій довжині консолей переміщення δ_{23} обертається на нуль і канонічні рівняння розпадаються на окремі рівняння, кожне з яких містить лише одне невідоме.

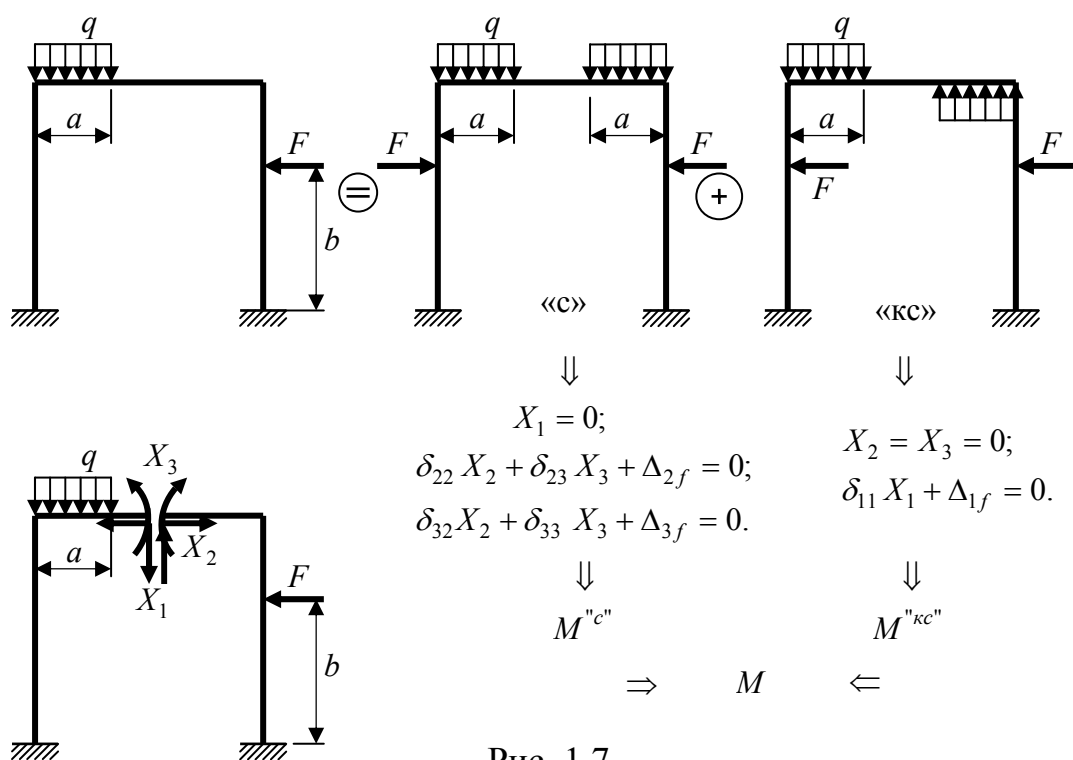


Рис. 1.7

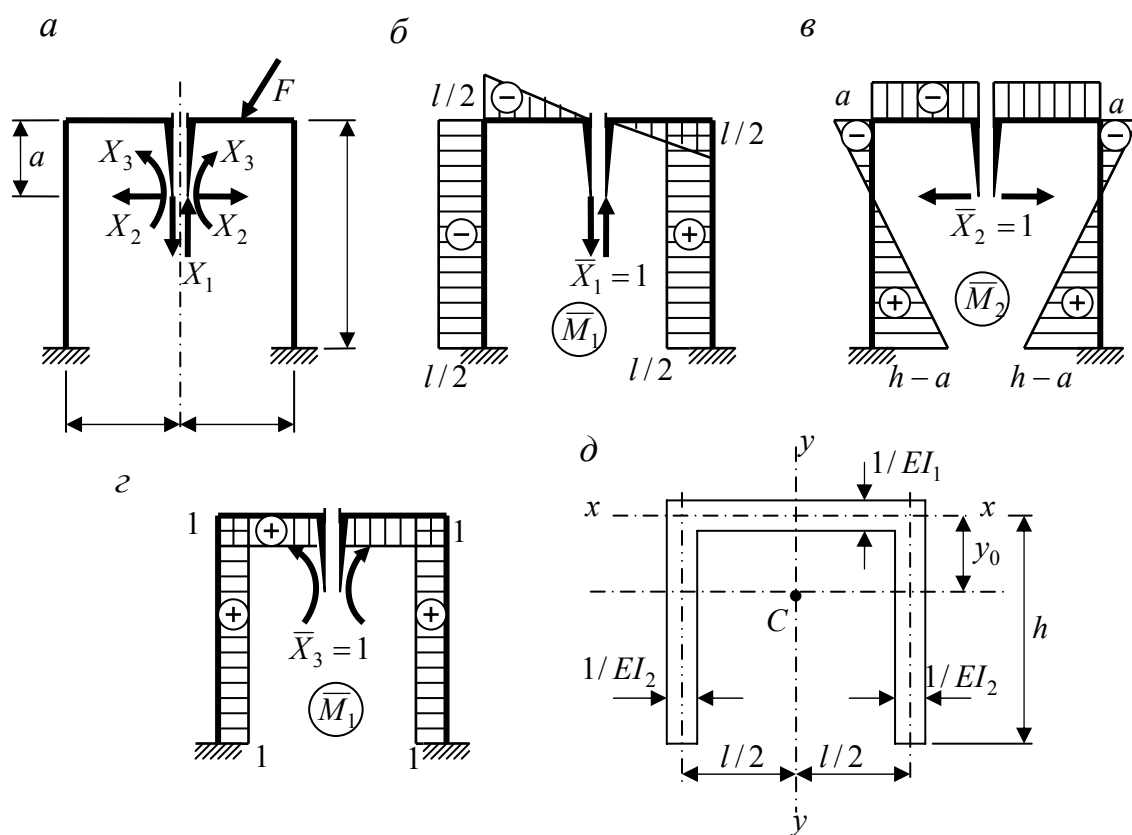


Рис. 1.8

У цьому способі можна виявити деякі геометричні аналоги. Розглянемо умовний тонкостінний переріз (рис. 1.8, д). Осі елементів цього перерізу співпадають з осями заданої системи, а товщини елементів умовно дорівнюють величинам оберненої жорсткості відповідних елементів рами. Знайдемо для цього перерізу положення центра ваги y_o :

$$y_o = \frac{S_x}{A} = \frac{2h/(EI_2) \cdot h/2}{l/(EI_1) + 2h/(EI_2)} = \frac{h^2/(EI_2)}{l/(EI_1) + 2h/(EI_2)}. \quad (1.18)$$

Отже, $a = y_o = S_x/A$ і розташування центру ваги умовного тонкостінного перерізу (т. С на рис. 1.8, д) відповідає довжині консолей основної системи. Центр ваги перерізу називають *пружним центром*, оскільки сила, прикладена в такій точці перерізу прямого стержня вздовж його осі, викликає в усіх точках цього перерізу однакові за величиною напруження. У зв'язку з цим розглянутий спосіб часто називають *способом пружного центру*.

Спосіб пружного центру застосовують звичайно для розрахунку симетричних систем, що являють собою один закритий або відкритий контур без шарнірів, зокрема він зручний для розрахунку безшарнірної арки.

У тих випадках, коли в симетричній рамі при виборі основної системи відкидають в'язі, що не лежать на осі симетрії, її епюри $\overline{M}_i$ стають несиметричними, можна застосувати спосіб групування невідомих. Сутність цього способу покажемо на прикладі довільно навантаженої рами (рис. 1.9, а).

Неважко упевнитись, що рама є двічі статично невизначуваною. Отже, обираючи основну систему відкинемо дві симетрично розташовані в'язі – шарнірно-рухомі опори (рис. 1.9, б). Незважаючи на те, що в'язі відкинуті симетрично, зусилля в них - X_1 та X_2 при довільному навантаженні не будуть симетричними. Замінімо ці зусилля двома групами сил (рис. 1.9, в), одна з яких (X_1^*) симетрична, а інша (X_2^*) - кососиметрична. При цьому побічне переміщення δ_{12} обертається на нуль і канонічні рівняння розділяються:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1^* + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{22}X_2^* + \Delta_{2f} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Після визначення групових зусиль неважко перейти до реальних зусиль у відкинутих в'язях. У наведеному випадку маємо:

$$X_1 = X_1^* + X_2^*; \quad X_2 = X_1^* - X_2^*.$$

У випадку симетричного або кососиметричного навантаження буде залишатися ненульовим відповідно лише симетричне або кососиметричне групове невідоме.

У деяких випадках зменшення трудомісткості розрахунку можна досягти застосуванням *геометрично змінюваних і статично невизначуваних основних систем*.

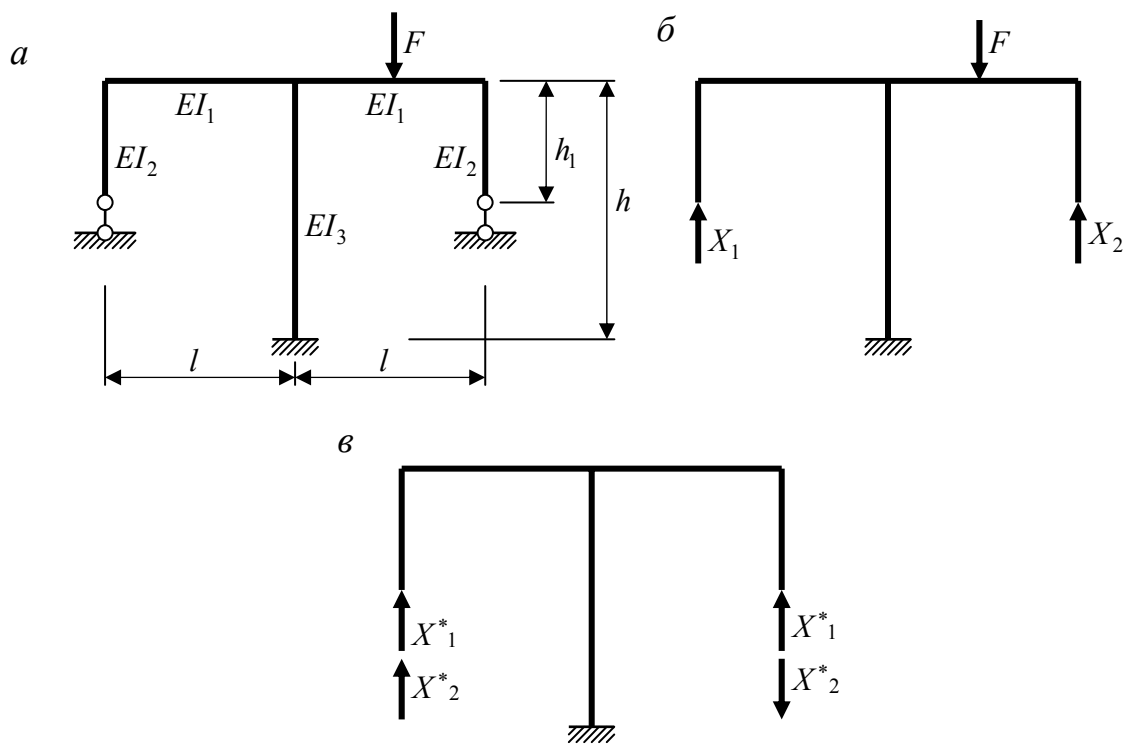


Рис. 1.9

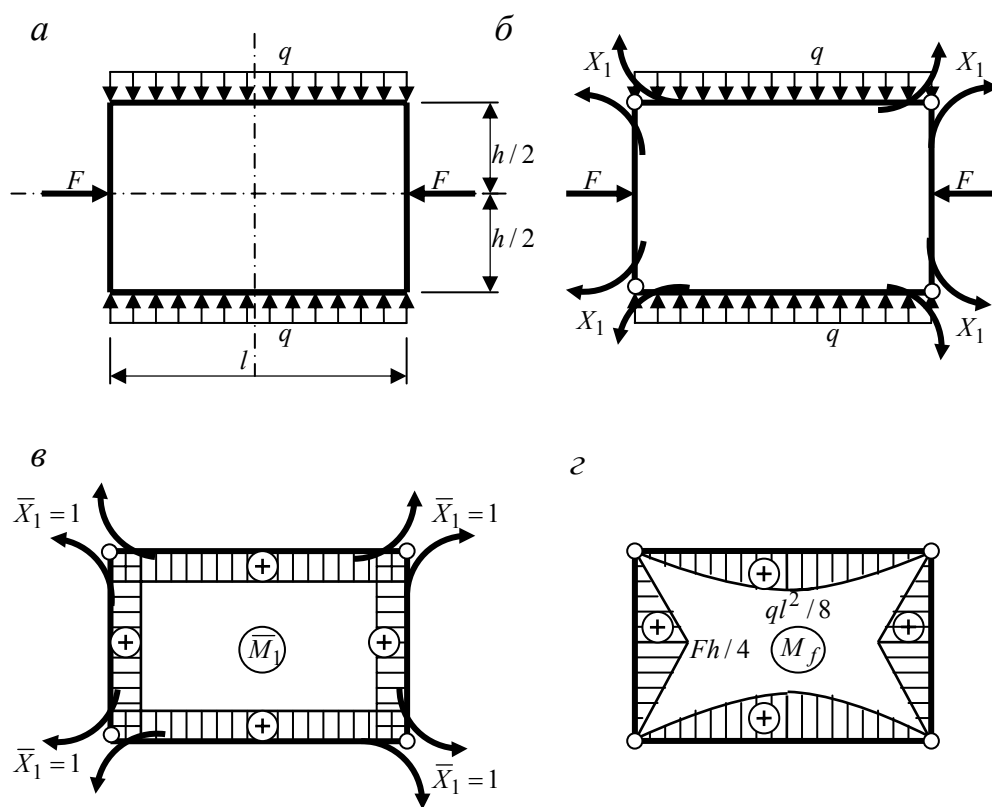


Рис. 1.10

Наприклад, при розрахунку закритого контуру (рис. 1.10, а) на підставі симетрії рами і навантаження виявляємо, що згинаючі моменти в усіх вузлах рами однакові. Тоді в основній системі поставимо в усі вузли шарніри (рис. 1.10, б) й відповідні згинаючі моменти X_1 будуть груповим зайвим невідомим. Хоча прийнята *основна система є геометрично змінюваною*, при кожному окремому завантаженні вона перебуває у рівновазі і для її розрахунку можуть застосовуватися рівняння статки. Епюри $\bar{M}_1$, M_f , що відповідають обраній основній системі, зображені на рис. 1.10, в,г.

Вибір статично невизначуваної основної системи покажемо на прикладі рами, наведеної на рис. 1.11, а. Розрізавши середній ригель, одержимо основну систему, що складається з двох П-подібних статично невизначуваних рам. Для побудови епюр в цій основній системі необхідно виконати розрахунок кожної П-подібної тричі статично невизначуваної рами на дію заданого навантаження та одиничної горизонтальної сили $\bar{X}_1 = 1$.

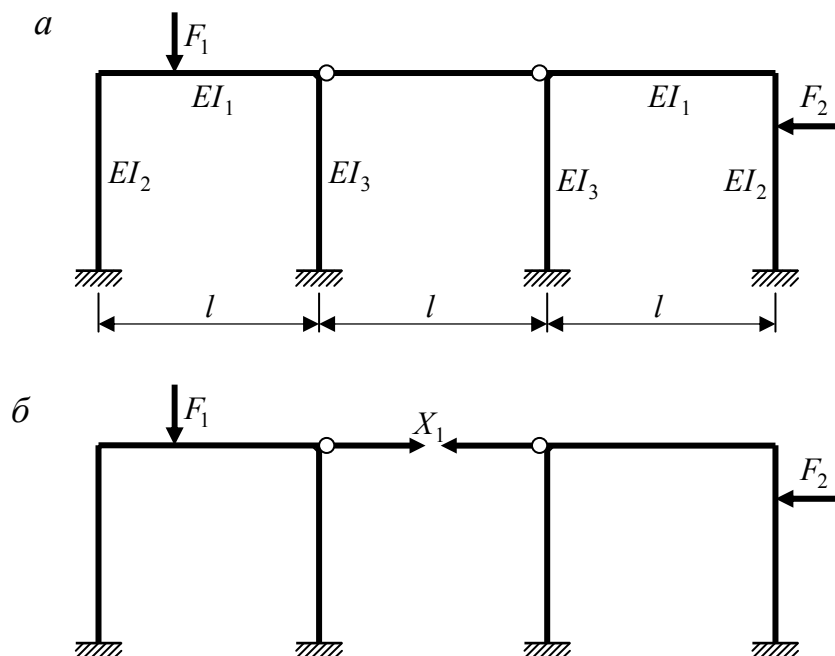


Рис. 1.11

Трудомісткість розрахунку зменшується за рахунок повторення частини обчислень в кожній одноконтурній рамі.

На закінчення відзначимо, що деякі з наведених вище прийомів можна застосувати також для розрахунку несиметричних систем.

Запитання для самоконтролю

1. Які способи застосовують для спрощення розрахунку симетричних систем методу сил?
2. Які переваги дає вибір симетричної основної системи методу сил при розрахунку на: а) довільне, б) симетричне, в) кососиметричне навантаження?
3. Як розкласти навантаження на симетричну й кососиметричну складові?
4. Коли і як застосовується групування невідомих?

5. В яких випадках застосовують спосіб пружного центра?
6. Як знайти положення пружного центра?
7. У яких випадках можна застосувати геометрично змінювану основну систему?

4. Особливості розрахунку статично невизначуваних стержневих систем методом сил

4.1. Розрахунок статично невизначуваних ферм

Розрахунок статично невизначуваних ферм методом сил виконують в тій самій послідовності, що й розрахунок рам.

Ступінь статичної невизначуваності обчислюють за формулою (1.3).

При виборі основної системи відкидання зайвих в'язей можна здійснити видаленням опор (або заміною їх опорами, що мають меншу кількість в'язей) і розтином стержнів. При цьому, як і в рамах, для симетричних ферм можуть застосовуватися способи розкладання навантаження на симетричну й косиметричну складові, групування невідомих, вибору геометрично змінюваної чи статично невизначуваної основної системи. Так, на рис. 1.12, *а* показано застосування групових невідомих. Для ферми, зображеної на рис. 1.12, *б*, взято геометрично змінювану основну систему. У цій основній системі з умови рівноваги середнього вузла нижнього поясу випливає, що $X_1 = 0$.

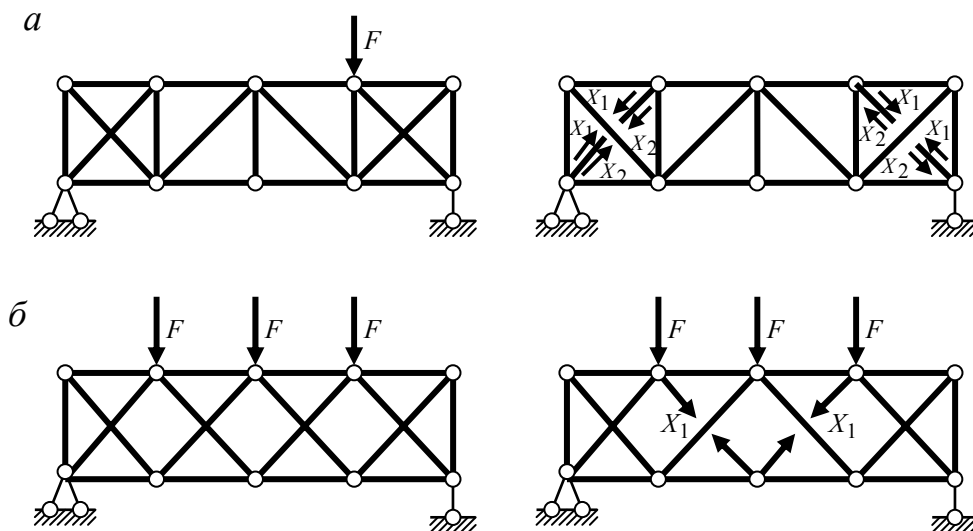


Рис. 1.12

Одиничні та вантажні переміщення визначаються за методом Мора. У фермі звичайно задають не абсолютні величини жорсткості елементів, а їх співвідношення. У такому разі жорсткість якого-небудь стержня або групи стержнів приймають за основну - EA_o і формули для переміщень перетворюють до такого вигляду:

$$\begin{aligned} EA_o \delta_{ik} &= \sum \bar{N}_i \bar{N}_k l A_o / A; \\ EA_o \Delta_{if} &= \sum \bar{N}_i N_f l A_o / A, \end{aligned} \quad (1.20)$$

де $\bar{N}_i$, $\bar{N}_k$, N_f - зусилля в стержнях основної системи відповідно від $\bar{X}_i = 1$, $\bar{X}_k = 1$ та від заданого навантаження.

Після розв'язання системи канонічних рівнянь і визначення зайвих невідомих зусилля у стержнях заданої ферми знаходять за виразом (1.10):

$$N = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_f.$$

Розрахунок ферми зручно виконувати у табличній формі.

Для прикладу наведемо розрахунок ферми, наведеної на рис. 1.13, прийнявши жорсткість стержнів верхнього поясу та решітки удвічі більшою жорсткості стержнів нижнього поясу: $EA_{г.н.} = EA_{реш.} = 2 EA_{н.н.}$.

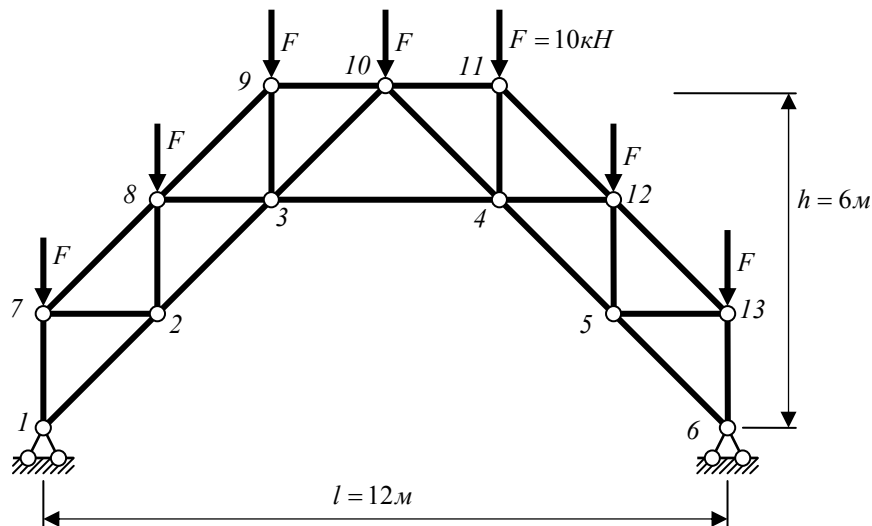


Рис. 1.13

Ступінь статичної невизначуваності ферми становить: $n = C + C_0 - 2Y = 23 + 4 - 2 \cdot 13 = 1$.

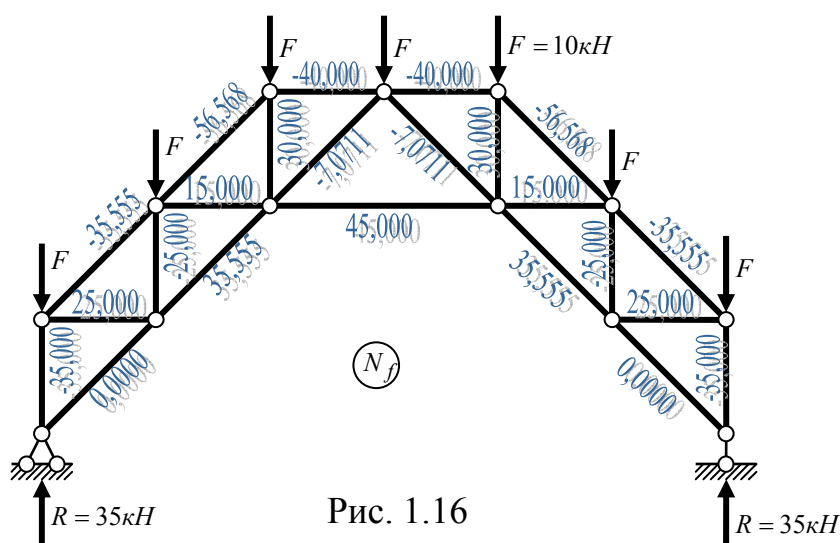
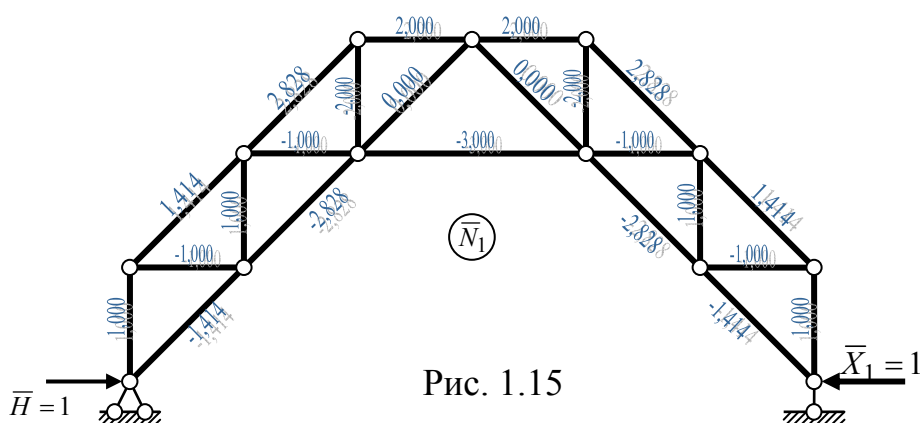
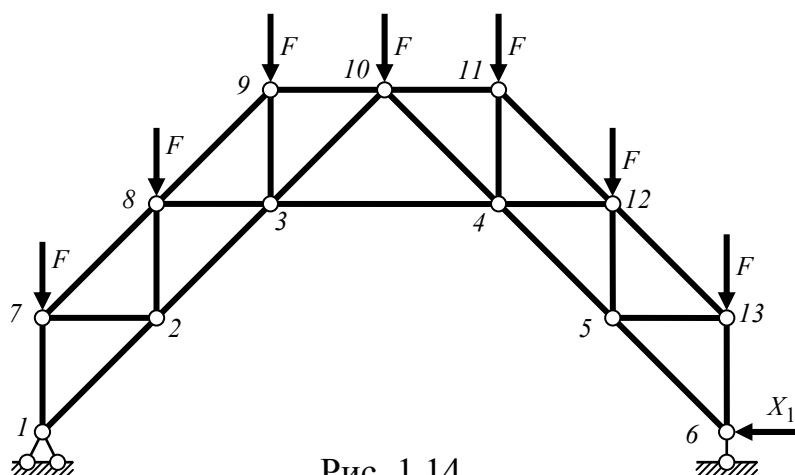
Ферма один раз статично невизначувана, отже для вибору основної системи необхідно видалити одну в'язь. Це можна здійснити різними способами, наприклад розрізавши один зі стержнів, звичайно, намагаючись при цьому не порушити симетрію ферми. Цій умові задовольняє, наприклад, перерізання стержня 3-4. У нашому розрахунку оберемо основну систему інакше, відкидаючи горизонтальну в'язь у правій опорі ферми (рис. 1.14). Формально це порушує симетрію системи, але фактично горизонтальна реакція у лівій опорі дорівнює X_1 і симетрія зберігається.

Канонічне рівняння буде одне: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0$.

Далі виконуємо статичний розрахунок основної системи (наприклад, способом вирізання вузлів) на дію одиничного зайвого невідомого $\bar{X}_1$. Ненульові реакції опор від цієї сили та значення зусиль у стержнях наведені на рис. 1.15.

Так само виконуємо розрахунок основної системи на дію заданого навантаження. Ненульові реакції опор та зусилля у стержнях від навантаження наведені на рис. 1.16.

Подальший розрахунок виконуємо у табл. 1.1. Кожен рядок таблиці відповідає одному із стержнів ферми. При цьому стержні зручно розташувати групуючи за типами елементів: пояси та решітка (стовпчики 1 та 2). За умови наявності симетрії достатньо урахувати лише стержні, розташовані з одного боку від осі симетрії. У цьому випадку довжину (стовпчик 3) стержнів, розташованих на осі симетрії (у нашому випадку стержень 3-4) необхідно взяти половинною.



Прийнявши за основну жорсткість перерізів стержнів верхнього поясу та $(EA_0 = EA_{\text{г.н.}} = EA_{\text{рем.}} = 2EA_{\text{н.н.}})$, одержимо співвідношення жорсткостей

У стовпчиках 5 та 6 табл.1.1 записуємо зусилля у стержнях основної системи
дно від одиничного зайвого невідомого (з рис. 1.15) та від заданого

Стовпчик 7 містить проміжні результати перемноження елементів 3-го, 4-г та 5-пчиків, які при ручному розрахунку знадобляться у подальших обчисленнях.

Елементи сум, що входять до виразів (1.20) одиничного та вантажного переміщень, обчислені у стовпчиках 8 та 9. Результати підсумовування цих елементів, що наведені у останньому рядку, дають величини масштабованих переміщень, точніше їхні -половинні значення: $0,5 EA_0 \delta_{11} = 144,84$; $0,5 EA_0 \delta_{11} = -2183,64$.

Тепер з канонічного рівняння одержуємо значення зайвого невідомого:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} - \frac{0,5 EA_0 \Delta_{1f}}{0,5 EA_0 \delta_{11}} = \frac{2183,64}{144,84} = 15,08 \text{ кН}.$$

Далі за допомогою проміжних величин $\bar{N}_1 X_1$ (стовпчик 10) у стовпчику 11 обчислюємо остаточні зусилля $N = \bar{N}_1 X_1 + N_f$ у заданій системі.

Кінематичну перевірку обчислень виконуємо у стовпчику 11:

$$\sum \bar{N}_1 N l A_0 / A = 287,84 - 287,2 = 0,64 \approx 0.$$

Отже, розрахунок виконано правильно.

4.2. Розрахунок двохарнірної арки

Двохарнірна арка (рис. 1.17, а) є один раз статично невизначуваною системою. Це можна побачити, використовуючи формулу (1.2) або безпосередньо порівнюючи кількість опорних реакцій (чотири) з числом рівнянь рівноваги (три).

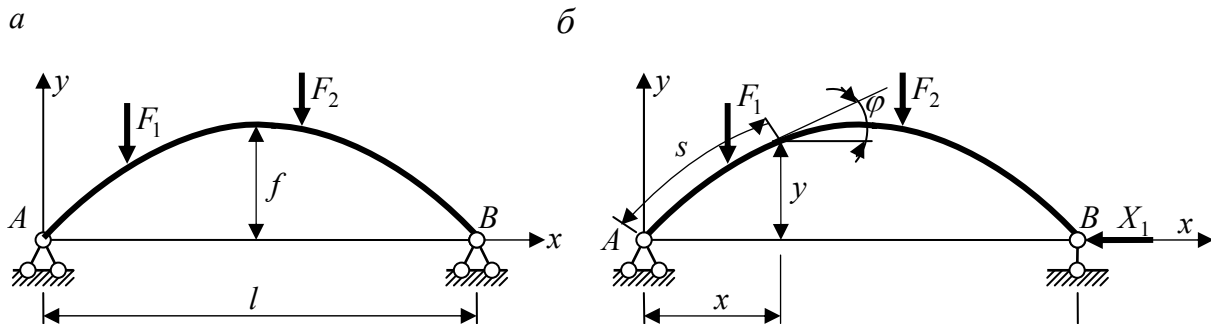


Рис. 1.17

Основну систему для двохарнірної арки обирають звичайно відкиданням горизонтальної опорної в'язі. У такому випадку зайвим невідомим буде розпір X_1 (рис. 1.17, б).

Внутрішні зусилля у довільному перерізі основної системи від зайвого невідомого $\bar{X}_1 = l$ будуть такі: $\bar{M}_l = -y$; $\bar{Q}_l = -\sin \varphi$, $\bar{N}_l = -\cos \varphi$. (1.21)

Як відомо, у трихарнірній арці згинаючі моменти менше, ніж в балці того самого прогону. Ця особливість є загальною для усіх арок, в тому числі для статично невизначуваних. Отже, в арках деформації згину у загальному випадку, на відміну від балок, не будуть переважаючими, і при обчисленні переміщень в арці деформаціями зсуву й стиску нехтувати неможливо. Для двохарнірної арки одиничне і вантажне переміщення набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}_l \bar{M}_l ds}{EI} + \int \frac{\bar{N}_l \bar{N}_l ds}{EA} + \int \mu \frac{\bar{Q}_l \bar{Q}_l ds}{GA}; \\ \Delta_{1f} &= \int \frac{\bar{M}_l M_f ds}{EI} + \int \frac{\bar{N}_l N_f ds}{EA} + \int \mu \frac{\bar{Q}_l Q_f ds}{GA}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

де s - координата точки арки, відрахована вздовж її криволінійної осі.

Таблиця 1.1

Елементи ферми	№ стержня	Довжина стержня l , m	$\varepsilon =$ $= A_0 / A$	$\bar{N}_1$	N_f	$\bar{N}_1 l \varepsilon$	$\bar{N}_1^2 l \varepsilon$	$\bar{N}_1 N_f l \varepsilon$	$\bar{N}_1 X_1$	$N =$ $= \bar{N}_1 X$ $+ N_f$	Перевір ка: $\bar{N}_1 N l \varepsilon$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Верх ній пояс	7-8	2,83	1	1,414	-35,555	4,000	5,656	-142,22	21,32	-14,24	-56,96
	8-9	2,83	1	2,828	-56,568	8,000	22,624	-452,54	42,65	-13,92	-111,36
	9-10	2,00	1	2,000	-40,000	4,000	8,000	-160,00	30,16	-9,84	-39,36
Ниж ній пояс	1-2	2,83	2	-1,414	0,0	-8,000	11,312	0,0	-21,32	-21,32	170,56
	2-3	2,83	2	-2,828	35,555	-16,00	45,248	-568,88	-42,65	-7,10	113,6
	3-4	4,0/2	2	-3,000	45,000	-12,00	36,000	-540,00	-45,24	-0,24	2,88
Решітка	1-7	2,0	1	1,000	-35,000	2,000	2,000	-70,00	15,08	-19,92	-39,84
	2-8	2,0	1	1,000	-25,000	2,000	2,000	-50,00	15,08	-9,92	-19,84
	3-9	2,0	1	-2,000	30,000	-4,000	8,000	-120,00	-30,16	-0,16	0,64
	2-7	2,0	1	-1,000	25,000	-2,000	2,000	-50,00	-15,08	9,92	-19,84
	3-8	2,0	1	-1,000	15,000	-2,000	2,000	-30,00	-15,08	-0,08	0,16
	3-10	2,83	1	0,0	-7,0711	0,0	0,0	0,0	0,0	-7,07	0,0
Σ							144,84	-2183,64			287,84 -287,2= =0,64

Найчастіше перерізи двохшарнірної арки виконують змінними, щоб момент інерції зменшувався від замка до п'ят згідно з законом зміни згинаючих моментів.

Зобразимо закон зміни моментів інерції перерізів у вигляді відношення I_o/I , де I_o - момент інерції довільного, наприклад, замкового перерізу.

Перетворимо вираз (1.22), помноживши обидві частини рівності на EI_o . Після підстановки в ці формули одиничних зусиль (1.21) одержимо:

$$\begin{aligned} EI_o \delta_{11} &= \int y^2 \frac{I_o}{I} ds + \int \cos^2 \varphi \frac{I_o}{A} ds + \int \mu \sin^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} ds; \\ EI_o \Delta_{1f} &= - \int y M_f \frac{I_o}{I} ds - \int N_f \cos \varphi \frac{I_o}{A} - \int \mu Q_f \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} ds. \end{aligned} \quad (1.22,a)$$

Визначивши далі з канонічного рівняння величину розпору $X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{EI_o \Delta_{1f}}{EI_o \delta_{11}}$, обчислюємо остаточні зусилля у перерізах арки:

$$\begin{aligned} M &= M_f + \bar{M}_1 X_1 = M_f - y X_1; \\ Q &= Q_f + \bar{Q}_1 X_1 = Q_f - X_1 \sin \varphi; \\ N &= N_f + \bar{N}_1 X_1 = N_f - X_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Кінематична перевірка розрахунків здійснюється за виконанням умови:

$$- \int y M \frac{I_o}{I} ds - \int N \cos \varphi \frac{I_o}{A} ds - \int \mu Q \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} ds = 0. \quad (1.24)$$

Зазначимо, що при вертикальному навантаженні зусилля в основній системі виражаються через балочні зусилля: $M_f = M^o$; $Q_f = Q^o \cos \varphi$; $N_f = -Q^o \sin \varphi$.

Як показують розрахунки, при вертикальному навантаженні для пологих гнучких арок при визначенні при визначенні переміщень поздовжніми та поперечними деформаціями можна знехтувати. Зокрема, при пологості $f/l < 1/3$ для гнучких арок, висота перерізу яких h в замку не перевищує $l/10$, можна знехтувати поперечними силами при обчисленні δ_{11} , а при $f/l > 1/5$ - й поздовжніми силами. Для пологих арок поперечні та поздовжні деформації можна не враховувати і при обчисленні Δ_{1f} , а також наближено вважати $ds \approx dx$.

В якості прикладу визначимо згинаючі моменти для арки (рис. 1.18, а) постійного перерізу висотою $h = \frac{1}{12} l$. Вісь арки окреслена за квадратною параболою

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

Основна система наведена на рис. 1.18, б.

Арка пологога $\left(\frac{f}{l} = \frac{1}{5}\right)$ та гнучка $\left(h = \frac{1}{12} l\right)$, отже можна прийняти

$ds = dx$ та у виразах переміщень відкинути доданки, що містять поздовжні та поперечні сили.

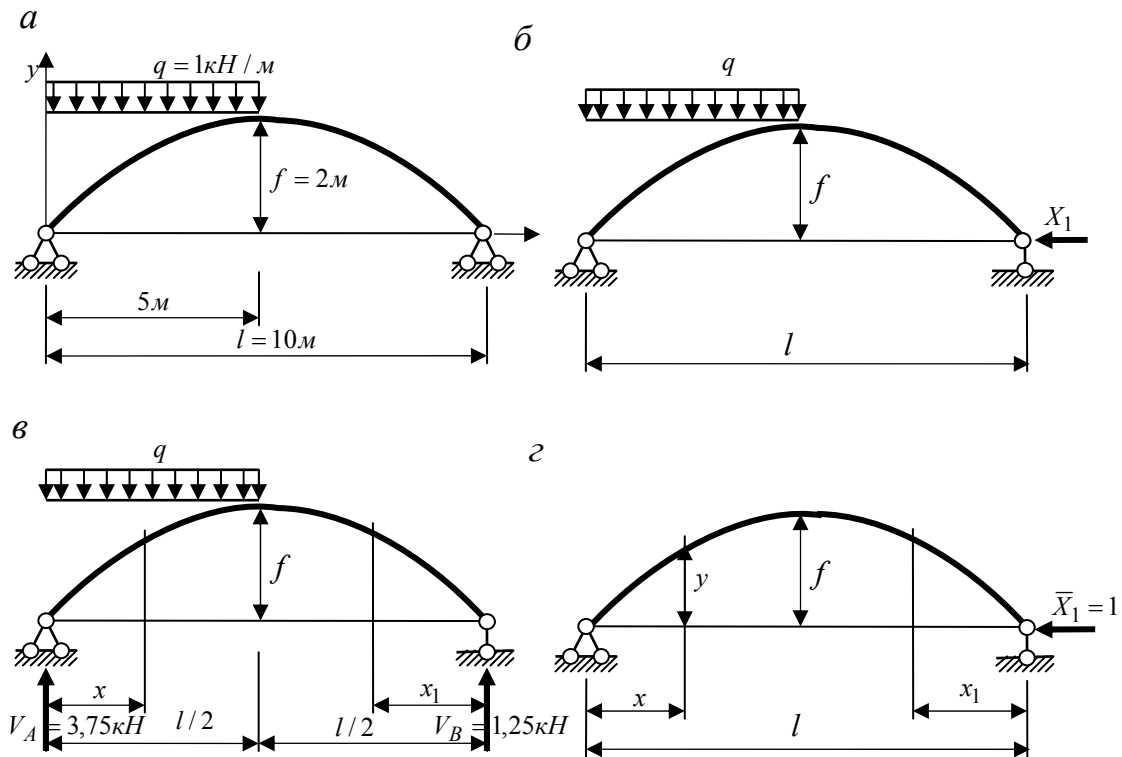


Рис. 1.18

При визначенні згинаючих моментів від заданого навантаження (рис. 1,18, в) необхідно розбити арку на дві ділянки. Після визначення опорних реакцій одержимо:

$$M_{f, \text{лів}} = V_A x - \frac{q x^2}{2} = 3,75x - x^2 / 2; \quad M_{f, \text{прав}} = V_B x_1 = 1,25x_1.$$

Згинаючі моменти від одиничного зайвого невідомого на цих ділянках такі (рис. 1,18, г):

$$\bar{M}_{1, \text{лів}} = \bar{M}_{1, \text{прав}} = -y.$$

Масштабовані одиничне та вантажне переміщення обчислюємо за (1.22, а) при урахуванні тільки деформацій згину:

$$EI\delta_{11} = 2 \int_0^5 y dx = 2 \int_0^5 \frac{4f}{l^2} x(l-x) dx = 21,3;$$

$$EI\Delta_{1f} = - \int_0^5 y (3,75x - x^2 / 2) dx - \int_0^5 y 1,25x_1 dx_1 = -66,7.$$

Зайве невідоме (розпір арки) визначаємо з канонічного рівняння:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = \frac{66,7}{21,3} = 3,125 \text{ кН}.$$

Згинаючі моменти у лівій та правій ділянках арки за (1.23) становлять:

$$M_{\text{лів}} = (3,75x - x^2 / 2) - y \cdot 3,125;$$

$$M_{\text{прав}} = 1,25x_1 - y \cdot 3,125.$$

За цими виразами неважко обчислити згинаючий момент у будь-якому перерізі арки.

Задача аналітичного обчислення інтегралів у (1.22) та (1.22,a) часто є трудомісткою, а іноді й нерозв'язною, тому звичайно застосовують чисельне інтегрування. Для цього арку розбивають на досить малі ділянки Δs і знаходять значення усіх величин, що входять в рівняння (1.22) або (1.22,a), для середини ділянок. Далі застосовують формулу прямокутників для чисельного інтегрування:

$$\begin{aligned} EI_o \delta_{11} &= \sum y^2 \frac{I_o}{I} \Delta s + \sum \cos^2 \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s + \sum \mu \sin^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s; \\ EI_o \Delta_{1f} &= \sum y M_f \frac{I_o}{I} \Delta s - \sum N_f \cos \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s - \sum \mu Q_f \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s. \end{aligned} \quad (1.25)$$

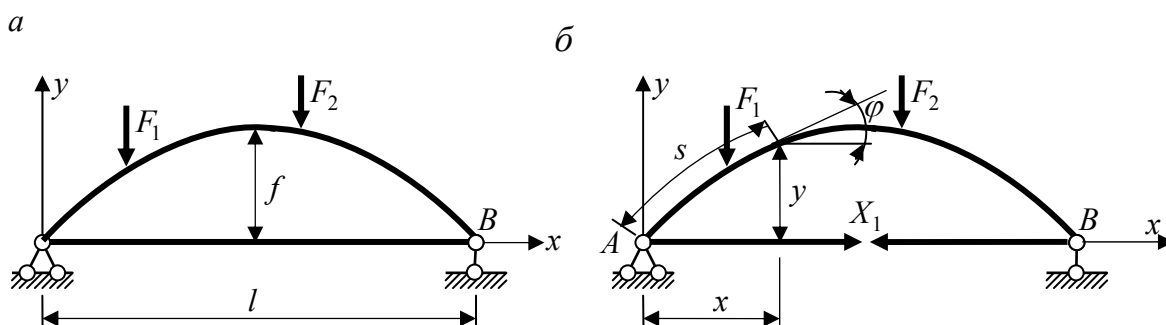


Рис. 1.19

Аналогічно перетворюється формула (1.24) для перевірки розрахунків:

$$- \sum y M \frac{I_o}{I} \Delta s - \sum Q \cos \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s - \sum \mu Q \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s = 0. \quad (1.26)$$

Розрахунок за формулами (1.25), (1.26) зручно виконувати в табличній формі.

При розрахунку арки з затяжкою (рис. 1.19, a) у якості зайвого невідомого беруть зусилля у затяжці $X_1 = N_z$ (рис. 1.19, б). При обчисленні переміщень для такої арки необхідно враховувати деформацію затяжки. Для цього у перших формулах (1.22), додається подовження затяжки від дії $X = 1$, яке становить l_z / EA_z , та відповідна величина $EI_o \cdot l_z / EA_z$ у перших формулах 1.22,a), (1.25). На величину вантажного переміщення Δ_{1f} наявність затяжки не впливає. Так само врахується подовження затяжки при перевірці розрахунків. Для цього у виразах (1.24), (1.26) необхідно додати величини $X_1 l_z EI_o / EA_z$.

4.3. Розрахунок безшарнірної арки та тонкостінних кілець

Безшарнірна арка являє собою криволінійний контур без шарнірів (рис. 1.20, a). Такий контур, як зазначалося раніше, є тричі статично невизначуваним і для його розрахунку зручно застосовувати спосіб пружного центра.

Обираючи основну систему, розріжемо арку на осі симетрії і за допомогою жорстких консолей перенесемо зайві невідомі в пружний центр (рис. 1.20, б). Якщо початок координат взяти в пружному центрі та вісь y спрямувати донизу, зусилля в основній системі від одиничних невідомих запишуться так:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_1 &= x; \quad \bar{Q}_1 = \cos \varphi; \quad \bar{N}_1 = \sin \varphi; \\
\bar{M}_2 &= y; \quad \bar{Q}_2 = \sin \varphi; \quad \bar{N}_2 = -\cos \varphi; \\
\bar{M}_3 &= 1; \quad \bar{Q}_3 = 0; \quad \bar{N}_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

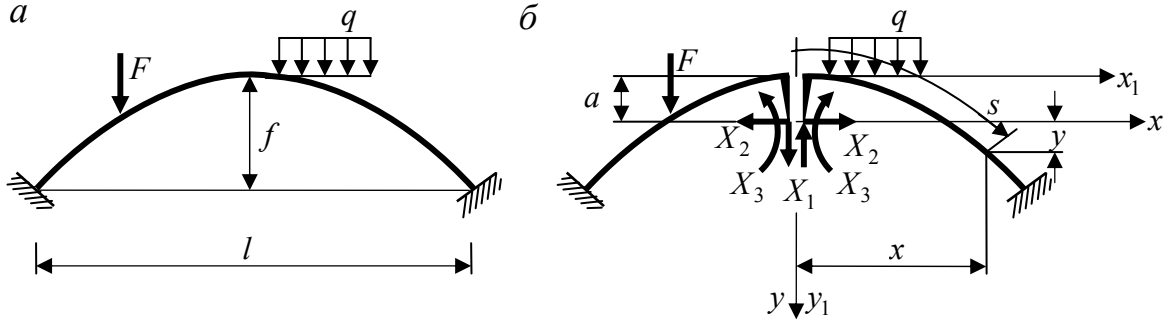


Рис. 1.20

Невідоме X_1 є кососиметричним, а X_2 та X_3 - симетричними, тому дійсні рівності $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$. Завдяки тому, що в основній системі зусилля $\bar{Q}_3$ та $\bar{N}_3$ дорівнюють нулю, в побічному переміщенні δ_{23} зберігається лише інтеграл, що містить згинаючі моменти:

$$\delta_{23} = \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3 ds}{EI}.$$

Обернення на нуль цього переміщення забезпечується застосуванням способу пружного центра.

Положення пружного центра визначається відстанню a , яку можна знайти, користуючись співвідношенням (1.18).

$$a = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y_1 ds}{EI}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{EI}} = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} y_1 \frac{I_o}{I} ds}{\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_o}{I} ds}.$$

Тепер канонічні рівняння, як звичайно при використанні способу пружного центра, розділяються:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} &= 0; \\
\delta_{22} X_2 + \Delta_{2f} &= 0; \\
\delta_{33} X_3 + \Delta_{3f} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

Одиничні та вантажні переміщення визначаються за формулою Мора:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} + \int_{(l)} \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EA} + \int_{(l)} \mu \frac{\bar{Q}_1^2 ds}{GA}; \\
\delta_{22} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EI} + \int_{(l)} \frac{\bar{N}_2^2 ds}{EA} + \int_{(l)} \mu \frac{\bar{Q}_2^2 ds}{GA};
\end{aligned}
\tag{1.30,a}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{33} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_3^2 ds}{EI}; \\
\Delta_{1f} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_1 M_f ds}{EI} + \int_{(l)} \frac{\bar{N}_1 N_f ds}{EA} + \int_{(l)} \mu \frac{\bar{Q}_1 Q_f ds}{GA}; \\
\Delta_{2f} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_2 M_f ds}{EI} + \int_{(l)} \frac{\bar{N}_2 N_f ds}{EA} + \int_{(l)} \mu \frac{\bar{Q}_2 Q_f ds}{GA}; \\
\Delta_{3f} &= \int_{(l)} \frac{\bar{M}_3 M_f ds}{EI}.
\end{aligned} \tag{1.30,б}$$

Як і для двохшарнірної арки, закон зміни поперечних перерізів безшарнірної арки задають у вигляді відношення I_o/I . Найбільших значень згинаючі моменти у безшарнірній арці звичайно досягають в перерізах біля п'ят, тому часто закон зміни моментів інерції беруть таким: $I_o/I = \cos \varphi$.

Помноживши обидві частини (1.30,а,б) на EI_o , зобразимо переміщення в основній системі у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
EI_o \delta_{11} &= \int_{(l)} x^2 \frac{I_o}{I} ds + \int_{(l)} \sin^2 \varphi \frac{I_o}{A} ds + \int_{(l)} \mu \cos^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} ds; \\
EI_o \delta_{22} &= \int_{(l)} y^2 \frac{I_o}{I} ds + \int_{(l)} \cos^2 \varphi \frac{I_o}{A} ds + \int_{(l)} \mu \sin^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} ds; \\
EI_o \delta_{33} &= \int_{(l)} \frac{I_o}{I} ds; \\
EI_o \Delta_{1f} &= \int_{(l)} x M_f \frac{I_o}{I} ds + \int_{(l)} N_f \sin \varphi \frac{I_o}{A} ds + \int_{(l)} \mu Q_f \cos \varphi \frac{EI_o}{GA} ds; \\
EI_o \Delta_{2f} &= \int_{(l)} y M_f \frac{I_o}{I} ds - \int_{(l)} N_f \cos \varphi \frac{I_o}{A} ds + \int_{(l)} \mu Q_f \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} ds; \\
EI_o \Delta_{3f} &= \int_{(l)} M_f \frac{I_o}{I} ds.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

У більшості випадків аналітичне обчислення у виразах (1.31) утруднене, тому користуються чисельним інтегруванням з застосуванням формули прямокутників:

$$\begin{aligned}
EI_o \delta_{11} &= \sum x^2 \frac{I_o}{I} \Delta s + \sum \sin^2 \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s + \sum \mu \cos^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s; \\
EI_o \delta_{22} &= \sum y^2 \frac{I_o}{I} \Delta s + \sum \cos^2 \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s + \sum \mu \sin^2 \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s; \\
EI_o \delta_{33} &= \sum \frac{I_o}{I} \Delta s; \\
EI_o \Delta_{1f} &= \sum x M_f \frac{I_o}{I} \Delta s + \sum N_f \sin \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s + \sum \mu Q_f \cos \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s; \\
EI_o \Delta_{2f} &= \sum y M_f \frac{I_o}{I} \Delta s - \sum N_f \cos \varphi \frac{I_o}{A} \Delta s + \sum \mu Q_f \sin \varphi \frac{EI_o}{GA} \Delta s; \\
EI_o \Delta_{3f} &= \sum M_f \frac{I_o}{I} \Delta s.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Аналогічно перетворюють вираз для визначення положення пружного центра:

$$a = \frac{\sum y_1 \frac{I_o}{I} \Delta s}{\sum \frac{I_o}{I} \Delta s}. \quad (1.33)$$

Після розв'язання канонічних рівнянь (1.29) визначають внутрішні зусилля:

$$\begin{aligned} M &= M_f + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 = M_f + x X_1 + y X_2 + X_3; \\ Q &= Q_f + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 = Q_f + X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi; \\ N &= N_f + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 = N_f + X_1 \sin \varphi - X_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Так само, як і в двошарнірних арках, обчислення переміщень δ_{11} , δ_{22} , Δ_{1f} , Δ_{2f} можна спростити. Зокрема, для пологих ($f/l < 1/3$) та гнучких ($h/l < 1/10$) арок поперечними деформаціями можна знехтувати. Поздовжні деформації найбільш відчутно позначаються на величині переміщень δ_{22} . Тут ними можна нехтувати тільки при $1/5 < f/l < 1/3$.

Окремо треба вирішувати питання про урахування поздовжніх сил в переміщеннях для арки, вісь якої співпадає з раціональною віссю тришарнірної арки. Як відомо, в такій тришарнірній арці згинаючі моменти й поперечні сили відсутні. Відповідні зусилля безшарнірної арки з раціональною віссю так само будуть відсутні, якщо не враховувати поздовжні деформації. В дійсності поздовжні сили призводять до обтискання осі арки і відхилення її від раціонального обрису, що спричиняє до появи в перерізах арки згинаючих моментів та поперечних сил. Урахування обтиску звичайно здійснюється у вигляді добавок зусиль X_2 та моментів відносно безмоментного стану арки, що відповідає стану тришарнірної арки.

Для пологих арок при обчисленні переміщень замість елемента ds можна брати його горизонтальну проекцію dx ($dx = ds \cos \varphi$, а пологі арки мають $\cos \varphi$ близький до одиниці).

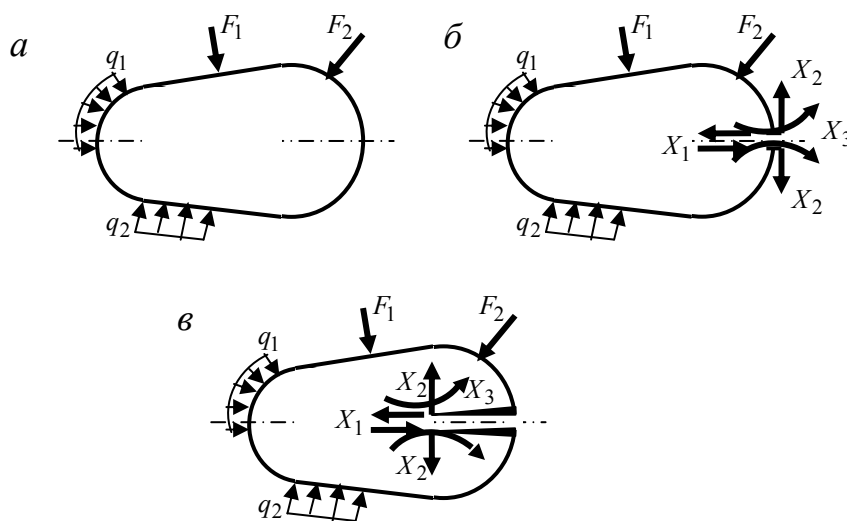


Рис. 1.21

Тонкостінні кільця (рис. 1.21, а), як закритий контур без шарнірів, тричі статично невизначувані. Зайвими невідомими звичайно беруть зусилля в якому-

небудь перерізі кільця (рис. 1.21, б). Як правило, кільце має хоча б одну вісь симетрії, тому навіть при довільному навантаженні розрахунок можна спростити застосуванням способу пружного центра (рис. 1.21, в). Як було зазначено, в цьому випадку маємо такі канонічні рівняння:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1f} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2f} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3f} = 0;$$

За наявності симетрії не тільки кільця, а й навантаження (рис. 1.22, а) можна обмежитись розрахунком частини кільця, розташованої між суміжними осями симетрії (рис. 1.22, б). Закріплення на кінцях вирізаної частини відповідають тій умові, що на осі симетрії можливі лише радіальні переміщення. При розрахунку цієї частини одержуємо зайве невідоме (рис. 1.22, в) – згинаючий момент. Зазначимо, що в затискній рухомій опорі діють реактивна сила, що паралельна опорним стержням, і реактивний момент.

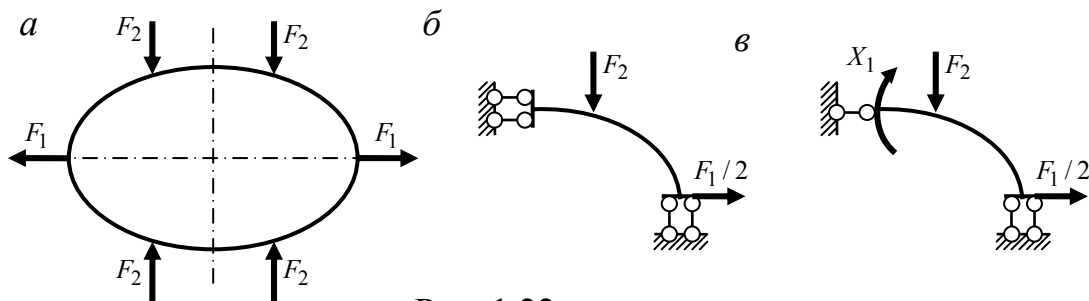


Рис. 1.22

У табл.1.2 та 1.3 наведені результати розрахунку колового кільця на радіальне і кільцеве навантаження, що змінюються за синусоїдальним законом.

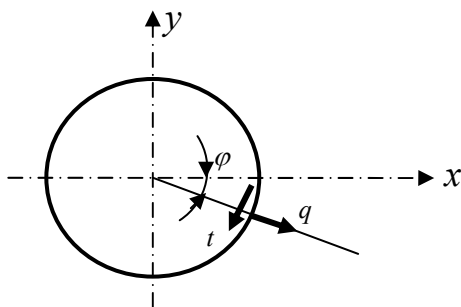


Рис. 1.23

Схема цього навантаження наведена на рис. 1.23.

Зазначимо, що при дії рівномірного радіального навантаження у перерізах колового кільця виникають лише поздовжні сили $N = q r$.

Таблиця 1.2

Наванта- ження ($n \geq 2$)		Зусилля		
		M	Q	N
радіальне	$q = b \cos n\varphi$	$\frac{r^2}{n^2 - 1} b \cos n\varphi$	$-\frac{nr}{n^2 - 1} b \sin n\varphi$	$-\frac{r}{n^2 - 1} b \cos n\varphi$
	$q = b \sin n\varphi$	$\frac{r^2}{n^2 - 1} b \sin n\varphi$	$\frac{nr}{n^2 - 1} b \cos n\varphi$	$-\frac{r}{n^2 - 1} b \sin n\varphi$
кільцеве	$t = a \cos n\varphi$	$\frac{r^2}{n(n^2 - 1)} a \sin n\varphi$	$\frac{r}{n^2 - 1} a \cos n\varphi$	$-\frac{nr}{n^2 - 1} a \sin n\varphi$
	$t = a \sin n\varphi$	$\frac{r^2}{n(n^2 - 1)} a \cos n\varphi$	$\frac{r}{n^2 - 1} a \sin n\varphi$	$\frac{nr}{n^2 - 1} a \cos n\varphi$

Таблиця 1.3

Наванта- ження ($n \geq 2$)		Переміщення	
		радіальні	кільцеві
радіальне	$q = b \cos n\varphi$	$\frac{r^4}{EI(n^2 - 1)^2} b \cos n\varphi$	$-\frac{r^4}{EI n(n^2 - 1)^2} b \sin n\varphi$
	$q = b \sin n\varphi$	$\frac{r^4}{EI(n^2 - 1)^2} b \sin n\varphi$	$\frac{r^4}{EI n(n^2 - 1)^2} b \cos n\varphi$
кільцеве	$t = a \cos n\varphi$	$\frac{r^4}{EI n(n^2 - 1)^2} a \sin n\varphi$	$\frac{r^4}{EI n^2(n^2 - 1)^2} a \cos n\varphi$
	$t = a \sin n\varphi$	$\frac{r^4}{EI n(n^2 - 1)^2} a \cos n\varphi$	$\frac{r^4}{EI n^2(n^2 - 1)^2} a \sin n\varphi$

4.4. Попередньо напружені системи

Великі можливості для підвищення економічності споруд має регулювання зусиль в них. Це регулювання може здійснюватись двома шляхами: зміною жорсткостей елементів системи і створенням попереднього напруження.

Як неодноразово зазначалось, зміна жорсткостей елементів статично невизначуваної системи спричиняє до зміни зусиль в них. Як правило, тут має місце така відповідність: зменшення жорсткості елемента веде до зменшення зусилля в ньому. Однак це співвідношення не піддається кількісним оцінкам і для регулювання зусиль таким способом користуються мало.

Попередньо напружені системи - це системи, в яких попередньо (в процесі виготовлення, укрупненого складання чи монтажу) створюються попередні напруження, оптимально розподілені в елементах конструкції і протилежні за знаком напруженням від розрахункового навантаження. Після завантаження таких конструкцій експлуатаційним навантаженням спочатку гасяться попередні напруження, а потім робочі напруження зростають до свого граничного значення.

В сучасному будівництві застосовують попередньо напружені залізобетонні й сталеві конструкції. Найбільш поширені з них перші. При їх виготовленні створюється попереднє напруження стиску в бетоні і розтягу – в арматурі.

Попереднє напруження здійснюють різними способами. Наприклад, в нерозрізних балках напруження можна регулювати вертикальними переміщеннями опор. Таким шляхом вдається одержати бажане співвідношення моментів на опорах і в прогонах від сумарної дії зовнішнього навантаження та зміщень опор. У розрізних балках вигинають окремі їх частини і з'єднують в такому положенні. При цьому в балці створюються попередні напруження, протилежні за знаком напруженням від експлуатаційного навантаження, що зменшує сумарні напруження при її роботі під зовнішнім навантаженням.

Найчастіше в залізобетонних і металевих конструкціях попереднє напруження здійснюють за допомогою зтяжок (сталеві канати, високоміцні сталеві стержні або дріт, зібраний в пучки).

На рис. 1.24,а наведена сталева балка із зтяжкою, розташованою в рівні нижнього поясу балки. Внаслідок створення попереднього напруження балка стає внутрішньо статично невизначуваною. Сила X , що створює попереднє обтискання балки, спричиняє до появи постійних уздовж її осі від'ємних моментів $M_x = X \cdot e$. За рахунок цього згинаючий момент M_f у прогоні зменшується і дорівнює $M_f - M_x$.

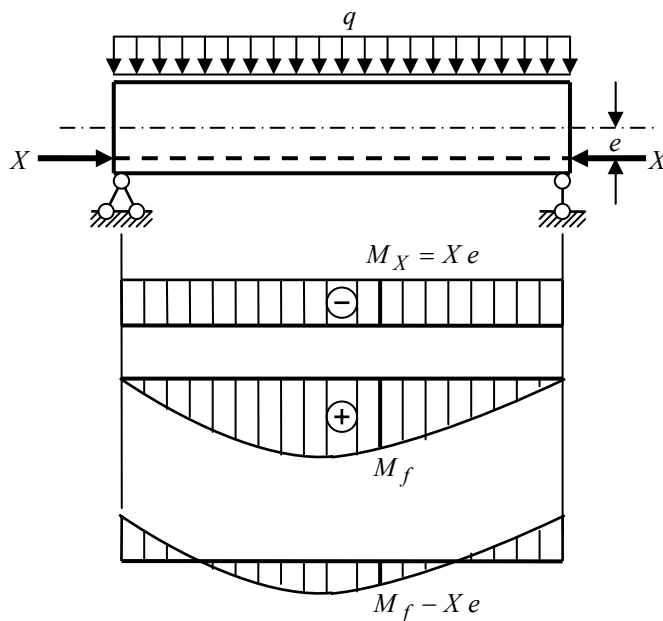


Рис. 1.24

Зусилля X можна підібрати так, щоб згинаючі моменти зменшились порівняно з балочними удвічі. Для цього достатньо взяти $X = M_f / (2e)$.

Існують різні варіанти розташування напружуючого елемента. Вони показані на рис. 1.25, а, б, в. Якщо дозволяють умови габариту, затяжку можна винести за межі балки. Так одержують шпренгельну систему (рис. 1.26).

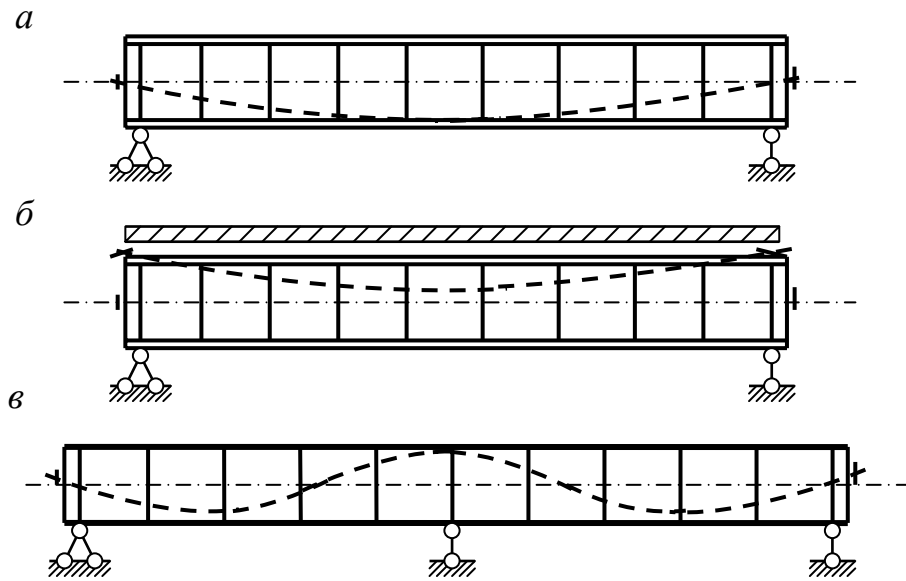


Рис. 1.25

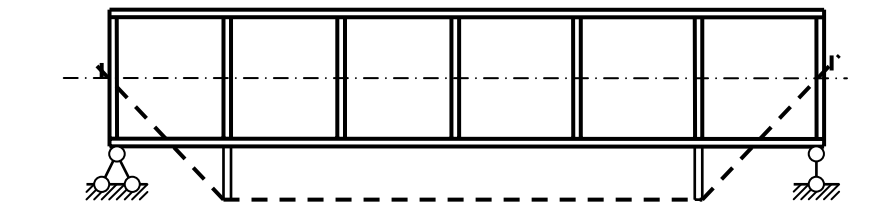


Рис. 1.26

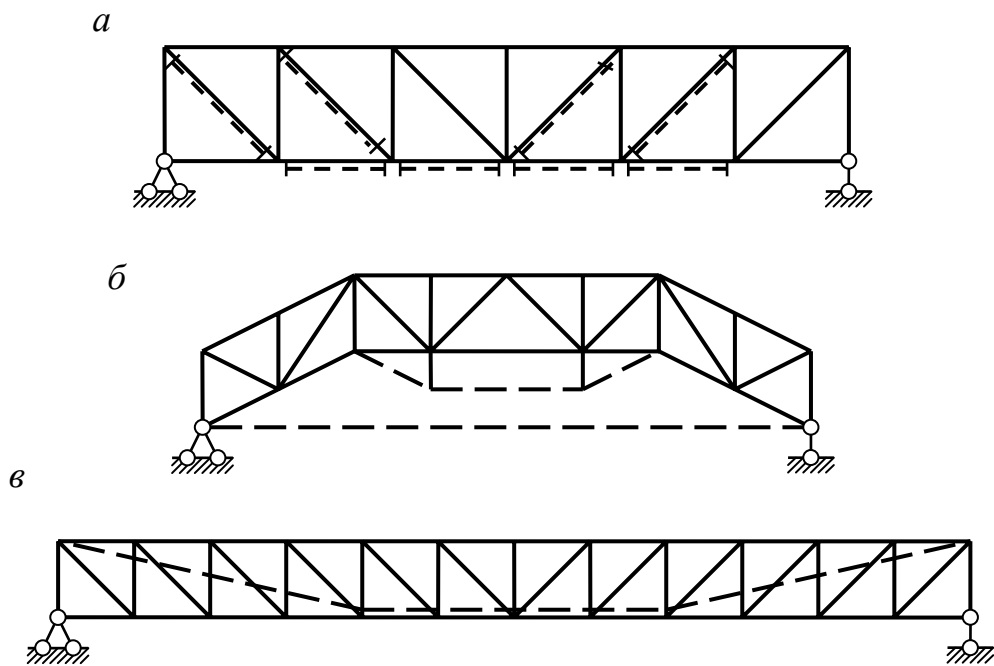


Рис. 1.27

У сталевих фермах попереднє напруження може здійснюватися напруженням окремих розтягнутих елементів (рис. 1.27, а) або напруженням усієї конструкції взагалі (рис. 1.27, б, в). Напруження окремих стержнів можна рекомендувати в тих випадках, коли небажано вносити в систему додаткову статичну невизначуваність.

На рис. 1.28 наведено приклади попереднього напруження рами. Тут зображені епюри згинаючих моментів від зусиль в затяжках.

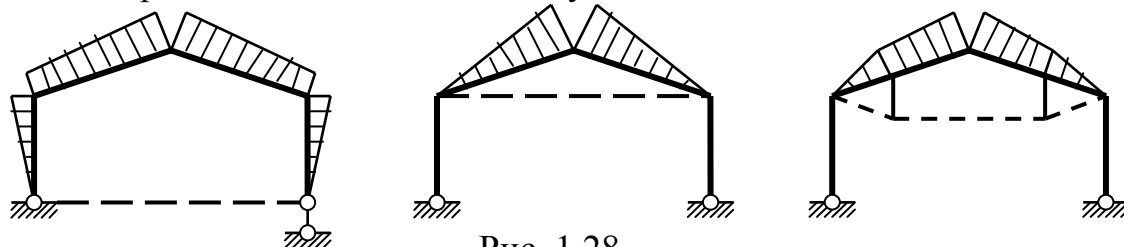


Рис. 1.28

Розрахунок попередньо напружених сталевих балок із затяжками (рис. 1.24) виконують методом сил. Приймавши зусилля в затяжці зайвим невідомим, з канонічного рівняння знаходимо

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = -\frac{\int \bar{M}_1 M_f / (EI) dx}{\int \bar{M}_1^2 / (EI) dx + l / (EA) + l / (E_s A_s)}, \quad (1.35)$$

де $\bar{M}_1$ - згинаючий момент в основній системі від одиничного зусилля у затяжці; M_f - згинаючий момент в основній системі (балці з перерізаною затяжкою) від заданого навантаження; EI , EA - жорсткості балки відповідно при згині й розтягу; $E_s A_s$ - жорсткість затяжки.

Повне зусилля в затяжці одержимо як суму знайденого зусилля X_1 і попереднього напруження N_s :

$$N = N_s + X_1. \quad (1.36)$$

Напруження у крайніх волокнах балки, враховуючи попереднє напруження,

$$\sigma = N / A \pm (M_f - N \cdot e) / W, \quad (1.37)$$

де e - відстань між осями балки і затяжки.

Аналогічно розраховують попередньо напружені рами й ферми.

Запитання для самоконтролю

1. Як відкидають в'язі при виборі основної системи методу сил для ферми?
2. Чому зайвий стержень необхідно розрізувати, а не відкидати?
3. Які особливості визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь для ферм на відміну від рам?
4. Назвіть типи статично невизначених арок.
5. Яка основна система є зручною для розрахунку двошарнірної арки?
6. Як обчислюють переміщення в двошарнірних арках? Коли можна знехтувати впливом на переміщення поздовжніх та поперечних деформацій?
7. Як визначити внутрішні зусилля в двошарнірній арці при відомому розпорі?
8. Чим відрізняється розрахунок арки із затяжкою від розрахунку звичайної двошарнірної арки?
9. У якому вигляді приймають закон зміни жорсткостей поперечних перерізів для арок?
10. У чому суть попереднього напруження конструкцій?
11. Як здійснюється попереднє напруження різних конструкцій?
12. Як можна виконати розрахунок попередньо напруженої конструкції?

5. Метод переміщень

5.1. Припущення. Кількість невідомих методу переміщень

Розраховуючи раму методом сил, після визначення зайвих невідомих ми могли визначити всі інші зусилля і будь-яке переміщення точок рами. Можна уявити собі й іншу постановку задачі: визначивши будь-яким чином деякі переміщення, знайти відповідні зусилля. Саме так ставиться задача розрахунку статично невизначуваної системи методом переміщень.

Метод переміщень є таким самим універсальним методом, як і метод сил, і може бути застосований для розрахунку різних споруд. Однак найбільшого поширення він набув для розрахунку статично невизначуваних рам, що складаються з прямолінійних стержнів постійної жорсткості. При цьому приймаються такі припущення:

- поздовжніми і поперечними деформаціями стержнів при визначенні переміщень нехтують;
- зміни відстаней між кінцями стержнів за рахунок викривлення їх осей не беруть до уваги.

Щоб визначити зусилля в окремому стержні і переміщення усіх його точок, досить знати кутові й лінійні зміщення його кінців (рис. 1.29) - $x_A, x_B, y_A, y_B, \varphi_A, \varphi_B$.

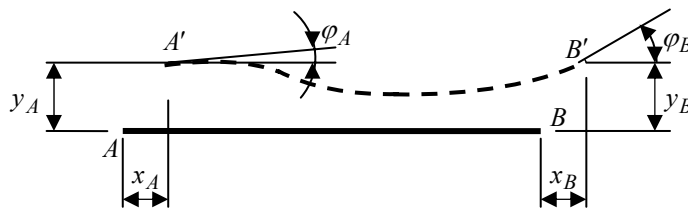


Рис. 1.29

У стержневих системах не обов'язково окремо задавати переміщення кінців кожного стержня. При жорсткому з'єднанні стержнів у вузлі, що має місце у рамах, досить знати поворот кінця будь-якого з цих стержнів, тобто поворот вузла. При шарнірному з'єднанні повороти усіх стержнів у вузлі різні, однак величини цих поворотів є надлишковими даними для визначення зусиль у стержнях, що мають на кінці шарнір. Аналогічно скорочується і число лінійних зміщень. Наприклад, у рамі (рис. 1.30, а) для визначення напружено-деформованого стану досить задати кутові переміщення вузлів 1 і 2 - Z_1 і Z_2 та загальне для усіх вузлів горизонтальне зміщення - Z_3 . Ці переміщення зазвичай приймаються за невідомі методу переміщень. Отже, загальне число усіх кутових та незалежних лінійних зміщень вузлів рами є числом невідомих методу:

$$n = n_y + n_\alpha. \quad (1.38)$$

Число кутових зміщень n_y або ступінь кутової рухомості вузлів рами відповідає кількості жорстких вузлів (у нашому прикладі – 2). При визначенні числа лінійних зміщень n_α або ступеня лінійної рухомості беремо до уваги, що відповідно до прийнятих припущень при деформаціях рами відстань між кінцями стержнів не змінюються. У такому випадку при визначенні кількості лінійних зміщень

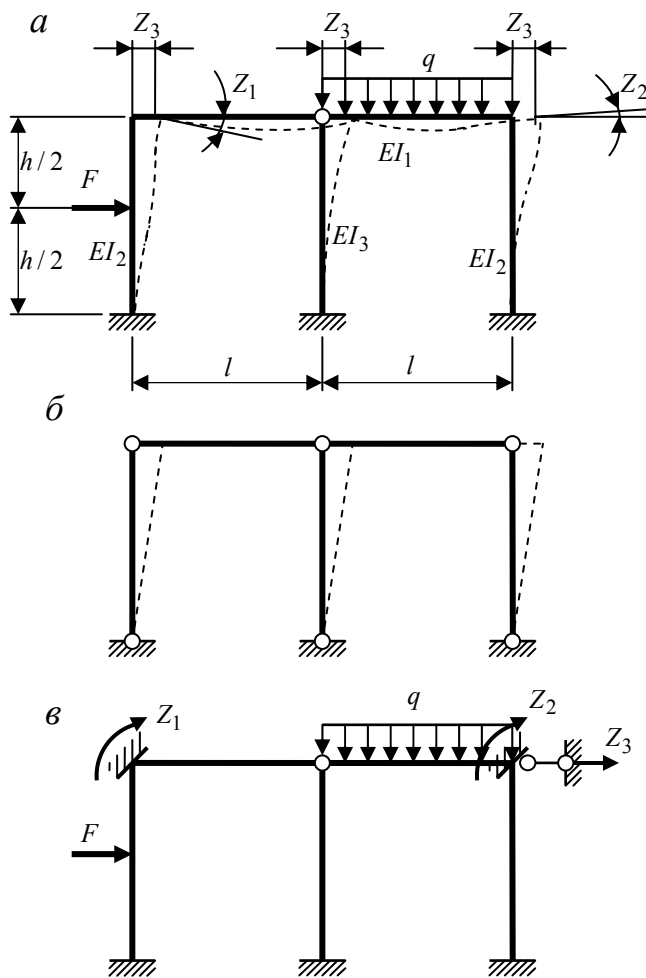


Рис. 1.30

жорсткі з'єднання у вузлах рами можна замінити шарнірними. Тоді рама перетворюється в шарнірно-стержневу систему (рис. 1.30, б) і кількість лінійних переміщень n_λ можна визначити як мінімальну кількість додаткових опорних стержнів, яка необхідна для усунення переміщень цієї шарнірно-стержневої схеми рами.

Раму, у якої лінійні зміщення вузлів відсутні, називають *рамою з незміщуваними вузлами*.

Оскільки для розрахунку рами слід знати вузлові й лінійні зміщення її вузлів, число цих невідомих методу переміщень називають *ступенем кінематичної невизначуваності рами*. Це означає, що рама, в якої кутові та лінійні зміщення вузлів відсутні або відомі, є кінематично визначуваною.

5.2. Суть методу

Поставимо в рамі (рис. 1.30, а) в'язі у напрямку можливих переміщень її вузлів. У напрямку поворотів вузлів поставимо додаткові затиснення (рис. 1.30, в). Кожне з цих затиснень фіксує тільки поворот відповідного вузла, не перешкоджаючи лінійним зміщенням, тому їх називають *плаваючими затисненнями*. У напрямку лінійних зміщень вузлів поставимо додаткові опорні стержні. У розглянутому прикладі необхідно поставити один такий стержень (рис. 1.30, в).

Введеним в'язям можна надати будь-які переміщення, у тому числі і такі, які відповідають переміщенням заданої рами. Оскільки заданим зміщенням вузлів відповідають конкретні зусилля, одержана система є *кінематично визначуваною*. Орже, переміщуючи добавлені в'язі, можна задати в одержаній системі різні розподіли зусиль, у тому числі й такі, що відповідають заданій системі.

Одержана таким чином система приймається за основну систему методу переміщень. Отже, *основною системою методу переміщень є кінематично визначувана система, одержана із заданої введенням додаткових в'язей у напрямку можливих зміщень вузлів*.

Переміщення додаткових в'язей, тобто переміщення вузлів, позначаються $Z_1, Z_2, \dots$ є основними невідомими методу переміщень. Стрілками на основній

системі показують прийняті додатні напрямки переміщень (рис. 1.30, в). Серед невідомих можуть бути переміщення двох типів:

1) кути повороту жорстких вузлів (Z_1 та Z_2 у розглянутому прикладі), інакше – кутові невідомі;

2) лінійні зміщення вузлів (Z_3 у розглянутому прикладі), інакше – лінійні невідомі.

Завдяки введенню додаткових в'язей основна система розчленовується на окремі стержні. Ці стержні мають постійну жорсткість, їх опорні закріплення завжди можуть бути тільки двох типів - затиснення або шарнір, тому їх неважко розрахувати як звичайні балки на різні прості впливи.

Наприклад, для розрахунку при повороті затиснення в балці з одним затиснутим, а другим шарнірним кінцем (рис. 1.31, а) скористаємося методом сил. Основна система та епюра $\bar{M}_1$ в ній показані на рис. 1.31, б, в. Переміщення в основній системі будуть такими:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l}{3EI};$$

$$\Delta_{1f} = -\varphi.$$

з канонічного рівняння одержуємо

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l} \varphi.$$

Остаточна епюра моментів наведена на рис. 1.31, г. Очевидно, при $\varphi = 1$ ордината епюри моментів у затисненні дорівнює $3EI / l$.

Нагадаємо, що на величину згинаючих моментів зовсім не впливають поздовжні закріплення балки. Тому не має значення, яке затиснення є в кінці балки: повне чи плаваюче. Аналогічно не має різниці між рухомим та нерухомим шарнірним опиранням.

Взагалі в основній системі методу переміщень можуть зустрітися балки чотирьох типів, показаних на рис. 1.32. Балка з двома шарнірними кінцями, як і консольна, є статично визначуваною, а результати розрахунків двох інших типів балок постійного перерізу на різні впливи наведено у табл. 1.4. Користуючись цією таблицею, легко побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі та визначити в ній зусилля, що нас цікавлять. Для розглянутого прикладу рами (рис. 1.30, а) на рис. 1.33, а побудовано епюри $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ від дії одиничних зміщень в'язей та епюра M_f від дії заданого навантаження.

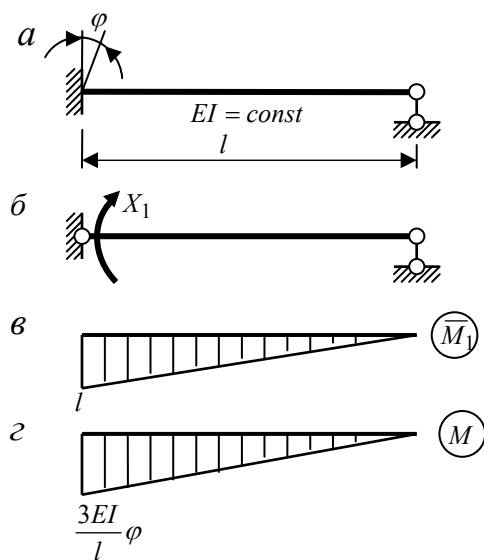


Рис. 1.31

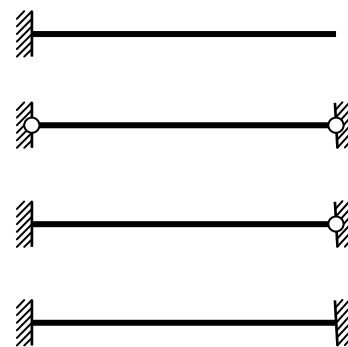
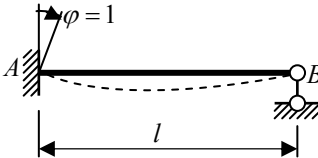
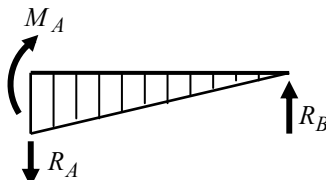
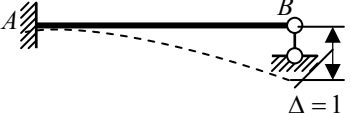
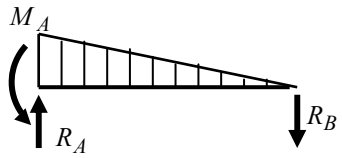
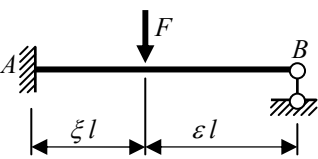
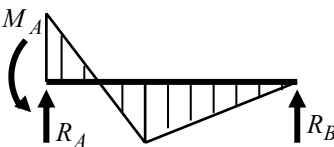
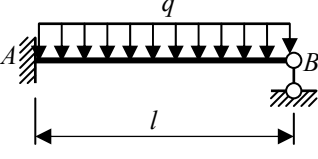
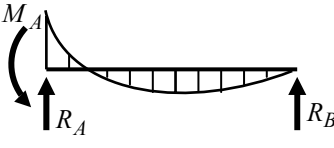
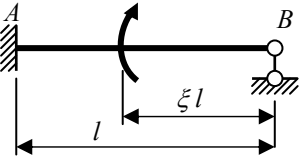
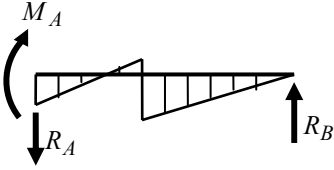
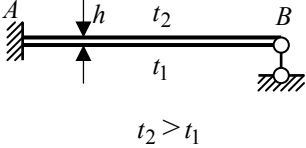
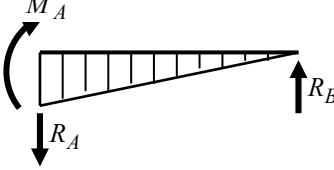
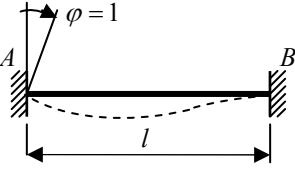
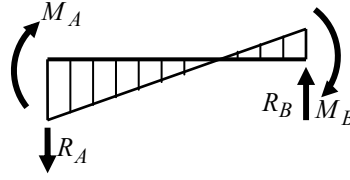
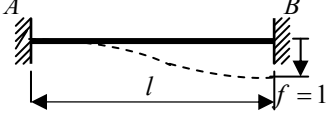
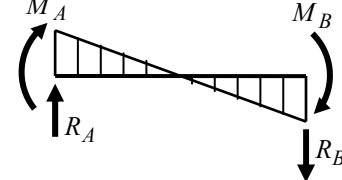
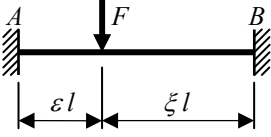
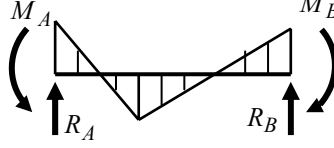
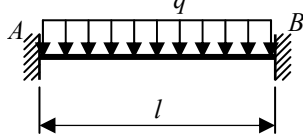
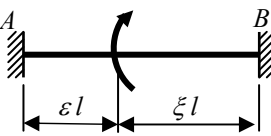
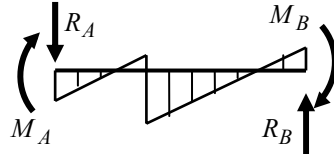
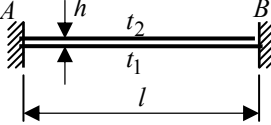
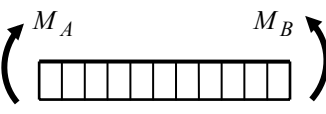


Рис. 1.32

Таблиця 1.4

№ п/п	Схема балки та вплив на неї	Епюра згинаючих моментів та реакцій	Формули для визначення реакцій
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}$
2			$M_A = \frac{3EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3}$
3			$M_A = \frac{F l}{2} \xi (1 - \xi^2)$ $R_A = \frac{F}{2} \xi (3 - \xi^2)$ $R_B = \frac{F}{2} \epsilon^2 (1 - \epsilon)$
4			$M_A = \frac{q l^2}{8}$ $R_A = \frac{5 q l}{8}$ $R_B = \frac{3 q l}{8}$
5			$M_A = \frac{M}{2} (1 - 3 \xi^2)$ (при $\xi^2 > \frac{1}{3}$ момент M_A змінює напрям на протилежний)

1	2	3	4
6	 $t_2 > t_1$		$M_A = \frac{3EI \alpha (t_2 - t_1)}{2h}$ $R_A = R_B = \frac{3EI \alpha}{2l} \frac{t_2 - t_1}{h}$
7	 $\varphi = 1$		$M_A = 2M_B = \frac{4EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2}$
8	 $f = 1$		$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3}$
9	 ϵl ξl		$M_A = F l \epsilon \xi^2$ $M_B = F l \epsilon^2 \xi$ $R_A = F \xi^2 (1 + 2\epsilon)$ $R_B = F \epsilon^2 (1 + 2\xi)$
10	 q l		$M_A = M_B = \frac{q l^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{q l}{2}$
11	 ϵl ξl		$M_A = M \xi (2 - 3\xi)$ $M_B = M \epsilon (2 - 3\epsilon)$ $R_A = R_B = \frac{M}{l} 6 \epsilon \xi$
12	 h t_2 t_1 l		$M_A = M_B = \frac{EI \alpha (t_2 - t_1)}{h}$

Для полегшення користування табл.1.4 при побудові епюр від зміщення в'язей зручно попередньо показати деформовану вісь рами. Для розглянутої рами (рис. 1.30, а) вона наведена штриховими лініями на епюрах $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ (рис. 1.33, а).

Проаналізуємо тепер різницю між основною та заданою системами. Сумісність деформацій окремих перерізів та елементів рами в основній системі методу переміщень, очевидно, не порушена, оскільки усі в'язі заданої системи зберігаються. Але через введення додаткових в'язей з'являються додаткові сили – реакції у в'язях, які порушують умови рівноваги системи. Ці реакції зникнуть в основній системі тільки в тому випадку, коли переміщення вузлів (в'язей) відповідатимуть переміщенням у заданій системі.

Позначивши реакції у добавлених в'язях R_1, R_2, R_3 , одержимо умови еквівалентності основної та заданої систем:

$$R_1 = 0; R_2 = 0; R_3 = 0. \quad (1.39)$$

Для того, щоб одержати рівняння (1.39) у канонічній формі, так само, як і в методі сил, використаємо принцип незалежності дії сил:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1f} &= 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2f} &= 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3f} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями методу переміщень*. Вони є статичними рівняннями і виражають умови рівноваги: i -е рівняння відображає умову рівності нулю реакції в i -й добавленій в'язі основної

системи. Коефіцієнтами і вільними членами канонічних рівнянь є реакціями у додаткових в'язях основної системи: r_{ik} - реакція в i -й в'язі від одиничного зміщення k -ї в'язі або *одинична реакція*; R_{if} - реакція в i -й в'язі від заданого навантаження або *вантажна реакція*.

Одиничні й вантажні реакції визначимо з умов рівноваги. Зокрема, реактивні моменти в плаваючих затисненнях (коефіцієнти та вільні члени перших двох канонічних рівнянь у нашому прикладі) знаходимо з умов рівноваги відповідних вузлів під дією згинаючих моментів (рис. 1.33, б):

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{3EI_1}{l} + \frac{4EI_2}{h}; \quad r_{12} = 0; \quad r_{13} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad R_{1f} = -\frac{Fh}{8}; \\ r_{21} &= 0; \quad r_{22} = \frac{3EI_1}{l} + \frac{4EI_2}{h}; \quad r_{23} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad R_{2f} = \frac{ql^2}{8}. \end{aligned}$$

Зазвичай додатними за знаком вважають реакції, що співпадають за напрямком з відповідними зміщеннями вузлів. У цьому випадку головні коефіцієнти канонічних рівнянь – головні реакції завжди будуть додатними.

Для визначення реактивних сил в опорному стержні виріжемо ригель. Розглядаючи рівновагу останнього (рис. 1.33, в), беремо до уваги, що поздовжні сили у розрізаних стояках не дадуть проекцій на вісь опорного стержня. Тому в перерізах стояків достатньо показати лише поперечні сили. Останні можна

знайти через реакції балок з табл.1.4 або за епюрою згинаючих моментів за виразами, що застосовувались при розрахунку рам:

$$Q_{\text{лів}}^{\text{прав}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{ql}{2} \quad (1.41)$$

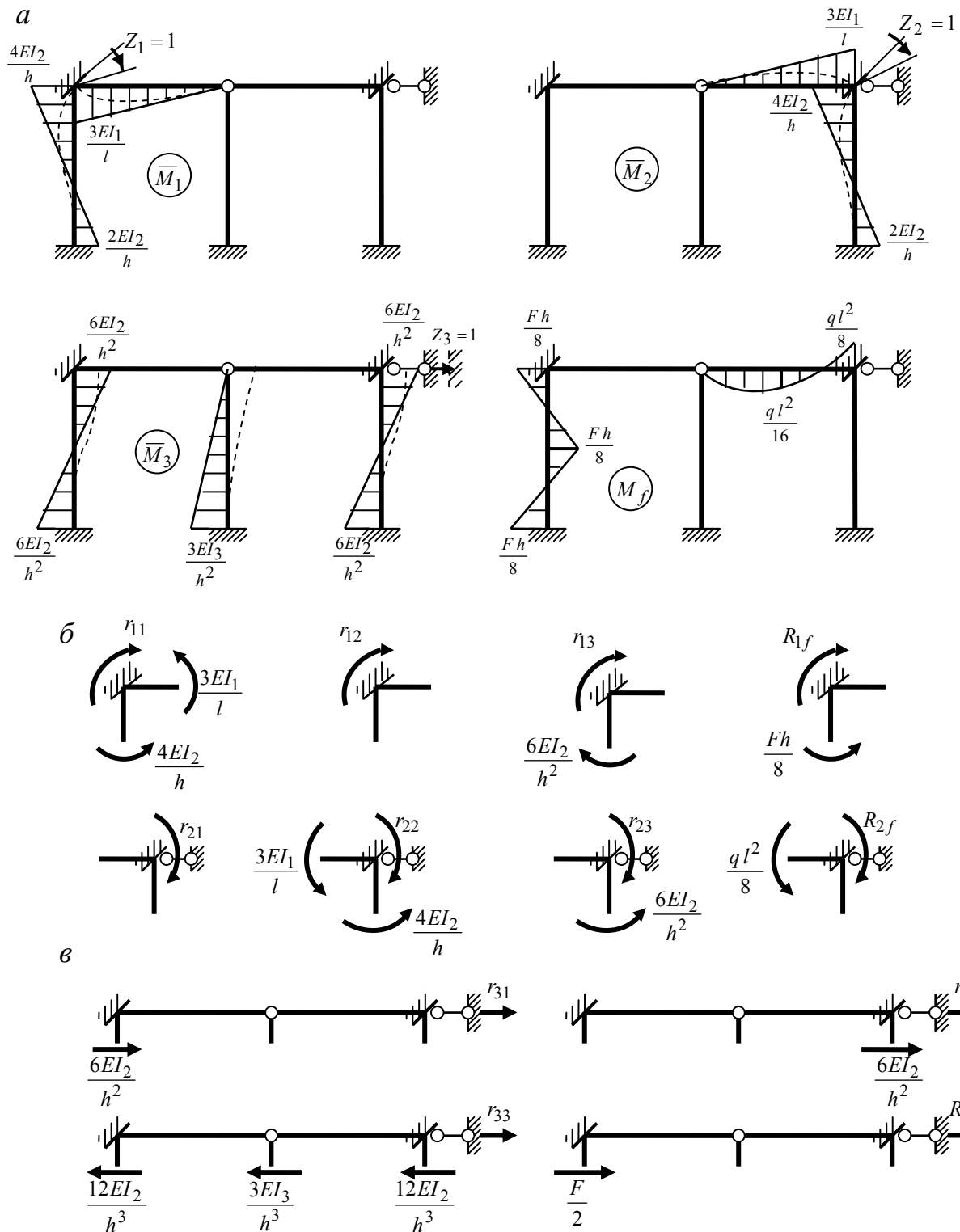


Рис. 1.33

Рівняння рівноваги ригелів з рис. 1.33, в дають:

$$r_{31} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad r_{32} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad r_{33} = \frac{24EI_2}{h^3} + \frac{3EI_3}{h^3}; \quad R_{3f} = -\frac{F}{2}.$$

Для перевірки переконаємося у виконанні теореми про взаємність реакцій. Дійсно, $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$.

Підставивши знайдені реакції в канонічні рівняння, вирішуємо систему рівнянь (1.40). Для розглянутої рами, беручи $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI$, $F = \frac{ql}{2}$, $h = l$, одержуємо:

$$r_{11} = \frac{7EI}{l}; \quad r_{12} = r_{21} = 0; \quad r_{13} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad R_{1f} = \frac{ql^2}{16}; \quad r_{22} = \frac{7EI}{l};$$

$$r_{23} = r_{32} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad R_{2f} = \frac{ql^2}{8}; \quad r_{33} = \frac{27EI}{l^2}; \quad R_{3f} = -\frac{ql}{4}$$

і далі:

$$\frac{7EI}{l}Z_1 - \frac{6EI}{l^2}Z_2 + \frac{ql^2}{16} = 0;$$

$$\frac{7EI}{l}Z_2 - \frac{6EI}{l^2}Z_3 + \frac{ql^2}{8} = 0;$$

$$-\frac{6EI}{l^2}Z_1 - \frac{6EI}{l^2}Z_2 + \frac{27EI}{l^3}Z_3 - \frac{ql}{4} = 0.$$

Звідси маємо:

$$Z_1 = -0,00435 \frac{ql^3}{EI}; \quad Z_2 = -0,01328 \frac{ql^3}{EI}; \quad Z_3 = 0,00534 \frac{ql^4}{EI}.$$

Тепер побудову результуючої епюри згинаючих моментів можна виконати так само, як і в методі сил, з використанням виправлених епюр $M_1 = \bar{M}_1 Z_1$, $M_2 = \bar{M}_2 Z_2$ та $M_3 = \bar{M}_3 Z_3$. Одержуємо: $M = M_f + M_1 + M_2 + M_3$ або в загальному випадку

$$M = M_f + \sum_{i=1}^n M_i = M_f + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i Z_i. \quad (1.42)$$

Виправлені (M_1, M_2, M_3) та остаточно (M) епюри показано на рис. 1.34 без множника ql^2 .

Для перевірки правильності обчислень можна, як і в методі сил, застосувати статичну й кінематичну перевірку. Але оскільки основна система методу переміщень кінематично визначувана, кінематична перевірка є допоміжною і виконується завжди при правильних епюрах згинаючих моментів в основній системі та при виконаній статичній перевірці.

Основною перевіркою в методі переміщень є *перевірка рівноваги вузлів та інших частин рами*. Кількість перевірених умов рівноваги в усіх випадках мусить бути не меншою числа невідомих методу переміщень. Простіше усього перевіряти рівновагу тих частин рами, які розглядалися при обчисленні коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь. Ці перевірки для нашого прикладу проілюстровані на рис. 1.35. Побудову остаточно епюр Q і N виконують, як у методі сил.

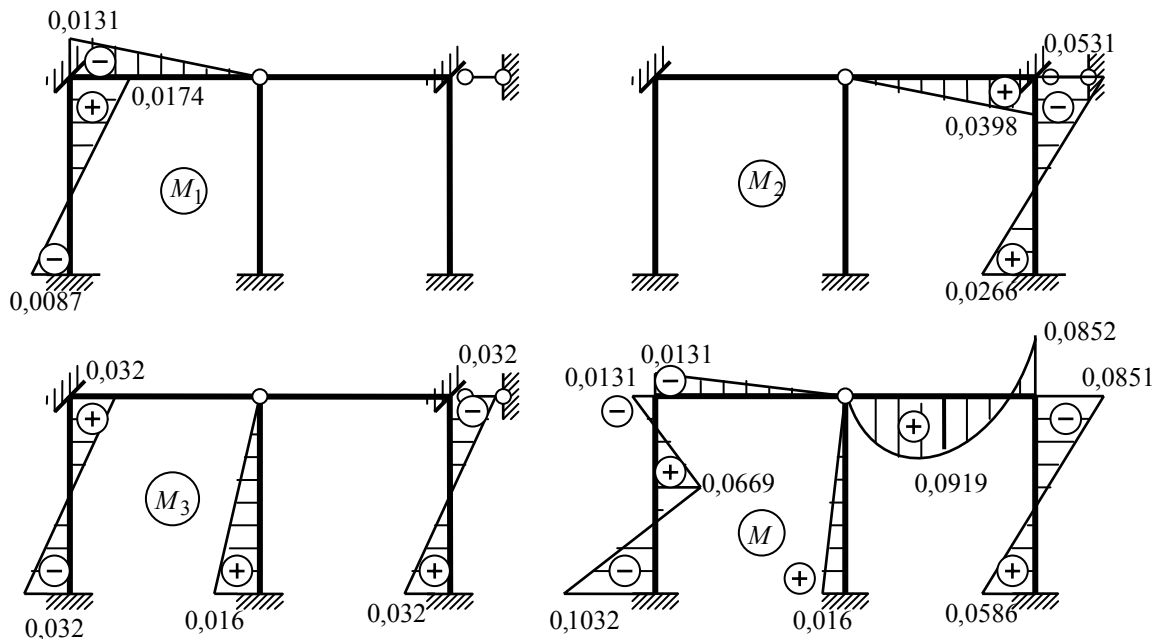


Рис. 1.34

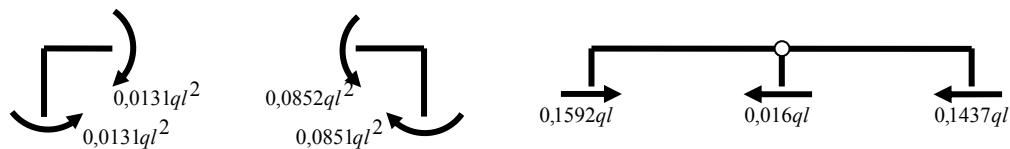


Рис. 1.35

5.3. Розрахунок симетричних систем методом переміщень

Найбільш загальними прийомами розрахунку симетричних систем є групування невідомих і розкладання навантаження на симетричне та косиметричне.

Застосування групових невідомих покажемо на прикладі рами (рис. 1.36, а), при довільному навантаженні. Зазначимо, що наведена рама є симетричною, незважаючи на несиметричні закріплення кінців ригеля. Це пов'язано з тим, що поздовжні деформації не враховуються, отже, якщо нерухомий правий кінець ригеля, то лівий його кінець також буде нерухомим. Звісно, у цьому випадку симетрія стосується лише визначення згинаючих моментів: поздовжні сили не будуть задовольняти умові симетрії.

Закріпивши в основній системі (рис. 1.36, б) жорсткі вузли, їх повороти подамо у вигляді двох групових переміщень: симетричних поворотів Z_1 і косиметричних Z_2 .

Побудувавши в основній системі одиничні епюри згинаючих моментів (рис. 1.36, в), переходимо до обчислення одиничних реакцій, пам'ятаючи, що ці реакції, як і переміщення, є груповими і являють собою алгебраїчну суму реакцій у в'язях даної групи. Наприклад, для визначення реакції r_{11} необхідно на першій епюрі вирізати два вузли (рис. 1.36, г) так, що $r_{11} = r'_{11} + r''_{11}$. Виходячи з цього симетрична групова реакція від косиметричного групового переміщення дорівнює нулю: $r_{12} = 0$, оскільки $r'_{12} = -r''_{12}$. За теоремою про взаємність реакцій r_{21} також дорівнює нулю.

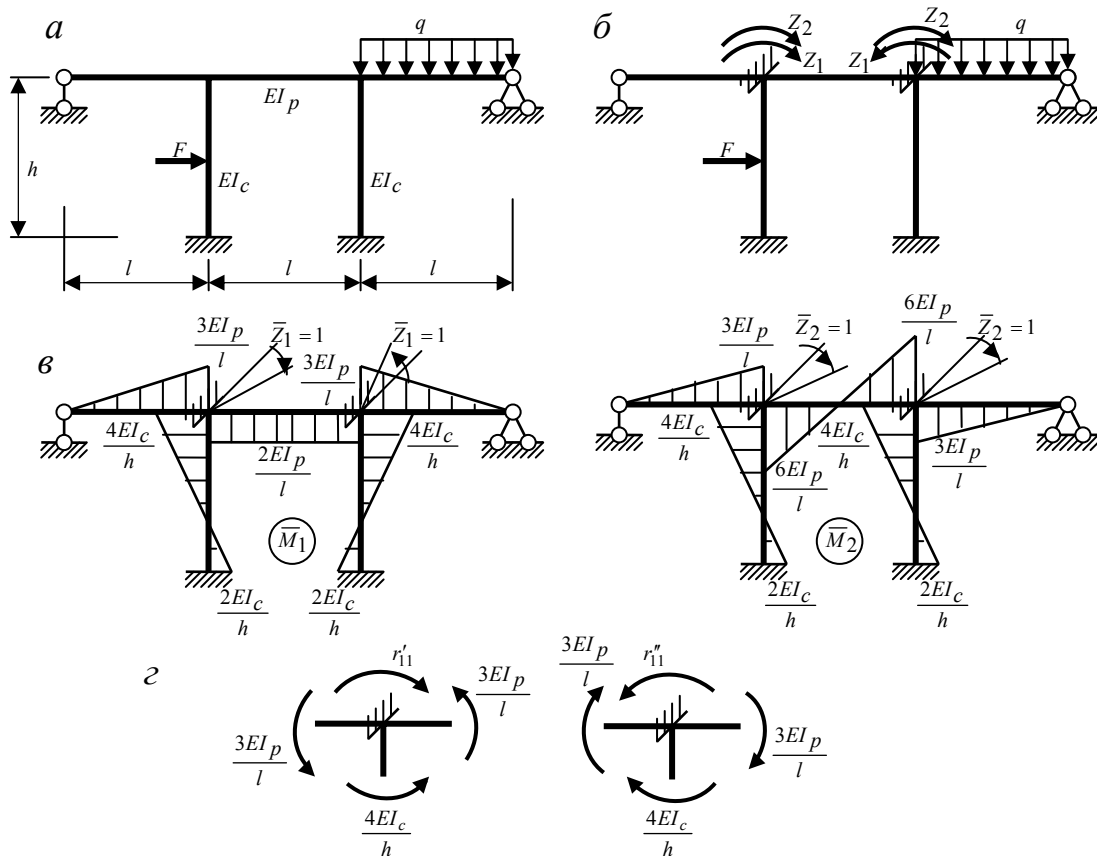


Рис. 1.36

Отже, завдяки застосуванню групових переміщень одержуємо два незалежних канонічних рівняння:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + R_{1f} &= 0; \\ r_{22}Z_2 + R_{2f} &= 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

При навантаженнях окремих видів розрахунок ще більше спрощується. Так, при симетричному навантаженні для розглянутої рами R_{2f} перетворюється в нуль, отже, нулю дорівнюватиме і косиметричне невідоме Z_2 . І, навпаки, при косиметричному навантаженні нульовим буде симетричне невідоме.

Наведені властивості симетричних систем можна використати і при навантаженні довільного виду, якщо застосувати розкладання навантаження на симетричне і косиметричне. Цей прийом виконується так само, як і в методі сил.

5.4. Розрахунок рам з похилими стояками

При наявності в рамі зі зміщуваними вузлами (рис. 1.37, а) похилих стояків з'являються деякі особливості розрахунку, що виявляються при побудові в основній системі (рис. 1.37, б) епюри згинаючих моментів від лінійного зміщення $\bar{Z}_2 = 1$. Розглянемо деформації основної системи, що супроводжують зміщення вузла 2 вздовж горизонталі (рис. 1.37, в). Через малізну переміщень можна вважати, що вузол 1 зміщується при цьому вздовж нормалі до осі стержня $A-I$ (по дотичній до кола радіусу $A-I$ з центром у точці A). Враховуючи, що горизонтальна проекція цього переміщення повинна дорівнювати одиниці, знаходимо взаємні зміщення f_1 та f_2

кінців ригеля і стояка вздовж нормалі до їх осей. У більш складних випадках для визначення f_1 та f_2 можна скористатися статичним методом (див. визначення переміщень від осідання опор), попередньо поставивши у жорсткі вузли шарніри. Тепер за допомогою табл.1.4 одержимо епюру $\bar{M}_2$ (рис. 1.37, з). Тут множники f_1 та f_2 у значеннях моментів враховують відмінність зміщень в ригелі і стояку від одиниці.

Побудова решти епюр ($\bar{M}_1$ та M_f) не пов'язана з будь-якими труднощами (рис. 1.37, д).

Так само, як звичайно, визначаються реакції у плаваючому затисненні - r_{11} , r_{12} , R_{1f} . При обчисленні реакцій у другій в'язі, вирізавши ригель (рис. 1.37, е), знаходимо, що на вісь опорного стержня дають проекції не тільки поперечні сили, але й поздовжня сила у похилому стояку. У цьому випадку застосовують різні прийоми, що дозволяють або запобігти обчисленню поздовжніх сил, або визначити ці сили і врахувати їх в умовах рівноваги.

У зв'язку з тим, що поперечні сили просто визначаються за епюрою згинаючих моментів, для визначення поздовжніх сил і, як результат, невідомої реакції, можна скористатися способом вирізання вузлів. Так, з рівноваги вузла 1 (рис. 1.37, ж) випливає

$$\sum y = 0; \quad Q_2 - Q_1 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0;$$

$$N_1 = \frac{Q_2 - Q_1 \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

а з рівноваги вузла 2 (рис. 1.37, з)

$$\sum x = r_{22} - N_1 - Q_3 = 0;$$

$$r_{22} = N_1 + Q_3.$$

Іноді можна записати рівняння рівноваги ригеля так, що до нього не входять поздовжні сили. У нашому випадку такий результат дає рівняння моментів відносно точки K (рис. 1.37, е).

Зазначимо, що для визначення реакцій в усіх випадках можна скористатися перемноженням епюр. Відповідні формули одержують на підставі теореми про взаємність реакцій та переміщень:

$$r_{ik} = \sum \frac{1}{EI_{(i)}} \int \bar{M}_i \bar{M}_k dx; \quad R_{if} = - \sum \frac{1}{EI_{(i)}} \int \bar{M}_i \tilde{M}_f dx, \quad (1.44)$$

де $\tilde{M}_f$ - епюра згинаючих моментів від заданого навантаження, що побудована у будь-якій статично визначуваній системі.

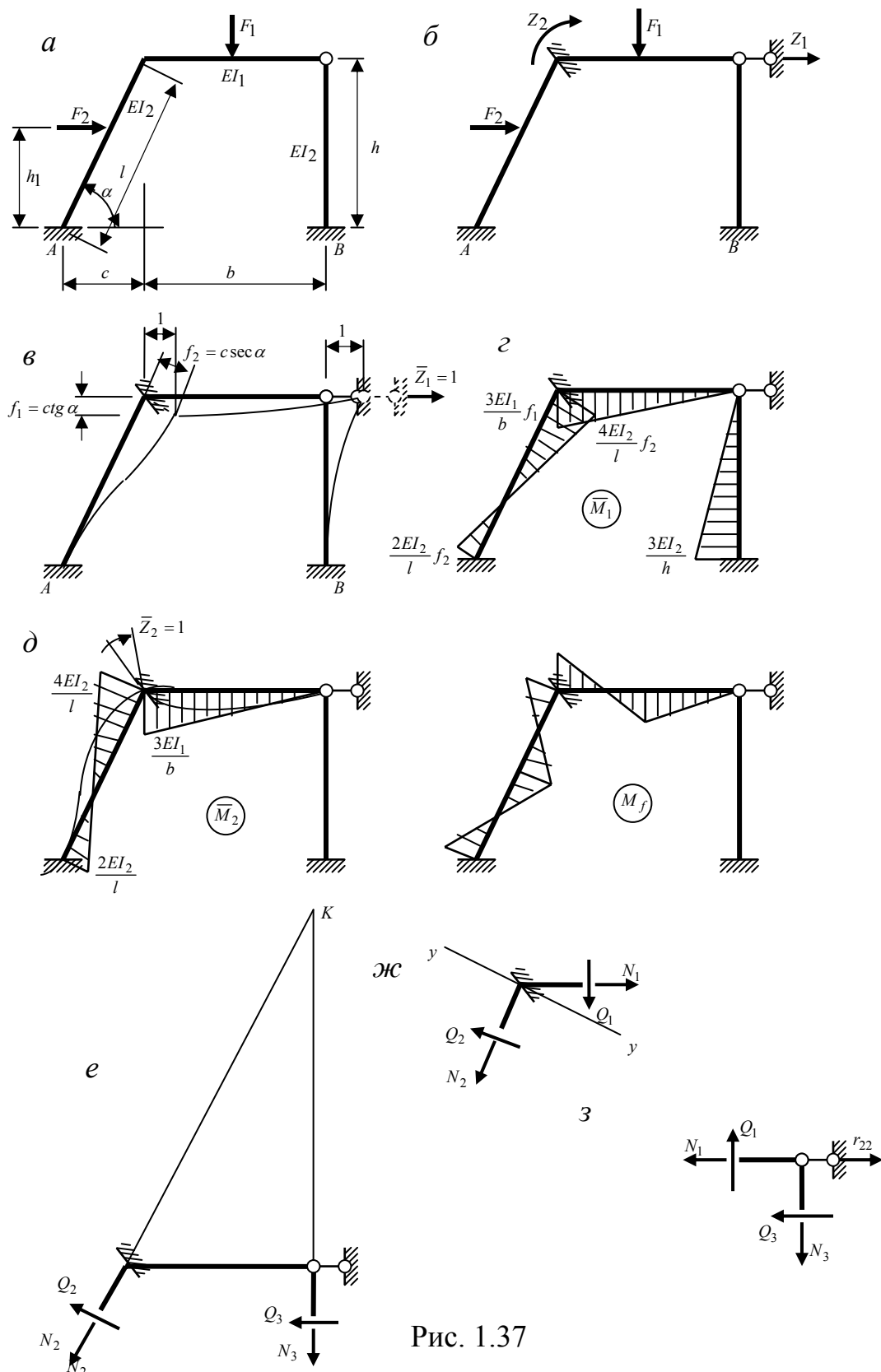


Рис. 1.37

Запитання для самоконтролю

1. Які припущення приймаються при розрахунку методом переміщень?
2. Що береться за невідомі методу переміщень?
3. Як визначається ступінь кінематичної невизначуваності системи?
4. Яка система є кінематично визначуваною?
5. Як у методі переміщень відбувається перехід до основної системи?
6. Яке затиснення називається плаваючим?
7. На які елементи поділяється споруда в основній системі?
8. Як будують епюри згинаючих моментів в основній системі?
9. Які умови виражають канонічні рівняння методу переміщень?
10. Яка механічна суть величин r_{ik} і R_{if} ?
11. Як статичним способом визначають коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь? Як інакше можна обчислити їх?
12. Які властивості мають коефіцієнти канонічних рівнянь?
13. Як після визначення невідомих будують епюри внутрішніх зусиль для заданої системи?
14. Як перевіряють правильність розв'язання методом переміщень?
15. Які способи використовують для спрощення розрахунку симетричних систем методом переміщень?
16. Яка особливість визначення реакцій у групових в'язях?
17. Яка особливість побудови одиничних епюр моментів у рамах з похилими стояками?

6. Вибір методу розрахунку. Змішаний метод

6.1. Вибір методу розрахунку

Порівняння методів розрахунку статично невизначуваних рам найпростіше можна здійснити за кількістю невідомих. Наприклад, порівнюючи ступінь статичної та кінематичної невизначуваності рами на рис. 1.38, одержуємо:

$$n_{ст} = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 0 - 1 + 7 - 3 = 3;$$

$$n_{кін} = n_y + n_{\lambda} = 2 + 2 = 4.$$

Наведена рама тричі статично невизначувана та чотири

рази кінематично невизначувана. Отже, для розрахунку раціонально застосувати метод сил.

Зазначимо, що при наявності симетрії рами частина невідомих у методі сил, як і у методі переміщень, може обернутися на нуль. У цих випадках порівнювати ступені невизначуваностей недостатньо, необхідно обрати основні системи методу сил та методу переміщень з урахуванням

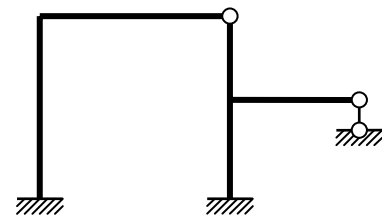


Рис. 1.38

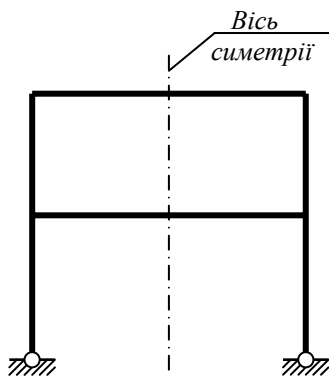


Рис. 1.39

симетрії, і лише після цього порівняти кількість ненульових невідомих.

У якості прикладу розглянемо раму, наведену на рис. 1.39 при симетричному та косиметричному навантаженнях.

Ступінь статичної невизначуваності рами становить:

$$n_{ст} = 3 \cdot 1 - 0 + 4 - 3 = 4, \text{ отже, рама чотири рази статично невизначувана.}$$

Ступінь кінематичної невизначуваності становить: $n_{кін} = 4 + 2 = 6$, отже, рама шість разів кінематично невизначувана.

Основна система методу переміщень наведена на рис. 1.40, *а*. Зайві невідомі X_1, X_2 є симетричними за геометрією. Крім того, від дії сили X_4 у лівій (шарнірно-нерухомій) опорі виникає така сама за величиною і симетрична їй за напрямом горизонтальна реакція. Отже, цю силу також можна вважати симетричною. Зайве невідоме X_3 за геометрією є косиметричним, а отже, при заданому симетричному навантаженні обертається на нуль. Наведений аналіз свідчить, що при симетричному навантаженні розрахунок методом сил зводиться до трьох невідомих.

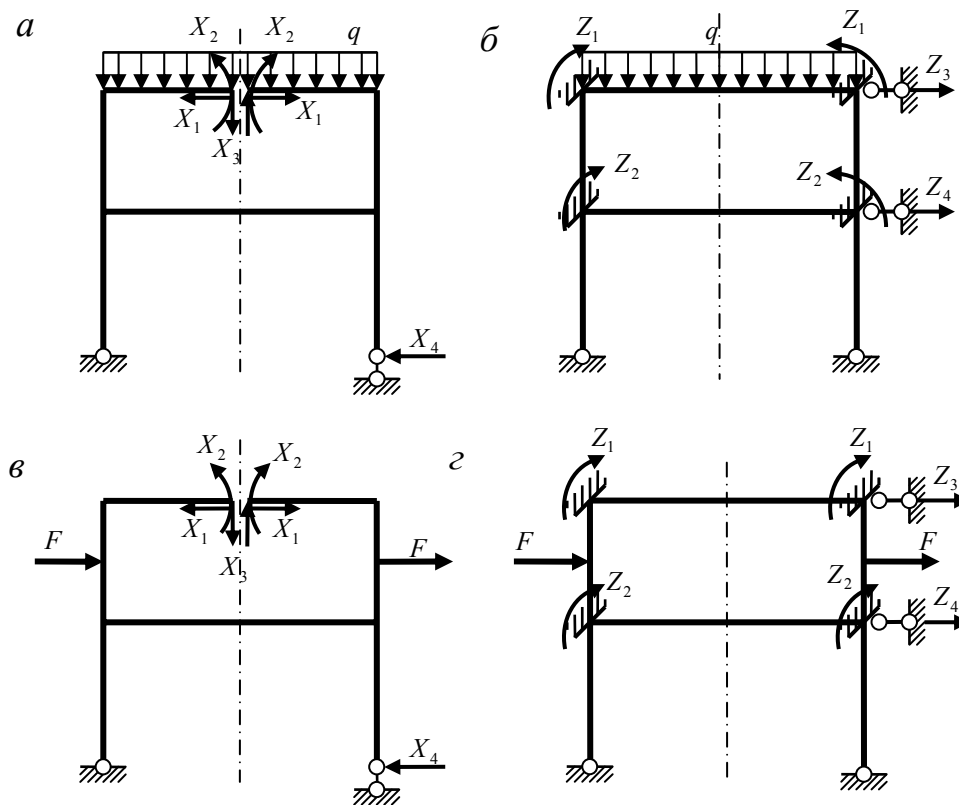


Рис.1.40

У методі переміщень (основна система на рис. 1.40, *б*) за симетричного навантаження маємо симетричну деформацію. Отже, кути повороту вузлів верхнього ригеля Z_1 однакові, спрямовані симетрично і є груповим невідомим. Такий самий висновок можна зробити відносно кутів повороту Z_2 вузлів нижнього ригеля. З симетрії деформацій випливає, що горизонтальні переміщення вузлів ригелів повинні бути відсутні ($Z_3 = Z_4 = 0$). Отже, метод переміщень приводить до двох ненульових невідомих і для наведеної рами при симетричному навантаженні саме його раціонально застосувати.

З попереднього аналізу випливає, що у основній системі методу сил при кососиметричному навантаженні (рис. 1.40, в) симетричні невідомі X_1, X_2, X_4 обертаються на нуль і задача зводиться до розрахунку методом сил з одним кососиметричним зайвим невідомим X_3 .

У методі переміщень при кососиметричному навантаженні (основна система на рис. 1.40, г) скорочення розрахунків можна здійснити лише за рахунок групування кососиметричних поворотів вузлів верхнього (Z_1) та нижнього (Z_2) ригелів. Задача приводиться до розрахунку системи з чотирма невідомими.

Отже, при кососиметричному навантаженні для наведеної рами раціонально застосувати метод сил.

6.2. Змішаний метод

Як зазначалося раніше, у змішаному методі в якості основних невідомих беруть частину сил і частину переміщень.

Суть цього методу розглянемо на прикладі рами, наведеної на рис. 1.41, а.

Знайдемо ступені статичної та кінематичної невизначуваності:

$$n_{ст} = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 0 - 0 + 7 - 3 = 4;$$

$$n_{кін} = n_y + n_d = 3 + 2 = 5.$$

Розчленуємо раму на дві частини, наведені на рис. 1.41, б та на рис. 1.41, в. Взаємодія між цими частинами відображається внутрішніми зусиллями M, Q, N . Аналізуючи праву частину рами (рис. 1.41, в) бачимо, що її напружено-деформований стан буде цілком визначений, якщо відомі зусилля M, Q, N у місті розчленування та реакція опори C . Для визначення цих чотирьох зусиль можна використати три рівняння рівноваги, отже маємо одне зайве невідоме методу сил. Зважаючи на те, що загальна кількість зайвих невідомих рами становить 4, інші невідомі методу сил належать лівій частині рами.

З іншого боку, аналізуючи ліву частину рами (рис. 1.41, б), відзначимо, що єдиний її вузол є жорстким і не має лінійних зміщень. Отже напружено-деформований стан цієї частини буде цілком визначений при відомій величині повороту цього вузла: ліва частина рами один раз кінематично невизначувана. Зважаючи на те, що загалом рама п'ять разів кінематично невизначувана, інші чотири ступеня кінематичної невизначуваності належать правій частині.

З наведеного аналізу випливає, що при виборі *основної системи* раціонально відкинути одну в'язь у правій частині рами та поставити плаваюче затиснення у жорсткому вузлі лівої частини (рис. 1.41, г). Отже, у якості невідомих цього – *змішаного методу* розрахунку нашої рами прийнято зусилля X_1 у відкинутій опорі C та поворот Z_2 плаваючого затиснення.

Відповідно до обраної основної системи умовами її еквівалентності заданій рамі повинні бути: умова відсутності переміщення у напрямку відкинутої в'язі - $\Delta_1 = 0$ та умова відсутності реакції у доданій в'язі - $R_2 = 0$. Перетворюючи наведені рівняння з застосуванням принципу суперпозиції, одержуємо *канонічні рівняння змішаного методу*:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1f} &= 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2f} &= 0.\end{aligned}\quad (1.45)$$

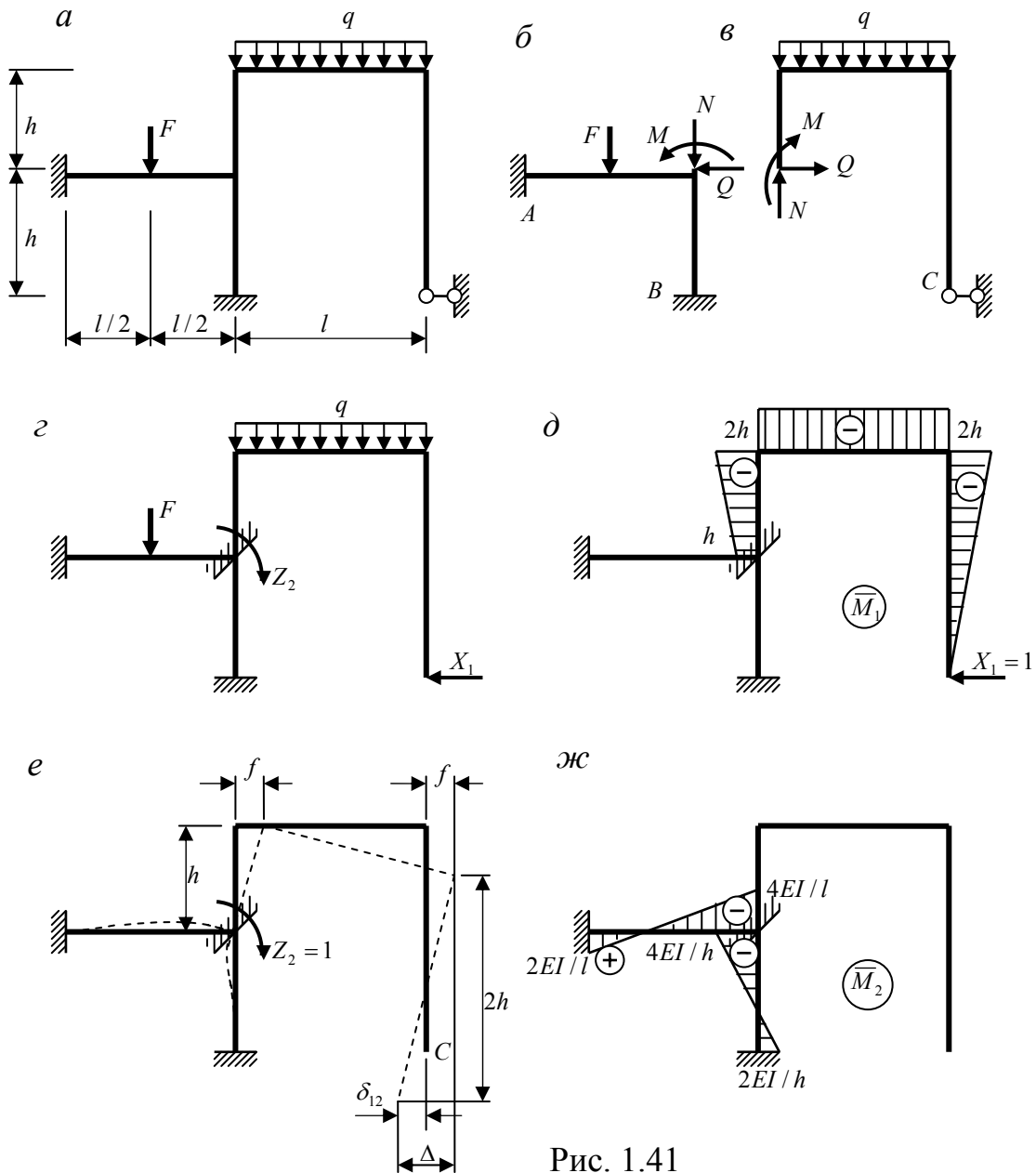


Рис. 1.41

При побудові епюри згинаючих моментів $\bar{M}_1$ від $X_1 = 1$ враховуємо, що плаваюче затиснення залишається нерухомим і моменти виникають лише у правій – статично визначуваній частині (рис. 1.41, д). Як звичайно, перед тим, як будувати епюру $\bar{M}_2$, показуємо деформацію стержнів при повороті плаваючого затиснення $Z_2 = 1$ (рис. 1.41, е). Звертаємо увагу на те, що права – статично визначувана – частина рами зміщується при цьому як абсолютно жорстке тіло без деформацій. Моменти у лівій – деформованій частині рами визначаються за допомогою табл. 1.4. Епюра $\bar{M}_2$ наведена на рис. 1.41, ж. При побудові епюри згинаючих моментів M_f

від заданого навантаження (рис. 1.42, а) у лівій частині користуємося табл. 1.4, а у правій статично визначуваній частині моменти обчислюємо за методом перерізів.

Покажемо далі обчислення коефіцієнтів канонічних рівнянь змішаного методу.

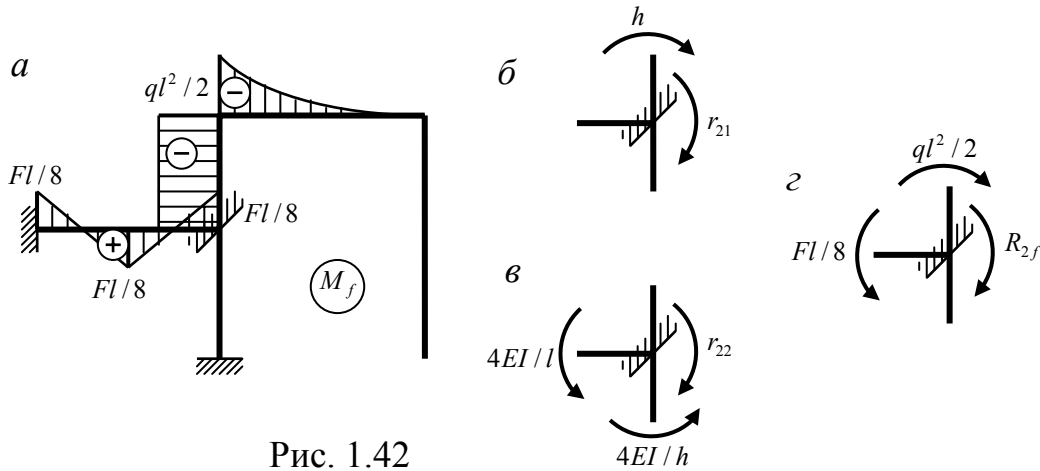


Рис. 1.42

Коефіцієнт δ_{11} за фізичною суттю є переміщенням від навантаження і його обчислюємо методом Мора:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{2h \cdot 2h}{2} \frac{2}{3} 2h + 2h \cdot l \cdot 2h + \frac{h}{6} (2h \cdot 2h + 4 \cdot 1,5h \cdot 1,5h + h \cdot h) \right].$$

Коефіцієнт δ_{12} являє собою переміщення від зміщення плаваючого затиснення. Його можна обчислити за деформованою схемою (рис. 1.41, е). Враховуючи мализну повороту Z_2 , яке прийняте за одиницю, з рис. 1.41, е випливає, що горизонтальне зміщення лівого і однакового з ним за величиною правого кінців верхнього ригеля рами становить: $f = h \cdot \tan Z_2 \approx h \cdot Z_2 = h$. Оскільки усі стержні повертаються на однаковий кут $Z_2 = 1$, зміщення нижнього кінця правого стояка відносно його верхнього кінця становить: $\Delta = 2h \cdot \tan Z_2 \approx 2h \cdot Z_2 = 2h$. Тепер можна знайти шукане переміщення: $\delta_{12} = \Delta - f = 2h - h = h$.

Вантажне переміщення у напрямку відкинутої в'язі можна обчислити методом Мора: $\Delta_{1f} = \sum \frac{1}{EI} \int M_f \bar{M}_1 dx$.

Реакції, що входять до другого канонічного рівняння неважко обчислити з умов рівноваги вузла, у якому знаходиться плаваюче затиснення. Так, за рис. 1.42, б маємо: $\sum M = 0; \Rightarrow r_{21} = -h$. Це значення можна перевірити за теоремою про взаємність реакцій та переміщень: $r_{21} = -\delta_{12} = -h$. Інші реакції визначаємо за допомогою рис. 1.42, в та 1.42, з: $r_{22} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{h}$; $R_{2f} = \frac{Fl}{8} - \frac{ql^2}{2}$.

Подальший розрахунок не відрізняється від розрахунків методом сил або методом переміщень. Зауважимо лише, що для перевірки обчислень необхідно розглядати переміщення у напрямку відкинутих в'язей та рівновагу частин, у напрямку зміщень яких були поставлені в'язі.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть критерій раціональності методу розрахунку статично невизначуваної рами.
2. Як обрати раціональний метод розрахунку статично невизначуваної рами при симетричному або кососиметричному навантаженні?
3. Який метод називають змішаним?
4. Як обирається основна система змішаного методу?
5. Які умови виражають канонічні рівняння змішаного методу?
6. Які особливості побудови епюр згинаючих моментів у основній системі змішаного методу?
7. Як визначаються коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь змішаного методу?
8. Наведіть властивості коефіцієнтів канонічних рівнянь змішаного методу.
9. Як виконується перевірка розрахунку змішаним методом?

Список джерел

1. **Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.** Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. /За заг. ред. д.т.н., проф. В.А.Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696с.
2. **Шутенко Л.М., Шпачук В.П., Засядько М.А.** Конспект лекцій для студентів 3-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – «Будівництво». - Харків, ХНАМГ, 2012. – 169с.
3. **Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А.** Механіка споруд. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 234с.
4. **Шутенко Л.Н., Пустовойтов В.П., Засядько Н.А.** Строительная механика: Краткий курс / Раздел 1. Статически определимые системы. – Харьков, ХГАГХ, 2003. – 90с.
5. **Строительная механика** / Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479с.
6. **Строительная механика.** Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Б.Я.Лащеников, Н.Н.Шапошников; Под ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512с.
7. **Строительная механика.** Общий курс: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
8. **В.А.Баженов.** Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.:Каравела, 2010.
9. **Чихладзе Э. Д.** Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений. –Харьков: УкрГАЗТ, 2004.-305с.
10. **Сопротивление материалов.** Под общей ред. Акад. АН УССР Г. С. Писаренко. - К.: Вища школа, 1973, 672 с.

Навчальне видання

Шпачук Володимир Петрович

Засядько Микола Андрійович

Конспект лекцій з курсу

Будівельна механіка

Спецкурс

Частина 1

(для студентів 3-4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямом 6.060101 - «Будівництво»)

Відповідальний за випуск *А.О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Н. В. Зражевська*

План 2013, поз. 42 Л

Підп. до друку 20.02.2013

Друк на ризографі

Тираж 50 пр.

Формат 60x84 1/16

Ум.-друк арк. 4,0

Зам. № _____

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.