

А. Я. Карвацький

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальністю «Галузеве машинобудування»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2016

УДК 531/534(075.8)
К21

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 11 від 07.11.2016 р.)*

Рецензенти:

Є. В. Штефан, д-р техн. наук, проф.,
Національний університет харчових технологій

Г. О. Фролов, д-р техн. наук, ст. наук. співр.,
Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАН України

Відповідальний редактор

І. О. Мікульонок, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Карвацький А. Я.

К21 **Механіка суцільних середовищ [Електронний ресурс]: навч. посіб.**
– К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016. – 290 с.: іл. – Бібліогр.: с. 284–285.

Включає теоретичні основи з таких розділів механіки суцільного середовища як введення в тензорний аналіз, загальні основи механіки і термодинаміки суцільного середовища, закони збереження, механіку рідин та газів, лінійну теорію пружності, теорію пластичності, лінійну в'язкопружність, рівняння збереження для реагуючих середовищ, математичні моделі турбулентних потоків стисливого середовища.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю «Галузеве машинобудування», а також споріднених спеціальностей: машинобудування, будівельної галузі, теплоенергетики та нафтопереробної галузей промисловості.

УДК 531/534(075.8)

© А. Я. Карвацький, 2016

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ІХФ), 2016

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Механіка суцільних середовищ» (МСС) складається з двох кредитних модулів «Механіка суцільних середовищ–1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках» і «Механіка суцільних середовищ–2. Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ» та належить до циклу дисциплін професійної підготовки. В МСС досліджується напружено-деформований стан твердих, рідких і газоподібних тіл під час їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо. При цьому, залежно від мети дослідження і зовнішніх умов, для описання однакових фізичних середовищ застосовуються різні математичні моделі. Ці моделі вивчаються в таких класичних розділах МСС, як теорія пружності, теорія пластичності і повзучості, опір матеріалів, гідростатика, гідро- і газодинаміка тощо. На практиці дуже часто вказані розділи МСС лишаються у свідомості багатьох студентів тільки як окремі дисципліни без глибокого розуміння їх єдності. Однак, значно більше розуміння суті фізичних явищ, що досліджуються, виникає тільки тоді, якщо прослідкувати, як проявляються загальні закони в різноманітних умовах і які результати отримуються за умови використання різних моделей за однакових умов. Саме тому розмаїття математичних постановок практичних задач, що наведені в навчальному посібнику мають на меті показати не тільки розмаїття підходів, але й єдність ідей та методів, що використовуються в МСС, покращити розуміння та забезпечити засвоєння студентами теоретичного матеріалу, зокрема, під час математичного формулювання наукових та інженерних задач.

Навчальний посібник базується на підручниках та навчальних посібниках таких відомих авторів як G. E. Mase, Л. І. Седов, А. А. Ільюшин, М. Е. Егліт, І. С. Сокольников, С. А. Brebbia, Т. Poinsot, D. C. Wilcox і включає 11 розділів із запитаннями самоконтролю. У тексті навчального посібника автором додано деякі проміжні аналітичні викладки, які включають перетворення складних формул та співвідношень, що значно полегшують розуміння способів та методів їх отримання. В цілому, викладений у посібнику теоретичний матеріал, відрізняється від класичних підручників з МСС наявністю таких нових розділів як рівняння збереження для реагуючих середовищ та математичні моделі турбулентних потоків стисливого середовища, підрозділ, пов'язаний з математичними моделями для композитних (дилатантних) рідин, інкрементарній теорії пластичності та алгоритму розв'язання нелінійних задач пластичності тощо.

У посібнику використовуються в основному декартові тензори як головна база для описання суті багатьох теорій континууму, але також застосовуються такі важливі ортогональні системи криволінійних координат як циліндрична та

сферична. Усі важливі рівняння та фундаментальні співвідношення наводяться як у тензорній або індексній, так і в класичній символічній або векторній формах запису, що дає змогу студентам порівняти еквівалентні вирази та застосовувати їх у подальшому.

У перших п'яти розділах викладено теоретичну базу МСС, яка стосується загальних основ суцільного середовища, а саме: тензорному численню, математичному апарату неперервних функцій, напруженому та деформованому стану, поняттям руху і течії, фундаментальним законам механіки континууму. Решта з шести розділів присвячена прикладним задачам, що відносяться до конкретних додатків механіки суцільного середовища – теорії пружності та термопружності, гідромеханіці, теорії пластичності та в'язкопружності, термо-гідродинаміки з врахуванням хімічної взаємодії під час горіння органічного палива та турбулентності. У додатках наведено аксіоматику МСС і деякі постановки задач, зокрема, статичної пружності та термо-в'язко-пружнопластичності.

Навчальний посібник підготовлено на основі посібників [1, 9], лекцій, практичних та лабораторних занять, які автор читає та проводить зі студентами кафедри хімічного, полімерного та силікатного машинобудування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Усі зауваження і пропозиції щодо поліпшення змісту навчального посібника будуть сприйняті автором із вдячністю.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

Основні позначення

$\mathbf{a}$ –	вектор прискорення, м/с ² ;
a –	швидкість звуку, м/с;
a_i –	компоненти вектору прискорення, м/с ² ;
b_i –	компоненти вектора масових сил, Н/кг;
$\hat{\mathbf{C}}$ –	тензор деформацій Коші (Cauchy);
C_{ijkl} –	компоненти тензора 4-го рангу пружних констант ізотропного матеріалу, Па;
C_{ijkl}^{ep} –	компоненти тензора 4-го рангу пружно-пластичних констант ізотропного матеріалу, Па;
$[C_{KM}]$ –	матриця пружних констант, Па;
C_Y –	стала текучості, Па ² ;
c_{ij} –	компоненти тензора перетворення координат;
c_v –	масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);
c_p –	масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К);
$\hat{\mathbf{D}}$ –	тензор швидкості деформації, с ⁻¹ ;
D_k –	коефіцієнт молекулярної дифузії k -ї компоненти, м ² /с;
D_{th} –	коефіцієнт теплової дифузії або коефіцієнт температуропровідності, м ² /с;
d_{ij} –	компоненти девіатора лагранжевого тензора лінійної деформації;
ds –	диференціал відстані, м;
dW^P –	прирошення роботи на пластичних деформаціях;
$d\varepsilon_{ekv}^P$ –	прирошення еквівалентної пластичної деформації;
$d\lambda$ –	коефіцієнт пропорційності, що характеризує пластичні властивості матеріалу;
E –	модуль пружності під час розтягу, Па; об'ємна густина радіаційного теплового потоку «сірого» середовища, Вт/м ³ ;
$\hat{\mathbf{E}}$ –	ейлерів тензор нескінченно малих деформацій;
$\hat{\mathbf{E}}_A$ –	ейлеревій тензор скінченних деформацій або тензор скінченних деформацій Альмансі (Euler-Almansi);
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k$ –	коваріантний і контраваріантний векторний базис, відповідно;
e –	повна масова енергія, Дж/кг;
e_{ij} –	компоненти девіатора ейлерового тензора лінійної деформації;
e_{sk} –	масова явна, неізотермічна енергія без врахування ентальпії утворення речовини, Дж/кг;

$\hat{\mathbf{F}}$	матеріальний градієнт деформації (тензор 2-го рангу);
G	модуль зсуву, Па;
G_b	джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок гравітації, Вт/м ³ ;
$\hat{\mathbf{G}}$	тензор деформацій Гріна (Green);
$\mathbf{g}$	прискорення вільного падіння, м/с ² ;
g_{ij}	компоненти метричного тензора;
H	повна явна ентальпія, Дж/кг;
$\hat{\mathbf{H}}$	просторовий градієнт деформації (тензор 2-го рангу);
h	масова явна ентропія, Дж/кг;
$\hat{\mathbf{I}}$	одиничний діади́к – одиничний тензор 2-го рангу;
$I(s)$	інтенсивність випромінювання (Вт·с/(м ² ·ср)) у напрямку s в тілесному куті $d\Omega$;
I_D, Π_D, Π_D	1-й, 2-й і 3-й інваріанти тензора швидкості деформації;
$I_\sigma, \Pi_\sigma, \Pi_\sigma$	1-й, 2-й і 3-й інваріанти тензора напруження;
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	орти декартової системи координат;
$\hat{\mathbf{J}}$	матеріальний градієнт переміщення (тензор 2-го рангу);
J	якобіан перетворення систем координат;
J_i	піддатливість матеріалу, Па ⁻¹ ;
K	кінетична енергія, Дж; модуль об'ємного стискання, Па; коефіцієнт поглинання, м ⁻¹ ;
K_{fj}, K_{rj}	пряма і зворотна швидкості реакції j , 1/с;
$\hat{\mathbf{K}}$	просторовий градієнт переміщення (тензор 2-го рангу);
K_{ijpq}	тензор четвертого рангу коефіцієнтів в'язкості, Па·с;
k	коефіцієнт теплопровідності середовища, Вт/(м·К); показник адіабати; межа текучості матеріалу при чистому зсуві, Па; турбулентна кінетична енергія, Дж/кг;
$\hat{\mathbf{L}}$	лагранжевий тензор нескінченно малих деформацій;
$\hat{\mathbf{L}}_G$	лагранжевий тензор скінченних деформацій;
l_{ij}	компоненти лагранжевого тензора нескінченно малих деформацій;
m	маса, кг;
n	показник заломлення;
$\mathbf{n}$	вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
n_i	компоненти вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
p	тиск, Па;
Q_j	швидкість проходження хімічної реакції j , 1/с;

$\mathbf{q}$ –	вектор густини теплового потоку, Вт/м ² ; вектор завихреності, с ⁻¹ ;
q_m –	густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м ³ ;
R –	універсальна газова стала, Дж/(кг·К);
$\hat{\mathbf{R}}$ –	ортогональний тензор повороту;
$\mathbf{r}$ –	радіус-вектор, м;
r, z, φ –	циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут);
s_{ij} –	компоненти девіаторної складової тензора;
s –	масова ентропія, Дж/(кг·К);
s_I, s_{II}, s_{III} ;	
s_1, s_2, s_3 –	головні значення девіаторних напружень, Па;
T –	абсолютна температура, К;
T_∞ –	абсолютна температура оточуючого середовища, К;
t –	час, с;
$t_i^{(n)}$ –	вектор напруження, Па;
U –	внутрішня енергія, Дж;
$[U(t)]$ –	одинична ступінчаста функція зі стрибком в момент часу $t_1 = 0$;
u –	масова внутрішня енергія, Дж/кг;
$\mathbf{u}$ –	вектор переміщень, м; вектор швидкості, м/с;
u^* –	масова енергія деформації, Дж/кг;
u_i –	компоненти вектора переміщень, м; компоненти вектора швидкості, м/с;
$u_{(D)}^*$ –	густина енергії викривлення форми, Дж/кг;
$u_{(S)}^*$ –	густина енергії розширення, Дж/кг;
V –	об'єм, м ³ ;
$\hat{\mathbf{V}}$ –	тензор завихреності, с ⁻¹ ;
$\mathbf{v}$ –	вектор швидкості, м/с;
$\tilde{\mathbf{v}}$ –	вектор швидкості, осереднений за Фаврем (Favre) ($\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$), м/с;
v_i –	компоненти вектору швидкості, м/с;
$\hat{\mathbf{W}}$ –	лагранжевий тензор лінійного повороту;
W_k –	молярна маса k -ї компоненти суміші газів, кг/моль;
$\mathbf{w}$ –	лагранжевий вектор лінійного повороту;
X_1, X_2, X_3 –	матеріальні (лагранжеві) декартові координати, м;
X_k –	молярна частка k -ї компоненти суміші;
$[X_k]$ –	молярна концентрація k -ї компоненти суміші, моль/м ³ ;
$\mathbf{x}$ –	радіус-вектор, м;

x_1, x_2, x_3	просторові (ейлереві) декартові координати, м;
$\hat{\mathbf{Y}}$	тензор градієнта швидкості;
Y_{ij}	компоненти градієнта швидкості, с^{-1} ;
Y_k	масова частка k компоненти хімічних реакцій;
α	коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; коефіцієнт тепловіддачі, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$;
χ^*	коефіцієнт об'ємної в'язкості, $\text{Па} \cdot \text{с}$;
$\Delta h_{f,k}^\circ$	масова латентна ентальпія утворення k -ї компоненти суміші газів, $\text{Дж}/\text{кг}$;
ΔS	площа елемента поверхні, м^2 ;
ΔT	різниця температур, K ;
δ_{ij}	символ Кронекера (Kronecker);
ε	швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{с})$;
$\hat{\varepsilon}$	тензор сумарних пружних і температурних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^e$	тензор пружних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^T$	тензор температурних деформацій 2-го рангу;
ε_{ij}	компоненти ейлерового тензора нескінченно малих деформацій;
ε_{ij}^P	компоненти тензора пластичних деформацій;
$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$	
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	головні значення ейлерової деформації, Па ;
ε_{ijk}	компоненти тензора Леві-Чивіти (Levi-Civita);
$\dot{\varepsilon}$	тензор швидкості деформації;
Φ	комплексний потенціал;
γ	показник адіабати;
$\dot{\gamma}_{\max}$	максимальна швидкість зсуву, с^{-1} ;
η	коефіцієнт динамічної в'язкості, $\text{Па} \cdot \text{с}$;
φ	потенціал, $\text{м}^2/\text{с}$; параметр Генки (Hensky), $1/\text{Па}$;
$\varphi(t)$	функція релаксації, Па ;
$\Lambda_{(m)}$	коефіцієнт довжини;
λ	коефіцієнт Ламе (Lame), Па ; коефіцієнт теплопровідності, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$;
λ^*	коефіцієнт в'язкості рідини, $\text{Па} \cdot \text{с}$;
μ	коефіцієнт Ламе (Lame), Па ;
μ^*	динамічна в'язкість, $\text{Па} \cdot \text{с}$;

ν	коефіцієнт Пуасона (Poisson's); кінематична в'язкість, $\text{м}^2/\text{с}$;
ν'_{kj}, ν''_{kj}	молярні стехіометричні коефіцієнти k -х компонентів в реакції j , моль;
π	число Пі;
ρ	густина, $\text{кг}/\text{м}^3$;
$\bar{\rho}$	густина, осереднена за Рейнольдсом (Reynolds), $\text{кг}/\text{м}^3$;
σ	стала Стефана-Больцмана (Stefan-Boltzmann), $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$;
σ_{ij}	компоненти тензора напруження 2-го рангу, Па;
$\hat{\sigma}$	тензор напруження 2-го рангу, Па;
σ_{ekv}	еквівалентне напруження за Мізесом (Mises), Па;
σ_Y	границя плинності, Па;
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	головні значення напруження, Па;
$\sigma_{ij}^{(C)}$	тензор консервативних напружень, Па;
$\sigma_{ij}^{(D)}$	тензор дисипативних напружень, Па;
τ_{ij}	компоненти тензора в'язкого напруження, Па;
$\hat{\Omega}$	ейлерів тензор лінійного повороту;
Ω	вектор вихору швидкості, с^{-1} ; кутова швидкість, с^{-1} ;
ω	ейлерів вектор лінійного повороту; вектор вихору, с^{-1} ;
$\dot{\omega}_k$	масова швидкість компоненти k хімічної реакції, $\text{кг}/\text{с}$;
$\dot{\omega}_T$	джерело теплоти за рахунок згоряння, $\text{Вт}/\text{м}^3$;
$\psi(t)$	функція повзучості, Па^{-1} .

Основні індекси

0	стосується початкового стану;
d	стосується девіаторної складової тензора;
eff	стосується ефективного значення;
$inlet$	стосується вхідного перетину;
K	стосується моделі Кельвіна (Kelvin);
M	стосується моделі Максвелла (Maxwell);
n	стосується нормалі;
$outlet$	стосується відхідного перетину;
s	стосується кульової складової тензора;
w	стосується стінки.

Інші символи

$\det$	детермінант;
--------	--------------

div –	оператор дивергенції;
grad –	оператор градієнта;
rot –	оператор ротора;
$\text{tr}(\)$ –	оператор сліду тензора;
$\frac{d}{dt} \equiv \frac{D}{Dt}$ –	оператор матеріального диференціювання за часом;
$\partial_t \equiv \partial/\partial t$ –	оператор частинного диференціювання за часом;
$\{P\}, \{Q\}$ –	лінійні диференціальні оператори;
Δ –	оператор Лапласа (Laplace);
∇ –	оператор Гамільтона (Hamilton);
$\times$ –	оператор векторного добутку тензорних величин;
$\otimes$ –	оператор тензорного добутку тензорних величин;
$\cdot$ –	оператор скалярного добутку тензорних величин;
$:$ –	оператор подвійного скалярного добутку;
$\cdots$ –	оператор подвійного скалярного добутку;
$\vee$ –	логічне «або»;
M_t –	турбулентне число Маха (Mach);
Le_k –	число Левіса (Lewis);
Pr –	число Прандтля (Prandtl);
Pr_t –	турбулентне число Прандтля (Prandtl);
Re –	число Рейнольдса (Reynolds);
Re_t –	турбулентне число Рейнольдса (Reynolds);
Sc_k –	Число Шмідта (Schmidt);
$\mathcal{M}_k$ –	символ для компоненти k хімічної реакції.

Основні скорочення

DNS –	пряме моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation);
DES –	альтернативні гібридні моделі LES/RANS або DES (Detached Eddy Simulation);
LES –	моделювання великих вихорів або великомасштабної турбулентності (Large Eddy Simulation);
RANS –	осереднені за Reynolds або Favre рівняння Нав'є-Стокса (Reynolds averaged Navier-Stokes equations);
MCC –	механіка суцільних середовищ.

1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕНЗОРНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Тензори і механіка суцільного середовища

Механіка суцільного середовища (МСС) використовує фізичні величини, які не залежать від вибору системи координат, що застосовується для їх описання. Однак дуже часто ці фізичні величини найбільш зручно вивчати у деякій належним чином обраної системи координат. Математично такі величини представляються *тензорами*.

Тензор як математичний об'єкт існує незалежно від системи координат. В той же час у кожній системі координат його можна задати деякою сукупністю величин, які називаються *компонентами* тензора. Якщо компоненти тензора задані в одній системі координат, то вони визначені і в будь-якій іншій системі, оскільки визначення тензора включає *закон перетворення* його компонент.

Фізичні закони механіки суцільного середовища виражаються тензорними рівняннями. Внаслідок лінійності і однорідності тензорних перетворень тензорні рівняння, що є вірними в одній системі координат, також вірні і в будь-якій іншій. Така *інваріантність* тензорних співвідношень відносно перетворення координат є одною із основних причин того, що тензорне числення вельми корисно під час вивчення механіки суцільного середовища.

1.2. Тензори. Декартові тензори. Ранг тензора

Якщо виникає необхідність перетворення однієї довільної системи криволінійних координат в іншу, то тензори при цьому називаються *звичайними тензорами*. Якщо ж обмежуються перетвореннями однорідних систем координат, то тензори називають *декартовими*. Оскільки значна частина дисципліни механіки суцільного середовища може бути вивчена за допомогою декартових тензорів, тому будемо розуміти під терміном «тензор» термін «декартовий тензор», якщо при цьому не буде розглядатися більш загальний випадок.

Тензори можна класифікувати за *рангом*, або *порядком*, відповідно до окремих видів законів перетворення, яким вони підпорядковуються. Та ж сама класифікація відображається і в числі компонент тензора у n -мірному просторі. У тривимірному евклідовому просторі, тобто такому як звичайний фізичний простір, число компонент тензора дорівнює 3^N , де N – порядок тензора. Тензор *нульового рангу* задається у будь-якій системі координат у просторі будь-якого числа вимірів *одною* компонентою. Такі тензори називають *скалярами* і виражають фізичні величини, що характеризуються тільки числовим значенням. Тензори *першого рангу* мають *три* координатні компоненти у тривимірному просторі, називаються *векторами* і представляють

величини, які характеризуються як числовим значенням, так і напрямом. *Тензори другого рангу* називаються *діадиками* і описують деякі характеристики, що є важливими в механіці суцільного середовища. Під час математичного вивчення механіки суцільного середовища також визначаються і часто використовуються тензори більш високого рангу, зокрема третього і четвертого (тріадика і тетрадика).

1.3. Вектори і скаляри

Деякі фізичні величини, такі як сила і швидкість, характеризується і числовим значенням, і напрямком, можна зобразити у тривимірному просторі *направленими відрізками*, які підпорядковуються *закону додавання за правилом паралелограма*. Такі направлені відрізки є геометричним представленням тензорів першого рангу і називаються *векторами* (рис. 1.1)

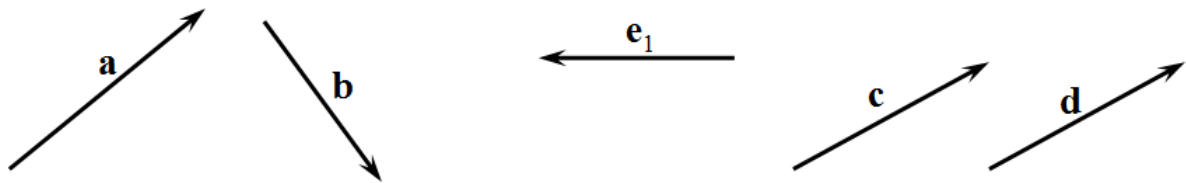


Рис. 1.1. Представлення векторів у просторі

Графічно вектор – це просто відповідним чином направлена стрілка, що має довжину, яка пропорційна величині (модулю) вектора. *Вектори однакові*, якщо вони однаково направлені і мають однакову довжину. *Одиничним* вектором називається вектор, у якого довжина дорівнює одиниці. *Нульовий* вектор має нульову довжину і невизначений напрям. *Від’ємним* по відношенню до даного називається вектор з тим же модулем, але протилежно направлений.

Такі фізичні величини, як, наприклад, маса і енергія, які характеризуються тільки величиною, відносяться до тензорів нульового рангу, тобто до *скалярів*.

У *символьній* або *гіббсовій* системі позначення вектори зображуються жирними прямими буквами, наприклад, **a**, **b** і т.д. Скаляри позначаються світлими курсивними буквами, наприклад, *a*, *b* і т.д. Одиничні вектори мають індекси від 1 до 3 або інші. На рису. 1.1 показано довільні вектори **a** і **b**, одиничний вектор **e₁** і два рівних між собою вектори **c** і **d**.

Абсолютну величину довільного вектора **a** позначають або просто через *a*, або, щоб підкреслити векторну природу об’єкта, використовують символ $|\mathbf{a}|$.

1.4. Векторне додавання. Множення вектора на скаляр

Додавання векторів підпорядковується *правилу паралелограма*, згідно якого сума двох векторів зображується діагоналлю паралелограма, суміжними сторонами якого є вектори, що додаються, відкладені з однієї точки. Цей закон додавання еквівалентний *правилу трикутника*, за яким сумою двох векторів є вектор, який йде із початку першого вектора у кінець другого, якщо вектори, що додаються, побудовані таким чином, що початок другого співпадає з кінцем першого. Графічну побудову, яка відповідає додаванню векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ за правилом паралелограма, показано на рис. 1.2, *а*.

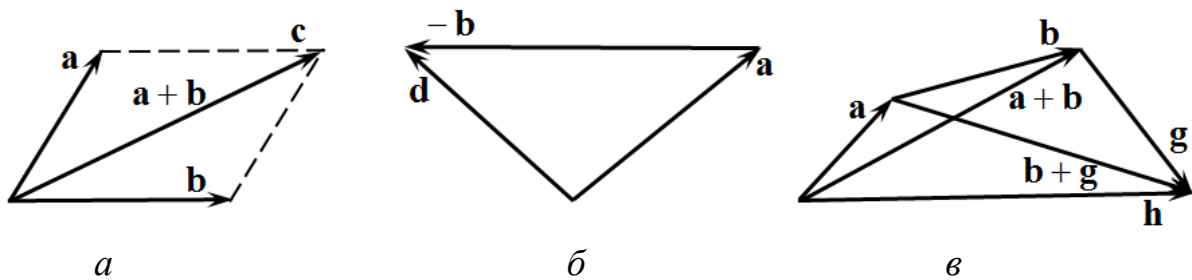


Рис. 1.2. Додавання векторів

Алгебраїчно операція додавання виражається векторною рівністю

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{c}. \quad (1.1)$$

Віднімання вектора виконується шляхом додавання від'ємного вектора, як це зроблено, наприклад, на рис. 1.2, *б*, де використано правило трикутника. Таким чином

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{d}. \quad (1.2)$$

Рис. 1.2, *в* ілюструє властивість комутативності і асоціативності операцій додавання і віднімання векторів згідно з рівністю

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{g} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) = \mathbf{h}. \quad (1.3)$$

Добуток вектора на скаляр у загальному випадку дає новий вектор, що має той самий напрямок, що і вихідний, але іншу довжину. Виключення складає множення на нуль, яке дає у результаті нульовий вектор, і множення на одиницю, яке не змінює вектор. У разі множення вектора $\mathbf{b}$ на скаляр m можливий один з трьох випадків, що представлені на рис. 1.3.

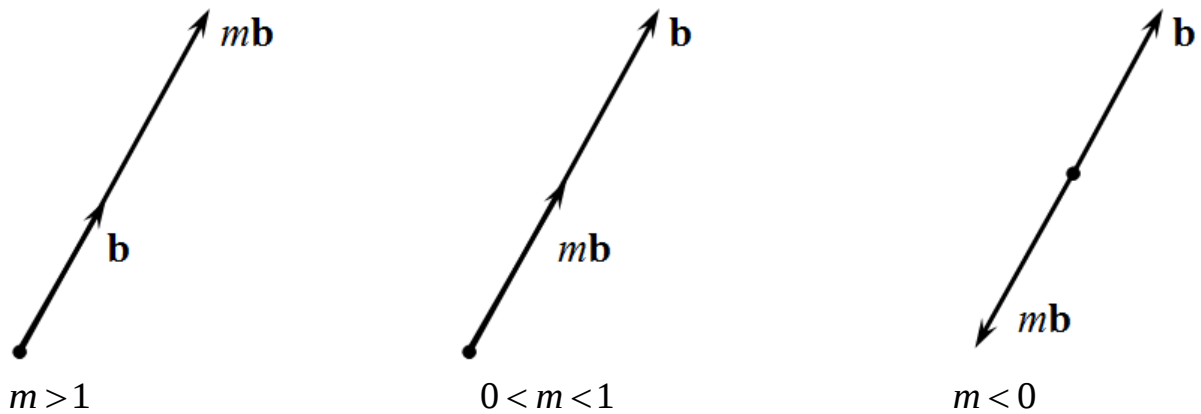


Рис. 1.3. Добуток вектора на скаляр

Операція множення вектора на скаляр асоціативна і дистрибутивна, тобто:

$$m(n\mathbf{b}) = (mn)\mathbf{b} = n(m\mathbf{b}); \quad (1.4)$$

$$(m+n)\mathbf{b} = (n+m)\mathbf{b} = m\mathbf{b} + n\mathbf{b}; \quad (1.5)$$

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}. \quad (1.6)$$

В результаті множення вектора на величину обернену до його модуля отримуємо одиничний вектор того ж напрямку. Ця операція виражається рівністю

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \quad (1.7)$$

1.5. Скалярний і векторний добуток векторів

Скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є скаляром

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta, \quad (1.8)$$

де θ – найменший кут між векторами (рад), як показано на рис. 1.4, a .

З іншого боку можна записати $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Скалярний добуток вектора $\mathbf{a}$ на одиничний вектор $\mathbf{e}$ дає проекцію $\mathbf{a}$ на напрямок $\mathbf{e}$.

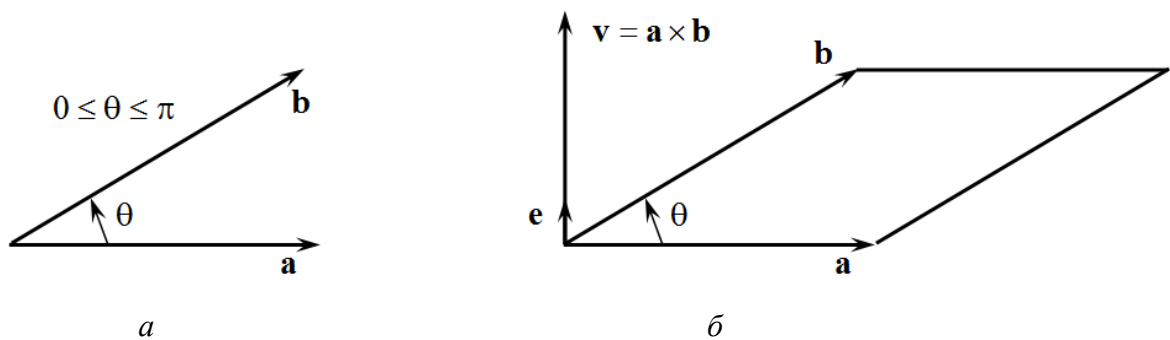


Рис. 1.4. Скалярний (а) і векторний (б) добуток векторів

Векторним добутком векторів **a** і **b** називається вектор **v**, який задається формулою

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)\mathbf{e}, \quad (1.9)$$

де θ – кут між векторами **a** і **b**, менший за π , рад; **e** – одиничний вектор, перпендикулярний до площини векторів і направлений так, що поворот за правилом правої руки навколо **e** на θ переміщує **a** у **b**.

Модуль **v** дорівнює площі паралелограма з суміжними сторонами **a** і **b** (див. рис. 1.4, б). Векторний добуток не комутативний.

Змішаним добутком називається скалярний добуток двох векторів, один з яких сам є векторним добутком

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \lambda, \quad (1.10)$$

Із формули (1.10) видно, що скалярний і векторний добутки можна міняти місцями. Оскільки векторний добуток повинен виконуватися першим, дужки не потрібні і, як показано, їх можна не використовувати. Цей добуток іноді записують як $[\mathbf{abc}]$. Величина λ змішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда з ребрами **a**, **b**, **c**.

Подвійний векторний добуток – це векторний добуток двох векторів, один з яких сам є векторним добутком. Для представлення векторного добутку **a** на **b** × **c** використовується тотожність виду

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{w}. \quad (1.11)$$

Із формули (1.11) видно, що **w** лежить у площині векторів **b** і **c**.

1.6. Діади і діадики

Діадою називається невизначений добуток двох векторів, який за визначенням задається записом векторів один за другим. Невизначений добуток у загальному випадку не комутативний, тобто $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. Діади́ком $\hat{\mathbf{D}}$ називається тензор другого рангу. Тут знак ^ вказує на те, що це тензор другого рангу. $\hat{\mathbf{D}}$ завжди може бути представлений у вигляді суми скінченного ряду діад

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \mathbf{b}_N. \quad (1.12)$$

Однак це представлення не єдине. У символічних позначеннях тензори другого рангу (діадики) зображуються жирними буквами зі знаком тільда (^) на горі, як це зроблено вище.

Якщо у кожній діаді формули (1.12) перший і другий множники поміняти місцями, то отриманий тензор буде спряжений до вихідного і записується так

$$\hat{\mathbf{D}}_c = \hat{\mathbf{D}}^T = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{b}_N \mathbf{a}_N. \quad (1.13)$$

Якщо кожен діад у сумі у формулі (1.12) замінити скалярним добутком відповідних векторів, то отримаємо скаляр, який називається *скаляром діадика* і записується у формі

$$D_s = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{b}_N. \quad (1.14)$$

Якщо кожен діад у сумі у формулі (1.12) замінити векторним добутком відповідних векторів, то результат називається *вектором діадика* і записується у формі

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \times \mathbf{b}_N. \quad (1.15)$$

Можна показати, що $\hat{\mathbf{D}}_c$, D_s і $\mathbf{D}_v$ не залежать від вибору представлення (1.12).

Невизначений добуток векторів володіє властивостями дистрибутивності:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \quad (1.16)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad (1.17)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd}, \quad (1.18)$$

та, якщо λ і μ – скаляри, то

$$(\lambda + \mu)\mathbf{ab} = \lambda\mathbf{ab} + \mu\mathbf{ab}, \quad (1.19)$$

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab}. \quad (1.20)$$

Якщо $\mathbf{v}$ – будь-який вектор, то скалярні добутки $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}$ теж є векторами, які визначаються відповідно формулам

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \mathbf{u}, \quad (1.21)$$

$$\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}) + \dots + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{w}. \quad (1.22)$$

Два діадика $\hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{E}}$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли для будь-якого вектора $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{E}} \text{ або } \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v} \quad (1.23)$$

Одиничний діадик $\hat{\mathbf{I}}$ – це такий діадик, який представляється у вигляді

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad (1.24)$$

де $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – вектори будь-якого ортонормованого базису у тривимірному евклідовому просторі.

Одиничний діадик $\hat{\mathbf{I}}$ характеризується такою властивістю

$$\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{v}, \quad (1.25)$$

для всіх векторів $\mathbf{v}$.

Векторні добутки $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{D}} \times \mathbf{v}$ є діадиками, які визначаються формулами

$$\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + \dots + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \hat{\mathbf{F}}, \quad (1.26)$$

$$\hat{\mathbf{D}} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{v}) + \dots + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N \times \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{G}}. \quad (1.27)$$

Скалярний добуток двох діад $\mathbf{ab}$ і $\mathbf{cd}$ за визначенням є діада вигляду

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad}. \quad (1.28)$$

Користуючись формулою (1.28), легко побачити, що скалярний добуток будь-яких двох діадиків $\hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{E}}$ теж є діадиком

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} &= (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_N \mathbf{b}_N) \cdot (\mathbf{c}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{d}_N) = \\ &= (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1) \mathbf{a}_1 \mathbf{d}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2) \mathbf{a}_2 \mathbf{d}_2 + \dots + (\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{c}_N) \mathbf{a}_N \mathbf{d}_N = \hat{\mathbf{G}}.\end{aligned}\quad (1.29)$$

Діадики $\hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{E}}$ називаються *взаємно оберненими*, якщо

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{I}}. \quad (1.30)$$

Для обернених діадиків часто використовуються позначення $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{D}}^{-1}$ і $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{E}}^{-1}$.

Подвійний скалярний, змішаний і подвійний векторний добуток діад $\mathbf{ab}$ і $\mathbf{cd}$ за аналогією можна визначити таким чином:

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \quad (\text{скаляр}), \quad (1.31)$$

$$\mathbf{ab} \times \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{h} \quad (\text{вектор}), \quad (1.32)$$

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{g} \quad (\text{вектор}), \quad (1.33)$$

$$\mathbf{ab} \times \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{uw} \quad (\text{діада}). \quad (1.34)$$

Користуючись цими формулами, неважко отримати подвійний скалярний і векторний добуток тензорів другого рангу. Іноді подвійний скалярний добуток діад визначають як

$$\mathbf{ab} \cdot \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \quad (\text{скаляр}). \quad (1.35)$$

Діадик $\hat{\mathbf{D}}$ називають *самоспряженим* або *симетричним*, якщо

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}_c, \quad (1.36)$$

і *антисиметричним*, якщо

$$\hat{\mathbf{D}} = -\hat{\mathbf{D}}_c. \quad (1.37)$$

Кожний діадик можна представити у вигляді суми симетричного і несиметричного діадиків, причому це представлення єдине. Дійсно, для будь-якого діадика $\hat{\mathbf{D}}$ можна написати

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}_c) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}_c) = \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}, \quad (1.38)$$

де

$$\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{D}}_c + \hat{\mathbf{D}}) = \hat{\mathbf{G}}, \text{ (симетричний)} \quad (1.39)$$

і

$$\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{D}}_c - \hat{\mathbf{D}}) = \hat{\mathbf{H}}, \text{ (антисиметричний)}. \quad (1.40)$$

Для того щоб встановити єдиність такого розкладання, припустимо, що існує інше розкладання $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{G}}^* + \hat{\mathbf{H}}^*$, тоді

$$\hat{\mathbf{G}}^* + \hat{\mathbf{H}}^* = \hat{\mathbf{G}} + \hat{\mathbf{H}}. \quad (1.41)$$

Рівність спряжена до (1.41) буде мати вигляд

$$\hat{\mathbf{G}}^* - \hat{\mathbf{H}}^* = \hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{H}}. \quad (1.42)$$

Почленне додавання і віднімання (1.41) і (1.42) призводить відповідно до рівностей $\hat{\mathbf{G}}^* = \hat{\mathbf{G}}$ і $\hat{\mathbf{H}}^* = \hat{\mathbf{H}}$, що і треба було довести.

1.7. Системи координат. Базисні вектори. Трієдр одиничних векторів

Відносно обраної системи координат вектор можна задавати його *компонентами* у цій системі. Вибір системи координат довільний, але в деяких випадках доцільно використовувати спеціальну систему координат. Задати систему осей координат – це значить задати одиниці вимірювання векторів і вказати напрям осей у просторі, щоб можна було визначити орієнтацію векторів.

Загальновідому *ортогональну декартову систему координат* Охуз представляють взаємно перпендикулярними осями, як це показано на рис. 1.5. Будь-який вектор $\mathbf{v}$ у такій системі координат можна задати у вигляді лінійної комбінації трьох довільних некопланарних векторів (які не лежать в одній площині), які називаються *базисними векторами*. Через базисні вектори, наприклад, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ і відповідним чином обрані скалярні коефіцієнти λ, μ, ν вектор $\mathbf{v}$ виражається так

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}. \quad (1.43)$$

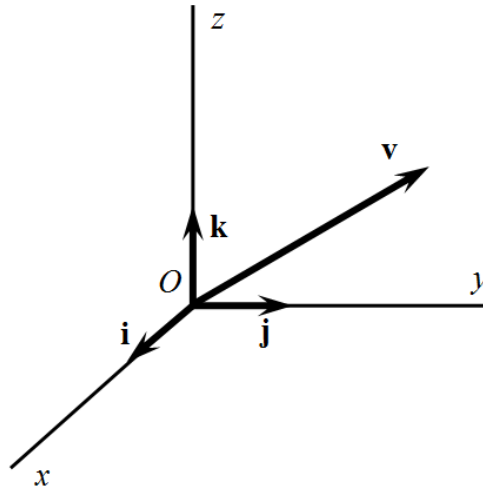


Рис. 1.5. Вектор в декартовій системі координат

Базисні вектори за визначенням лінійно незалежні, тобто рівняння

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1.44)$$

задовольняється тільки за умови $\lambda = \mu = \nu = 0$. Кажуть, що сукупність базисних векторів для даної системи координат утворює *базис* цієї системи.

В ортогональній декартовій системі у якості базису зазвичай береться набір одиничних векторів $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, що направлені вздовж осей координат (див. рис. 1.5). Ці базисні вектори утворюють *правий триєдр одиничних векторів*, для яких

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (1.45)$$

та

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (1.46)$$

Такий набір базисних векторів називається *ортонормованим базисом*.

Вектор $\mathbf{v}$, зображений на рис. 1.6 стрілкою, можна представити у вигляді лінійної комбінації одиничних векторів $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad (1.47)$$

в якій декартові компоненти

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{v}| \cos \alpha, \quad v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{v}| \cos \beta, \quad v_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{v}| \cos \gamma$$

є проекціями вектора $\mathbf{v}$ на осі координат.

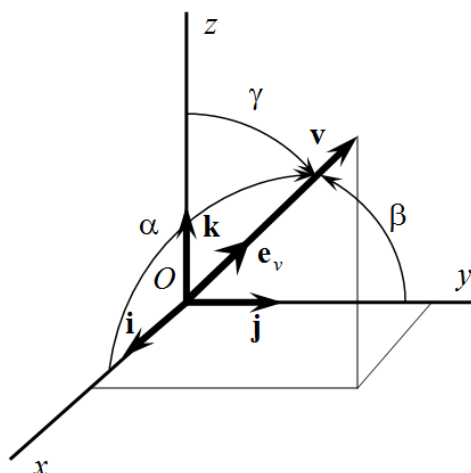


Рис. 1.6. Вектор $\mathbf{v}$ у декартовій системі координат

Згідно формули (1.7), одиничний вектор напрямку $\mathbf{v}$ дається виразом

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}. \quad (1.48)$$

Вектор $\mathbf{v}$ є довільним, тому для будь-якого одиничного вектора його *напрямні косинуси* являються його *декартовими компонентами*.

У декартових компонентах скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ записується у формі

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.49)$$

а векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ має вигляд

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \quad (1.50)$$

Останній вираз часто записують у вигляді визначника

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.51)$$

з елементами якого оперують як зі звичайними числами.

Змішаний добуток векторів теж можна представити через компоненти у вигляді визначника

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.52)$$

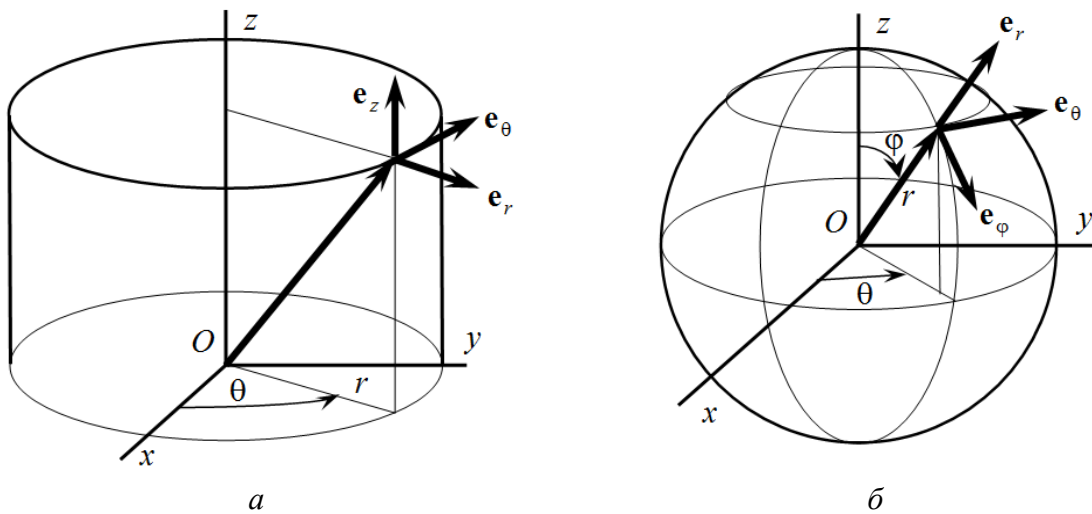
Діада $\mathbf{ab}$ у декартових координатах виражається таким співвідношенням

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} = & (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x \mathbf{ii} + a_x b_y \mathbf{ij} + a_x b_z \mathbf{ik} + \\ & + a_y b_x \mathbf{ji} + a_y b_y \mathbf{jj} + a_y b_z \mathbf{jk} + a_z b_x \mathbf{ki} + a_z b_y \mathbf{kj} + a_z b_z \mathbf{kk}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Вираз (1.53) складається з дев'яти членів, тому він називається *дев'ятичленною формою* діади $\mathbf{ab}$. Будь-який тензор другого рангу можна записати у дев'ятичленній формі. Дев'ятичленна форма одиничного діадика представляється через одиничні вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ таким чином

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}. \quad (1.54)$$

Окрім вже розглянутої ортогональної декартової системи координат, також широко використовуються криволінійні системи координат, такі як циліндрична (r, θ, z) і сферична (r, θ, φ) , які показано на рис. 1.7. З цими системами координат пов'язані трієдри одиничних базисних векторів $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ і $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, відповідно (див. рис. 1.7). Однак у цих випадках базисні вектори не мають постійних напрямів, і тому взагалі являються функціями точки.



a – циліндрична; *б* – сферична

Рис. 1.7. Криволінійні системи координат

1.8. Лінійні векторні функції. Діадики як лінійні векторні оператори

Кажуть, що вектор $\mathbf{a}$ є функцією іншого вектора $\mathbf{b}$, якщо вектор $\mathbf{a}$ визначено, як тільки задано $\mathbf{b}$. Таке функціональне співвідношення виражається формулою

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{b}). \quad (1.55)$$

Функція $\mathbf{f}$ називається лінійною, якщо для будь-яких векторів $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ та будь-якого скаляра λ має місце рівність

$$\mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{f}(\mathbf{b}) + \mathbf{f}(\mathbf{c}), \quad (1.56)$$

$$\mathbf{f}(\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{b}). \quad (1.57)$$

За умови використання декартових координат компонент вектора $\mathbf{b}$ рівність (1.55) приймає форму

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}); \quad (1.58)$$

у випадку лінійності функції $\mathbf{f}$ (1.58) можна переписати таким чином

$$\mathbf{a} = b_x \mathbf{f}(\mathbf{i}) + b_y \mathbf{f}(\mathbf{j}) + b_z \mathbf{f}(\mathbf{k}). \quad (1.59)$$

Нехай у формулі (1.59) $\mathbf{f}(\mathbf{i}) = \mathbf{u}$, $\mathbf{f}(\mathbf{j}) = \mathbf{v}$, $\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \mathbf{w}$, так що

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{v}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{w}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{u}\mathbf{i} + \mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{w}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{b}. \quad (1.60)$$

З формули (1.60) видно, що $\mathbf{a}$ представляє собою скалярний добуток діадика на вектор, тобто

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.61)$$

де $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{u}\mathbf{i} + \mathbf{v}\mathbf{j} + \mathbf{w}\mathbf{k}$.

Формула (1.61) показує, що будь-яка лінійна векторна функція $\mathbf{f}$ може бути виражена добутком діадика на вектор. При цьому діадик $\hat{\mathbf{D}}$ слугує *лінійним векторним оператором*, який, діючи на векторний аргумент $\mathbf{b}$, переводить його у *вектор-функцію* $\mathbf{a}$.

1.9. Індексні позначення. Інтервал зміни індексів і погодження про підсумовування

Компоненти тензора будь-якого рангу і сам тензор можна наочно і стисло представити за допомогою *індексних позначень*. Ці позначення полягають у тому, що до *характерної* або *основної* літери, що представляє тензорну величину, додаються верхні або нижні літерні індекси. Типовими прикладами, що ілюструють використання індексів, є тензорні символи

$$a_i, b^i, T_{ij}, F_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}.$$

За правилами індексних позначень літерний індекс може зустрічатися в кожному члені *один* або *два* рази. Якщо індекс вживається один раз, то розуміють, що він приймає значення $1, 2, \dots, N$, де N – задане додатнє ціле число, яке визначає *розмірність* індекса, тобто інтервал його зміни. Інденси, що не повторюються, називаються *вільними*. Тензорний ранг даного члена дорівнює кількості вільних індексів у цьому члені. Правильно написане тензорне співвідношення має однакові вільні індекси у кожному члені.

Якщо індекс використано *двічі*, то припускається, що цей індекс приймає всі значення із свого інтервалу зміни і члени, що відповідають кожному значенню індекса із цього набору, *підсумовуються*. В цьому та званому *погодженні про підсумовування* індекс, що повторюється, називають *німим*, оскільки їх заміна на будь-які інші літери, які не використовуються у якості вільних індексів, не змінює значення члена, у який вони входять. Взагалі у правильно написаному тензорному виразі ні один індекс не зустрічається більше двох разів.

За числом і розташуванням вільних індексів безпосередньо можна зробити висновок про характер величини, що виражена у індексних позначеннях. Тензори *першого рангу* (вектори) позначаються основними буквами з *одним вільним індексом*. Оскільки, будь-який вектор a зображаються символом з єдиним верхнім або нижнім індексом, тобто в одній з двох форм запису

$$a_i, a^i.$$

В наступних виразах, що мають тільки один вільний індекс, теж можна пізнати тензори першого рангу

$$a_{ij} b_j, F_{ikk}, R_{qp}^p, \varepsilon_{ijk} u_j v_k.$$

Тензори другого рангу позначаються символами з двома вільними індексами. Так, довільний тензор другого рангу $\hat{\mathbf{D}}$ буде записуватися в одній з трьох можливих форм

$$D^{ij}, D_i^{\cdot j} \text{ або } D_{\cdot j}^i, D_{ij}.$$

У змішаній формі точка вказує, що j – другий індекс. Тензорні величини другого рангу можуть виглядати по-різному, наприклад

$$A_{ijp}, B_{\cdot jk}^{ij}, \delta_{ij} u_k v_k.$$

Логічно продовжуючи вищевказану схему, тензор *третього* рангу записують символом з *трьома* вільними індексами. А символ, який не має зв'язаного з ним індексу, такого як, наприклад, λ , зображає скаляр або тензор нульового рангу.

У звичайному фізичному просторі *базис* складається із трьох некомпланарних векторів (що не лежать в одній площині) і будь-який вектор в цьому просторі повністю задається своїми трьома компонентами. Тому індекси у величин a_i , що представляють вектор $\mathbf{a}$ у фізичному тривимірному просторі, приймають значення 1, 2, 3. Відповідно до цього, розуміють, що символ a_i представляє зразу три компоненти $a_1, a_2, a_3 \rightarrow \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ – запис вектора у загальному випадку, де $\mathbf{e}_i$ – векторний супровід, базис вектора. Іноді символ a_i можна тлумачити як i -у компоненту вектора, а в інших випадках – як сам вектор.

У тривимірному просторі, де обидва індекси i, j змінюються від 1 до 3, символ A_{ij} представляє дев'ять компонент тензора другого рангу $\hat{\mathbf{A}} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$. Іноді тензор A_{ij} записують у вигляді квадратної матриці

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Так само компоненти тензора першого рангу (вектора) у тривимірному просторі можна наочно зобразити упорядкованим рядком або стопцем компонент у вигляді

$$a_i = (a_1 \ a_2 \ a_3) \text{ або } a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

У загальному випадку в N -мірному просторі тензор n -го рангу буде мати N^n компонент.

Зручність індексних позначень для запису систем рівнянь у компактній формі можна проілюструвати двома такими типовими прикладами. У тривимірному просторі система рівнянь в індексній формі запису має вигляд одного рівняння

$$x_i = c_{ij} z_j, \quad (1.64)$$

а в розгорнутій формі записується у вигляді трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3, \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3, \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Якщо i і j приймають значення 1 і 2, то рівність в індексній формі запису

$$A_{ij} = B_{ip} C_{jq} D_{pq}, \quad (1.66)$$

в розгорнутій формі дає чотири співвідношення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22}, \\ A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22}, \\ A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22}, \\ A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Якщо ж $i, j = 1, 2, 3$, то формула (1.66) розгортається у дев'ять рівнянь, кожне з яких містить дев'ять членів у правій частині.

1.10. Погодження про підсумовування у символічних позначеннях

Погодженням про підсумовування часто користуються у зв'язку з представленням векторів і тензорів у символічних позначеннях через *базисні*

вектори з індексами. Так, якщо декартові осі та одиничні вектори базису, зображені на рис. 1.5, перепозначити як показано на рис. 1.8, то довільний вектор $\mathbf{v}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.68)$$

де v_1, v_2, v_3 – декартові компоненти вектора $\mathbf{v}$.

Застосовуючи до (1.68) погодження про підсумовування, його можна переписати у скороченій формі

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i, \quad (1.69)$$

де i – індекс, за яким виконується підсумовування; $\mathbf{e}_i$ – векторний супровід тензора.

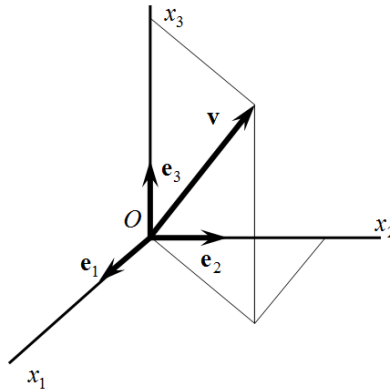


Рис. 1.8. Декартова система з осями і одиничними векторами базису представлені в індексній формі

Тут позначення по суті *символічні* і в той же час використано *погодження про підсумовування*. При такому поєднанні позначень *не діє правило вільних індексів*, що прийнято у чисто індексному позначенні тензорних величин.

Тензори другого рангу теж можуть бути представлені підсумовуванням по базисним векторам, що записані в індексному форматі. Так, діаду $\mathbf{ab}$, задану у дев'ятичленній формі (1.53), можна записати у вигляді

$$\mathbf{ab} = (a_i \mathbf{e}_i)(b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.70)$$

У цьому виразі важливо зберегти порядок написання базисних векторів. Подібним чином дев'ятичленна форма будь-якого тензора другого рангу $\hat{\mathbf{D}}$ може бути представлена у компактних позначеннях так

$$\hat{\mathbf{D}} = D_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.71)$$

1.11. Перетворення координат. Загальне поняття тензора

Нехай x^i – довільна система координат x^1, x^2, x^3 у тривимірному евклідовому просторі і θ^i – будь-яка інша система координат $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ у тому ж просторі. Тут цифри, що написані зверху, є верхніми індексами, а не показниками ступеню. У цьому випадку ступінь x можна записувати за допомогою дужок, наприклад: $(x)^2$, $(x)^3$.

Формули перетворення координат

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1.72)$$

визначають для будь-якої точки (x^1, x^2, x^3) системи координат x^i новий набір її координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ в системі координат θ^i . Відносно функцій θ^i , що зв'язують дві сукупності змінних величин (координат), припускається, що вони однозначні, неперервні і диференціюються. Визначник

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}, \quad (1.73)$$

або у компактній формі

$$J = \left| \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} \right|, \quad (1.74)$$

називається *якобіаном* перетворення. Якщо якобіан не дорівнює нулю, то рівняння (1.72) можна локально єдиним чином розв'язати відносно x^i

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3). \quad (1.75)$$

Системи координат x^i і θ^i , які використано для написання рівнянь (1.72) і (1.75) – мають загальний вигляд. Вони можуть бути як будь-якими криволінійними, так і декартовими.

Із (1.72) знайдемо компоненти диференціала $d\theta^i$

$$d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (1.76)$$

Рівність (1.76) визначає клас тензорів, які називаються *контраваріантними*. У загальному випадку величини b^i , зв'язані з точкою P , представляють компоненти *контраваріантного тензора першого рангу*, якщо під час перетворення координат ці величини перетворюються за законом

$$b'^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} b^j, \quad (1.77)$$

причому частинні похідні обчислені у точці P . У формулі (1.77) b^j є компонентами тензора в системі координат x^j , а b'^i – його компоненти в системі координат θ^i . У загальній теорії тензорів для позначення контраваріантних тензорів використовуються верхні індекси. Це робиться з тої причини, що для координати позначення x^i є кращим за x_i . Однак необхідно зауважити, що тензорний характер мають тільки диференціали dx^i , але не самі координати.

Природне узагальнення правила перетворення векторів (1.77) призводить до визначення контраваріантного тензора другого рангу, компоненти якого за правилом перетворення мають вигляд

$$B'^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^s} B^{rs}. \quad (1.78)$$

Контраваріантні тензори третього, четвертого та більш вищих рангів визначаються аналогічним чином.

Термін «*контраваріантний*» використано вище, для того щоб відрізнити ці тензори від тензорів іншого типу, які називаються *коваріантними*. У тензорному численні для зображення коваріантних тензорів використовується нижні індекси. Типовий *коваріантний вектор* утворює частинні похідні від скалярної функції по координатах.

Дійсно, якщо $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ – скалярна функція, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (1.79)$$

В загальному випадку величини b_i називаються компонентами *коваріантного тензора першого рангу*, якщо вони перетворюються за правилом

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} b_j. \quad (1.80)$$

Тут b'_i є коваріантними компонентами вектора у системі координат θ^i , а b_i – компонентами у системі координат x^i . *Коваріантні тензори другого рангу* підпорядковуються закону перетворення вигляду

$$B'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs}. \quad (1.81)$$

Коваріантні тензори більш високого рангу і *змішані* тензори визначаються очевидним чином

$$T'^{r}_{sp} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} T^{m}_{nq}. \quad (1.82)$$

1.12. Метричний тензор. Декартові тензори

Нехай x^i представляє систему ортогональних декартових координат у евклідовому тривимірному просторі, а θ^i – будь-яку іншу систему ортогональних прямолінійних або криволінійних координат (наприклад, циліндричних або сферичних) у тому ж самому просторі. Вектор $\mathbf{x}$, що має декартові компоненти x^i , називається *радіусом-вектором* довільної точки $P(x^1, x^2, x^3)$ у декартовій системі. Квадрат диференціала відстані ds між близькими точками в цій системі координат $P(\mathbf{x})$ і $Q(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ дається формулою

$$(ds)^2 = dx^i dx^i. \quad (1.83)$$

Із формули перетворення координат (1.75)

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.84)$$

отримуємо зв'язок між диференціалами

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p. \quad (1.85)$$

Після пвдстановки (1.85) в (1.83) отримуємо

$$(ds)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^p d\theta^q = g_{pq} d\theta^p d\theta^q, \quad (1.86)$$

де $g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q}$ – тензор другого рангу, який називається *метричним* або *фундаментальним* тензором простору.

Якщо θ^i теж утворюють ортогональну декартову систему, скажімо x'^i , тоді

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq}, \quad (1.87)$$

де $\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{при } p = q; \\ 0 & \text{при } p \neq q, \end{cases}$ – дельта або символ Кронекера.

Система координат, для якої квадрат нескінченно малого елемента довжини має вигляд (1.83), називається системою *однорідних координат*. Перетворення, що переводять одну систему однорідних координат в іншу, називаються *ортогональними* перетвореннями, і якщо обмежитись тільки ортогональними перетвореннями, то тензори, які визначено таким чином, називаються *декартовими тензорами*. Зокрема, це вірно для законів перетворення ортогональних декартових систем координат зі спільним початком. Для декартових тензорів немає різниці між контраваріантними і коваріантними компонентами, і тому у виразах, що представляють декартові тензори, прийнято користуватися виключно нижніми індексами. В законах перетворення, що визначають декартові тензори, частинні похідні у загальних тензорних визначеннях (1.80) і (1.81) замінюються на константи.

1.13. Закони перетворення декартових тензорів. Дельта Кронекера. Умови ортогональності

Нехай $Ox_1x_2x_3$ і $Ox'_1x'_2x'_3$ – дві ортогональні декартові системи координат зі спільним початком у довільній точці O (рис. 1.9). Можна вважати, що система координат зі штрихами отримана із системи без штрихів поворотом вісей навколо координат або відображенням вісей відносно одної із

координатних площин, або, може бути, комбінацією того й іншого. Якщо величиною c_{ij} позначено косинус кута між i -ю віссю системи зі штрихами і j -ю віссю системи без штрихів, тобто $c_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, то орієнтацію будь-якої осі кожної системи відносно другої зручно задати таблицею

	x_1	x_2	x_3
x'_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
x'_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
x'_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

або ж тензором перетворення координат

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Із такого визначення c_{ij} витікає, що одиничний вектор $\mathbf{e}'_1$ вісі x'_1 згідно формули (1.48) та погодження про підсумовування представляється виразом

$$\mathbf{e}'_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2 + c_{13}\mathbf{e}_3 = c_{1j}\mathbf{e}_j. \quad (1.88)$$

Ясно, що узагальнюючи рівність (1.88), будь-який базисний вектор можна записати у вигляді

$$\mathbf{e}'_i = c_{ij}\mathbf{e}_j. \quad (1.89)$$

Довільний вектор $\mathbf{v}$, зображений на рис. 1.9, можна виразити у системі координат без штрихів

$$\mathbf{v} = v_j\mathbf{e}_j \quad (1.90)$$

і в системі координат зі штрихами

$$\mathbf{v} = v'_i\mathbf{e}'_i. \quad (1.91)$$

Замінивши $\mathbf{e}'_i$ у формулі (1.91) еквівалентним виразом (1.89), отримуємо

$$\mathbf{v} = v'_i c_{ij}\mathbf{e}_j. \quad (1.92)$$

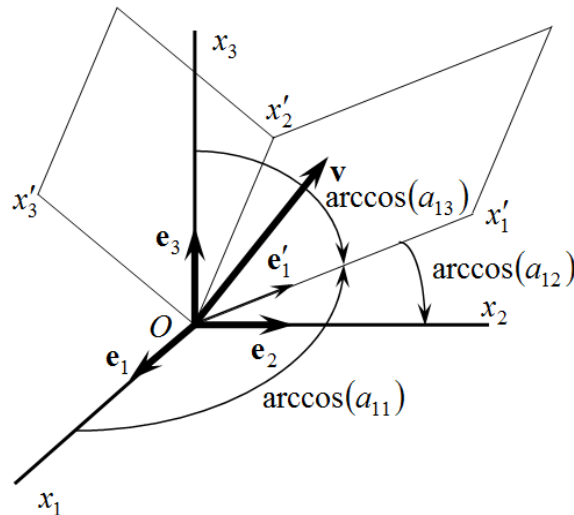


Рис. 1.9. Декартові системи координат $Ox_1x_2x_3$ і $Ox'_1x'_2x'_3$

Порівнюючи формули (1.92) і (1.90), знаходимо, що компоненти вектора у вихідній і перетвореній системах зв'язані співвідношенням

$$v_j = c_{ij} v'_i. \quad (1.93)$$

Ця рівність дає *закон перетворення* декартових тензорів першого рангу. Як видно, він є окремим випадком загальних законів перетворення тензорів першого рангу, які були представлені формулами (1.80) і (1.77). Міняючи місцями у попередніх міркуваннях базисні вектори зі штрихами і без штрихів, отримуємо співвідношення, зворотне до (1.93)

$$v'_i = c_{ij} v_j. \quad (1.94)$$

Треба відмітити, що у формулі (1.93) у c_{ij} вільним був другий індекс, а у виразі (1.94) вільний індекс є першим.

Вибираючи належним чином німі індекси та об'єднуючи (1.93) і (1.94), можна написати

$$v_j = c_{ij} c_{ik} v_k, \quad (1.95)$$

Оскільки вектор $\mathbf{v}$ є довільним, то це рівняння повинно зводитися до тотожності $v_j = v_j$. Тому коефіцієнт $c_{ij} c_{ik}$, значення якого залежить від індексів j і k , повинен дорівнювати або 1, або 0 у залежності від того, однакові або

різні числові значення приймають j і k . Для представлення величин типу як $c_{ij}c_{ik}$, можна користуватися *дельтою Кронекера*, яка визначається таким чином

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.96)$$

За допомогою дельти Кронекера умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти рівняння (1.95), можна записати таким чином

$$c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}. \quad (1.97)$$

В розгорнутому вигляді співвідношення (1.97) складається із дев'яти рівностей, які називаються *умовами ортогональності* або *ортонормованості*. Ці умови, накладаються на напрямні косинуси c_{ij} . Але співвідношення (1.93) і (1.94) можна зкомбінувати інакше та отримати рівність $v'_i = c_{ij}c_{kj}v'_k$, що дає форму умов ортогональності

$$c_{ij}c_{kj} = \delta_{ik}. \quad (1.98)$$

Лінійні перетворення типу (1.93) і (1.94), коефіцієнти яких задовольняють умови ортогональності (1.97) або (1.98), називаються *ортогональними перетвореннями*. Поворот осей координат і відображення їх відносно будь-якої координатної площини є ортогональними перетвореннями.

Символ Кронекера іноді називають *оператором заміни*, тому що він дає, наприклад, такі перетворення

$$\delta_{ij}b_j = \delta_{i1}b_1 + \delta_{i2}b_2 + \delta_{i3}b_3 = b_i \quad (1.99)$$

або

$$\delta_{ij}F_{ik} = \delta_{1i}F_{1k} + \delta_{2i}F_{2k} + \delta_{3i}F_{3k} = F_{jk}. \quad (1.100)$$

Символ Кронекера завдяки своїм властивостям є аналогом в індексних позначеннях одиничного тензора другого рангу $\hat{\mathbf{I}}$, який визначається формулою (1.54).

Згідно з правилами перетворення векторів (1.94) діада $u_i v_j$ у системі координат зі штрихами має компоненти

$$u'_i v'_j = (c_{ip} u_p) (c_{jq} v_q) = c_{ip} c_{jq} u_p v_q. \quad (1.101)$$

Природнім узагальненням формули (1.101) буде правило перетворення будь-якого тензора другого рангу

$$T'_{ij} = c_{ip} c_{jq} T_{pq}. \quad (1.102)$$

Використовуючи умову ортогональності, неважко знайти співвідношення, звороте до (1.102), яке дає правило переходу від компонент у системі зі штрихом до компонент в системі без штрихів

$$T_{ij} = c_{pi} c_{qj} T'_{pq}. \quad (1.103)$$

Закони перетворення декартових тензорів першого і другого рангів узагальнюються для декартових тензорів N -го рангу

$$T'_{ijk\dots} = c_{ip} c_{jq} c_{km} \dots T_{pqm\dots}. \quad (1.104)$$

1.14. Додавання декартових тензорів. Множення тензора на скаляр

Декартові тензори однакового рангу можна додавати або віднімати покомпонентно згідно з таким правилом

$$A_{ijk\dots} \pm a B_{ijk\dots} = T_{ijk\dots}. \quad (1.105)$$

Сума тензорів є тензор того ж рангу, що і доданки. Відмітимо, що однакові індекси розташовані в одній і тій же послідовності у кожному члені.

Добуток всіх компонент тензора на скаляр дає новий тензор того ж рангу. У разі множення на скаляр λ типові приклади запису добутку в індексній та у символічній формі мають вигляд

$$b_i = \lambda a_i \text{ або } \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \quad (1.106)$$

$$B_{ij} = \lambda A_{ij} \text{ або } \hat{\mathbf{B}} = \lambda \hat{\mathbf{A}}. \quad (1.107)$$

1.15. Добуток тензорів

Зовнішнім добутком або тензоним добутком двох тензорів довільного рангу називається новий тензор, у якого компоненти утворені множенням

кожної компоненти одного тензора на кожну компоненту другого. Ранг отриманого тензора дорівнює сумі рангів співмножників. Типовими прикладами зовнішнього добутку є наступні вирази:

$$\text{а) } a_i b_j = T_{ij} \text{ або } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \otimes b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \hat{\mathbf{T}};$$

$$\text{в) } D_{ij} T_{km} = \Phi_{ijk m} \text{ або } \hat{\mathbf{D}} \otimes \hat{\mathbf{T}} = \hat{\Phi}; \text{ б) } v_i F_{jk} = \alpha_{ijk} \text{ або } \mathbf{v} \otimes \hat{\mathbf{F}} = \hat{\alpha};$$

$$\text{г) } \varepsilon_{ijk} v_m = \Theta_{ijk m} \text{ або } \hat{\varepsilon} \mathbf{v} = \hat{\Theta},$$

де $\otimes$ – позначення операції тензорного добутку.

Як видно із цих прикладів, зовнішній добуток отримується простим написанням тензорів, що перемножуються, один за одним. Відмітимо, що саме ця операція утворює з двох векторів діаду.

Згорткою тензора за двома вільними індексами називається така операція, коли два індекси позначаються однаковими літерами, внаслідок чого вони стають індексами підсумовування. В результаті згортання отримується знов тензор (згортка), ранг якого на дві одиниці менший за вихідний. Така згортка отримала назву *скалярної згортки*. Наведемо декілька типових прикладів згорток.

а) Згортки тензора T_{ij} та діади $u_i v_j$:

$$T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33},$$

$$u_i v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

б) Згортки тензора і вектора $E_{ij} a_k$:

$$E_{ij} a_j = b_i,$$

$$E_{ij} a_i = c_j,$$

$$E_{ii} a_k = d_k.$$

в) Згортки тензорів $E_{ij} F_{km}$:

$$E_{ij} F_{im} = G_{jm}, \quad E_{ij} F_{kk} = P_{ij},$$

$$E_{ij} F_{ki} = H_{jk}, \quad E_{ij} F_{jm} = Q_{im},$$

$$E_{ii} F_{km} = K_{km}, \quad E_{ij} F_{kj} = R_{ik}.$$

Окрім скалярної згортки також застосовується *векторна згортка*. При цьому спеціально вказується за якими індексами виконується згортка. Векторна згортка виконується так само як і скалярна тільки замість скалярного добутку між векторами супроводу виконується векторний добуток. Нехай

$\hat{P} = p^{krq} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_r \mathbf{e}_q$, тоді векторна згортка за 1,2 індексах, тобто за k, r

$$\begin{aligned} \hat{P}_{1 \otimes 2} &= p^{krq} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_q = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] p^{krq} \frac{(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r)}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]} \mathbf{e}_q = \\ &= \sqrt{g} p^{krq} \frac{(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r)}{\sqrt{g}} \mathbf{e}_q = \sqrt{g} \varepsilon_{krm} p^{krq} \mathbf{e}^m \mathbf{e}_q = d_m^{\cdot q} \mathbf{e}^m \mathbf{e}_q, \end{aligned}$$

де $d_m^{\cdot q} = \sqrt{g} \varepsilon_{krm} p^{krq}$; $\sqrt{g} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]$ – змішаний добуток векторів основного базису; ε_{krm} – тензор Леві-Чивіті; $\mathbf{e}^m = \frac{\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r}{[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]} = \frac{\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r}{\sqrt{g}}$ – взаємний базис.

Під час векторної згортки ранг тензора зменшується на одиницю.

Внутрішнім добутком двох тензорів називається результат операції скалярного згортання, що застосовується до зовнішнього добутку даних тензорів, причому індекси, що співпадають, повинні фігурувати по одному в кожному із співмножників.

Наведемо деякі часто використовувані у механіці суцільного середовища добутки тензорів, записані у індексних та символічних позначеннях.

Зовнішній добуток

$$\begin{aligned} a_i b_j &= A_{ij} \\ a_i E_{jk} &= B_{ijk} \\ E_{ij} F_{km} &= C_{ijkm} \\ E_{ij} E_{km} &= D_{ijkm} \end{aligned}$$

Скалярна згортка:

індексні позначення символічні позначення

$$\begin{aligned} a_i b_i &= \lambda & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \lambda; \\ a_i E_{ik} &= f_k & \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{f}; \\ a_i E_{ji} &= h_j & \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{h}; \\ E_{ij} F_{jm} &= G_{im} & \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{G}; \\ E_{ij} E_{jm} &= B_{im} & \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= (\mathbf{E})^2. \end{aligned}$$

Іноді користуються скалярними згортками тензорів четвертого і більш високого рангів за декількома парами індексів. Ось два таких приклади:

$$\begin{aligned} E_{ij} F_{km} & \text{ згортається у } E_{ij} F_{ij} & \text{ або } \mathbf{E} : \mathbf{F}; \\ E_{ij} E_{km} E_{pq} & \text{ згортається у } E_{ij} E_{jm} E_{mq} & \text{ або } (\mathbf{E})^3. \end{aligned}$$

1.16. Векторний добуток. Тензор Леві-Чивіті. Бівектор

Для того щоб записати векторний добуток векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ у індексних позначеннях, зручно ввести спеціальний тензор третього рангу ε_{ijk} або $\hat{\varepsilon}^3$, відомий як *тензор Леві-Чивіті* (*альтенуючий тензор*), компоненти якого визначаються таким чином

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3; \\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3; \\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i=j, \text{ або } j=k, \text{ або } k=i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рис. 1.10, нескладно записати:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1,$$

а всі інші 18 компонент, у яких індекси повторюються, дорівнюють нулю.

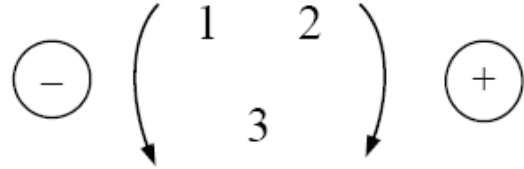


Рис. 1.10. До визначення ε_{ijk}

За допомогою цього тензора векторний добуток $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ можна записати у індексній формі

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i. \quad (1.108)$$

Також можна записати і змішаний добуток векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \lambda$

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \lambda. \quad (1.109)$$

Змішаний добуток векторів також представлено формулою (1.52), але у вигляді визначника, тому тензор Леві-Чивіті завдяки компактності запису часто застосовують і для виразу величини визначника третього рангу.

Заслуговує на увагу та обставина, що ε_{ijk} підпорядковується правилу перетворення декартових тензорів третього рангу тільки у випадках таких перетворень, в яких $\det a_{ij} = 1$ (наприклад, для повороту осей). Якщо ж перетворення таке, що $\det a_{ij} = -1$ (наприклад, перетворення відображення відносно одної із координатних площин, в результаті чого права система

координат перетворюється в ліву), то формулу перетворення ε_{ijk} слід записувати зі знаком мінус. Такі тензори називаються *псевдотензорами*.

Об'єкт, що визначається рівністю

$$v_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}, \quad (1.110)$$

називається бівектором довільного декартового тензора другого рангу T_{ij} , який є аналогом в індексних позначеннях вектора $\hat{T}_v$ діадика $\hat{T}$, що визначено формулою (1.15).

1.17. Матриці. Матричні представлення декартових тензорів

Прямокутна таблиця елементів, що поміщена у квадратні дужки і підчиняється певним правилам поводження з нею, називається *матрицею*. $(M \times N)$ – матрицею називається матриця, яка має M рядків і N стовпців елементів. У символі A_{ij} , яким зображають будь-який елемент матриці, перший індекс означає номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент матриці. Сама матриця позначається символом свого типового елемента у квадратних дужках або тією ж bold-літерою, що і її елементи. Наприклад, $(M \times N)$ – матриця **A** або $[A_{ij}]$, задається таблицею

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix}. \quad (1.111)$$

Якщо $M = N$, то матриця називається *квадратною* порядку N . Якщо $M = 1$, то утворюється $(1 \times N)$ -матриця, яка називається *матрицею-рядком* і позначається $[a_{1k}]$. Відповідно $(M \times 1)$ -матриця, яка називається *матрицею-стовпцем* і позначається $[a_{k1}]$. Матриця у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається *нульовою*. Квадратна матриця, у якої всі елементи, що стоять не на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною матрицею*. Якщо всі діагональні елементи (від A_{11} до A_{NN}) такої матриці дорівнюють одиниці, то така матриця називається *одиничною*. $(N \times M)$ -матриця A^T , яка отримана заміною місцями рядків і стовпців $(M \times N)$ – матриці A , називається *транспонованою матрицею*.

Матриці, що мають однакову кількість рядків і стовпців, можна додавати або віднімати *поелементно*. Добуток матриці $[A_{ij}]$ на скаляр λ дає матрицю $[\lambda A_{ij}]$. Добуток двох матриць $\mathbf{AB}$ визначений тільки в тому випадку, коли кількість стовпців у першому множнику $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків у другому множнику $\mathbf{B}$. Добутком $(M \times P)$ -матриці на $(P \times N)$ -матрицю буде $(M \times N)$ -матриця. Добуток матриць зазвичай записується простим написанням їх символів один за другим, наприклад

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \text{ або } [A_{ij}][B_{jk}] = [C_{ik}]. \quad (1.112)$$

Операція добутку матриць некомутативна – $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається *виродженою*, якщо її детермінант $\det A_{ij}$ дорівнює нулю. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij}^* елемента A_{ij} квадратної матриці $\mathbf{A}$ називається величина

$$A_{ij}^* = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.113)$$

де M_{ij} – мінор елемента A_{ij} , тобто визначник квадратної матриці, що лишилася після викреслювання рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться елемент A_{ij} .

Якщо кожний елемент матриці $\mathbf{A}$ замінити його алгебраїчним доповненням, а потім поміняти місцями рядки і стовпці, то отримана таким чином матриця називається *приєднаною* до матриці $\mathbf{A}$. Для будь-якої матриці $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ існує єдина обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$, яка за визначенням дорівнює приєднаній до $\mathbf{A}$ матриці, розділеній на визначник матриці $\mathbf{A}$, тобто

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{[A_{ij}^*]^T}{\det \mathbf{A}}, \quad (1.114)$$

Із визначення обернена матриці (1.114) витікає, що

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (1.115)$$

де $\mathbf{I}$ – *одинична матриця*, в якій на головній діагоналі стоять одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Одинична матриці також дістала назву *тотожної* матриці завдяки своїм властивостям

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}. \quad (1.116)$$

Цілком зрозуміло, що $\mathbf{I}$ є матричним представленням символів Кронекера δ_{ij} та одиничного діадика $\hat{\mathbf{I}}$. Матриця $\mathbf{A}$, для якої $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, називається *ортогональною*. Для ортогональної матриці $\mathbf{A}$ має місце така рівність

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}. \quad (1.117)$$

Оскільки в тривимірному просторі будь-який тензор другого рангу можна виразити в дев'ятичленній формі (1.53), а його компоненти записати у вигляді квадратної матриці (1.62), дуже корисним є представлення представлення тензорів другого рангу (діадиків) квадратними матрицями третього порядку. Тензор першого рангу (вектор) можна записати або у вигляді рядка, тобто (1×3) -матриці, або у вигляді стовпця (3×1) -матриці. Хоч і кожний декартовий тензор, ранг якого не вищий за двох (діадик, вектор, скаляр) можна представити у вигляді матриці, але не кожна матриця представляє тензор.

Якщо обидві матриці третього рангу в добутку $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ представляють тензори другого рангу в тривимірному просторі, то операція множення матриць еквівалентна внутрішньому добутку тензорів (скалярній згортці) і в індексній формі запису виглядає так

$$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}; \quad (1.118)$$

тут індекси i, j, k приймають значення 1,2,3. Розшифрування формули (1.118) дає правило множення матриць за принципом «рядок на стовпець»: елементи i -го рядку першої матриці множаться почерзі на елементи k -го стовпця другої матриці, ці добутки підсумовуються і дають елемент, що стоїть на перетині i -го рядку та k -го стовпця результуючої матриці. Деяка добутки такого типу, часто зустрічаються в механіці суцільного середовища і наведені нижче для порівняння.

а) Скалярний добуток двох векторів:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \lambda, \quad [a_{1j} \parallel b_{j1}] = [\lambda], \quad (1.119)$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3].$$

б) Скалярний добуток вектора на тензор другого рангу:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{E}} &= \mathbf{b}, \\ a_i E_{ij} &= b_j, \quad [a_i] [E_{ij}] = [b_j], \end{aligned} \quad (1.120)$$

$$[a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31} \\ a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32} \\ a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}$$

б) Скалярний добуток тензора другого рангу на вектор:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{c}, \\ E_{ij} a_i &= c_j, \quad [E_{ij}] [a_{j1}] = [c_{i1}], \end{aligned} \quad (1.121)$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{12} + a_3 E_{13} \\ a_1 E_{21} + a_2 E_{22} + a_3 E_{23} \\ a_1 E_{31} + a_2 E_{32} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}.$$

1.18. Симетрія діадикив, матриць і тензорів

Згідно з (1.36) (або (1.37)), діадик $\hat{\mathbf{D}}$ називається симетричним (або антисиметричним), якщо він дорівнює (або протилежний за знаком) спряженому з ним діадику $\hat{\mathbf{D}}_c$. Подібно цьому тензор другого рангу D_{ij} є симетричним, якщо

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad (1.122)$$

та антисиметричним або кососиметричним, якщо

$$D_{ij} = -D_{ji}. \quad (1.123)$$

Тому аналогічно (1.38) D_{ij} можна розкласти на дві складові

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}), \quad (1.124)$$

або в скороченій формі запису

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ji]}, \quad (1.125)$$

де індексами в круглих дужках позначено симетричну частину D_{ij} , а індексами у квадратних дужках – антисиметричну частину.

Зміна порядку індексів у тензорів другого рангу еквівалентна заміні місцями рядків і стовпців у відповідній йому матриці. Отже, квадратна матриця $\mathbf{A}$ симетрична, якщо вона дорівнює своїй транспонованій матриці $\mathbf{A}^T$. Таким чином, симетрична матриця $\mathbf{A}$ третього порядку має тільки шість незалежних компонент та записується у вигляді

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.126)$$

Антисиметрична матриця дорівнює своїй транспозиції з від'ємним знаком. Тому антисиметрична матриця $\mathbf{B}$ третього порядку має нулі на головній діагоналі і, відповідно, містить тільки три незалежні компоненти

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.127)$$

Властивості симетрії можна розповсюдити на тензори більш високого рангу (більшого за другий). У загальному випадку довільний тензор називається симетричним відносно пари індексів, якщо значення кожної його компоненти не змінюється у разі обміну місцями цих індексів. Тензор антисиметричний за парою індексів, якщо заміна їх один на другий веде до зміни знака, але не абсолютної величини компоненти. Наведемо приклади властивостей симетрії тензорів більш високого рангу:

- | | |
|--|--|
| а) $R_{ijkm} = R_{ikjm}$, | (симетричний за k і j); |
| б) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$, | (антисиметричний за k і i); |
| в) $G_{ijkm} = G_{jikm} = G_{ijmk} = G_{jimk}$, | (симетричний за i і j , k і m); |
| г) $\beta_{ijk} = \beta_{ikj} = \beta_{kji} = \beta_{jik}$, | (симетричний за всіма індексами). |

1.19. Головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу

У подальшому будуть розглядатися виключно симетричні тензори з дійсними компонентами. Це дещо простіше в математичному сенсі, а оскільки симетричні тензори є важливими для механіки суцільного середовища, то від такого спрощення майже нічого не втрачається.

Для кожного симетричного тензора T_{ij} , заданого в деякій точці простору, і для кожного напрямку в цій точці (який характеризується одиничним вектором n_i) існує вектор, що визначається внутрішнім (скалярним) добутком

$$v_i = T_{ij}n_j. \quad (1.128)$$

Тут T_{ij} можна розглядати як лінійний векторний оператор, який ставить у відповідність напрямку n_i вектор v_i . Якщо напрям такий, що вектор v_i паралельний n_i , то вказаний внутрішній добуток виражається скаляром, помноженим на n_i . Для цього випадку справедлива рівність

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i. \quad (1.129)$$

і напрямки n_i називаються *головним напрямком* або *головною віссю* тензора T_{ij} . За допомогою тотожності $n_i = \delta_{ij}n_j$ співвідношення (1.29) можна перетворити до вигляду

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0, \quad (1.130)$$

яке представляє систему трьох рівнянь для чотирьох невідомих n_i і λ , що відповідають кожному головному напрямку. У розгорнутому вигляді система рівнянь, яку необхідно розв'язати, має вигляд

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 = 0. \end{cases} \quad (1.131)$$

Перш за все відмітимо, що за будь-якого λ існує тривіальний розв'язок $n_i = 0$, однак нашою метою є отримання нетривіального розв'язку. Крім того, внаслідок однорідності системи рівнянь (1.131), не втрачаючи спільності,

можна обмежитися тільки розв'язками, для яких $n_i n_i = 1$. Починаючи з цього моменту будемо вимагати, щоб ця умова виконувалася.

Для того щоб система рівнянь (1.30), або, що те ж саме, система рівнянь (1.131), мала нетривіальні розв'язки, її визначник із коефіцієнтів повинен бути рівним нулю, тобто

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (1.132)$$

У розгорнутому вигляді це кубічне рівняння відносно λ має вигляд

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + \Pi_T \lambda - \Pi_T = 0, \quad (1.133)$$

яке називається *характеристичним рівнянням* тензора T_{ij} , а його скалярні коефіцієнти дорівнюють

$$I_T = T_{ii} = \text{tr}(T_{ij}), \quad (1.134)$$

де $\text{tr}(T_{ij})$ – слід тензора T_{ij} ,

$$\Pi_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}), \quad (1.135)$$

$$\Pi_T = |T_{ij}| = \det T_{ij}, \quad (1.136)$$

називаються відповідно, першим, другим і третім *інваріантами* тензора T_{ij} .

Три корені кубічного рівняння (1.133), позначені як $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$, називаються головними значеннями тензора T_{ij} . У симетричного тензора з дійсними компонентами головні значення теж дійсні. Якщо вони різні, то три головних напрямки ортогональні. У головних осях матриця із компонент тензора зводиться до діагональної форми

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Якщо $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$, то діагональний вигляд тензора не залежить від вибору осей, що відповідають $\lambda_{(1)}$ і $\lambda_{(2)}$, і треба встановити тільки головну вісь, яка відповідає $\lambda_{(3)}$. Якщо всі головні значення рівні між собою, то будь-який напрямок є головним. Якщо головні значення упорядковані, то прийнято позначати їх через $\lambda_{(I)}, \lambda_{(II)}, \lambda_{(III)}$ і розташовувати їх у порядку спадання: $\lambda_{(I)} > \lambda_{(II)} > \lambda_{(III)}$.

Перетворення від системи координат $Ox_1x_2x_3$ до системи головних осей $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ дається елементами таблиці

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$c_{11} = n_1^{(1)}$	$c_{12} = n_2^{(1)}$	$c_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$c_{21} = n_1^{(2)}$	$c_{22} = n_2^{(2)}$	$c_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$c_{31} = n_1^{(3)}$	$c_{32} = n_2^{(3)}$	$c_{33} = n_3^{(3)}$

де $n_i^{(j)}$ – напрямні косинуси j -го головного напрямку.

1.20. Ступені тензорів другого рангу. Співвідношення Гамільтона-Келі

Безпосереднім матричним множенням квадрат тензора T_{ij} отримується як внутрішній добуток $T_{ik}T_{kj}$, а куб – як добуток $T_{ik}T_{km}T_{mj}$ і т.д. Таким чином, якщо T_{ij} представлений в діагональній формі (1.137), то n -ступінь цього тензора (і відповідної йому матриці) дається формулою

$$(\hat{\mathbf{T}})^n = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{pmatrix} \text{ або } \hat{\Gamma}^n = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{bmatrix}. \quad (1.138)$$

Порівняння (1.138) і (1.137) показує, що тензор T_{ij} та всі його цілі ступені мають одні й ті ж головні осі.

Усі головні значення задовольняють рівнянню (1.133), а матриця має діагональний вигляд (1.138), тому сам тензор $\hat{\mathbf{T}}$ буде задовольняти рівнянню (1.133). Таким чином,

$$\hat{\Gamma}^3 - I_T \hat{\Gamma}^2 + \Pi_T \hat{\Gamma} - \Pi_T \hat{\Gamma} = 0, \quad (1.139)$$

де $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу або одинична матриця.

Це співвідношення називається *співвідношенням Гамільтона-Келі*. Домножимо кожний член (1.139) на $\hat{\Gamma}$ за правилом перемноження матриць і прийдемо до рівняння

$$\hat{\Gamma}^4 = I_T \hat{\Gamma}^3 - \Pi_T \hat{\Gamma}^2 + \Pi_T \hat{\Gamma} = 0. \quad (1.140)$$

Виключаючи $\hat{\Gamma}^3$ із (1.140) і (1.139), будемо мати

$$\hat{\Gamma}^4 = (I_T^2 - \Pi_T) \hat{\Gamma}^2 + (\Pi_T - I_T \Pi_T) \hat{\Gamma} + I_T \Pi_T \hat{\Gamma} = 0. \quad (1.141)$$

Продовжуючи цю процедуру, можна отримати всі цілі додатні ступені $\hat{\Gamma}$ у вигляді лінійних комбінацій $\hat{\Gamma}^2, \hat{\Gamma}$ і $\hat{\mathbf{I}}$.

1.21. Тензорні поля. Диференціювання тензорів

Тензорне поле ставить у відповідність кожній точці простору і кожному моменту часу $(\mathbf{x}, t)$ тензор $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ (тут під тензором розуміють тензор будь-якого рангу, включаючи скаляр), де радіус-вектор $\mathbf{x}$ змінюється в заданій області простору, а t – у заданому інтервалі часу. Тензорне поле називається *неперервним* (або *диференційованим*), якщо компоненти $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ є неперервними (або диференційованими) за функціями $\mathbf{x}$ і t . Якщо компоненти тензора залежать тільки від $\mathbf{x}$, то тензорне поле називається *стаціонарним*.

В ортогональній декартовій системі координат, де радіус-вектор будь-якої точки має вигляд

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad (1.142)$$

поля тензорів різного рангу можна записати в індексних і символьних позначеннях, наприклад:

$$\text{а) скалярне поле } \varphi = \varphi(x_i, t) \text{ або } \varphi = \varphi(\mathbf{x}, t); \quad (1.143)$$

$$\text{б) векторне поле } v_i = v_i(x_i, t) \text{ або } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t); \quad (1.144)$$

$$\text{в) поле тензора другого рангу } T_{ij} = T_{ij}(x_i, t) \text{ або } \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.145)$$

Диференціювання компонент тензора за координатою x_i позначається диференціальним оператором $\frac{\partial}{\partial x_i}$ або скорочено в індексній формі запису ∂_i , що вказує на те, що це тензорний оператор першого рангу. У символічних позначеннях для запису цієї операції використовується символ ∇ (набла) або оператор Гамільтона, який записується у вигляді

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i. \quad (1.146)$$

Частинне диференціювання за змінною x_i іноді зображають нижнім індексом після коми, як показано в наступних прикладах:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}; \quad \text{г) } \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}; \\ \text{б) } \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \text{д) } \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}; \\ \text{в) } \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \text{е) } \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km}. \end{aligned}$$

Ці приклади показують, що під час диференціювання оператор ∂_i призводить до тензору на один порядок вищого за вихідний, якщо i лишається вільним індексом (випадки «а» і «в»), і до тензору на один порядок нижчого за вихідний, якщо i становиться німим індексом підсумовування (випадок «б»).

Наведемо деякі важливі диференціальні оператори, що використовуються в механіці континуума:

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \text{ або } \partial_i \varphi = \varphi_{,i}; \quad (1.147)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \text{ або } \partial_i v_i = v_{i,i}; \quad (1.148)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \text{ або } \varepsilon_{ijk} \partial_j v_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}; \quad (1.149)$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi, \text{ або } \partial_{ii} \varphi = \varphi_{,ii}, \quad (1.150)$$

де Δ – оператор Лапласа.

У наведених диференціальних операторах оператор ∇ у залежності від типу добутка може бути як градієнтом)¹, так і дивергенцією)² і ротором)³.

1.22. Криволінійні інтеграли. Теорема Стокса

Нехай в даній області простору в кожній точці кусково-гладкої кривої C , що зображена на рис. 1.11, визначено векторну функцію $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Якщо $d\mathbf{x}$ – елементарний вектор дотичної до кривої в довільній точці P , то інтеграл

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \equiv \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.151)$$

взятий вздовж кривої від A до B , називають *криволінійним інтегралом* від функції $\mathbf{F}$ за контуром C . У індексних позначеннях інтеграл (1.151) має вигляд

$$\int_C F_i dx_i \equiv \int_{(x_i)_A}^{(x_i)_B} F_i dx_i. \quad (1.152)$$

¹ З математичної точки зору градієнт — це похідна скалярної функції, що визначена на векторному просторі, або *градієнтом* скалярної величини U називають вектор в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні в сторону збільшення U і чисельно рівний похідній від U за цим напрямком. В декартовій системі координат градієнт скалярної величини U записується як $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x^3} \mathbf{e}_3$;

в циліндричній – $\text{grad}U(r, \theta, z) = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$;

у сферичній – $\text{grad}U(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$.

З фізичної точки зору *градієнт*, наприклад, напруженість електростатичного поля є мінус градієнт електричного потенціалу, напруженість гравітаційного поля (прискорення вільного падіння) в класичній теорії гравітації є мінус градієнт гравітаційного потенціалу. Консервативна сила в класичній механіці є мінус градієнт потенціальної енергії.

² Дивергенція (від лат. *divergence* — виявляти розходження) — з математичної точки зору диференціальний оператор, який відображає векторне поле на скалярне (тобто операція диференціювання, в результаті застосування якої до векторного поля отримують скалярне поле), і який визначає (для кожної точки простору), «наскільки розходяться вхідні і вихідні потоки з малого околу даної точки поля». З точки зору фізики дивергенція векторного поля є показником того, в якому ступені дана точка простору (точніше достатньо малий окіл точки) є джерелом або стоком цього поля: $\text{div} \mathbf{F} > 0$ — точка поля є джерелом; $\text{div} \mathbf{F} < 0$ — точка поля є стоком; $\text{div} \mathbf{F} = 0$ — стік і джерело відсутні або компенсуються один одним.

³ Ротор або вихор це векторний диференціальний оператор над векторним полем, результатом застосування якого є нове векторне поле. Ротор вказує наскільки і в якому напрямку закручене поле в кожній точці середовища.

Теорема Стокса стверджує, що криволінійний інтеграл від функції $\mathbf{F}$ вздовж замкнутої кривої C , що стягується в точку (рис. 1.12), можна представити у вигляді інтеграла по будь-якій двосторонній поверхні S , границею якої слугує контур C , тобто

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dS, \quad (1.153)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні S (для визначення $\mathbf{n}$ обхід контура C виконується за правилом правого гвинта); dS – елемент поверхні.

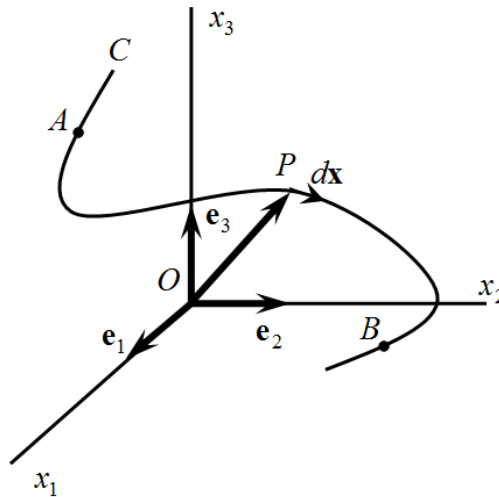


Рис. 1.11. Кусково-гладка крива C у декартовій системі координат

Формулу (1.153) можна записати і в індексних позначеннях

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS. \quad (1.154)$$

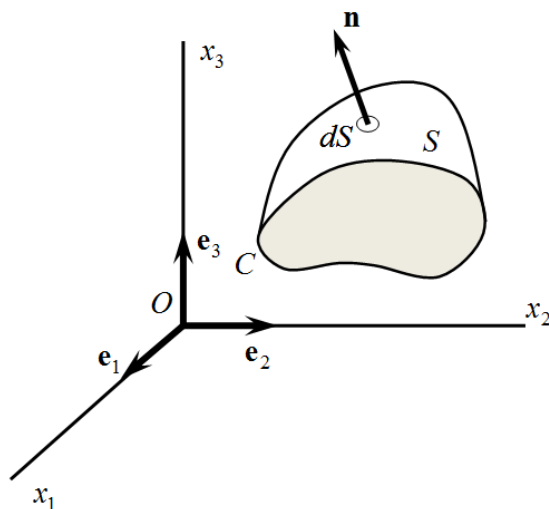


Рис. 1.12. До теореми Стокса

1.23. Теорема Гауса-Остроградського

Теорема Гауса-Остроградського (теорема про дивергенцію) дає перетворення інтеграла за об'ємом в інтеграл по поверхні. У звичайному формулюванні теорема стверджує, що для векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (1.155)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S , що обмежує об'єм V , всередині якого визначено векторне поле $\mathbf{v}$.

В індексній формі формула (1.155) приймає вигляд

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i n_i dS. \quad (1.156)$$

Теорема Гауса-Остроградського в формі (1.156) може бути узагальнена на поля тензорів будь-якого рангу. Так, для довільного тензорного поля $T_{ijk\dots}$ теорема стверджує, що

$$\int_V T_{ijk\dots,p} dV = \int_S T_{ijk\dots} n_p dS. \quad (1.157)$$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке тензор, декартові тензори, ранг і порядок тензорів?
2. Що розуміється під інваріантністю тензорних співвідношень?
3. Дайте визначення вектора і скаляря.
4. Як здійснюється векторне додавання, множення вектора на скаляр?
5. Дайте визначення одиничного вектора.
6. Наведіть формули скалярного, векторного і змішаного добутків векторів.
7. Що таке діади і діадика, одиничний діадик?
8. Наведіть формули для подвійного скалярного, змішаного та подвійного векторного добутків діад.
9. Дайте визначення симетричного і антисиметричного діадиків.
10. Наведіть приклади систем координат. Дайте визначення базисних векторів. Що позуміють під тріедром одиничних векторів?
11. Що таке ортонормований базис?
12. Наведіть приклади криволінійних систем координат. Чим вони

відрізняються від декартової системи координат?

13. Що таке лінійні векторні функції? Запишіть діадик через лінійні векторні оператори.

14. Що розуміють під індексними позначеннями? Що таке інтервал зміни індексів й погодження про підсумовування?

15. Сформулюйте правила погодження про підсумовування у символічних позначеннях.

16. У чому полягає перетворення координат? Дайте загальне поняття тензора.

17. Наведіть формули для перетворення координат.

18. В чому полягає різниця між коваріантними й контраваріантними тензорами?

19. Дайте визначення метричного тензора.

20. Сформулюйте закони перетворення декартових тензорів. Що таке дельта Кронекера? Наведіть умови ортогональності.

21. Наведіть приклади додавання декартових тензорів, множення тензора на скаляр.

22. Наведіть приклад добутка тензорів.

23. В чому полягає скалярна і векторна згортка тензорів?

24. Що таке векторний добуток, Тензор Леві-Чивіти, бівектор?

25. Що таке матриця? В чому полягає матричне представлення декартових тензорів?

26. Чим визначається симетрія діадики, матриць і тензорів?

27. Що таке головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу? Напишіть характеристичне рівняння тензора.

28. Охарактеризуйте ступені тензорів другого рангу. Запишіть співвідношення Гамільтона-Келі.

29. Опишіть тензорні поля. Дайте визначення оператора Гамільтона. Наведіть приклади диференціювання тензорів.

30. Опишіть кривопінійні інтеграли. Сформулюйте теорему Стокса.

31. Сформулюйте теорему Гауса-Остроградського.

2. НАПРУЖЕНИЙ СТАН

2.1. Поняття суцільного середовища

Незважаючи на те, що молекулярна природа будови матерії є точно встановлений науковий факт, в багатьох дослідженнях поведінки матеріалів важливим є не поведінка їх окремих молекул, а лише середовища як цілого. У цих випадках для пояснення феноменів макроскопічних процесів не враховують молекулярну структуру речовини, а припускають, що вона неперервно розподілена по всьому займаному їй об'єму і повністю заповнює цей об'єм. Така концепція *суцільності* речовини є основним постулатом механіки суцільного середовища (континууму). У межах обмежень, за яких гіпотеза суцільності справедлива, ця концепція забезпечує основу для єдиного вивчення поведінки твердих тіл, рідин та газів (Додаток А).

Прийняття гіпотези суцільності як основи для математичного описання поведінки матеріалів означає, що поля величин, таких, як напруження, переміщення, деформації та інші, виражаються кусково-неперервними функціями координат і часу. Тобто, це дає змогу під час дослідження руху деформованих середовищ використовувати добре вивчений та апробований апарат неперервних функцій, диференціальне та інтегральне числення.

2.2. Однорідність. Ізотропність. Густина

Однорідним називається середовище, що має однакові властивості у всіх точках займаного ним об'єму. Середовище (матеріал) буде *ізотропним* по відношенню до деякої властивості, якщо ця властивість у точці виявляється однаковою за всіма напрямками. Матеріал є *анізотропним* по відношенню до тих властивостей, які залежать від напрямку в будь-якій його точці.

Поняття *густини* вводиться для околу точки суцільного середовища як *відношення маси до об'єму*. Позначимо масу малого елемента об'єму ΔV (рис. 2.1) через ΔM . Середня густина матеріалу всередині ΔV дорівнює

$$\rho_{\text{cp}} = \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (2.1)$$

Густина в деякій точці P елемента об'єму ΔV (див. рис. 2.1) згідно з поняттям суцільності середовища задається границею

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}. \quad (2.2)$$

Масова густина ρ є скалярною величиною.

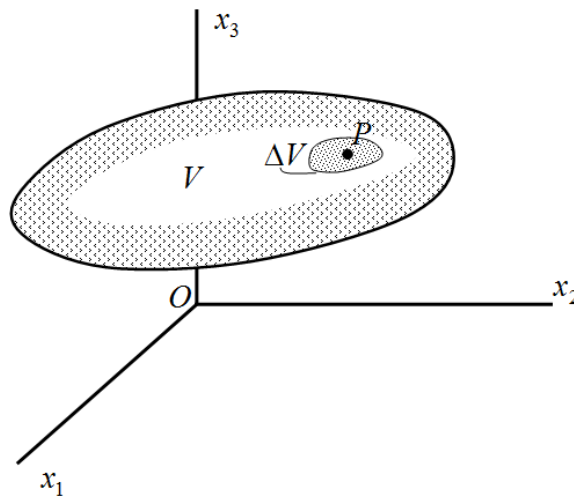


Рис. 2.1. До введення поняття густини середовища

2.3. Масові сили. Поверхневі сили

Сила – це векторна величина, яку інтуїтивно можна представити такими поняттями як тиск або зусилля. Ті сили, які діють на всі елементи об’єму суцільного середовища, називаються *масовими силами*. Прикладом таких сил можуть слугувати сили гравітації та інерції. Ці сили позначаються через $\mathbf{b} = b_i$ (сила, що віднесена до одиниці маси) або $\mathbf{p} = p_i$ (сила, що віднесена до одиниці об’єму). Між собою вони зв’язані співвідношенням, що включає густину

$$\rho b_i = p_i \text{ або } \rho \mathbf{b} = \mathbf{p}. \quad (2.3)$$

Ті сили, що діють на елемент поверхні середовища, граничної або внутрішньої, називаються *поверхневими силами*. Вони позначаються через $\mathbf{f} = f_i$ (сила, що віднесена до одиниці площі). Сили контактної взаємодії між тілами теж відносяться до типу поверхневих сил.

2.4. Принцип напруження Коші. Вектор напруження

На рис. 2.2 зображено область простору R , що зайнята матеріальним континуумом, на якій діють поверхневі f_i та масові b_i сили. Із-за того, що дія сили передається від однієї частини середовища іншій, матеріал всередині довільного об’єму V , обмеженого поверхнею S , взаємодіє з матеріалом поза цим об’ємом. Візьмемо n_i в якості одиничного вектора зовнішньої нормалі в точці P до малої площадки ΔS поверхні S об’єму V і позначимо через Δf_i результуючу силу, що діє через площадку ΔS на матеріал всередині V зі сторони зовнішнього середовища. Очевидно, що елементарна сила Δf_i

залежить від вибору ΔS та від n_i . Слід також відмітити, що розподіл сили на ΔS не обов'язково є однорідним. Насправді, у загальному випадку цей розподіл еквівалентний силі та моменту сили, що прикладені в точці P і показані на рис. 2.2 векторами Δf_i і ΔM_i , відповідно.

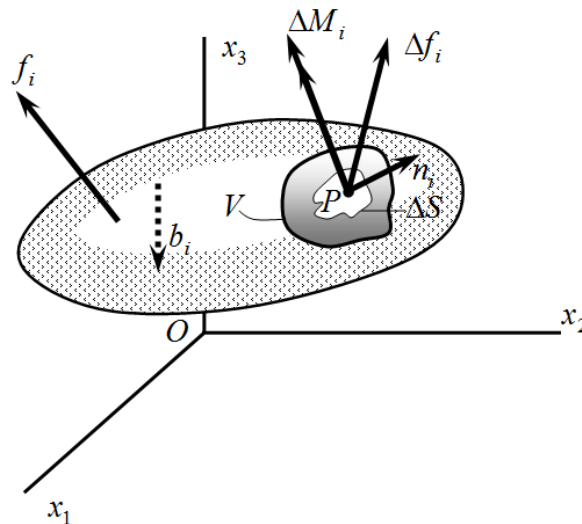


Рис. 2.2. Поверхневі f_i та масові b_i сили, що діють на матеріальний континуум

Середня сила, що віднесена до площі площадки ΔS , задається величиною $\Delta f_i / \Delta S$. *Принцип напруження Коші* стверджує, що відношення $\Delta f_i / \Delta S$ прямує до певної границі df_i / dS , коли ΔS стягується в точку P , в той час як момент сили ΔM_i відносно точки P прямує до нуля. Результируючий вектор df_i / dS називається вектором напруження $t_i^{(n)}$ (рис. 2.3). Якщо б момент у точці P за умови граничного переходу не обертався у нуль, то в цій точці був би також визначений вектор моменту (пари) напруження, зображений на рис. 2.3 стрілкою з подвійним вістря. Один зі спеціальних розділів механіки теорії пружності вивчає такі поверхневі пари, але в даній дисципліні вони не будуть розглядатися.

Вектор напруження визначається таким чином

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS}. \quad (2.4)$$

Позначення $t_i^{(n)}$ або $\mathbf{t}^{(n)}$ використовуються для того, щоб підкреслити той факт, що вектор напруження в даній точці P суцільного середовища, очевидно, залежить від орієнтації обраного елемента поверхні ΔS , яка задається одиничним вектором нормалі n_i або $\mathbf{n}$. Якщо взяти будь-який інакше

орієнтований елемент поверхні з іншою одиничною нормаллю, то зв'язаний з ним вектор напруження в точці P може також бути іншим.

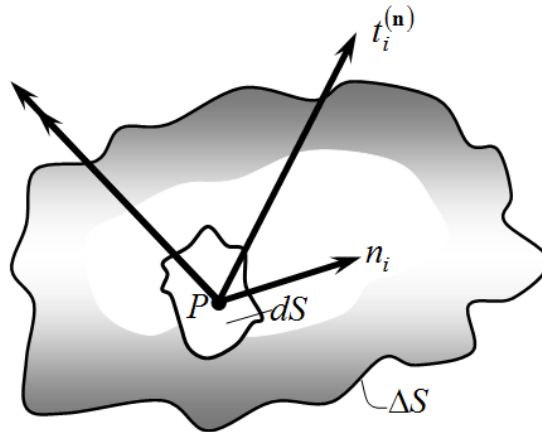


Рис. 2.3. До визначення вектора напруження

Вектор напруження, що виражає дію через площадку ΔS в точці P середовища, що розташовано всередині V , на зовнішнє середовище, є вектор $-t_i^{(n)}$. Тоді за законом Ньютона про рівність дії і протидії (третій закон Ньютона)

$$-t_i^{(n)} = t_i^{(-n)} \text{ або } -\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(-n)}. \quad (2.5)$$

Вектор напруження іноді називають *вектором натягнення*.

2.5. Напружений стан в точці. Тензор напруження

Принцип напруження Коші ставить у відповідність у довільній точці P суцільного середовища кожному одиничному вектору нормалі n_i , який визначає орієнтацію нескінченно малого елемента поверхні, що містить точку P , вектор напруження $t_i^{(n)}$ (див. рис. 2.3). Сукупність всіх можливих пар таких векторів $t_i^{(n)}$ і n_i в точці P визначає *напружений стан* в цій точці. Для того, щоб повністю описати напружений в даній точці, немає необхідності вказувати всі пари можливих векторів напруження і нормалі. Це можна зробити, задаючи вектори напруження на трьох взаємно перпендикулярних площадках в точці P .

Для визначення напруженого стану в точці виберемо площини, які перпендикулярні осям координат, і будемо позначати вектори нормалі і напруження так, як це показано на рис. 2.4.

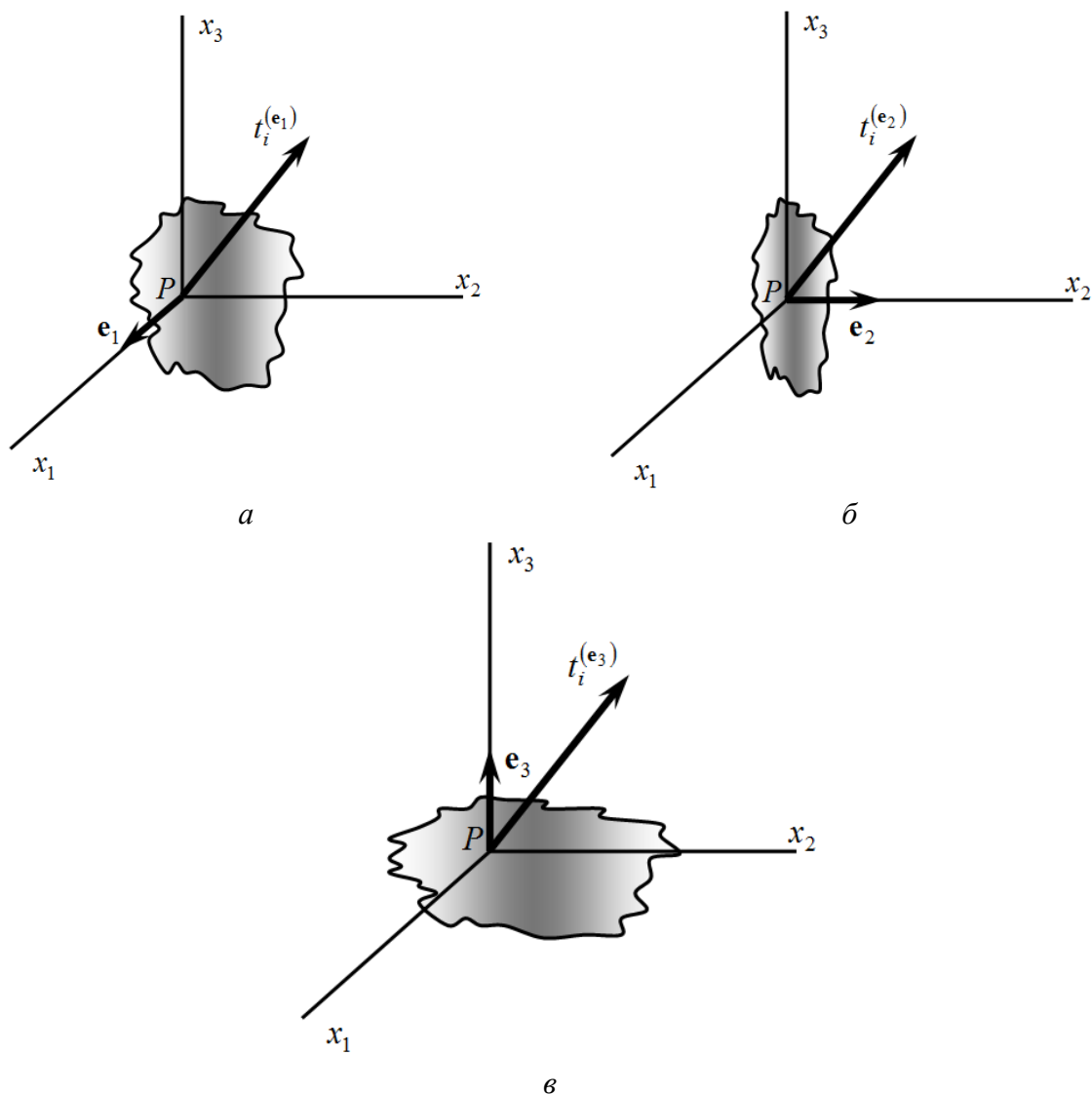


Рис. 2.4. До визначення напруженого стану в точці суцільного середовища

Для зручності три окремі схеми (див. рис. 2.4) замінюють одним схематичним зображенням, приведеним на рис. 2.5.

Кожний з трьох векторів напруження на площадках, паралельних координатним площинам, згідно (1.69), можна виразити через декартові компоненти:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} &= t_1^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_j, \\
 \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} &= t_1^{(\mathbf{e}_2)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_2)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_2)} \mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_2)} \mathbf{e}_j, \\
 \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3)} &= t_1^{(\mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_j.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

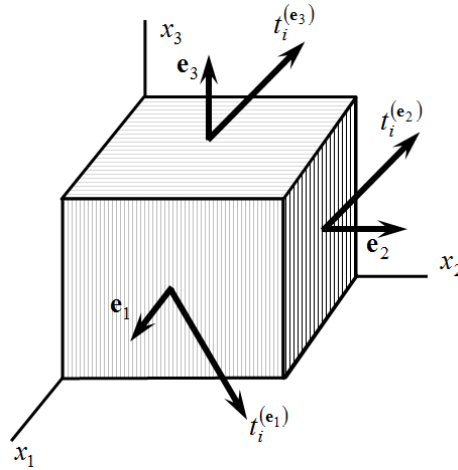


Рис. 2.5. До визначення напруженого стану в точці суцільного середовища

Дев'ять компонент векторів напруження

$$t_j^{(e_i)} \equiv \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

є компонентами декартового тензора другого рангу, який називається *тензором напруження*.

Цей тензор напруження також можна записати в символічній формі $\hat{\sigma}$, так що розгорнуте його представлення (покомпонентне і матричне) будуть мати такий вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ або } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Напруження, що визначаються компонентами тензора напруження в декартовій системі координат, і координатні площини зображені на рис. 2.6. Компоненти $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, що відповідають перпендикулярним до вказаних площин силам, називаються *нормальними напруженнями*. Компоненти $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$, що діють у дотичних площинах, називаються *дотичними напруженнями* або *напруженнями зсуву*.

Компонента напруження вважається позитивною, якщо на площині, зовнішня нормаль до якої збігається з додатнім напрямком одної з вісей координат, сила діє вздовж позитивного напрямку цієї вісі. Компонента тензора σ_{ij} задає силу, що діє у напрямку j -ї осі координат на площадку із зовнішньою нормаллю, яка паралельна i -й осі координат.

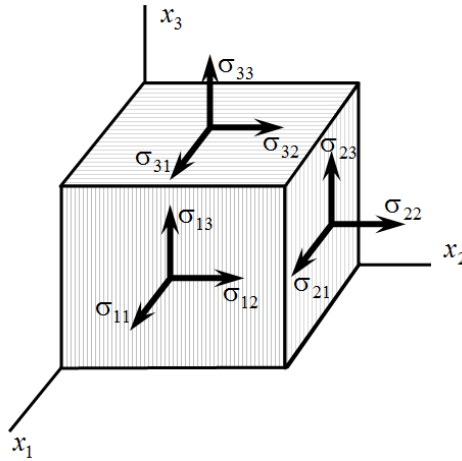


Рис. 2.6. Компоненти тензора напруження в декартовій системі координат

Всі компоненти напруження, які зображені на рис. 2.6, є позитивними.

2.6. Зв'язок між тензором напруження і вектором напруження

Зв'язок між тензором напруження σ_{ij} в точці P і вектором напруження $t_i^{(n)}$ на довільно орієнтованій площадці в тій же точці можна встановити із умови рівноваги сил, або рівняння кількості руху елементарного матеріального тетраедра з вершиною в точці P . Візьмемо основу тетраедра ABC перпендикулярну до n_i , а три бічні грані перпендикулярними до осей координат, як це показано на рис. 2.7. Нехай dS – площа основи ABC , тоді площі бічних граней як площі проєкцій основи на координатні площини будуть дорівнювати $dS_1 = dS n_1$ для грані CPB , $dS_2 = dS n_2$ для грані APC і $dS_3 = dS n_3$ для грані BPA , або

$$dS_i = dS(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) = dS \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) = dS n_i. \quad (2.9)$$

На рис. 2.7 показано вектори середніх значень напружень – $t_i^{*(e_j)}$ на бічних гранях і $t_i^{*(n)}$ на основі, а також середньої масової сили b_i^* , що діють на тетраедр. Для рівноваги тетраедра під дією сил необхідно щоб виконувалася рівність

$$t_i^{*(n)} dS - t_i^{*(e_1)} dS_1 - t_i^{*(e_2)} dS_2 - t_i^{*(e_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0, \quad (2.10)$$

де dV – об'єм тетраедра.

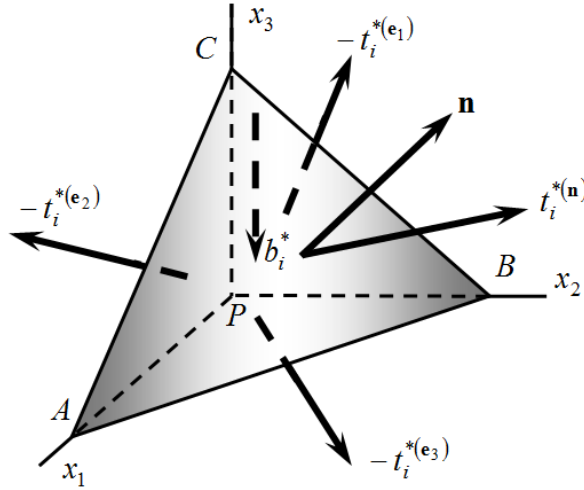


Рис. 2.7. До встановлення зв'язку між тензором напруження σ_{ij} в точці P і вектором напруження $t_i^{(n)}$

Якщо тепер лінійні розміри тетраедра будуть пропорційно зменшуватися, то масові сили, малість яких на порядок вища за поверхневі сили, будуть прямувати до нуля швидше ніж поверхневі сили. В той же час вектори середніх напружень прямують до характерних значень, які властиві вказаним напрямкам у точці P . Тобто масові сили в (2.10) можна знехтувати. Таким граничним переходом з врахуванням (2.9) рівність (2.10) прийде до вигляду

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(e_1)} n_1 dS + t_i^{(e_2)} n_2 dS + t_i^{(e_3)} n_3 dS = t_i^{(e_j)} n_j dS. \quad (2.11)$$

Після скорочення на спільний множник dS і використання тотожності $t_j^{(e_i)} \equiv \sigma_{ij}$ співвідношення (2.11) набуває вигляду

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j, \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.12)$$

Співвідношення (2.12) можна також представити в матричній формі

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

яку можна розгорнути до вигляду

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрична рівність (2.14) є еквівалентною до рівняння в компонентах

$$\begin{aligned} t_1^{(n)} &= n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}, \\ t_2^{(n)} &= n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}, \\ t_3^{(n)} &= n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.7. Рівновага сил і моментів. Симетрія тензора напруження

Для рівноваги довільного об'єму V суцільного середовища під дією системи поверхневих сил $t_i^{(n)}$ і масових сил b_i (включаючи інерційні), що показано на рис. 2.8, треба, щоб результуючі сила та момент, які діють на цей об'єм, були рівними нулю.

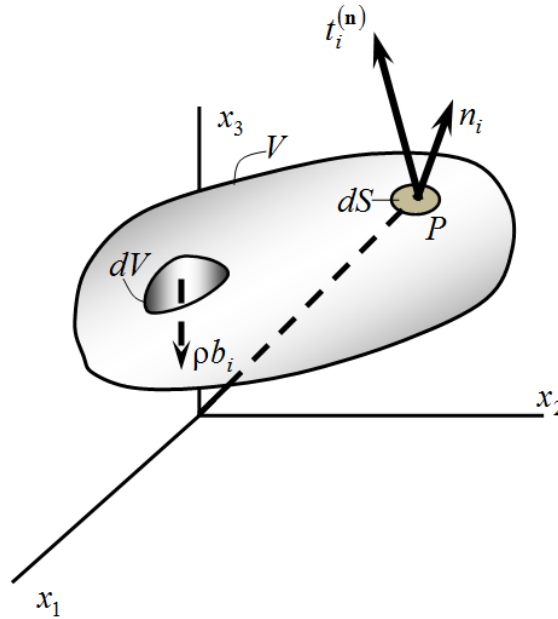


Рис. 2.8. Рівновага поверхневих і масових сил

Підсумовування поверхневих і масових сил призводить до інтегрального співвідношення

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad \text{або} \quad \int_S \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (2.16)$$

Замінюючи тут $t_i^{(n)}$ на $\sigma_{ji}n_j$ (2.12) і переходячи від інтегралу по поверхні до інтегралу по об'єму за допомогою теореми Гауса-Остроградського (1.157), рівняння (2.16) зводиться до вигляду

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0 \text{ або } \int_V (\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b}) dV = 0. \quad (2.17)$$

Оскільки об'єм V довільним, підінтегральний вираз у формулі (2.17) повинен обернутися в нуль, так що можна записати

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (2.18)$$

Отримані рівняння (2.18) називаються *рівняннями рівноваги*.

За умови відсутності розподілених моментів (поверхневих і масових пар) для рівноваги моментів відносно початку відліку потребується, щоб

$$\begin{aligned} \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= 0 \\ \text{або } \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)}) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де x_j – радіус-вектор елемента поверхні або об'єму.

Знову, використавши підстановку $t_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$ і застосовуючи теорему Гауса-Остроградського та (2.18), після об'єднання інтегралів в (2.19), приходимо до рівняння

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \text{ або } \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v dV = 0. \quad (2.20)$$

Завдяки довільності об'єму V із (2.20) витікає, що

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v = 0. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) містить у собі рівності $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ або

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.22)$$

що свідчить про те, що *тензор напруження симетричний*.

Враховуючи (2.22), рівняння рівноваги (2.18) можна переписати у вигляді

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0, \quad (2.23)$$

що в розгорнутому вигляді дає:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.8. Закони перетворення тензора напруження

Нехай у точці P дві ортогональні декартові системи координат $Px_1x_2x_3$ і $Px'_1x'_2x'_3$ (рис. 2.9) зв'язані одна з другою таблицею напрямних косинусів (див. п. 1.13)

	x_1	x_2	x_3
x'_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
x'_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
x'_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

або, що еквівалентно, матрицею перетворення $[c_{ij}]$ або тензором перетворення координат

$$\hat{\mathbf{C}} = c_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (2.25)$$

Згідно з правилом (1.93) перетворення декартових тензорів першого рангу, компоненти вектора напруження $t_i^{(n)}$, віднесені до осей системи координат без штрихів, зв'язані з компонентами $t_i'^{(n)}$ в системі координат зі штрихами формулою

$$t_i'^{(n)} = c_{ij} t_j^{(n)} \quad \text{або} \quad \mathbf{t}'^{(n)} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{t}^{(n)}. \quad (2.26)$$

Подібним чином за правилом перетворення (1.102) для декартових тензорів другого рангу компоненти тензора напруження в двох системах координат пов'язані таким співвідношенням

$$\sigma'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}, \text{ або } \hat{\sigma}' = \hat{C} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{C}_c, \text{ або } \hat{\sigma}' = \hat{C} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{C}^T. \quad (2.27)$$

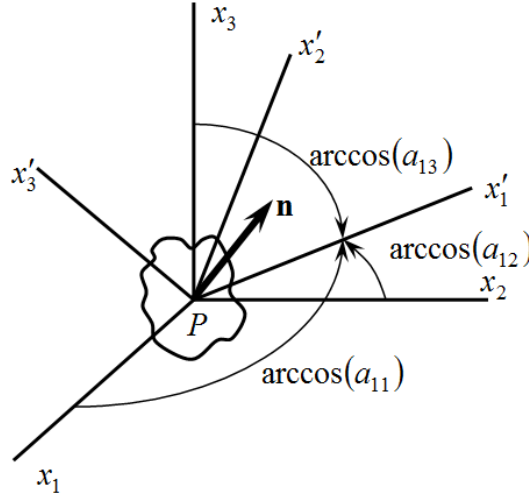


Рис. 2.9. Перетворення декартових тензорів

В матричній формі перетворення вектора напруження записується у вигляді

$$[t'^{(n)}] = [c_{ij}] [t^{(n)}], \quad (2.28)$$

а перетворення тензора напруження – у вигляді

$$[\sigma'_{ij}] = [c_{ip}] [\sigma_{pq}] [c_{qj}]. \quad (2.29)$$

У розгорнутому вигляді запис добутків матриць формул (2.28) і (2.29) відповідно виглядають так:

$$\begin{bmatrix} t'_1{}^{(n)} \\ t'_2{}^{(n)} \\ t'_3{}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1{}^{(n)} \\ t_2{}^{(n)} \\ t_3{}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

2.9. Поверхні напруження Коші

Нехай у точці P суцільного середовища тензор напруження має компоненти σ_{ij} , що віднесені до напрямків, паралельних місцевим декартовим осям $P\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ (рис. 2.10).

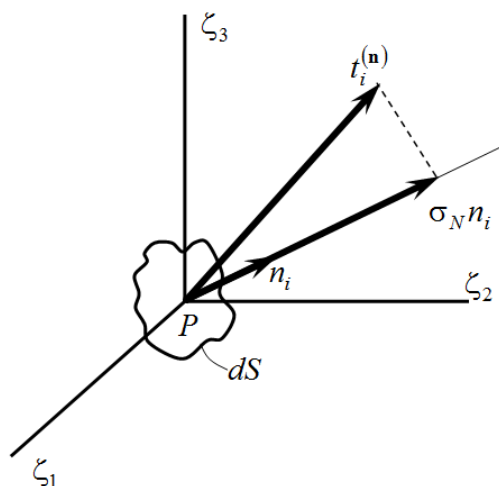


Рис. 2.10. До визначення поверхонь напруження Коші

Рівняння вигляду

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm k^2 \quad (k - \text{стала}) \quad (2.32)$$

представляє геометрично подібні поверхні другого порядку (квадрики), що мають спільний центр у точці P . Вибір знаку плюс або мінус забезпечує те, що поверхні будуть дійсними.

Розглянемо вектор напруження $t_i^{(n)}$ на площадці з одиничною нормаллю n_i . Радіус-вектор $\mathbf{r}$, що має напрям $\mathbf{n}$ до довільної точки поверхні (2.32), мають компоненти $\zeta_i = |\mathbf{r}|n_i = rn_i$. У точці P нормальна складова $\sigma_N n_i$ вектора напруження $t_i^{(n)}$ має величину

$$\sigma_N = t_i^{(n)}n_i = \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij}n_in_j. \quad (2.33)$$

Геометричне місце точок $\sigma_N r^2 = \text{const} = \pm k^2$, тобто поверхня

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \sigma_N r^2 = \pm k^2 \quad (2.34)$$

називається *поверхнею напруження Коші* (або *квадрикою Коші*). Із цього визначення витікає, що величина σ_N є нормальною компонентою напруження на площадці dS , яка перпендикулярна радіусу-вектору $\mathbf{r}$ в точці P , і обернено пропорційна квадрату відстані вздовж $\mathbf{r}$ від точки P до поверхні напруження Коші, тобто $\sigma_N = \pm k^2/r^2$. Крім того, можна показати, що вектор напруження $t_i^{(n)}$, що діє на такій площадці dS , паралельний нормалі до площини, яка є дотичною до поверхні напруження Коші в точці, радіус-вектор якої є $\mathbf{r}$.

2.10. Головні напруження. Інваріанти тензора напруження. Еліпсоїд напружень

У точці P , де компоненти тензора напруження дорівнюють σ_{ij} , співвідношення (2.12) $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ ставить у відповідність кожному напрямку n_i вектор напруження $t_i^{(n)}$. Напрямки, для яких $t_i^{(n)}$ і n_i колінеарні (паралельні, рис. 2.11), називаються *головними напрямками* (або *головними осями*) тензора напруження. Для головного напрямку має місце рівність

$$t_i^{(n)} = \sigma n_i \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \sigma \mathbf{n}, \quad (2.35)$$

де σ – величина вектора напруження, яка називається *головним напруженням*.

Підставляючи (2.35) в (2.12) і використовуючи тотожності $n_i = \delta_{ij}n_j$ і $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, приходимо до рівняння

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)n_j = 0 \text{ або } (\hat{\sigma} - \hat{\mathbf{I}}\sigma) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.36)$$

Три рівняння (2.36) містять чотири невідомих, а саме три напрямних косинуси n_i і величину головного напруження σ .

Для того щоб система рівнянь (2.36) мала, окрім $n_i = 0$, ще і нетривіальний розв'язок, її детермінант із коефіцієнтів $|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma|$ повинен дорівнювати нулю, тобто

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (2.37)$$

що після розкриття визначника приводить до кубічного рівняння відносно σ

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + \Pi_\sigma \sigma - \text{III}_\sigma = 0, \quad (2.38)$$

де

$$I_\sigma = \sigma_{ii} = \text{tr}(\hat{\sigma}), \quad (2.39)$$

$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}), \quad (2.40)$$

$$\text{III}_\sigma = |\sigma_{ij}| = \det(\hat{\sigma}) \quad (2.41)$$

називаються відповідно *першим, другим і третім інваріантами* тензора напруження.

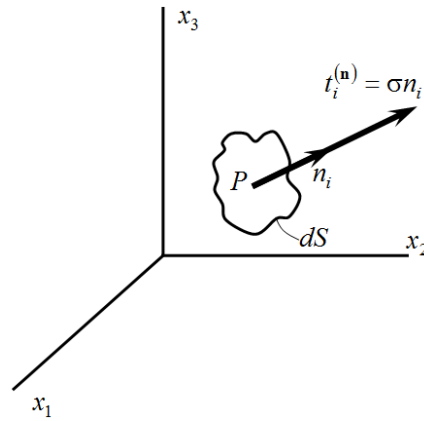


Рис. 2.11. До визначення головних напружень

Три корені рівняння (2.38) $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$ є значеннями трьох головних напружень. Кожному головному напруженню $\sigma_{(k)}$ відповідає головна вісь, для якої напрямні косинуси $n_i^{(k)}$ знаходяться із розв'язків рівнянь

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0 \text{ або } (\hat{\sigma} - \sigma_{(k)}\mathbf{I})\mathbf{n}^{(k)} = 0 \quad (k=1,2,3). \quad (2.42)$$

Тут верхні або нижні літери, поміщені у дужки, є просто індексами і не приймають участі в ніякому процесі підсумовування. Наприклад, розгорнута форма (2.42) для другої головної осі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{(2)})n_1^{(2)} + \sigma_{12}n_2^{(2)} + \sigma_{13}n_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{21}n_1^{(2)} + (\sigma_{22} - \sigma_{(2)})n_2^{(2)} + \sigma_{23}n_3^{(2)} &= 0, \\ \sigma_{31}n_1^{(2)} + \sigma_{32}n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_{(2)})n_3^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Оскільки тензор напруження симетричний і його компоненти є дійсними числами, то головні напруження теж приймають дійсні значення.

Матриця $[\sigma_{ij}]$, віднесена до головних осей, має вигляд

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} \text{ або } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

У другій формі (2.44) в якості індексів використані римські цифри для того, щоб показати, що головні напруження упорядковані, тобто $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Внаслідок того, що головні осі тензора напруження збігаються з головними осями поверхні напруження Коші, значення головних напружень включають як максимальні, так і мінімальні значення компонент нормального напруження в точці.

У просторі головних напружень, тобто в просторі, де осі координат співпадають з головними осями тензора напруження, а одиницями вимірювання координат слугують величини $(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)})$, як показано на рис. 2.12, довільний вектор напруження $t_i^{(n)}$ відповідно до формули (2.12) має компоненти

$$t_1^{(n)} = \sigma_{(1)} n_1, \quad t_2^{(n)} = \sigma_{(2)} n_2, \quad t_3^{(n)} = \sigma_{(3)} n_3. \quad (2.45)$$

Але оскільки $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$ для кожного одиничного вектора n_i , то вектор $t_i^{(n)}$ у просторі головних напружень задовольняє рівнянню

$$\frac{(t_1^{(n)})^2}{(\sigma_{(1)})^2} + \frac{(t_2^{(n)})^2}{(\sigma_{(2)})^2} + \frac{(t_3^{(n)})^2}{(\sigma_{(3)})^2} = 1. \quad (2.46)$$

Це рівняння еліпсоїда, відомого під назвою *еліпсоїд напружень Ламе*.

2.11. Максимальне і мінімальне дотичне напруження

Розкладемо вектор напруження $t_i^{(n)}$ на ортогональні компоненти – нормальну σ_N і дотичну σ_τ до елемента поверхні dS , на якому він діє. Величину

нормальної компоненти можна визначити за формулою (2.33), а квадрат величини дотичної компоненти σ_τ (напруження зсуву σ_s) отримується як різниця

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_s^2 = t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \sigma_N^2. \quad (2.47)$$

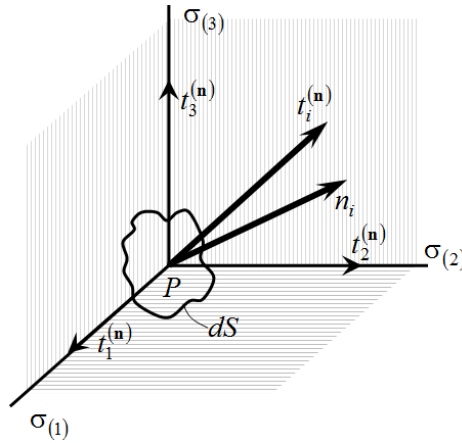


Рис. 2.12. Простір головних напружень

Ця операція продемонстрована на рис. 2.13, де за осі координат вибрані головні осі тензора напруження і головні напруження упорядковані $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Із (2.12) витікає, що компоненти $t_i^{(n)}$ дорівнюють

$$t_1^{(n)} = \sigma_I n_1, \quad t_2^{(n)} = \sigma_{II} n_2, \quad t_3^{(n)} = \sigma_{III} n_3, \quad (2.48)$$

а із (2.33) отримується величина нормальної компоненти напруження

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2. \quad (2.49)$$

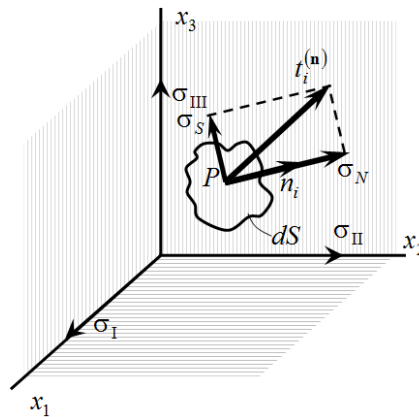


Рис. 2.13. Розкладання вектора напруження $t_i^{(n)}$ на ортогональні до елемента поверхні dS компоненти – нормальну σ_N і дотичну $\sigma_\tau = \sigma_s$

Підставляючи (2.48) і (2.49) в формулу (2.47), обчислимо квадрат величини дотичного напруження як функцію напрямних косинусів n_i

$$\sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2. \quad (2.50)$$

Максимальне і мінімальне значення $\sigma_\tau = \sigma_S$ можна отримати із (2.50) методом *множників Лагранжа*. Процедура полягає в побудові функції

$$F = \sigma_S^2 - \lambda n_i n_i, \quad (2.51)$$

де λ – скаляр, який називається множником Лагранжа.

Рівність (2.51) представляє функцію напрямних косинусів n_i , так що умова екстремуму (максимуму або мінімуму) величини F має вигляд $\partial F / \partial n_i = 0$. Прирівнюючи нулю частинні похідні, приходимо до рівнянь:

$$\begin{aligned} n_1 [\sigma_I^2 - 2\sigma_I (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] &= 0; \\ n_2 [\sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II} (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] &= 0; \\ n_3 [\sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III} (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda] &= 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

які разом з умовою $n_i n_i = 1$ можна розв'язати відносно λ і напрямних косинусів n_i , що відповідають площадкам екстремальних значень дотичного напруження.

Наведемо один із розв'язків системи (2.52) і відповідне йому дотичне напруження, знайдене за формулою (2.50):

$$\begin{aligned} n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = 0. \\ n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = 0. \\ n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1, \quad \sigma_S = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Величини дотичного напруження в (2.53), очевидно, є мінімальними. Окрім того, оскільки (2.53) вказує на те, що ці величини перетворюються на нуль на головних площадках, то напрямки, отримані в (2.53), збігаються з головними осями тензора напруження.

Інші розв'язки системи рівнянь (2.52) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
n_1 &= 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_S = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2; \\
n_1 &= \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_S = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2; \\
n_1 &= \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = 0, \quad \sigma_S = (\sigma_I - \sigma_{II})/2.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Формули (2.54) (другий рядок) дають максимальне значення дотичного напруження, яке дорівнює напів різниці найбільшого і найменшого головних напружень. Таким чином, із (2.54) (другий рядок) витікає, що максимальна компонента дотичного напруження діє у площині, яка ділить навпіл прямий кут між напрямками максимального і мінімального головних напружень.

2.12. Круги Мора для напруження

Зручне двовимірне графічне представлення тривимірного напруженого стану в точці дають відомі *круги Мора*. Для того щоб пояснити це поняття, знову візьмемо в якості осей координат головні осі тензора напруження в точці P , як це показано на рис. 2.14. Вважається, що всі головні напруження різні та упорядковані, так що

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}. \tag{2.55}$$

За таких умов вектор напруження $t_i^{(n)}$ має нормальну і дотичну компоненти, величини яких задовольняють співвідношеннями

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2; \tag{2.56}$$

$$\sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2. \tag{2.57}$$

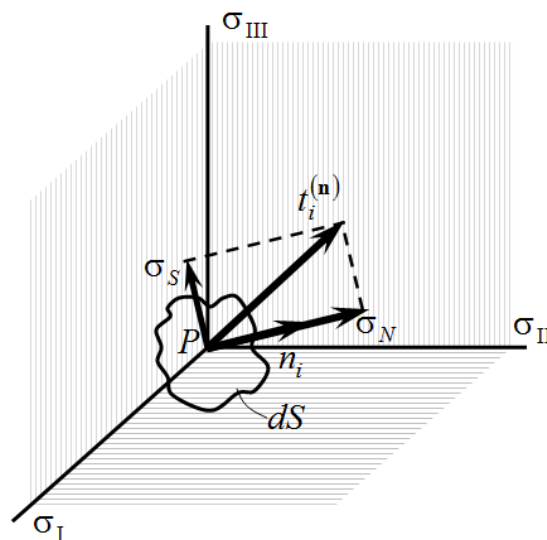


Рис. 2.14. До пояснення поняття кругів Мора

Комбінуючи ці дві рівності з тотожністю $n_i n_i = 1$ і розв'язуючи відносно напрямних косинусів n_i , отримуємо

$$\begin{aligned}(n_1)^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}; \\(n_2)^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)}; \\(n_3)^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}.\end{aligned}\tag{2.58}$$

На цих рівностях базується побудова кругів Мора на площині напруження, де вісь σ_N є віссю абсцис, а вісь σ_S – віссю ординат (рис. 2.15).

Оскільки із (2.55) витікає, що $\sigma_I - \sigma_{II} > 0$ і $\sigma_I - \sigma_{III} > 0$, а величина $(n_1)^2$ невід'ємна, то чисельник у правій частині першого рівняння системи (2.58) задовольняє співвідношенню

$$(\sigma_N - \sigma_{II})(\sigma_N - \sigma_{III}) + (\sigma_S)^2 \geq 0,\tag{2.59}$$

яке у площині напруження (σ_N, σ_S) представляє точки, що лежать *поза кругом*

$$[\sigma_N - (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2]^2\tag{2.60}$$

і на його границі. На рис. 2.15 цей круг позначено літерою C_1 .

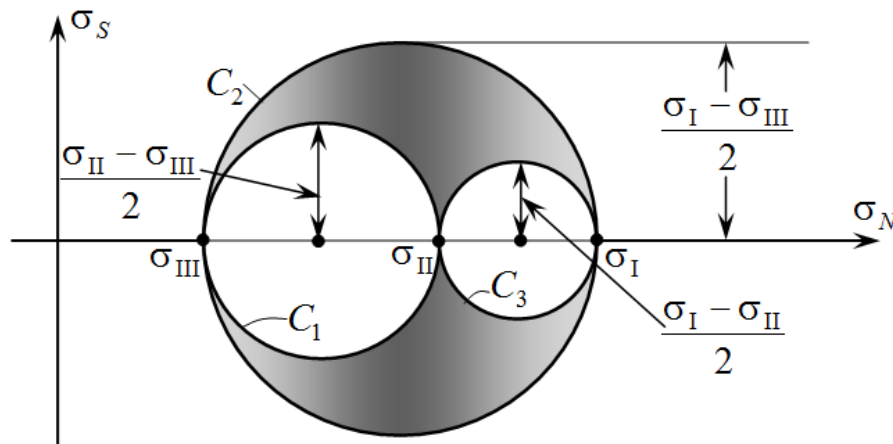


Рис. 2.15. Круги Мора

Точно так само із (2.55) витікає, що $\sigma_{II} - \sigma_{III} > 0$ і $\sigma_{II} - \sigma_I < 0$. Окрім того, величина $(n_2)^2$ невід'ємна. Тоді в другому рівнянні системи (2.58) чисельник у правій частині задовольняє нерівності

$$(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_I) + (\sigma_S)^2 \leq 0, \quad (2.61)$$

яка представляє точки *всередині круга*

$$[\sigma_N - (\sigma_{III} + \sigma_I)/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{III} - \sigma_I)/2]^2, \quad (2.62)$$

позначеного на рис. 2.15 буквою C_2 , і на його границі.

На кінець, із (2.55) видно, що $\sigma_{III} - \sigma_I < 0$ і $\sigma_{III} - \sigma_{II} < 0$, а величина $(n_3)^2$ невід'ємна, тому із третього рівняння системи (2.58) витікає нерівність

$$(\sigma_N - \sigma_I)(\sigma_N - \sigma_{II}) + (\sigma_S)^2 \geq 0, \quad (2.63)$$

яка представляє точки *поза кругом*

$$[\sigma_N - (\sigma_I + \sigma_{II})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_I - \sigma_{II})/2]^2, \quad (2.64)$$

позначеного на рис. 2.15 літерою C_3 , і на його границі.

Кожна «точка напруження» (пара величин σ_N і σ_S) на площині напружень (σ_N, σ_S) відповідає вектору напруження $t_i^{(n)}$, а напружений стан в точці P , описаний формулами (2.58), можна представити на рис. 2.15 затіненою областю, яка обмежена кругами Мора для напруження. Ця побудова підтверджує, що максимальне напруження зсуву дорівнює $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$, як було встановлено у п. 2.11. Внаслідок того, що знак напруження зсуву не має принципового значення, часто зображають тільки верхню половину симетричної діаграми (див. рис. 2.15).

Зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом може бути встановлений за допомогою рис. 2.16, на якому зображено перший октант сфери з центром у точці P суцільного середовища.

Нормаль n_i до сферичної поверхні ABC у довільній точці Q одночасно є нормаллю до елементу поверхні dS в точці P . Із-за симетрії тензора напруження і того, що на рис. 2.16 використані головні осі тензора напруження, напружений стан в точці P повністю характеризується сукупністю тих положень, які може займати точка Q на поверхні ABC .

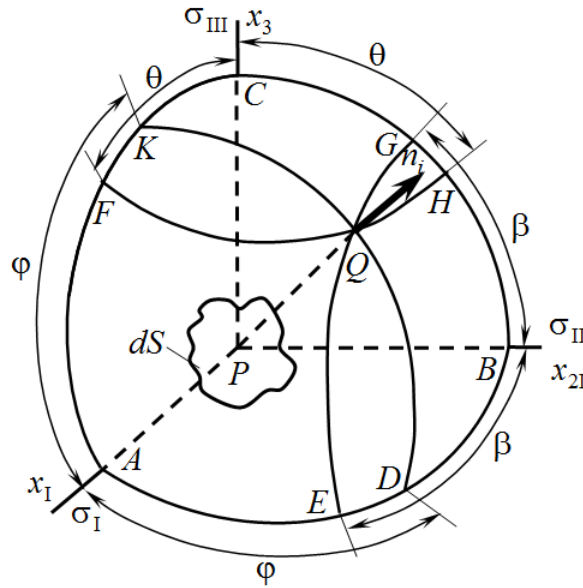


Рис. 2.16. Зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом

На рисунку кругові дуги KD , GE і FH вказують на такі положення Q , де один напрямний косинус із n_i має сталу величину, а саме

$$n_1 = \cos\varphi \text{ на } KD, \quad n_2 = \cos\beta \text{ на } GE, \quad n_3 = \cos\theta \text{ на } FH,$$

а на граничних дугах BC , CA і AB

$$n_1 = \cos\pi/2 = 0 \text{ на } BC, \quad n_2 = \cos\pi/2 = 0 \text{ на } CA, \\ n_3 = \cos\pi/2 = 0 \text{ на } AB.$$

Згідно з першою із цих рівностей та першим рівнянням системи (2.58) вектори напруження для точок Q , які лежать на BC , будуть мати компоненти, що визначаються точками напруження на колі C_1 (див. рис. 2.15). Подібним чином CA на рис. 2.16 відповідає колу C_2 на рис. 2.15, а AB – колу C_3 .

Компоненти вектора напруження σ_N і σ_S для довільного положення Q можна визначити за допомогою побудови, яка виконана на рис. 2.17. Так, положення точки e на C_3 можна отримати, проводячи радіуси із центра C_3 під кутом 2β .

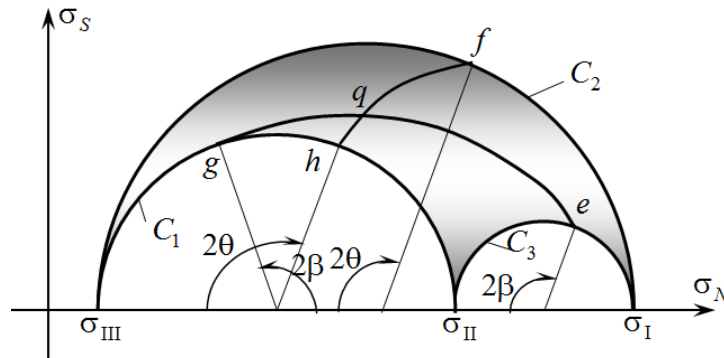


Рис. 2.17. Зв'язок між простором напружень з фізичним простором

Відмітимо, що кути в фізичному просторі (див. рис. 2.16) під час переходу в простір напруження (див. рис. 2.17) подвоюються (дуга AB на рис. 2.16 містить кут 90° , а відповідні точки напруження σ_I і σ_{II} віддалені одна від другої на колі C_3 на 180°). Аналогічним чином на рис. 2.17 отримано точки q, h, f та відповідні пари з'єднані круговими дугами, що мають центри на осі σ_N . Точка перетину кругових дуг ge і hf дає компоненти σ_N і σ_S вектора напруження $t_i^{(n)}$ на площадці з нормаллю n_i в точці Q на рис. 2.16.

2.13. Плоский напружений стан

У тому випадку, коли одне і тільки одне із головних напружень дорівнює нулю, кажуть, що існує *плоский напружений стан*. Така ситуація виникає у вільній від навантаження точці на вільній поверхні, що обмежує тіло. Якщо головні напруження упорядковані, то розташування кругів Мора буде мати один із видів, які представлено на рис. 2.18.

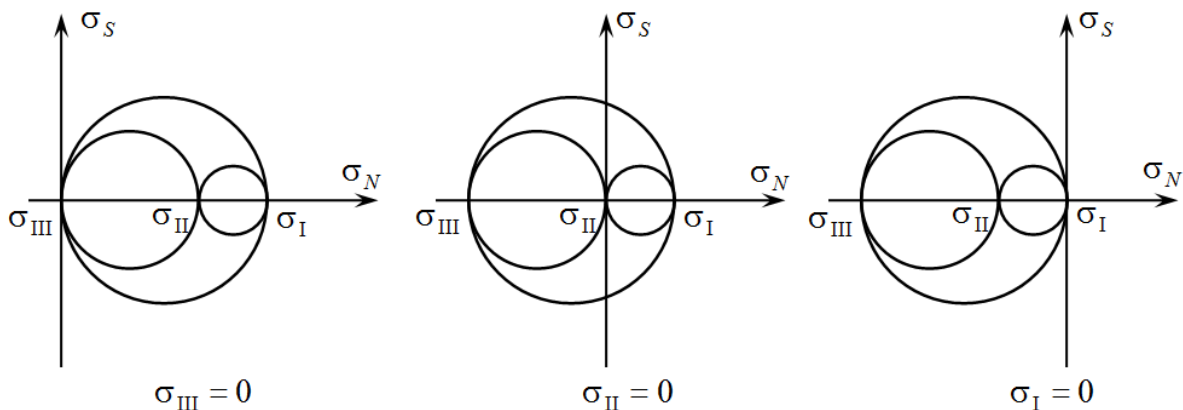


Рис. 2.18. Можливі випадки кругів Мора для плоского напруженого стану

Якщо головні напруження неупорядковані і в якості нульового головного напруження взято напрямом x_3 , то плоский напружений стан має тільки

компоненти у площинах, паралельних площинам x_1x_2 . За умови довільного вибору орієнтації ортогональних осей x_1 і x_2 матриця напруження має вигляд

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Поверхня напруження для плоского напруженого стану є циліндром, основа якого лежить у площині x_1x_2 і описується рівнянням

$$\sigma_{11}x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = \pm k^2. \quad (2.66)$$

В елементарних курсах дисципліни опору матеріалів плоский напружений стан часто представляють одним кругом Мора. Як показує рис. 2.18, таке представлення завжди є неповним, оскільки для повної характеристики напруженого стану необхідно всі три кола. Зокрема, якщо цей єдиний круг виявиться одним із внутрішніх кругів на рис. 2.18, то величина максимального дотичного напруження в точці взагалі не буде визначена. Діаграма у вигляді одного круга Мора може, однак, вказати точки напруження для всіх тих площадок у точці P , які містять вісь нульового головного напруження. Якщо осі координат вибрані відповідно до представлення напружень, що дається формулою (2.65), то для таких площадок рівняння єдиного круга Мора для плоских напружень буде мати вигляд

$$[\sigma_N - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_{12})^2. \quad (2.67)$$

На рис. 2.19 представлені характерні точки цього круга.

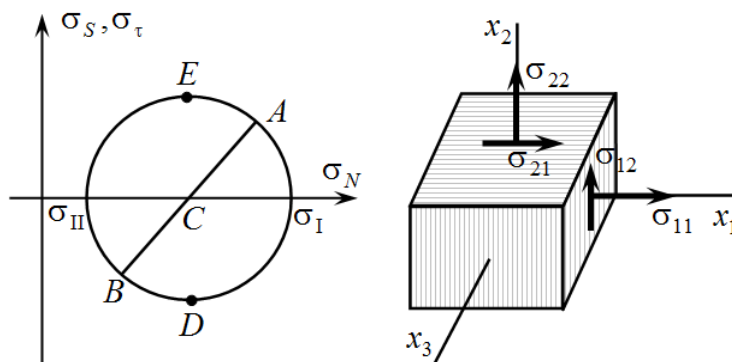


Рис. 2.19. Єдиний круг Мора для представлення плоского напруженого стану

Згідно з рис. 2.19 круг Мора має центр C в точці $\sigma_N = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$, і його радіус, відповідно до рівняння (2.67), дорівнює $R = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/4 + (\sigma_{12})^2}$. Точка A на колі представляє напружений стан на елементі поверхні з нормаллю n_1 (правої бічної грані паралелепіпеда, див. рис. 2.19). Точка B на колі представляє напружений стан на верхній грані паралелепіпеда з нормаллю n_2 . Точки головних напружень σ_I і σ_{II} помічені на діаграмі цими ж літерами, а точки E і D на колі є точками максимального значення дотичного напруження.

2.14. Девіатор та кульовий тензор напруження

Тензор напруження σ_{ij} можна розкласти на два тензори, один з яких називається *кульовим тензором* або *тензором гідростатичних напружень* і має вигляд

$$\hat{\sigma}_M = \sigma_M \hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

де $\sigma_M = -p = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ – середнє значення нормального напруження.

Другий тензор, на який можна розкласти σ_{ij} , називається *девіатором напружень* і має вигляд

$$\hat{\sigma}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Розглянуте розкладання записується формулами

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} + s_{ij} \quad \text{або} \quad \hat{\sigma} = \sigma_M \hat{\mathbf{I}} + \hat{\sigma}_D. \quad (2.70)$$

Головні осі девіатора s_{ij} збігаються з головними осями тензора σ_{ij} . Таким чином, *головні значення девіатора напружень* дорівнюють

$$s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M. \quad (2.71)$$

Характеристичне рівняння для девіатора напружень так само, як і характеристичне рівняння (2.38) для тензора напруження, представляє собою кубічне рівняння вигляду

$$s^3 + \Pi_{\hat{\sigma}_D} s - \text{III}_{\hat{\sigma}_D} = 0 \text{ або } s^3 + (s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I) s - s_I s_{II} s_{III} = 0. \quad (2.72)$$

Легко показати, що перший інваріант девіатора напружень тотожно дорівнює нулю, що і пояснює його відсутність у рівнянні (2.72).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте гіпотези суцільного середовища.
2. Що таке масові й поверхневі сили?
3. В чому полягає принцип напруження Коші? Дайте визначення вектора напруження.
4. Що таке напружений стан в точці? Дайте визначення тензора напруження.
5. Запишіть співвідношення, що встановлюють зв'язок між тензором напруження і вектором напруження.
6. Сформулюйте умови рівноваги сил і моментів. Доведіть симетричність тензора напруження.
7. Запишіть закони перетворення тензора напруження.
8. Сформулюйте фізичний зміст тензора перетворення координат.
9. Намалуйте поверхні напруження Коші та сформулюйте їх фізичний зміст.
10. Яким чином визначаються головні напруження, інваріанти тензора напруження, еліпсоїд напружень та в чому полягає їх фізичний зміст?
11. Дайте визначення для максимального і мінімального дотичного напруження. Де ці напруження використовуються?
12. Дайте фізичне тлумачення кругів Мора для напруження.
13. В чому полягає зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом?
14. Сформулюйте гіпотези плоского напруженого стану та запишіть основні рівняння.
15. Дайте визначення девіатора та кульового тензорів напруження.

3. ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН

3.1. Частинки і точки

В кінематиці суцільного середовища зміст терміну «точка» повинен бути строго визначений, оскільки він може відноситися або до точки простору, або до точки континууму. Щоб уникнути непорозумінь, термін «точка» буде використовуватися виключно для позначення місця в нерухомому просторі. Термін «частинка» буде означати малий елемент об'єму (або *матеріальну точку*) суцільного середовища. Тобто, *точка* є місце в просторі, а *частинка* – мала частина матеріального континууму.

3.2. Конфігурація суцільного середовища. Деформація і течія

У будь-який момент часу t об'єм V суцільного середовища, який обмежено поверхнею S , займає деяку область R фізичного простору. Якщо в певній системі координат вказано відповідність частинок деякого об'єму суцільного середовища і точок простору, які вони займають в момент часу t , то кажуть, що в цей момент часу задана *конфігурація* суцільного середовища.

Термін *деформація* відноситься до зміни форми континууму від деякої початкової (недеформованої) конфігурації до поточної (деформованої конфігурації). Під час вивчення деформації враховується тільки початкова і кінцева конфігурації. Проміжному стану, або послідовності конфігурацій, за якими відбувається деформація, увага не приділяється. У протилежність цьому термін *течія* використовується для позначення неперервного стану руху континууму. Насправді, вивчення історії конфігурацій є невід'ємною частиною дослідження течії, для якої задано змінне в часі поле швидкості.

3.3. Радіус-вектор. Вектор переміщення

На рис. 3.1 зображено недеформовану конфігурацію матеріального континууму в момент $t=0$ і деформовану конфігурацію того ж самого континууму в більш пізній момент часу $t=t$. У даному дослідженні доцільно віднести початкову і кінцеву конфігурації до різних осей координат, як це показано на рис. 3.1.

Тоді в початковому стані характерна частинка середовища займає точку P_0 простору і має *радіус-вектор*

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{i}_1 + X_2 \mathbf{i}_2 + X_3 \mathbf{i}_3 = X_K \mathbf{i}_K \quad (3.1)$$

відносно ортогональних декартових координат $OX_1X_2X_3$.

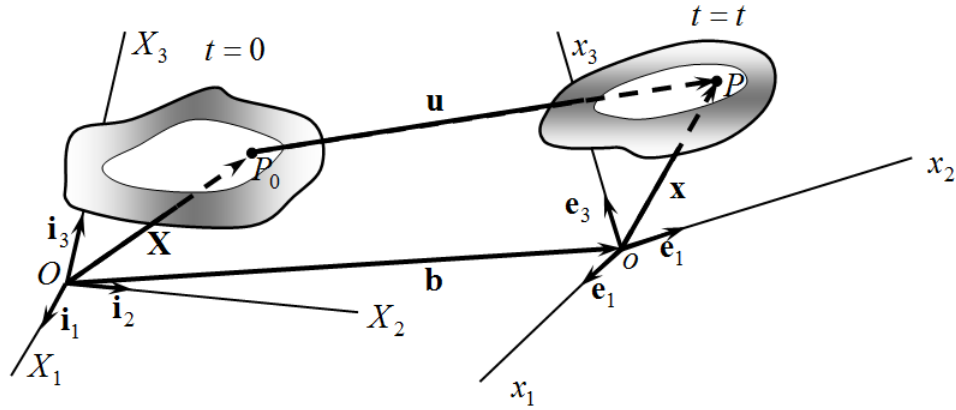


Рис. 3.1. Початкова та кінцева конфігурації середовища під час його деформації

Тут в якості індексів підсумовування використані великі літери, і вони застосовуються для того, щоб особливо підкреслити зв'язок деяких виразів з системою координат простору початкового стану (X_1, X_2, X_3) , які називаються *матеріальними координатами*. У деформованому стані частинка, яка спочатку була в точці P_0 займе положення P і буде мати відносно ортогональних декартових координат $ox_1x_2x_3$ радіус-вектор

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

Тут в якості нижніх індексів використані малі букви, щоб вказати на зв'язок з координатами (x_1, x_2, x_3) , які дають поточне положення частинки і називаються *просторовими координатами*.

Відносна орієнтація матеріальних осей $OX_1X_2X_3$ і просторових осей $ox_1x_2x_3$ характеризується напрямними косинусами c_{kK} і c_{Kk} , які визначаються скалярними добутками одиничних базисних векторів

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_K = \mathbf{i}_K \cdot \mathbf{e}_k = c_{kK} = c_{Kk}. \quad (3.3)$$

Величини c_{kK} також називаються компонентами фундаментальними тензора перетворення координат.

Підсумовування за індексами в цих виразах не відбувається, оскільки k і K є різними індексами. Зважаючи на те, що дельта Кронекера визначається рівностями $\mathbf{i}_K \cdot \mathbf{i}_P = \delta_{KP}$ та $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_p = \delta_{kp}$, умови ортогональності просторових і матеріальних координат приймають вигляд

$$c_{Kk}c_{Kp} = c_{kK}c_{pK} = \delta_{kp}, \quad c_{Kp}c_{Mp} = c_{pK}c_{pM} = \delta_{KM}. \quad (3.4)$$

Вектор $\mathbf{u}$, що з'єднує точки P_0 і P на рис. 3.1 (початкове і кінцеве положення частинки, відповідно), називається *вектором переміщення*, який можна записати у вигляді

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{e}_k \quad (3.5)$$

або

$$\mathbf{U} = U_K \mathbf{i}_K, \quad (3.6)$$

де компоненти U_K і u_k зв'язані через напрямні косинуси c_{kK} . Згідно (1.89), одиничний вектор $\mathbf{e}_k$ виражається через матеріальні базисні вектори $\mathbf{i}_K$ таким чином

$$\mathbf{e}_k = c_{kK} \mathbf{i}_K. \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.7) в (3.5), отримуємо

$$\mathbf{u} = u_k (c_{kK} \mathbf{i}_K) = U_K \mathbf{i}_K = \mathbf{U}, \quad (3.8)$$

звідки

$$U_K = c_{kK} u_k. \quad (3.9)$$

Оскільки напрямні косинуси – сталі величини, компоненти вектора переміщення, як видно з (3.9), підпорядковується правилу перетворення тензорів першого рангу, що і впливало очікувати.

Вектор $\mathbf{b}$ (див. рис. 3.1) слугує для визначення положення початку координат o відносно точки O . Тоді очевидно, що

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.10)$$

У механіці суцільного середовища є можливість сумістити системи координат $OX_1X_2X_3$ і $ox_1x_2x_3$. Тоді $\mathbf{b} \equiv 0$, а (3.10) приймає вигляд

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

У декартових компонентах ця рівність у загальному випадку виглядає так

$$u_k = x_k - c_{kK} X_K. \quad (3.12)$$

Однак для суміщених осей трієдри одиничних базисних векторів обох систем однакові, а це веде до того, що напрямні косинуси c_{kK} перетворюється в дельти Кронекера. Внаслідок цього (3.12) спрощується і зводиться до вигляду

$$u_k = x_k - X_k, \quad (3.13)$$

де в якості нижніх індексів застосовуються тільки прописні літери.

3.4. Лагранжевий і ейлерів опис руху

Якщо в деякому об'ємі суцільного середовища відбувається деформація (або течія), то його частинки рухаються вздовж різних шляхів у просторі. Такий рух можна описати рівняннями вигляду

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t), \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (3.14)$$

які дають положення частинки x_i в поточний момент частинки, яка займала в момент $t = 0$ точку (X_1, X_2, X_3) . Таким чином, (3.14) можна тлумачити як встановлення відповідності між точками початкової конфігурації і їх положенням у поточному стані. Припускається, що така відповідність взаємно однозначна і неперервна з неперервними частинними похідними будь-якого порядку. Такий спосіб описання руху або деформації, виражений формулою (3.14), називається *лагранжевим*.

З іншого боку, якщо рух або деформація задаються рівнянням вигляду

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t), \text{ або } \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (3.15)$$

у яких незалежними змінними є координати x_i і час t , спосіб описання називається *ейлеревим*. Цей опис можна розглядати як такий, який дає можливість прослідкувати положення частинки до початкового стану, яка зараз займає положення (x_1, x_2, x_3) . Якщо (3.15) дає неперервну взаємно однозначну відповідність з частинними похідними, як це було припущено для (3.14), то ці дві відповідності представлені єдиною парою взаємно обернених функцій. Необхідною і достатньою умовою існування оберненої функції є відмінність від нуля якобіана

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|. \quad (3.16)$$

Наприклад, лагранжевий опис руху представлено рівняннями

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2(e^t - 1), \\ x_2 &= X_1(e^{-t} - 1) + X_2, \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

має взаємно обернене ейлерове формулювання

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_2 &= \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.5. Градієнти деформації. Градієнти переміщення

Частинне диференціювання (3.14) по X_j призводить до тензору $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, який називається *матеріальним градієнтом деформації*. У символічних позначеннях $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ представляється тензором другого рангу

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{x} \vec{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \mathbf{e}_3, \quad (3.19)$$

де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{i}_i = \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{e}_i$ – матеріальні і просторові осі припускаються суміщеними.

Матрична форма $\hat{\mathbf{F}}$ слугує для подальшого розуміння цієї тензорної властивості оператора $\vec{\nabla}$, коли він є другим співмножником у діаді. Таким чином

$$\begin{aligned}
[F_{ij}] &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Частинне диференціювання (3.15) по x_j призводить до тензору $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, який називається *просторовим градієнтом деформації*. Цей тензор є діадином вигляду

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{X} \vec{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \tag{3.21}$$

який має матричну форму

$$\begin{aligned}
[H_{ij}] &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Матеріальний і просторовий тензори деформації пов'язані між собою правилом частинного диференціювання

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik}. \tag{3.23}$$

Частинне диференціювання вектора переміщення u_i по координатах призводить або до *матеріального градієнту переміщення* $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$, або до *просторового градієнту переміщення* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. За допомогою формули (3.13), яка представляє u_i через різницю координат, ці тензори виражаються через градієнти деформації лагранжевих або матеріальних змінних

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}, \text{ або } \hat{\mathbf{J}} = \mathbf{u}\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}} \quad (3.24)$$

і в елеревих або просторових змінних

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \text{ або } \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{u}\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}. \quad (3.25)$$

Матричні форми $\hat{\mathbf{J}}$ і $\hat{\mathbf{K}}$ відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} [J_{ij}] &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

і

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]. \quad (3.27)$$

3.6. Тензори деформацій. Тензори скінченних деформацій

На рис. 3.2 початкова (недеформована) і кінцева (деформована) конфігурації віднесені до суміщених ортогональних декартових осей координат $OX_1X_2X_3$ і $ox_1x_2x_3$, відповідно. Сусідні частинки, що знаходяться у точках P_0 і Q_0 до деформації, переміщуються в точки P і Q деформованої конфігурації.

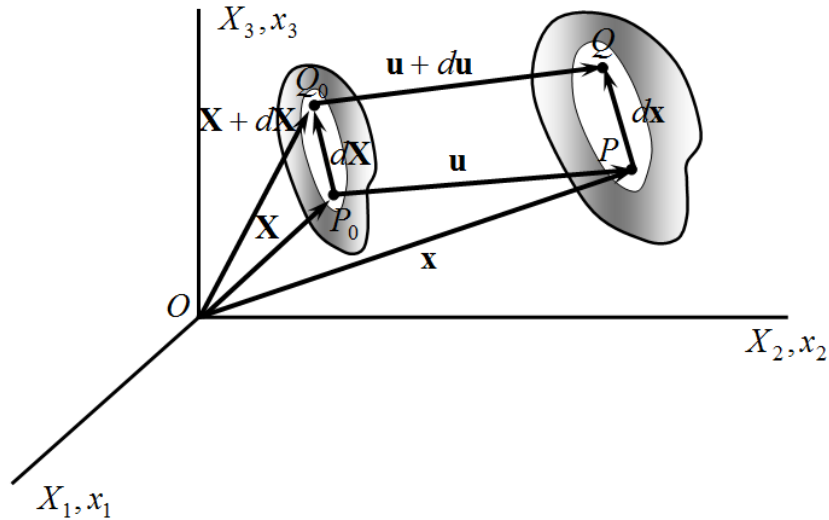


Рис. 3.2. До визначення тензорів деформації

Квадратом нескінченно малої відстані між P_0 і Q_0 є

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j. \quad (3.28)$$

Згідно (3.15) диференціал відстані dX_i , очевидно, дорівнює

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.29)$$

так що квадрат довжини $(dX)^2$ в формулі (3.28) можна написати у вигляді

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j \text{ або } (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.30)$$

де тензор другого рангу

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \text{ або } \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{H}}_c \cdot \hat{\mathbf{H}}, \quad (3.31)$$

називається *тензором деформацій Коші*.

У деформованій конфігурації квадрат нескінченно малої відстані між P і Q дорівнює

$$(dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j. \quad (3.32)$$

Згідно (3.14) диференціал відстані має вигляд

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \text{ або } d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.33)$$

оскільки квадрат довжини $(dx)^2$ в формулі (3.32) може бути записаний таким чином

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = G_{ij} dX_i dX_j \text{ або } (dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.34)$$

де тензор другого рангу

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \text{ або } \hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}}, \quad (3.35)$$

називається *тензором деформацій Гріна*.

Різниця $(dx)^2 - (dX)^2$ для двох сусідніх частинок суцільного середовища використовується як *міра деформації* деякого околу цих частинок між початковим і кінцевим станом. Якщо ця різниця тотожно рівна нулю для всіх сусідніх частинок, то кажуть, що має місце *абсолютно жорстке переміщення*

(переміщення суцільного середовища як абсолютно жорсткого тіла). Використовуючи (3.34) і (3.28), цю різницю можна представити у вигляді

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2L_{ij} dX_i dX_j \quad (3.36)$$

або $(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot 2\hat{\mathbf{L}}_G \cdot d\mathbf{X},$

де тензор другого рангу

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}), \quad (3.37)$$

називається *лагранжевим тензором скінченних деформацій* або *тензором скінченних деформацій Гріна*.

Використовуючи (3.32) і (3.30), різницю $(dx)^2 - (dX)^2$ можна представити у вигляді

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j \quad (3.38)$$

або $(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}_c \cdot \hat{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot 2\hat{\mathbf{E}}_A \cdot d\mathbf{x},$

де тензор другого рангу

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{E}}_A = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}_c \cdot \hat{\mathbf{H}}), \quad (3.39)$$

називається *ейлеревим тензором скінченних деформацій* або *тензором скінченних деформацій Альмансі*.

Особливо корисна така форма лагранжевого та ейлеревого тензорів скінченних деформацій, коли ці тензори представлені у вигляді функцій градієнта переміщення. Тоді, якщо $\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \hat{\mathbf{J}}$ із (3.24) підставити у (3.37), то

після деяких простих алгебраїчних перетворень лагранжевий тензор скінченних деформацій набуде вигляду

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c + \hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}}). \quad (3.40)$$

Так само можна перетворити ейлерів тензор. Якщо $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \hat{\mathbf{K}}$ із (3.25) підставити у (3.39), в результаті отримаємо ейлерів тензор скінченних деформацій у вигляді

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \text{ або } \hat{\mathbf{E}}_A = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_c - \hat{\mathbf{K}}_c \cdot \hat{\mathbf{K}}). \quad (3.41)$$

Матричні представлення тензорів (3.40) і (3.41) можна написати, безпосередньо використовуючи формули (3.26) і (3.27), відповідно.

3.7. Теорія малих деформацій. Тензори нескінченно малих деформацій

Теорія малих деформацій у механіці суцільних середовищ базується на припущенні малості градієнтів переміщення порівняно з одиницею. Основною мірою деформації слугує різниця $(dx)^2 - (dX)^2$, яку можна виразити через градієнти переміщення, підставляючи (3.40) і (3.41) в (3.36) і (3.38), відповідно. Якщо градієнти переміщення малі величини, то тензори деформацій в (3.36) і (3.38) зводяться до тензорів нескінченно малих деформацій, а результуючі співвідношення представляють малі деформації.

Якщо компоненти градієнта переміщення $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ є малими порівняно з одиницею, то і їх добутки $\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}$, що є нелінійними членами в (3.40), є нехтовно малими величинами і ними можна знехтувати. В результаті отримаємо лінійний *лагранжівий тензор нескінченно малих деформацій*

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c). \quad (3.42)$$

Аналогічно, якщо $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$, то нелінійним членом $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ в (3.41) також можна знехтувати і отримати лінійний *ейлерів тензор нескінченно малих деформацій*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}^c). \quad (3.43)$$

За умови малих переміщень та їх градієнтів різниця між матеріальними та просторовими координатами частинки середовища стає нехтовно малою. Компоненти матеріального градієнта $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ і компоненти просторового градієнта $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ стають майже однаковими, тому ейлерів та лагранжевий тензори нескінченно малих деформацій приймаються рівними між собою. Таким чином можна записати такі рівності

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij} \text{ або } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{E}}. \quad (3.44)$$

3.8. Відносне переміщення. Тензор лінійного повороту. Вектор повороту

На рис. 3.3 переміщення двох сусідніх частинок зображені векторами $u_i^{(P_0)}$ і $u_i^{(Q_0)}$. Вектор

$$du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)} \text{ або } d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(Q_0)} - \mathbf{u}^{(P_0)}, \quad (3.45)$$

називається *вектором відносного переміщення* частинки, що розташована спочатку у точці Q_0 , відносно частинки, яка займала положення P_0 . Припустимо, що для поля переміщення виконані умови неперервності: тоді $u_i^{(Q_0)}$ можна розкласти в ряд Тейлора в околі точки P_0 . Нехтуючи в цьому розкладанні членами більш високого порядку, для вектора відносного переміщення отримуємо

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right)_{P_0} dX_j \text{ або } d\mathbf{u} = (\mathbf{u} \vec{\nabla})_{P_0} \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.46)$$

Насправді, ці похідні є компонентами матеріального градієнту переміщення. Рівність (3.46) представляє *лагранжеву форму* вектора відносного переміщення.

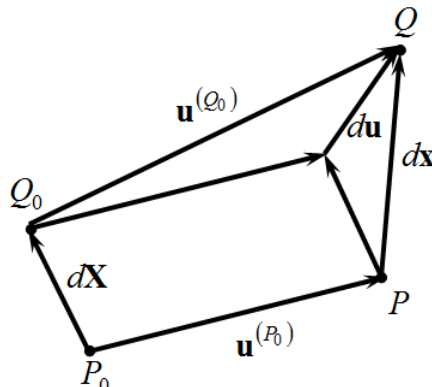


Рис. 3.3. До визначення вектора відносного переміщення

Корисно також визначити *вектор відносного переміщення*, що віднесений до одиниці довжини відрізка, що розглядається, $\frac{du_i}{dX}$, де dX – модуль нескінченно малої відстані вектора відстані dX_i . Відповідно до цього, якщо v_i – одиничний вектор напрямку dX_i , так що $dX_i = v_i dX$, то

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} v_j \quad \text{або} \quad \frac{d\mathbf{u}}{dX} = \mathbf{u} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.47)$$

де $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{u} \vec{\nabla}$.

Оскільки матеріальний градієнт переміщення $\frac{du_i}{dX_j}$ можна єдиним способом розкласти на симетричну і антисиметричну частини, то вектор відносного переміщення du_i можна записати у вигляді

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j \quad (3.48)$$

$$\text{або} \quad d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \mathbf{u}) \right] \cdot d\mathbf{X}.$$

Перший член у квадратних дужках формули (3.48) є лагранжевий тензор лінійної деформації l_{ij} . Другий член називається *лагранжевим тензором лінійного повороту* і позначається

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \mathbf{u}). \quad (3.49)$$

Якщо тензор деформації l_{ij} тотожно рівний нулю в околі точки P_0 , то відносне переміщення околу цієї точки буде нескінченно малим поворотом твердого тіла. Цей нескінченно малий поворот можна представити *лагранжевим вектором лінійного повороту*

$$w_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj} \text{ або } \mathbf{w} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \mathbf{u}; \quad (3.50)$$

тоді відповідне відносне переміщення запишеться таким чином

$$du_i = \varepsilon_{ijk} w_j dX_k \text{ або } d\mathbf{u} = \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (3.51)$$

Міркування, що проведені під час лагранжевого опису вектора відносного переміщення, тензора лінійного повороту і вектора лінійного повороту, повністю нескладно повторити для ейлеревих аналогів тих самих величин. Так, у разі *ейлеревого підходу* маємо для *вектора відносного переміщення*

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{u} = \mathbf{u} \vec{\nabla} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.52)$$

а для *вектора відносного переміщення*, що відноситься до *одиниці довжини*

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mu_j \text{ або } \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{u} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (3.53)$$

Розкладання ейлеревого градієнта переміщення $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ дає

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j$$

$$\text{або } d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \mathbf{u}) \right] \cdot d\mathbf{x}.$$
(3.54)

Перший член у квадратних дужках в (3.54) є ейлеревим тензором лінійної деформації ε_{ij} . Другий член є *ейлерів тензор лінійного повороту*

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \hat{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \mathbf{u}).$$
(3.55)

Формула (3.55) визначає *ейлерів вектор лінійного повороту*

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \text{ або } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \mathbf{u};$$
(3.56)

тоді відносно переміщення виражається наступним чином

$$du_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \text{ або } d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}.$$
(3.57)

3.9. Геометричний зміст тензорів лінійних деформацій

В теорії малих деформацій лагранжевий тензор скінченних деформацій L_{ij} у формулі (3.36) можна замінити лагранжевим тензором лінійних деформацій l_{ij} , і тоді ця формула прийме вигляд

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx - dX) = 2l_{ij} dX_i dX_j$$

$$\text{або } (dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot 2\hat{\mathbf{L}} \cdot d\mathbf{X}.$$
(3.58)

Для малих деформацій $dx \approx dX$, тому останню рівність можна представити так

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} = l_{ij} v_i v_j \text{ або } \frac{dx - dX}{dX} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{v}.$$
(3.59)

Ліва частина (3.59) характеризує зміну довжини нескінченно малого елемента, що відноситься до одиниці початкової довжини, і називається

коефіцієнтом відносного подовження лінійного елемента, який у початковому стані мав напрямні косинуси $\frac{dX_i}{dX}$.

Застосуємо формулу (3.59) до нескінченно малого лінійного елемента P_0Q_0 , що розташований відносно локальних осей у точці P_0 так, як це показано на рис. 3.4, і отримаємо коефіцієнт відносного подовження цього елемента. Оскільки в цьому випадку P_0Q_0 розташований вздовж осі X_2 ,

$$\frac{dX_1}{dX} = \frac{dX_3}{dX} = 0, \quad \frac{dX_2}{dX} = 1,$$

і тому згідно (3.59)

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}. \quad (3.60)$$

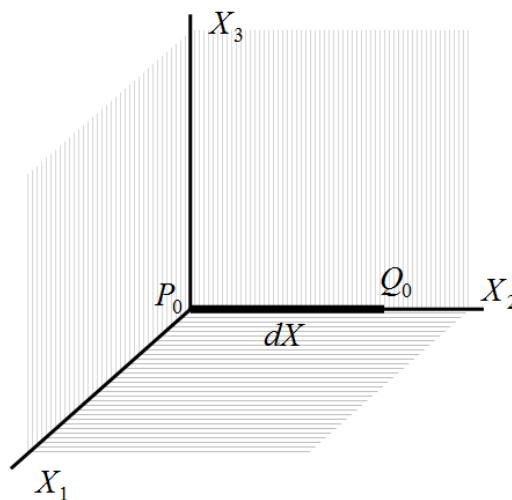


Рис. 3.4. До визначення коефіцієнт відносного подовження елемента

Отже, виявляється, що коефіцієнт відносного подовження елемента, який на початку був розташований вздовж напрямку X_2 , дорівнює компоненті l_{22} . Точно так само для елементів, що у початковий момент лежали вздовж осей X_1 і X_3 , по формулі (3.59) коефіцієнти відносного подовження дорівнюють l_{11} і l_{33} , відповідно. Таким чином, діагональні члени тензора лінійних деформацій взагалі представляють собою коефіцієнти відносного подовження вздовж осей координат.

Фізична інтерпретація недіагональних членів l_{ij} базується на розгляді лінійних елементів, які спочатку лежать вздовж двох осей координат. На

рис. 3.5 лінійні елементи P_0Q_0 і P_0M_0 , які спочатку знаходилися на осях X_2 і X_3 , після деформації перетворюються відповідно в лінійні елементи PQ і PM в локальній системі координат з осями, паралельними вихідним, і початком у точці P . Спочатку прямий кут між лінійними елементами перетворюється на кут θ . За формулою (3.46) в припущенні теорії малих деформацій у першому наближенні одиничний вектор, що йде із точки P в точку Q , дорівнює

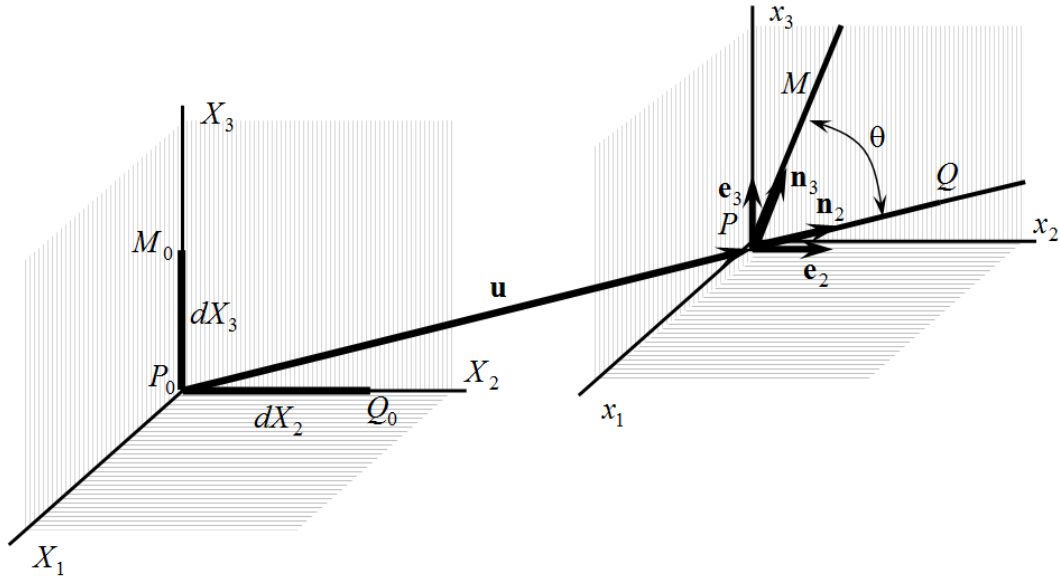


Рис. 3.5. Фізична інтерпретація недіагональних членів l_{ij}

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \mathbf{e}_3, \quad (3.61)$$

а одиничний вектор, що йде із P в M , дорівнює

$$\mathbf{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (3.62)$$

Тому

$$\cos\theta = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}, \quad (3.63)$$

або, нехтуючи членами більш високого порядку малості, отримуємо

$$\cos\theta = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2l_{23}. \quad (3.64)$$

Крім того, якщо розглянути зміну прямого кута між цими елементами $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ і враховуючи те, що в лінійній теорії кут γ_{23} є малою величиною, то можна записати

$$\gamma_{23} \approx \sin \gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23}. \quad (3.65)$$

Отже, недіагональні члени тензора лінійних деформацій дорівнюють половині величини зміни кута між двома спочатку ортогональними лінійними елементами. Такі компоненти деформації називаються *деформаціями зсуву*, а із-за множника 2 в (3.65) ці компоненти тензора деформації дорівнюють половині звичайних «технічних» деформацій зсуву.

Міркування, що були проведені для виявлення фізичного змісту компонент l_{ij} , можуть бути застосовані і для ейлерового тензора лінійних деформацій ε_{ij} . Основна відмінність полягає у виборі лінійних елементів, які за умови ейлерового підходу повинні бути направлені вздовж осей координат після настання деформації. Діагональні члени є коефіцієнтами відносного подовження, а недіагональні – деформаціями зсуву. Для деформацій, коли $\varepsilon_{ij} = l_{ij}$, різниці між ейлеровими і лагранжевими системами відліку не існує.

3.10. Коефіцієнт довжини. Інтерпретація скінченних деформацій

Важливою мірою деформації нескінченно малого лінійного елемента є відношення dx/dX , відомого під назвою *коефіцієнт довжини*. Цю величину можна визначити як для точки P_0 в недеформованому стані, так і для точки P в деформованому стані. Так, згідно (3.34) квадрат коефіцієнта довжини в точці P_0 для лінійного елемента, взятого вздовж одиничного вектора $\mathbf{m} = d\mathbf{X}/dX$, дається формулою

$$\left(\frac{dx}{dX} \right)_{P_0}^2 = \Lambda_{(\mathbf{m})}^2 = G_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} \text{ або } \Lambda_{(\mathbf{m})}^2 = \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m}. \quad (3.66)$$

Аналогічно, згідно (3.30) обернена величина квадрата коефіцієнта довжини для лінійного елемента в точці P , взятого вздовж одиничного вектора $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/dx$, дається формулою

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_{P_0}^2 = \frac{1}{\lambda_{(\mathbf{n})}^2} = C_{ij} \frac{dx_i}{dx} \frac{dx_j}{dx} \text{ або } \frac{1}{\lambda_{(\mathbf{n})}^2} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.67)$$

Для елемента, який спочатку розташований вздовж осі X_2 (див. рис. 3.4), $\mathbf{m} = \mathbf{e}_2$, і тому $dX_1/dX = dX_3/dX = 0$, $dX_2/dX = 1$, так що (3.66) набуває вигляду

$$\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}^2 = G_{22} = 1 + 2L_{22}. \quad (3.68)$$

Такіж самі результати отримуються і для $\Lambda_{(\mathbf{e}_1)}^2$ і $\Lambda_{(\mathbf{e}_3)}^2$.

Для елемента, паралельного x_2 після деформації, формула (3.67) дає

$$1/\lambda_{(\mathbf{e}_2)}^2 = C_{22} = 1 - 2E_{22} \quad (3.69)$$

і аналогічні вирази можна отримати для $1/\lambda_{(\mathbf{e}_1)}^2$ і $1/\lambda_{(\mathbf{e}_3)}^2$.

У загальному випадку $\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}^2$ не дорівнює $\lambda_{(\mathbf{e}_2)}^2$, оскільки елемент до деформації розташований вздовж осі X_2 , не обов'язково буде після деформації спрямований вздовж осі x_2 .

Поняття коефіцієнта довжини дає основу для інтерпретації тензорів скінченних деформацій. Так, зміна довжини, що припадає на одиницю початкової довжини (*відносне подовження*), визначається відношенням

$$\frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\mathbf{m})} - 1, \quad (3.70)$$

а для елемента P_0Q_0 , розташованого вздовж осі X_2 (див. рис. 3.4), відносне подовження складає

$$L_{(2)} = \Lambda_{(\mathbf{e}_2)} - 1 = \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1. \quad (3.71)$$

Цей результат можна також отримати безпосередньо із (3.36). В теорії малих деформацій формула (3.71) зводиться до (3.60). Відносні подовження $L_{(1)}$ і $L_{(3)}$ виражаються подібними рівностями через L_{11} і L_{33} , відповідно.

Зміна кута між двома малими лінійними елементами, зображеними на рис. 3.5, характеризується величиною $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ і виражається через $\Lambda_{(e_2)}$ і $\Lambda_{(e_3)}$ таким чином

$$\sin \gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\Lambda_{(e_2)}\Lambda_{(e_3)}} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1+2L_{22}}\sqrt{1+2L_{33}}}. \quad (3.72)$$

Якщо деформації малі, то (3.72) зводиться до (3.65).

3.11. Тензори коефіцієнтів довжини. Тензор повороту

У тензорному численні існує так званий *полярий розклад* довільного неособливого тензора другого рангу. Він полягає в тому, що такий тензор можна представити добутком симетричного додатнього (з додатніми головними компонентами) тензора другого рангу на тензор другого рангу з ортогональною матрицею. Якщо таке представлення застосувати до градієнта деформації $\hat{\mathbf{F}}$, то в результаті отримаємо

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = R_{ik} S_{kj} = T_{ik} R_{kj} \text{ або } \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}, \quad (3.73)$$

де $\hat{\mathbf{R}}$ – ортогональний тензор повороту, а $\hat{\mathbf{S}}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ – додатні симетричні тензори, які називаються *правим* і *лівим тензорами коефіцієнта довжини*, відповідно.

Інтерпретацію (3.73) неважко отримати, якщо скористатися (3.33) $dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j$. Підставляючи сюди скалярні добутки, взяті із формули (3.73), отримуємо

$$dx_i = R_{ik} S_{kj} dX_j = T_{ik} R_{kj} dX_j \text{ або } d\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.74)$$

За допомогою цих виразів для перетворення dX_i в dx_i (див. рис. 3.2) фізично інтерпретувати це перетворення можна двояко. Відповідно до першої форми запису правої частини (3.74), це перетворення складається із розтягування ($\hat{\mathbf{S}}$) і потім повороту з наступним переносом як твердого тіла в точку P . За другої форми запису спочатку відбувається паралельний перенос як твердого тіла в точку P , потім поворот і, на кінець, розтягування ($\hat{\mathbf{T}}$). Паралельний перенос не змінює, відповідно, компонент вектора відносно декартових осей X_i і x_i .

3.12. Властивості перетворення тензорів деформацій

Всі тензори деформацій $L_{ij}, E_{ij}, l_{ij}, \varepsilon_{ij}$, які визначено відповідно формулами (3.37), (3.39), (3.43) і (3.43), є декартовими тензорами другого рангу. Відповідно до цього для сукупності повернутих осей X'_i , які мають матрицю перетворення $[b_{ij}]$ відносно сукупності локальних осей без штрихів X_i у точці P_0 (рис. 3.6, а), компоненти L'_{ij} і l'_{ij} виражаються формулами

$$L'_{ij} = b_{ip} b_{jq} L_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{L}}'_G = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_G \cdot \hat{\mathbf{B}}_c, \quad (3.75)$$

$$l'_{ij} = b_{ip} b_{jq} l_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{L}}' = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_c. \quad (3.76)$$

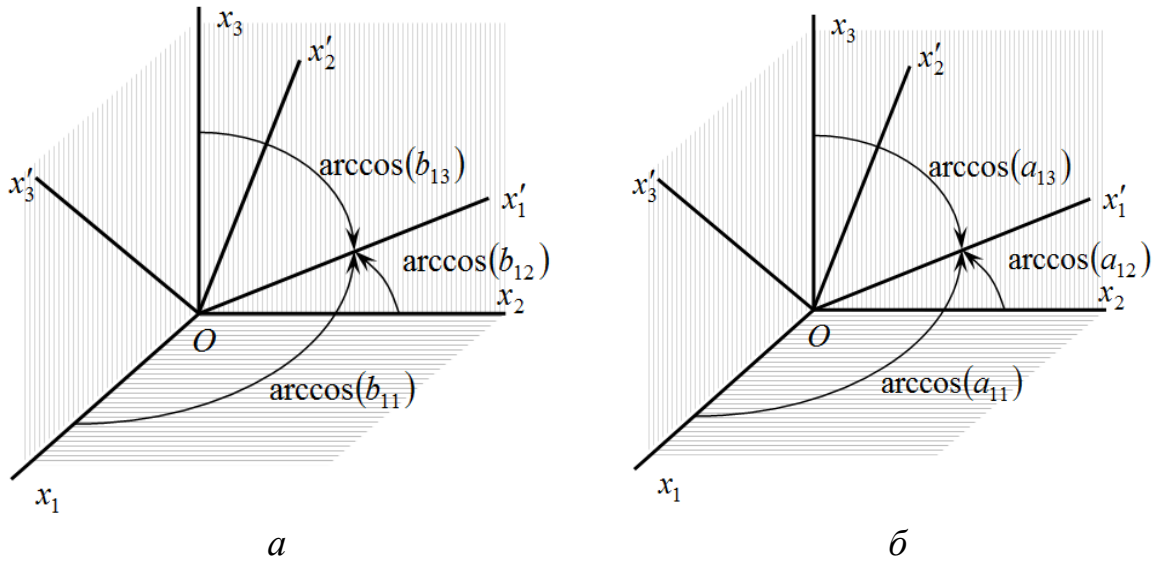


Рис. 3.5. Перетворення тензорів деформацій

Так само для повернутих осей x'_i , що мають матрицю перетворення $[a_{ij}]$ відносно осей без штрихів (рис. 3.6, б), компоненти E'_{ij} і ε'_{ij} мають вигляд

$$E'_{ij} = a_{ip} a_{jq} E_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{E}}'_A = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_A \cdot \hat{\mathbf{A}}_c, \quad (3.77)$$

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{E}}' = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_c. \quad (3.78)$$

За аналогією з поверхнею напруження (див. п. 2.9), можна ввести *лагранжеву і ейлереву поверхні лінійних деформацій (квадрики деформацій)* відносно локальних декартових координат η_i і ζ_i в точках P_0 і P , відповідно (рис. 3.7). Так, рівняння *лагранжевої поверхні деформації* має вигляд

$$l_{ij}\eta_i\eta_j = \pm h^2 \text{ або } \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\eta} = \pm h^2, \quad (3.79)$$

а елеревої поверхні деформації –

$$\varepsilon_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm g^2 \text{ або } \boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \pm g^2. \quad (3.80)$$

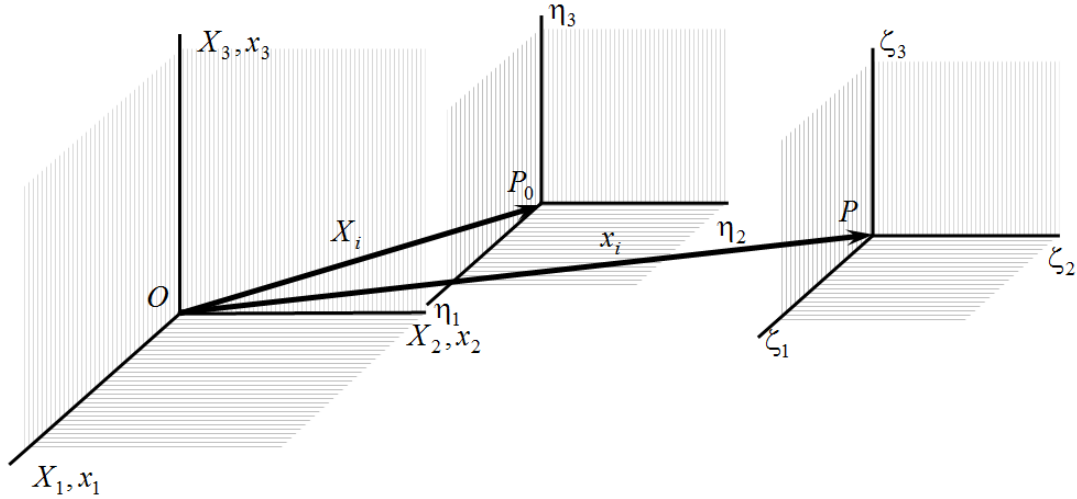


Рис. 3.7. До визначення лагранжевої і ейлерової поверхнь лінійних деформацій

Існує дві наступні властивості лагранжевої (ейлерової) поверхні лінійних деформацій.

1. Коефіцієнт подовження вздовж деякого променя, віднесеного до початкової (кінцевої) довжини лінійного елемента, обернено пропорційний квадрату відстані від центра поверхні деформації $P_0\{P\}$ до точки на цій поверхні.
2. Відносне переміщення сусідньої частинки, що розташована в точці $Q_0\{Q\}$, паралельно нормалі до поверхні деформацій в точці її перетину з лінією $P_0Q_0\{PQ\}$.

Наступним кроком у вивченні природи локальних деформацій в околі точки P_0 є визначення *еліпсоїда деформацій* у цій точці. Для цього візьмемо в недеформованому середовищі матеріальний об'єм, який обмежено поверхнею у вигляді нескінченно малої сфери радіуса R . Рівняння цієї поверхні в матеріальних координатах згідно з формулою (3.28) має вигляд

$$(dX)^2 = \delta_{ij}dX_idX_j = R^2 \text{ або } (dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{X} = R^2. \quad (3.81)$$

Після деформації рівняння поверхні того ж самого матеріального об'єму з використанням формули (3.30) виявляється таким

$$(dX)^2 = C_{ij} dx_i dx_j = R^2 \text{ або } (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x} = R^2, \quad (3.82)$$

і визначає еліпсоїд, відомий як *матеріальний еліпсоїд деформацій*. Сферичний в недеформованому стані об'єм суцільного середовища перетворюється під час деформації в еліпсоїд з центром у точці P_0 . Тобто можна також стверджувати, що нескінченно малий сферичний об'єм у точці P деформованого середовища в недеформованому початковому стані був еліпсоїдним. Рівняння цих поверхонь у локальних координатах отримується за допомогою формули (3.32) для сфери у вигляді

$$(dx)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = r^2 \text{ або } (dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot d\mathbf{x} = r^2, \quad (3.83)$$

і за допомогою формули (3.34) для еліпсоїда у вигляді

$$(dx)^2 = G_{ij} dX_i dX_j = r^2 \text{ або } (dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{x} = r^2. \quad (3.84)$$

Еліпсоїд (3.84) називається *просторовим еліпсоїдом деформацій*. Такі еліпсоїди також називаються *еліпсоїдами деформації Коші*.

3.13. Головні деформації. Інваріанти деформації. Об'ємне розширення

Лагранжевий та ейлеревий тензори лінійних деформацій є симетричними декартовими тензорами другого рангу, і тому визначення їх головних напрямків (головних осей) головних значень (головних деформацій) ведеться стандарним методом (див. п. 1.19). З фізичної точки зору головний напрям тензору деформації – це такий, для якого орієнтація елемента у даній точці не змінюється під час чистої деформації. Головне значення деформації є просто віднесене до одиниці довжини відносне переміщення (коефіцієнт відносного подовження) вздовж головного напрямку.

Для лагранжевого тензора деформацій l_{ij} вектор відносного переміщення на одиницю довжини дано формулою (3.47), яку можна записати так:

$$\frac{du_i}{dX} = (l_{ij} + W_{ij}) v_j \text{ або } \frac{d\mathbf{u}}{dX} = (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.85)$$

Позначимо через $l_i^{(n)}$ величину $\frac{du_i}{dX}$ для лінійного елемента в напрямку одиничного вектора n_i . Для чистої деформації ($W_{ij} \equiv 0$) із (3.85) витікає

$$l_i^{(n)} = l_{ij} n_j \text{ або } \mathbf{l}^{(n)} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.86)$$

Якщо напрямок n_i головний, а l – відповідне головне значення тензора l_{ij} , то

$$l_i^{(n)} = l n_i = l \delta_{ij} n_j \text{ або } \mathbf{l}^{(n)} = l \mathbf{n} = \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.87)$$

Прирівнюючи праві частини (3.86) і (3.87), приходимо до співвідношення

$$(l_{ij} - \delta_{ij} l) n_j = 0 \text{ або } (\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.88)$$

яке разом з умовою $n_i n_i = 1$ на одиничні вектори n_i дає необхідні рівняння для визначення головного значення деформації l і напрямних косинусів n_i відповідного головного напрямку. Не тривіальні розв'язки системи рівнянь (3.88) існують тільки тоді, коли визначник із коефіцієнтів дорівнює нулю, тобто

$$|l_{ij} - \delta_{ij} l| = 0 \text{ або } |\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{l}}| = 0, \quad (3.89)$$

що після розкриття визначника призводить до характеристичного рівняння для тензора l_{ij} . Це кубічне рівняння вигляду

$$l^3 - I_L l^2 + \Pi_L l - \Pi_L = 0, \quad (3.90)$$

де

$$I_L = l_{ii} = \text{tr}(\mathbf{L}), \quad \Pi_L = 1/2(l_{ii} l_{jj} - l_{ij} l_{ji}), \quad \Pi_L = |l_{ij}| = \det \mathbf{L}, \quad (3.91)$$

– відповідно перший, другий і третій *лагранжеві інваріанти деформації*. Корені рівняння (3.90) є головними значеннями деформації і позначаються $l_{(1)}, l_{(2)}, l_{(3)}$.

Перший інваріант лагранжевого тензора деформацій є сумою головних деформацій

$$I_L = l_{ii} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} \quad (3.92)$$

і має важливий фізичний зміст. Щоб виявити це, розглянемо елементарний прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні головним напрямам

деформації (рис. 3.8). Зміна об'єму на одиницю початкового об'єму цього елемента називається *коефіцієнтом об'ємного розширення* і за визначенням дорівнює

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1(1+l_{(1)})dX_2(1+l_{(2)})dX_3(1+l_{(3)}) - dX_1dX_2dX_3}{dX_1dX_2dX_3}. \quad (3.93)$$

В теорії малих деформацій це співвідношення в першому наближенні дає таку суму

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = I_L. \quad (3.94)$$

Що стосується ейлерового тензора деформацій ε_{ij} і відповідного вектора відносного переміщення $\varepsilon_i^{(n)}$, головні напрями і головні деформації $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}$ визначаються точно так само, як їх лагранжеві аналоги. Ейлерові інваріанти деформації виражаються таким чином:

$$I_E = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)}, \quad II_E = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)}, \quad III_E = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}. \quad (3.95)$$

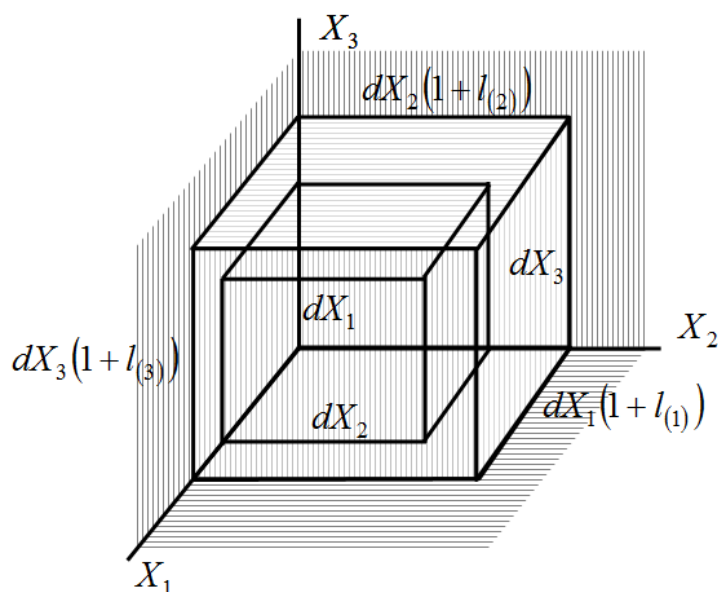


Рис. 3.8. До визначення об'ємної деформації

Для об'ємного розширення у ейлеревій системі відліку за малих деформацій отримуємо

$$D = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = I_E. \quad (3.96)$$

3.14. Кульовий тензор і девіатор деформацій

Лагранжевий і ейлерів тензори *лінійних* деформацій можна розкласти на *кульові* тензори і *девіатори* тим самим способом, як це було виконано для тензора напруження. Якщо компоненти лагранжевого і ейлерового девіаторів позначити через d_{ij} і e_{ij} відповідно, то шукані вирази будуть мати вигляд

$$l_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij} l_{kk}/3 \text{ або } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_D + \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\mathbf{L}})/3 \quad (3.97)$$

і

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{kk}/3 \text{ або } \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_D + \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\mathbf{E}})/3. \quad (3.98)$$

Перші інваріанти d_{ii} і e_{ii} девіаторів деформацій тотожно рівні нулю. Тому девіатори описують деформацію зсуву, для якої об'ємне розширення дорівнює нулю.

3.15. Плоска деформація. Круги Мора для деформації

Коли одна і тільки одна із головних деформацій у точці суцільного середовища рівна нулю, кажуть, що в цій точці існує стан *плоскої деформації*. Якщо в ейлеровому описанні (лагранжевий опис проводиться точно так само) за вісь x_3 прийняти напрям нульової головної деформації, то плоска деформація відбувається у площинах, паралельних x_1x_2 і характеризуються тензором лінійних деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Якщо x_1 і x_2 – теж головні напрями, то тензор деформацій приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Для плоскої деформації, яка перпендикулярна до осі x_3 , вектор переміщення є функцією тільки x_1 і x_2 . Відповідні компоненти переміщення для цього випадку позначимо так:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 = C; \quad (3.101)$$

тут C – константа, яка зазвичай приймається рівною нулю.

Підстановка цих значень у формулу (3.43), що визначає ε_{ij} , дає тензор плоскої деформації того ж вигляду, що і (3.99).

Графічно стан плоскої деформації у точці описується *кругами Мора для деформації* точно так як і для кругів Мора поля напруження. При цьому тензор деформацій представляють у вигляді

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

Тут γ_{ij} (для $i \neq j$) – компоненти так званих «технічних деформацій» зсуву, які рівні подвійним тензорним компонентам деформації зсуву.

Під час експериментального дослідження, що включає вимірювання деформацій у тих точках поверхні тіла, де деформований стан можна вважати локально плоским, три нормальних подовження вимірюються за допомогою «розетки деформацій» (тобто набору радіально розташованих датчиків, які вимірюють деформації в точці за різними напрямками), а діаграма кругів Мора будується за цими подовженнями. За аналогією з кругами Мора для плоских напружень типова діаграма для плоскої деформації наведена на рис. 3.9.

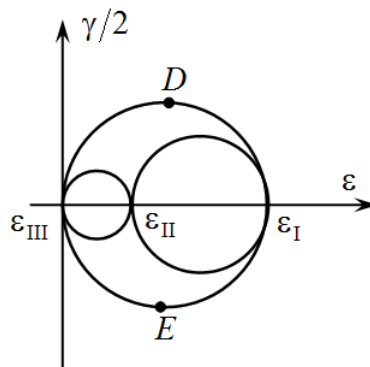


Рис. 3.9. Круги Мора для плоскої деформації

Упорядковані головні деформації $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ позначені тими ж буквами на діаграмі (див. рис. 3.9), а величини максимальних деформацій зсуву відповідають точкам D і E .

3.16. Рівняння сумісності для лінійних деформацій

Якщо компоненти деформації ε_{ij} задані в явному вигляді як функції координат, то шість незалежних рівнянь (3.43)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

можна розглядати як систему шести рівнянь у частинних похідних для визначення трьох компонент переміщення u_i . Система рівнянь є перевизначеною і в загальному випадку не має розв'язку за умови довільного вибору компонент деформації ε_{ij} . Значить, для того щоб існували однозначні і неперервні компоненти переміщення u_i , на компоненти деформацій повинні бути накладені деякі умови. Необхідні і достатні умови для існування такого поля переміщень виражаються такими рівняннями

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (3.103)$$

У системі рівнянь (3.103) міститься вісімдесят одне рівняння, але тільки шість із них різні. Ці шість рівнянь, за умови їх запису в розгорнутій індексній формі, виглядають так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

або

$$\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} \times \vec{\nabla} = 0.$$

Рівняння сумісності можна записати і для компонент лагранжевого тензора лінійних деформацій внаслідок очевидної аналогії з елеревою інтерпретацією, що наведена вище.

Для плоскої деформації, що відбувається у площинах, паралельних x_1x_2 , шість рівнянь (3.104) зводяться до одного

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} \times \vec{\nabla} = 0, \quad (3.105)$$

де $\hat{\mathbf{E}}$ – визначається за формулою (3.99).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які існують конфігурації суцільного середовища? Дайте визначення явищ деформації і течії.
2. Дайте визначення радіус-вектора та вектора переміщення.
3. Дайте фізичне тлумачення початкової та кінцевої конфігурацій середовища.
4. В чому полягають відмінності між Лагранжевим і ейлеревим описом руху.
5. Дайте визначення градієнта деформації та градієнта переміщення.
6. Дайте визначення тензора деформацій і тензора скінченних деформацій.
7. Наведіть формули для тензорів деформацій Коші і Гріна.
8. Наведіть формули для тензорів скінченних деформацій Ейлера і Альмансі.
9. На чому базується теорія малих деформацій? Що таке тензори нескінченно малих деформацій.
10. Яким чином визначаються відносно переміщення, тензор лінійного повороту, вектор повороту?
11. Дайте геометричний зміст тензорів лінійних деформацій.
12. Що таке коефіцієнт довжини? Наведіть фізичну інтерпретацію скінченних деформацій.
13. Дайте фізичний зміст тензора коефіцієнтів довжини і тензора повороту.

14. Наведіть властивості перетворення тензорів деформацій.
15. Опишіть властивості лагранжевої (ейлерової) поверхонь лінійних деформацій.
16. Дайте визначення головних деформацій, інваріантів деформації, об'ємного розширення.
17. Запишіть формули для визначення кульового тензора і девіатора деформацій.
18. Опишіть плоску деформацію. Дайте фізичний зміст кругів Мора для деформації.
19. Напишіть рівняння сумісності для лінійних деформацій.

4. РУХ І ТЕЧІЯ

4.1. Рух. Течія. Матеріальна похідна

Терміни *рух* і *течія* використовуються під час описання миттєвої або неперервної зміни конфігурації суцільного середовища. Іноді словом *течія* називають рух, що призводить до залишкової деформації, як, наприклад, в теорії пластичності. Однак під час вивчення рідин цей термін означає неперервний рух. Як було вказано в (3.14) і (3.15), рух деякого об'єму суцільного середовища можна виразити або в матеріальних координатах (лагранжеве представлення – система відліку)

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (4.1)$$

або, розв'язуючи ці рівняння в просторових координатах, отримати ейлереве представлення

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

Для існування обернених функцій (4.2) необхідно і достатньо, щоб якобіан

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \quad (4.3)$$

був відмінний від нуля. З фізичної точки зору лагранжевий спосіб описання фіксує увагу на індивідуальних частинках континууму, в той час як під час ейлерового підходу цікавляться певною областю простору, яка зайнята суцільним середовищем.

Оскільки (4.1) і (4.2) взаємно обернені функції, будь-яка фізична властивість континууму, що належить індивідуальній частинці (в лагранжевому або матеріальному описанні), може також бути виражена для певного місця в просторі, зайнятого цією частинкою (в ейлеровому або просторовому описанні). Наприклад, якщо в матеріальних змінних дана густина ρ

$$\rho = \rho(X_i, t) \text{ або } \rho = \rho(\mathbf{X}, t), \quad (4.4)$$

то просторове представлення її отримується заміною $\mathbf{X}$ в цьому співвідношенні функцією із (4.2). Таким чином, у просторових (ейлеревих) координатах густина дорівнює

$$\rho = \rho(X_i(\mathbf{x}, t), t) = \rho^*(x_i, t) \text{ або } \rho = \rho(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \rho^*(\mathbf{x}, t), \quad (4.5)$$

де символ ρ^* використано для того, щоб підкреслити, що вигляд функції в ейлеревому представленні не обов'язково такий самий, як в лагранжевому.

Швидкість зміни в часі будь-якої властивості в індивідуальних частинках рухомого середовища називається *матеріальною* (або *індивідуальною*) *похідною* за часом від цієї величини. Матеріальну похідну (*субстанціональну*, або *повну* похідну) можна представити собі як швидкість зміни розглядуваної величини за часом, яка була б виміряна спостерігачем, що рухається разом з індивідуальною частинкою. Миттєве положення частинки x_i саме є властивістю частинки. Матеріальна похідна за часом від положення частинки є її *миттєва швидкість*. Тому, приймаючи символ $\frac{d}{dt}$, $\left(\frac{D}{Dt}\right)$ або точку над літерою для позначення операції матеріального диференціювання, отримуємо визначенн вектора швидкості

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \text{ або } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (4.6)$$

Взагалі, якщо $P_{ij\dots}$ – будь-яка скалярна, векторна або тензорна властивість континууму, яку можна описати локальною функцією координат, і якщо в лагранжевому представленні

$$P_{ij\dots} = P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t), \quad (4.7)$$

то індивідуальна похідна за часом від цієї величини має вигляд

$$\frac{dP_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Праву частину (4.8) іноді записують у формі $\left[\frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}\right]_{\mathbf{x}}$, щоб підкреслити, що координати $\mathbf{X}$ вважаються сталими, тобто під час обчислення

похідної мають діло з одними й тими ж частинками. Якщо деяка властивість задана функцією $P_{ij\dots}$ у просторових координатах

$$P_{ij\dots} = P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t), \quad (4.9)$$

то обчислення матеріальної похідної призводить до виразу

$$\frac{dP_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (4.10)$$

де другий член у правій частині з'являється із-за того, що індивідуальні частинки змінюють своє місцезнаходження в просторі. Перший член в правій частині (4.10) характеризує швидкість зміни даної властивості у фіксованій точці простору і відповідно називається *локальною швидкістю зміни (локальною складовою похідної)*. Цей член іноді записують у вигляді

$$\left[\frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}}, \text{ щоб підкреслити, що } \mathbf{x} \text{ вважається сталим при цьому}$$

диференціюванні. Другий член у правій частині рівності (4.10) називається *конвективною швидкістю зміни (конвективною складовою похідної)*, оскільки він виражає вклад, обумовлений рухом частинок у змінному полі даної властивості.

Приймаючи до уваги (4.6), для індивідуальної похідної можна написати

$$\frac{dP_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}, \quad (4.11)$$

що зразу наводить на думку ввести *оператор матеріального диференціювання за часом*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ або } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad (4.12)$$

який використовується під час обчислення індивідуальних похідних від величин, записаних у просторових координатах.

4.2. Швидкість. Прискорення. Миттєве поле швидкості

Визначення поля швидкості дано формулою (4.6) у виді $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ (або $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$). Інше визначення того ж вектора можна отримати з (3.11), згідно з яким $x_i = u_i + X_i$ (або $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$). Тоді швидкість можна визначити так

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(u_i + X_i)}{dt} = \frac{du_i}{dt} \text{ або } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (4.13)$$

оскільки $\mathbf{X}$ не залежить від часу.

Якщо в (4.13) переміщення виражено у лагранжевих змінних $u_i = u_i(\mathbf{X}, t)$, то

$$v_i \equiv \dot{u}_i = \frac{du_i(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \text{ або } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Якщо, з іншого боку, переміщення задано в ейлеревій формі $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$, то

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{x}, t) &\equiv \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{du_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \\ \text{або } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Формулою (4.15) швидкість задається в неявному виді, оскільки вона входить і як множник у другий член правої частини. Кажуть, що функції

$$v_i = v_i(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (4.16)$$

представляють *поле швидкості*.

Матеріальна похідна від швидкості за часом є *прискорення*. Якщо швидкість задана в лагранжевій формі (4.14), то

$$a_i \equiv \dot{v}_i \equiv \frac{dv_i(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \text{ або } \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Якщо ж швидкість виражена в ейлеревій формі (4.15), то

$$a_i(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}$$

$$\text{або } \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$
(4.18)

4.3. Траєкторії. Лінії току. Усталений рух

Траєкторія – це лінія, за якою прямує частинка в процесі її руху або течії. *Лінією току* для поля швидкості в деякий момент часу називається крива, дотична до якої в будь-якій точці співпадає за напрямком зі швидкістю в цій точці. Рух континууму називається *усталеним* (або *стаціонарним*), якщо поле швидкості не залежить від часу, так що $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. Для усталеного руху лінії току і траєкторії збігаються.

4.4. Швидкість деформації. Завихреність. Прирошення деформації

Просторовий градієнт миттєвого поля швидкості дає *тензор градієнта швидкості* $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (або Y_{ij}). Цей тензор можна розкласти на симетричну і антисиметричну частини таким чином

$$Y_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + V_{ij}$$

$$\text{або } \hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{V}}.$$
(4.19)

Симетричний тензор

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}),$$
(4.20)

називається *тензором швидкості деформації*.

Антисиметричний тензор

$$V_{ij} = -V_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}),$$
(4.21)

називається тензором *завихреності* або *вихору*.

Легко показати, що тензор швидкості деформації представляє собою матеріальну похідну за часом від ейлерового тензора лінійних деформацій. Так, якщо у виразі

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}) \quad (4.22)$$

поміняти місцями операції диференціювання за координатами і часом, тобто замінити $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ на $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, то рівність (4.22) прийме вид

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{D}}. \quad (4.23)$$

Так само можна показати, що тензор вихору дорівнює матеріальній похідній за часом від ейлерового тензора лінійного повороту. Цей результат виражається формулою

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = V_{ij} \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{\Omega}}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{V}}. \quad (4.24)$$

Рівність (4.23) можна переписати у вигляді

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ij} dt \text{ або } d\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{D}} dt. \quad (4.25)$$

Ліва частина (4.25) представляє собою компоненти тензора, які широко використовуються в теорії пластичності і які дістали назву *прирошення деформації*.

4.5. Фізична інтерпретація тензорів швидкості деформації і завихреності

На рис. 4.1 швидкості сусідніх частинок, що знаходяться в точках P і Q рухомого об'єму суцільного середовища, позначено v_i і $v_i + dv_i$, відповідно. Таким чином, швидкість частинки Q відносно точки P рівна

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \mathbf{v} \vec{\nabla} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.26)$$

де частинні похідні обчислені в точці P . Цей вираз можна записати через D_{ij} і V_{ij}

$$dv_i = (D_{ij} + V_{ij}) dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{V}}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.27)$$

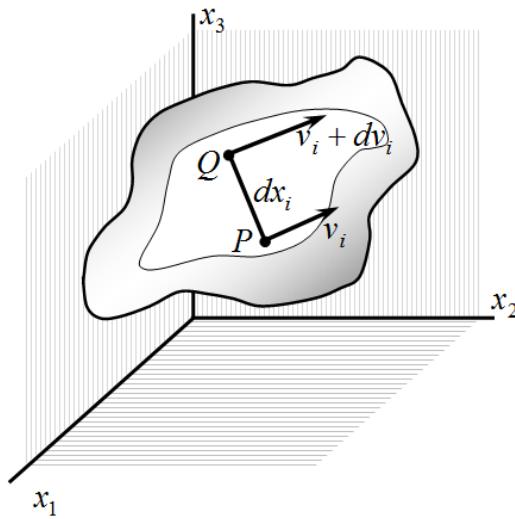


Рис. 4.1. До пояснення фізичної інтерпретації тензорів швидкості деформації і завихреності

Якщо тензор швидкості деформації тотожно рівний нулю ($D_{ij} \equiv 0$), то

$$dv_i = V_{ij} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \hat{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.28)$$

і рух в околі точки P буде *обертання абсолютно твердого тіла*.

Поле швидкості називають безвихровим, якщо тензор завихреності обертається в нуль у всіх його точках.

Асоційований з тензором завихреності вектор визначається співвідношенням

$$q_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \text{ або } \mathbf{q} = \vec{\nabla} \times \mathbf{v}, \quad (4.29)$$

і називається *вектором завихреності*. Символічна форма запису (4.29) показує, що вектор завихреності отримується дією оператора ротор (rot або curl) на поле швидкості. Вектор, рівний половині вектора $\mathbf{q}$,

$$\Omega_i = \frac{1}{2} q_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \text{ або } \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \mathbf{v}, \quad (4.30)$$

називається *вектором вихору швидкості*. Під час обертання абсолютно твердого тіла, як отримано в (4.28), відносна швидкість частинки, сусідньої з P і, яка знаходиться від неї на відстані dx_i , дається формулою

$$dv_i = \varepsilon_{ijk} \Omega_j dx_k \text{ або } d\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times d\mathbf{x}. \quad (4.31)$$

Компоненти тензора швидкості деформації мають такий фізичний зміст. Діагональні елементи D_{ij} – це *швидкість відносного подовження* відрізків, що розташовані вздовж осей координат. Так, для чистої деформації з (4.27) витікає, що

$$dv_i = D_{ij} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \hat{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.32)$$

а так швидкість зміни довжини лінійного елемента dx_i , що припадає на одиницю миттєвої довжини, є

$$d_i^{(v)} = \frac{dv_i}{dx} = D_{ij} \frac{dx_j}{dx} = D_{ij} v_j \text{ або } \mathbf{d}^{(v)} = \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.33)$$

то швидкість подовження в напрямку одиничного вектора v_i дорівнює

$$d = d_i^{(v)} v_i = D_{ij} v_j v_i \text{ або } d = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.34)$$

Якщо v_i – напрям будь-якої осі координат, наприклад $\mathbf{e}_2$, то, згідно (4.34),

$$d = D_{22} \text{ або } d = \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_2 = D_{22}. \quad (4.35)$$

Недіагональні елементи D_{ij} характеризують *швидкість зсуву* і є мірою швидкості зміни прямих кутів між напрямками відрізків, що розташовані вздовж осей координат.

Внаслідок того, що D_{ij} є симетричним тензором другого рангу, для нього існують такі поняття, як *головні осі, головні значення, інваріанти, поверхня*

швидкості деформації і девіатор швидкості деформації. Крім того, для компонент тензора швидкості деформації можна написати рівняння сумісності, аналогічні рівнянням, що отримано в розділі 3 для тензора лінійних деформацій.

4.6. Матеріальні похідні від елемента об'єму, елемента поверхні і лінійного елемента

В результаті руху з деякого початкового стану в момент $t=0$ до актуального стану частинок суцільного середовища в момент t , які спочатку займали елементарний об'єм dV_0 і зайняли об'єм dV . Якщо початковий елемент об'єму взятий у вигляді прямокутного паралелепіпеду (рис. 4.2), то, відповідно до (1.10),

$$dV_0 = dX_1 \mathbf{e}_1 \times dX_2 \mathbf{e}_2 \cdot dX_3 \mathbf{e}_3 = dX_1 dX_2 dX_3. \quad (4.36)$$

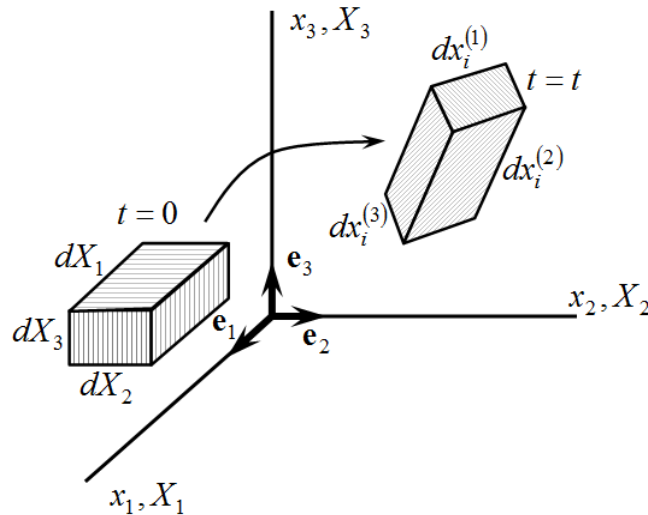


Рис. 4.2. Початковий і поточний (актуальний) стан елементарного об'єму континууму

Під час руху цей паралелепіпед переміщається і викривлюється, але із-за неперервності руху не руйнується. Дійсно, внаслідок зв'язку (3.33) $dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j$ між матеріальними і просторовими лінійними елементами, «рідкий відрізок», який раніше був dX_1 , тепер утворює нескінченно малий лінійний відрізок $dx_i^{(1)} = (\partial x_i / \partial X_1) dX_1$. Аналогічно dX_2 переходить в $dx_i^{(2)} = (\partial x_i / \partial X_2) dX_2$, а dX_3 перетворюється в $dx_i^{(3)} = (\partial x_i / \partial X_3) dX_3$. Тому нескінченно малий елемент об'єму dV представляє собою скошений паралелепіпед з ребрами $dx_i^{(1)}, dx_i^{(2)}, dx_i^{(3)}$. Величина його об'єму обчислюється як змішаний добуток

$$dV = d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)} \cdot d\mathbf{x}^{(3)} = \varepsilon_{ijk} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} dx_k^{(3)}. \quad (4.37)$$

Очевидно, що dV дорівнює

$$dV = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0, \quad (4.38)$$

де $J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right|$ – якобіан, який визначено формулою (4.3).

Тепер, використовуючи (4.38), можна отримати матеріальну похідну від dV за часом

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{d}{dt}(J dV_0) = \frac{dJ}{dt} dV_0, \quad (4.39)$$

оскільки dV_0 від часу не залежить, так що $\frac{d}{dt}(dV_0) = 0$. Можна показати, що матеріальна похідна від якобіану J рівна

$$\frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ або } \dot{J} = J \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.40)$$

і, відповідно, (4.39) приймає вид

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV \text{ або } \frac{d}{dt}(dV) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (4.41)$$

Нескінченно малий елемент поверхні, що має в початковому стані площу dS^0 , можна задати (разом з його орієнтацією) за допомогою одиничного вектора його нормалі n_i виразом $dS^0 n_i$. Під час руху середовища частинки, які спочатку складали площадку $dS^0 n_i$, в розглядуваному стані заповнюють елемент площадки $dS n'_i$ або dS_i . Можна показати, що

$$dS_i = J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} dX_j \text{ або } d\mathbf{S} = J d\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \vec{\nabla}, \quad (4.42)$$

звідки знаходимо матеріальну похідну елемента площі

$$\frac{d}{dt}(dS_i) = \frac{d}{dt} \left(J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dS_i - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dS_j. \quad (4.43)$$

Матеріальну похідну від квадрата довжини нескінченно малого лінійного елемента dx_i можна обчислити аналогічним чином

$$\frac{d}{dt}(dx^2) = \frac{d}{dt}(dx_i dx_i) = 2 \frac{d(dx_i)}{dt} dx_i. \quad (4.44)$$

Але, оскільки, $dx_i = (\partial x_i / \partial X_j) dX_j$, будемо мати

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (4.45)$$

і тоді (4.44) прийме вид

$$\frac{d}{dt}(dx^2) = 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_i \text{ або } \frac{d}{dt}(dx^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.46)$$

Вираз у правій частині в індексній формі (4.46) симетричний за індексами i і k , і, відповідно, можна записати

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i dx_k = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k \quad (4.47)$$

або, приймаючи до уваги (4.20), отримуємо

$$\frac{d}{dt}(dx^2) = 2 D_{ij} dx_i dx_j \text{ або } \frac{d}{dt}(dx^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x}. \quad (4.48)$$

4.7. Матеріальні похідні від інтегралу по об'єму, інтегралу по поверхні і лінійного інтегралу

Не всі властивості континууму можна задати для індивідуальної частинки функцією її координат так, як це зроблено в (4.7) і (4.9), Деякі властивості визначаються інтегралами по скінченній частині континууму. Нехай,

наприклад, будь-яка скалярна, векторна або тензорна властивість представлена інтегралом за об'ємом

$$P_{ij\dots}(t) = \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV, \quad (4.49)$$

де V – об'єм, який займає частина розглядуваного суцільного середовища в момент t .

Матеріальна похідна від $P_{ij\dots}(t)$ дорівнює

$$\frac{d}{dt} [P_{ij\dots}(t)] = \frac{d}{dt} \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV, \quad (4.50)$$

а оскільки інтегрування виконується на певній частині континууму, операції диференціювання і інтегрування можна міняти місцями. Таким чином,

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{d}{dt} [P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)] dV. \quad (4.51)$$

Після виконання диференціювання з врахуванням (4.41) приходимо до такої рівності

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{dP_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} + P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \right] dV. \quad (4.52)$$

Оператор індивідуальної похідної, визначений формулою (4.12) як $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_p \frac{\partial}{\partial x_p}$. Тоді рівність (4.52) можна надати вигляду

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{dP_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_p} (v_p P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)) \right] dV. \quad (4.53)$$

За теоремою Гауса-Остроградського (1.157) перетворимо другий член у правій частині (4.53) в інтеграл по поверхні. В результаті отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_V P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{dP_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} dV + \int_S v_p [P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)] dS_p. \quad (4.54)$$

Це співвідношення стверджує, що швидкість зміни деякої величини $P_{ij...}(t)$ в частині суцільного середовища, який займає в даний момент об'єм V , дорівнює сумі змін цієї величини у всіх точках всередині V плюс потік величини $P_{ij...}^*(t)$ через поверхню S , яка обмежує об'єм V .

Процедура визначення матеріальних похідних від інтегралу по поверхні і лінійного інтегралу взагалі таж сама, що була виконана для інтегралу за об'ємом. Так для будь-якої тензорної властивості суцільного середовища, яка виражається інтегралом по поверхні

$$Q_{ij...}(t) = \int_S Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dS_p, \quad (4.55)$$

де S – поверхня, що зайнята в момент t частиною континууму, який розглядається.

Тоді за аналогією з (4.50), (4.51) будемо мати

$$\frac{d}{dt} \int_S Q_{ij...}^*(t) dS_p = \int_S \frac{d}{dt} [Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)] dS_p, \quad (4.56)$$

Звідки, враховуючи (4.43), отримуємо правило диференціювання підінтегральної функції по поверхні

$$\frac{dQ_{ij...}(t)}{dt} = \int_S \left[\frac{dQ_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)}{dt} + \frac{\partial v_q}{\partial x_q} Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) \right] dS_p - \int_S \left[Q_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right] dS_q. \quad (4.57)$$

Для величин, що виражені лінійним інтегралом типу

$$R_{ij...}(t) = \int_C R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dx_p, \quad (4.58)$$

матеріальна похідна дорівнює

$$\frac{d}{dt} [R_{ij...}(t)] = \frac{d}{dt} \int_C R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t) dx_p = \int_C \frac{d}{dt} [R_{ij...}^*(\mathbf{x}, t)] dx_p. \quad (4.59)$$

Виконуючи вказане диференціювання в правій частині (4.59) і враховуючи (4.45), знаходимо матеріальну похідну лінійного інтегралу

$$\frac{dR_{ij\dots}(t)}{dt} = \int_C \frac{d[R_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)]}{dt} dx_p + \int_C \frac{\partial v_p}{\partial x_q} [R_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t)] dx_q. \quad (4.60)$$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Дайте поняття руху, течії. Дайте визначення матеріальної похідної.
2. Дайте визначення швидкості, прискорення, миттєвого поля швидкості.
3. Наведіть визначення траєкторії, лінії току, усталеного руху.
4. Що таке швидкість деформації, завихреність, приращення деформації?
5. Дайте фізичну інтерпретацію тензорів швидкості деформації і завихреності.
6. Що таке матеріальні похідні від елемента об'єму, елемента поверхні і лінійного елемента?
7. Що таке початковий і поточний (актуальний) стан елементарного об'єму континууму?
8. Що таке матеріальні похідні від інтегралу по об'єму, інтегралу по поверхні і лінійного інтегралу?

5. ЗАКОНИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

5.1. Закон збереження маси. Рівняння нерозривності

Усякий матеріальний континуум володіє властивістю, яка називається *масою*. Сумарна маса деякої частини суцільного середовища, що займає в момент часу t об'єм простору V , виражається інтегралом

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (5.1)$$

де $\rho(\mathbf{x}, t)$ – неперервна функція координат, яка називається *густиною*.

Закон збереження маси стверджує, що маса виділеної частини середовища лишається сталою величиною і, відповідно, матеріальна похідна від (5.1) дорівнює нулю. Якщо в формулі (4.52) покласти $P_{ij\dots}^*(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$, то отримаємо вираз для швидкості зміни маси

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV = 0. \quad (5.2)$$

Оскільки ця рівність вірна для довільного об'єму V , підінтегральний вираз теж повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (5.3)$$

Це рівняння називається *рівнянням нерозривності*. Розкриваючи оператор матеріальної похідної, можна отримати іншу форму запису рівняння нерозривності

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.4)$$

У разі *нестисливого* середовища густина маси кожної його частинки не залежить від часу, тобто $\frac{d\rho}{dt} = 0$, і рівняння (5.3) набуває вигляду

$$v_{k,k} = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.5)$$

Поле швидкості $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ в нестисливому середовищі можна представити виразом

$$v_i = \varepsilon_{ijk} s_{k,j} \text{ або } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{s}, \quad (5.6)$$

де $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ називається *векторним потенціалом* $\mathbf{v}$.

Рівняння нерозривності можна записати в лагранжевій або матеріальній формі. Для закону збереження маси необхідно, щоб виконувалася рівність

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{x}, 0) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (5.7)$$

У (5.7) обидва інтеграли взяті по одним й тим самим частинкам середовища, тобто V – це об’єм, який займає континуум у момент часу t , а V_0 – в момент часу $t = 0$. Використовуючи (4.1) і (4.38), інтеграл у правій частині (5.7) можна перетворити таким чином

$$\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{x}, 0) dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \rho(\mathbf{X}, t) J dV_0. \quad (5.8)$$

Співвідношення (5.8) повинно бути справедливим для довільно обраного об’єму V_0 і тому можна записати, що

$$\rho_0 = \rho J. \quad (5.9)$$

Це означає, що добуток ρJ не залежить від часу, оскільки об’єм V довільний, тобто

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0. \quad (5.10)$$

Отже рівняння (5.10) є *лагранжевою диференціальною формою* рівняння нерозривності.

5.2. Теорема про зміну кількості руху. Рівняння руху. Рівняння рівноваги

На рис. 5.1 зображено рухомий об’єм суцільного середовища V в момент часу t . На нього діють масові сили з густиною розподілу b_i . На кожному нескінченно малому елементі поверхні dS , що обмежує розглядуваний об’єм,

діє вектор напруження $t_i^{(n)}$. У всій області, що зайнята середовищем, визначено поле швидкості $v_i = \frac{du_i}{dt}$. Сумарна *кількість руху* системи маси, яка заповнює об'єм V , визначається інтегралом

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV. \quad (5.11)$$

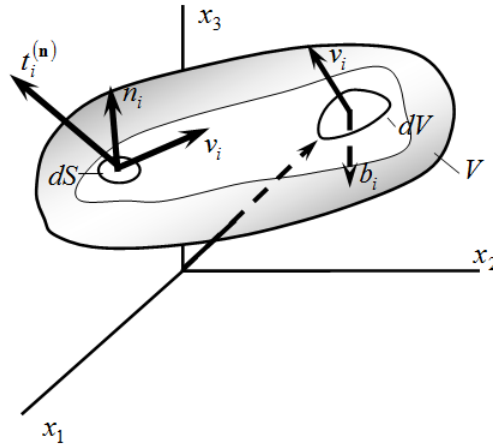


Рис. 5.1. До теорем про зміну кількості руху та моменту кількості руху

Базуючись на другому законі Ньютона, *теорема про зміну кількості руху* стверджує, що швидкість зміни з часом кількості руху деякої частини континууму дорівнює результуючій сил (внутрішніх і зовнішніх), що діють на область, що розглядається. Якщо внутрішні сили, що діють між частинками даного об'єму (див. рис. 5.1), підпорядковуються третьому закону Ньютона про дію і протидію, то теорема про зміну кількості руху для цієї системи мас виражається рівнянням

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad \text{або} \quad \int_S \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV. \quad (5.12)$$

Після підстановки $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ в перший інтеграл і перетворення інтегралу по поверхні в інтеграл за об'ємом (згідно теореми Гауса-Остроградського) це рівняння прийме вигляд

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV \quad \text{або} \quad \int_V (\vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b}) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV. \quad (5.13)$$

Запишемо матеріальну похідну правої частини (5.13) і скористаємося рівнянням нерозривності в формі (5.10). В результаті отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho v_i J dV_0 = \int_{V_0} \left[v_i \frac{d(\rho J)}{dt} + \rho J \frac{dv_i}{dt} \right] dV_0 = \int_V \frac{dv_i}{dt} \rho dV. \quad (5.14)$$

Підстановка цього виразу в праву частину (5.13) і об'єднання членів приводить до *інтегральної форми теореми про зміну кількості руху*

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i) dV = 0 \quad \text{або} \quad \int_V (\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV = 0. \quad (5.15)$$

Оскільки об'єм V довільний, підінтегральний вираз (5.15) теж повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (5.16)$$

Рівняння (5.16) називаються *рівняннями руху*.

Для важливого випадку рівноваги, коли відсутнє прискорення $\dot{\mathbf{v}} = 0$, з (5.16) отримуємо рівняння рівноваги, які дістали широкого застосування у механіці твердого тіла

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (5.17)$$

5.3. Теорема про зміну моменту кількості руху

Будемо вважати, що момент кількості руху для суцільного середовища дорівнює моменту вектора кількості руху відносно будь-якої точки. Так, для частини континууму, зображеної на рис. 5.1, повний момент кількості руху відносно початку координат за визначенням дорівнює інтегралу

$$N_i(t) = \int_V \varepsilon_{ijk} \rho v_k dV \quad \text{або} \quad \mathbf{N} = \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV, \quad (5.18)$$

де $\mathbf{x}$ – радіус-вектор елемента об'єму V .

Теорема про зміну моменту кількості руху стверджує, що швидкість зміни моменту кількості руху довільно обраної частини континууму відносно будь-якої точки дорівнює головному моменту (відносно цієї ж точки) масових і поверхневих сил, що діють на область середовища, яка розглядається. Для

об'єму V суцільного середовища можна написати рівняння кількості руху в інтегральній формі

$$\begin{aligned} \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV \\ \text{або } \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)}) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV &= \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Рівняння (5.19) є справедливим для таких середовищ, в яких сили взаємодії частинок рівні за величиною, колінеарні і протилежні за напрямом, а розподілені моменти відсутні.

Рівняння моменту кількості руху не завжди представляє собою нове диференціальне рівняння. Якщо в (5.19) підставити $t_k^{(n)} = \sigma_{pk} n_p$ і припустити симетрію тензора напруження, то рівняння буде тотожно задоволено за умови врахування тільки співвідношення (5.16). Якщо ж симетрія тензора напруження не передбачається заздалегідь, то вона отримується як прямий наслідок рівняння (5.19), яке після підстановки $t_k^{(n)} = \sigma_{pk} n_p$ зводиться до вигляду

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad \text{або} \quad \int_V \hat{\mathbf{g}}_v dV = 0. \quad (5.20)$$

Відповідно з довільністю об'єму V це веде до рівностей

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad \text{або} \quad \hat{\mathbf{g}}_v = 0. \quad (5.21)$$

звідки видно, що $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$.

5.4. Закон збереження енергії. Перший закон термодинаміки. Рівняння енергії

Якщо вивчаються тільки механічні величини, то *закон збереження механічної енергії* для об'єму суцільного середовища можна вивести безпосередньо з рівняння руху (5.16). Щоб це зробити, спочатку необхідно виконати скалярний добуток кожного члена (5.16) на вектор швидкості v_i , а потім виконати інтегрування отриманого результату за об'ємом V . Таким чином, отримуємо

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} dV + \int_V v_i \rho b_i dV. \quad (5.22)$$

Інтеграл

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \frac{dK}{dt} \quad (5.23)$$

представляє швидкість зміни в часі кінетичної енергії K об'єму V суцільного середовища. Відмітимо, що $v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ji}$ і, згідно (4.19), $v_{i,j} = D_{ij} + V_{ij}$. Якщо ще врахувати, що $V_{ij} \sigma_{ji} = 0$, то рівняння (5.22) можна записати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.24)$$

На кінець, перетворюючи за теоремою Гауса-Остроградського перший інтеграл у правій частині (5.24) в інтеграл по поверхні і використовуючи тотожність $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$, отримуємо *рівняння механічної енергії* для суцільного середовища

$$\frac{dK}{dt} + \int_V D_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(n)} dS + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.25)$$

Це рівняння встановлює зв'язок між швидкістю зміни повної механічної енергії континууму, що знаходиться ліворуч у рівнянні (5.25), і потужністю (роботою за одиницю часу) поверхневих і масових сил, яка знаходиться праворуч у тому ж рівнянні. Інтеграл у лівій частині називається швидкістю зміни *внутрішньої механічної енергії* (ця величина зі знаком мінус називається також роботою внутрішніх поверхневих сил в одиницю часу). Тоді (5.25) можна переписати в такому вигляді

$$\frac{dK}{dt} + \frac{\delta P}{dt} = \frac{\delta W}{dt}, \quad (5.26)$$

де $\frac{\delta P}{dt}$ і $\frac{\delta W}{dt}$ – потужність внутрішніх і зовнішніх сил, відповідно, а символ δ вказує на те, що відповідне прирощення в загальному випадку не є повним диференціалом якої-небудь функції.

Якщо, окрім механічної, слід враховувати і інші види енергії, то закон збереження енергії повинен використовуватися в загальній формі. У такій формі цей закон стверджує, що *швидкість зміни з часом кінетичної плюс внутрішньої енергії дорівнює сумі механічної роботи зовнішніх сил, що здійснюється в одиницю часу, і притоку інших видів енергії за одиницю часу*. Притік енергії може включати в себе *теплову, хімічну, електромагнітну* та інші види енергії. У подальшому будемо розглядати тільки *механічну й теплову* види енергії, а за рівняння енергії буде слугувати *перший закон термодинаміки*.

Для термомеханічного континууму швидкість зміни внутрішньої енергії U зазвичай представляється інтегралом

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV, \quad (5.27)$$

де u – масова внутрішня енергія.

Нехай вектор q_i є густиною теплового потоку, який характеризує *потік теплоти* через одиницю площі в одиницю часу за рахунок теплопровідності, і нехай q_m – *стала джерела теплоти* на одиницю маси в одиницю часу. Тоді швидкість притоку теплоти виражається формулою

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho q_m dV. \quad (5.28)$$

Закон зміни енергії термомеханічного континууму записується рівнянням

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt}, \quad (5.29)$$

або в інтегральній формі

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \rho \dot{u} dV = \int_S t_i^{(n)} v_i dS + \int_V \rho v_i b_i dV + \int_V \rho q_m dV - \int_S q_i n_i dS. \quad (5.30)$$

Виконуючи в (5.30) перетворення інтегралів по поверхні в інтеграли за об'ємом за допомогою теореми Гауса-Остроградського і використовуючи довільність об'єму V , приходимо до диференціальної форми рівняння енергії

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m \quad (5.31)$$

або $\frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} + \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + q_m + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}.$

Всередині довільного малого елемента об'єму, для якого справедливо диференціальне рівняння енергії (5.31), повинно також бути виконано і рівняння кількості руху (5.16). Візьмемо скалярний добуток рівняння (5.16) на вектор швидкості: $\rho \dot{v}_i v_i = v_i \sigma_{ji,j} + \rho v_i b_i$, виконаємо деякі прості перетворення, а потім віднімемо його від (5.31). В результаті отримаємо більш коротку, але вкрай важливу форму запису диференціального рівняння енергії

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m. \quad (5.32)$$

Це рівняння стверджує, що *швидкість зміни внутрішньої енергії дорівнює сумі потужності напруження (дисипації напруження) плюс притоку теплоти до середовища.*

5.5. Рівняння стану. Ентропія. Другий закон термодинаміки

Задати *стан* термодинамічної системи (в нашому випадку континууму) це значить повністю охарактеризувати систему. Цей стан визначається декількома термодинамічними і кінематичними величинами, які називаються *параметрами стану*. Якщо параметри стану змінюються з часом, то відбувається *термодинамічний процес*. Параметри стану, що використовуються для характеристики даної системи, зазвичай не всі незалежні: між ними існують функціональні зв'язки, які виражаються так званими *рівняннями стану*. Будь-який параметр стану, який можна представити однозначною функцією інших параметрів стану, називається *функцією стану*.

Як було встановлено у п. 5.4, перший закон термодинаміки постулює взаємний перехід механічної і теплової енергії одної у другу. Співвідношення, яке виражає перехід теплоти і роботи в кінетичну і внутрішню енергію під час термодинамічного процесу, є рівняння енергії, наприклад, (5.31). Однак перший закон залишає без відповіді питання, чи є цей перехід *оборотним* або *необоротним*. Базовий критерій необоротності міститься у *другому законі термодинаміки*, який встановлює деякі обмеження на зростання (притоку) ентропії.

Другий закон термодинаміки постулює існування двох різних функцій стану, а саме – *абсолютної температури* T і *ентропії* S , властивості яких

будуть розглянуті нижче. Абсолютна температура T – додатна величина, яка є функцією тільки емпіричної температури θ . Вважається, що ентропія має властивість адитивності, тобто, повна ентропія системи дорівнює сумі ентропій її частин. У механіці суцільного середовища вводять *масову ентропію* (на одиницю маси), або *густину ентропії*, оскільки повна ентропія S дорівнює інтегралу $\int_V \rho s dV$. Ентропія системи може змінюватися або із-за взаємодії з довкіллям, або за рахунок змін, що відбуваються всередині самої системи. Тому можна записати

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}, \quad (5.33)$$

де ds – прирощення масової ентропії, $ds^{(e)}$ – прирощення, викликане взаємодією із зовнішнім середовищем, а $ds^{(i)}$ – внутрішня зміна.

Прирощення $ds^{(i)}$ ніколи не буває від’ємним. Воно дорівнює нулю у разі оборотних процесів і додатне за умови необоротних. Таким чином

$$ds^{(i)} > 0 \text{ (для необоротних процесів)}, \quad (5.34)$$

$$ds^{(i)} = 0 \text{ (для оборотних процесів)}. \quad (5.35)$$

Якщо під час оборотного процесу притік теплоти на одиницю маси системи позначити через $\delta q_{(R)}$, то зміна $ds^{(e)}$ виразиться формулою

$$ds^{(e)} = \frac{\delta q_{(R)}}{T} \text{ (для оборотних процесів)}. \quad (5.36)$$

5.6. Нерівність Клаузіуса-Дюгема. Дисипативна функція

Згідно другого закону термодинаміки, швидкість зміни повної ентропії S суцільного середовища, що займає об’єм V , ніколи не може бути меншим за суму притоку ентропії через границю об’єму і ентропії, що виробляється всередині об’єму зовнішніми джерелами. Математично цей закон зміни ентропії виражається в інтегральній формі у вигляді *нерівності Клаузіуса-Дюгема*

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{q_i n_i}{T} dS, \quad (5.37)$$

де e – масова потужність локальних зовнішніх джерел ентропії.

Знак рівності в (5.37) відповідає оборотним (рівноважним процесам), а знак більше – необоротним процесам.

Нерівність Клаузіуса-Дюгема є справедливим для довільного вибору об'єму V , оскільки, перетворюючи в формулі (5.37) інтеграл по поверхні в інтеграл за об'ємом (за допомогою теореми Гауса-Остроградського), приходимо до диференціальної форми співвідношення для *швидкості внутрішнього виробництва (зростання) ентропії* γ , віднесеної до одиниці маси середовища

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (5.38)$$

Ця нерівність повинна задовольнятися в кожному процесі і за умови будь-якого вибору параметрів стану. З цієї причини (5.38) відіграє важливу роль, накладаючи відомі обмеження на так звані визначальні (фізичні) рівняння, що будуть розглянуті далі.

В механіці суцільного середовища припускають, базуючись на статистичній механіці необоротних процесів, що тензор напруження можна розкласти на дві складові

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)}, \quad (5.39)$$

де $\sigma_{ij}^{(C)}$ – тензор *консервативних* напружень; $\sigma_{ij}^{(D)}$ – тензор *дисипативних* напружень.

Враховуючи це припущення, рівняння енергії (5.32) можна переписати з врахуванням (4.25) у вигляді

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\delta q}{dt}. \quad (5.40)$$

В цьому рівнянні член $\frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}$ – представляє собою швидкість дисипації механічної енергії на одиницю маси (тобто, необоротне її перетворення в теплову енергію), член $\frac{\delta q}{dt}$ – швидкість притоку теплоти до середовища на одиницю маси. Якщо в середовищі відбувається обооротний процес, то

дисипація енергії буде відсутня. До того ж $\frac{dq}{dt} = \frac{\delta q_{(R)}}{dt}$, так що, комбінуючи (5.40) і (5.36), отримуємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\epsilon}_{ij} + T \frac{ds}{dt}. \quad (5.41)$$

В термодинаміці рівняння (5.41) також дістало назву *тотожності Гіббса*.

Для необоротних процесів, які описуються рівнянням (5.40), швидкість притоку ентропії можна знайти із рівняння (5.41). Таким чином

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{\delta q}{dt} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (5.42)$$

Скаляр $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\epsilon}_{ij}$ називається *дисипативною функцією*. Для необоротних адіабатних процесів ($\delta q = 0$), згідно другому закону термодинаміки, $\frac{ds}{dt} > 0$. Тоді із (5.42) витікає, що дисипативна функція є *позитивно визначеною*, оскільки ρ та T завжди додатні.

5.7. Визначальні рівняння. Термомеханічний і механічний континууми

Для термомеханічного середовища, де механічні й теплові явища взаємопов'язані основними рівняннями механіки суцільного середовища будуть такі:

а) *рівняння нерозривності* (5.4)

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (5.43)$$

б) *рівняння руху* (5.16)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (5.44)$$

в) *рівняння енергії* (5.32)

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m \text{ або } \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + q_m. \quad (5.45)$$

Припускаючи, що масові сили b_i і розподілені джерела теплоти q_m задані, рівняння (5.43)–(5.45) складають систему *п'яти* незалежних рівнянь, які містять чотирнадцять невідомих функцій координат і часу. Невідомими є: *густина* ρ , три компоненти *швидкості* v_i (або, що рівноцінно, компоненти переміщення u_i), шість незалежних компонент *напруження* σ_{ij} , три компоненти вектора густини *теплового потоку* q_i і масової *внутрішньої енергії* u . У доповнення до цієї системи рівнянь повинно бути виконана нерівність Клаузіуса-Дюгема (5.38)

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \geq 0, \quad (5.46)$$

що визначає позитивність прирощення ентропії.

Нерівність (5.46) додає ще дві невідомі – *масову ентропію* s і *абсолютну температуру* T . Значить, щоб зробити систему замкнутою, треба знайти додатково ще *одинадцять рівнянь*. Шість із них відомі як *визначальні рівняння* (або *фізичні рівняння*), які характеризують окремі фізичні властивості досліджуваного середовища. З решти п'яти *три* є співвідношеннями для задання закону *теплопровідності*, а два – *термодинамічні рівняння стану*; наприклад, рівняння стану і рівняння для *ентропії*. Формулювання задачі для термомеханічного континууму буде наведено в наступному розділі.

Слід відзначити, що призначення визначальних рівнянь полягає в тому, щоб встановити математичні залежності між статичними, кінематичними й термодинамічними параметрами, які описують поведінку суцільного середовища за умови наявності механічних й термодинамічних взаємодій. Оскільки реальні середовища реагують на різні навантаження вкрай складним чином, визначальні рівняння не призначені відображати усі явища, що спостерігаються і які пов'язані з конкретним матеріалом, а скоріш за все слугують для того, щоб ввести деякі ідеалізовані середовища, такі, наприклад, як ідеальне пружне тіло або ідеальна рідина. Такі ідеалізації, або *моделі середовищ*, дуже корисні тим, що вони розумно відображають поведінку реальних середовищ у певному інтервалі навантажень й температури.

У багатьох випадках взаємодією механічних й термодинамічних процесів можна знехтувати. Дослідженням такого типу є, наприклад, теорія незв'язаної термопружності. У цьому випадку механічні процеси описуються рівняннями (5.43) і (5.44). Система рівнянь, утворена (5.43) і (5.44), складається із *чотирьох*

рівнянь з *десятьма* невідомими. Потрібні ще шість визначальних рівнянь, щоб зробити систему замкнутою. У незв'язаній теорії, де не враховується взаємодія механічних й теплових процесів, визначальні рівняння містять тільки *динамічні* (напруження) й *кінематичні* (швидкість, переміщення, деформація) параметри і представляють собою *співвідношення між напруженнями і деформаціями*. Крім того, в такій теорії поле температури зазвичай вважається відомим або задача теплопровідності може бути розв'язана окремо і незалежно від механічної задачі. За умови *ізотермічних* процесів температура вважається сталою і задача є виключно механічною.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте закон збереження маси.
2. Запишіть рівняння нерозривності. В чому полягає різниця між Ейлеровою формою рівняння нерозривності та Лагранжевою диференціальною його формою запису?
3. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху. Запишіть рівняння руху. Наведіть рівняння рівноваги.
4. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху.
5. Сформулюйте закон збереження енергії. Наведіть математичну форму запису першого закону термодинаміки та дайте його формулювання. Запишіть рівняння енергії.
6. Наведіть рівняння стану. Дайте визначення ентропії. Сформулюйте другий закон термодинаміки.
7. В чому полягає фізичний зміст нерівності Клаузіуса-Дюгема. Дайте визначення дисипативної функції.
8. Запишіть визначальні рівняння. Дайте визначення термомеханічного і механічного континуумів.

6. ЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

6.1. Узагальнений закон Гука. Функція енергії деформації

У класичній лінійній теорії пружності припускається, що *переміщення* та їх *градієнти* настільки малі, що можна знехтувати різницею між лагранжевим і ейлеревим представленням (або системами відліку). Відповідно до цього вираз для тензора лінійних деформацій через вектор переміщення u_i може бути записаний у таких еквівалентних формах

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.1)$$
$$\text{або } \mathbf{L} = \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}).$$

Крім того, у подальшому будемо нехтувати тепловими ефектами, що супроводжують деформування, якщо спеціально не обговорюється протилежне. Рівняння (6.1) також називаються *геометричними рівняннями*.

Для лінійного пружного тіла визначальне (фізичне) рівняння, що зв'язує тензор напруження і тензор деформації співвідношенням

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{або} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}} : \mathbf{E}, \quad (6.2)$$

яке називається *узагальненим законом Гука*. Коефіцієнти цього співвідношення утворюють *тензор пружних констант* четвертого рангу $\hat{\mathbf{C}} = C_{ijkl}$, який має 81 компоненту. Однак, внаслідок симетрії обох тензорів (напруження і деформації) різних пружних констант стає не більше 36. Для запису закону Гука через ці 36 коефіцієнтів подвійні індекси в компонентах тензорів напруження і деформації інколи замінюються на одинарні, які змінюються від 1 до 6. Це, наприклад, застосовується в числовому методі скінченних елементів (МСЕ) для розв'язання задач МСС. В таких позначеннях

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4, \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5, \\ \sigma_{33} &= \sigma_3, & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6, \end{aligned} \quad (6.3)$$

і

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \varepsilon_4, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, & 2\varepsilon_{13} &= 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, & 2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \varepsilon_6.\end{aligned}$$

Використовуючи (6.3) і (6.4) закон Гука можна записати у вигляді

$$\sigma_K = C_{KM} \varepsilon_M, \quad (K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (6.5)$$

де 36 пружних констант позначені вже тензором другого рангу C_{KM} на відміну від (6.2), де використовується відповідний тензор четвертого рангу, а великими буквами позначено індекси, що змінюються від 1 до 6.

Якщо знехтувати тепловими ефектами, то рівняння (5.32) прийме вигляд

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (6.6)$$

Внутрішня енергія в цьому випадку виявляється виключно механічною величиною і називається *масовою енергією деформації*. З рівняння (6.6) витікає, що

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (6.7)$$

Якщо u вважати функцією дев'яти компонент деформації $u = u(\varepsilon_{ij})$, то її диференціал дорівнює

$$du = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}. \quad (6.8)$$

Прирівнюючи (6.7) і (6.8), отримуємо

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (6.9)$$

Формули (6.9) для пружного тіла також справедливі і за умови врахування теплових ефектів. При цьому замість (6.6) маємо

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \delta q, \quad \delta q = Tds,$$

і тому

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{\partial u(\varepsilon_{ij}, s)}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial u(\varepsilon_{ij}, s)}{\partial s}.$$

Введемо функцію u^* , таку, що

$$u^* = \rho u, \quad (6.10)$$

яка дістала назву *масової густини енергії деформації*. В теорії малих деформацій ρ в (6.10) можна вважати сталою величиною, тому функція u^* має таку властивість

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (6.11)$$

Стан, в якому енергія деформації дорівнює нулю, можна вибрати довільно. І, оскільки, напруження повинні перетворюватися в нуль разом із деформаціями, найпростішим виглядом виразу енергії деформації, що забезпечує лінійний зв'язок між напруженнями й деформаціями, є квадратична форма

$$u^* = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (6.12)$$

Приймаючи до уваги закон Гука (6.2), цей вираз можна записати так

$$u^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \text{або} \quad u^* = \frac{1}{2} \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon}. \quad (6.13)$$

У позначеннях з одним індексом квадратична форма (6.12) набуває вигляду

$$u^* = \frac{1}{2} C_{KM} \varepsilon_K \varepsilon_M, \quad (6.14)$$

причому $C_{KM} = C_{MK}$. Якщо функція енергії деформації існує, то внаслідок симетрії C_{KM} кількість незалежних пружних констант буде не більше 21.

6.2. Ізотропні та анізотропні середовища. Симетрія пружних властивостей

Якщо пружні властивості середовища не залежать від вибору системи координат, що використовується для їх описання, то таке пружне середовище називають *ізотропним*. Середовище, яке не є ізотропним, називається *анізотропним*. Пружні властивості твердого анізотропного тіла, яке підпорядковується закону Гука, виражаються коефіцієнтами C_{KM} , що складаються з пружних констант

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Якщо існує функція енергії деформації, то $C_{KM} = C_{MK}$ і 36 констант матриці (6.15) зводиться до 21.

Нехай в деякій точці суцільного середовища існує *площина симетрії пружних властивостей*, тобто пружні константи мають однакові значення для будь-якої пари систем координат, які отримані одна із другої відображенням відносно вказаної площини. Осі таких систем координат називаються «напрямами еквівалентних пружних властивостей». Якщо площина x_1x_2 – площина симетрії пружних властивостей, то константи C_{KM} інваріантні відносно перетворення координат

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad (6.16)$$

яке показано на рис. 6.1. Це перетворення описується матрицею

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

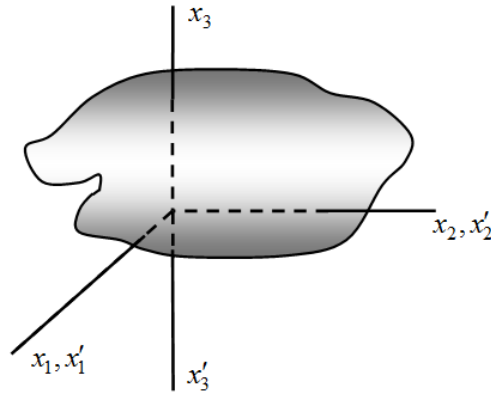


Рис. 6.1. x_1x_2 – площина симетрії пружних властивостей

Підставляючи компоненти матриці (6.17) в формули (2.27) і (3.78) для перетворення тензорів напруження і деформації, знаходимо, що матриця пружних констант для середовища, яка володіє симетрією відносно площини x_1x_2 , має вигляд

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Якщо існує функція деформації, то із 20 ненульових членів цієї матриці незалежні тільки 13.

Якщо середовище має три взаємно перпендикулярні площини симетрії, то воно називається *ортотропним*, а матриця пружних констант (в системі координат, в якій координатними площинами є площі симетрії) мають форму

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Тут незалежних сталих 12 (або 9, якщо $C_{KM} = C_{MK}$).

Кажуть, що в деякій точці існує *вісь симетрії пружних властивостей* порядку N , якщо існує набір напрямів еквівалентних пружних властивостей, які можуть бути суміщені поворотом навколо осі на кут $2\pi/N$. Деякі випадки осевої та плоскої симетрії еквівалентні.

6.3. Ізотропне середовище. Пружні сталі

Тіла, у яких пружні властивості однакові за всіма напрямками, мають повну симетрію і називаються *ізотропними*. У цьому випадку будь-яка площина і будь-яка вісь є площиною і віссю симетрії. Для ізотропних середовищ кількість незалежних пружних сталих зводиться до двох, і матриця пружних констант є симетричною незалежно від існування функції енергії деформації. Вибираючи в якості двох незалежних констант відомі сталі Ламе λ і μ , напишемо матрицю (6.19) для ізотропного пружного середовища

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Закон Гука (6.2) для ізотропного тіла через коефіцієнти λ і μ записується рівністю

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{або} \quad \hat{\sigma} = \lambda \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\varepsilon}) + 2\mu \hat{\varepsilon}, \quad (6.21)$$

де $\varepsilon_{kk} = \text{tr}(\hat{\varepsilon}) = I_\varepsilon$ – перший інваріант тензора деформацій.

Це співвідношення неважко обернути і виразити деформації через напруження

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad \text{або} \quad \hat{\varepsilon} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\sigma}) + \frac{1}{2\mu} \hat{\sigma}, \quad (6.22)$$

де $\sigma_{kk} = \text{tr}(\hat{\sigma}) = I_\sigma$ – перший інваріант тензора напруження.

Під час простого одновісного розтягу в напрямку осі x_1 можна ввести технічні пружні модулі E і ν , які слугують коефіцієнтами у співвідношеннях

$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ і $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$. Стала E називається *модулем пружності*)¹ під час розтягу, а ν – *коефіцієнтом Пуассона*)². Через ці пружні сталі Закон Гука для ізотропного тіла записується таким чином

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \text{ або } \hat{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\hat{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\text{tr}}(\hat{\varepsilon}) \right), \quad (6.23)$$

і в оберненій формі відносно тензора деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \text{ або } \hat{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} \hat{\text{tr}}(\hat{\sigma}). \quad (6.24)$$

Під час вивчення стану рівномірного гідростатичного стискання вводять *модуль об'ємного стискання*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ або } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad (6.25)$$

який зв'язує тиск з величиною об'ємного розширення.

У випадку стану чистого зсуву середовища, *модуль зсуву G*)³ зв'язує дотичні напруження і деформації. Коефіцієнт G фактично дорівнює μ

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.26)$$

6.4. Постановка статичних і динамічних задач теорії пружності

У разі постановки статичних задач для пружного однорідного ізотропного середовища використовуються наступні рівняння, які мають виконуватися всюди всередині тіла (Додаток Б):

¹ Фізичний зміст *модуля пружності*: модуль пружності це фізична величина, яка характеризує опір матеріалу при розтягу/стисканні при пружній деформації і чисельно дорівнює напруженню, яке виникає у зразку, якщо його довжина збільшилась у два рази (тобто при деформації у 100%).

² Фізичний зміст *коефіцієнта Пуассона*: коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу це фізична величина, яка характеризує пружні властивості матеріалу і визначається відношенням поперечного стискання до повздовжнього розтягу зразка матеріалу і лежить в межах ($0 < \nu \leq 0,5$). Для абсолютно крихкого матеріалу $\nu = 0$, а для абсолютно пружного $\nu = 0,5$.

³ Фізичний зміст *модуля зсуву*: модуль зсуву це фізична величина, яка чисельно дорівнює дотичному напруженню, яке виникло б у зразку при відносному зсуві рівному 100 % (при умові, що закон Гука виконується).

а) рівняння рівноваги

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0; \quad (6.27)$$

б) закон Гука (фізичне рівняння)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad (6.28)$$

в) співвідношення, що зв'язують деформації з переміщеннями (геометричні рівняння)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ або } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}). \quad (6.29)$$

Крім того, на поверхні, що обмежує тіло, мають бути задані граничні умови у вигляді напруження і/або переміщення.

Крайові задачі теорії пружності зазвичай класифікують за типом цих умов. Їх розділяють на групи, для яких:

- 1) на всій границі задані переміщення;
- 2) на всій границі задані напруження (поверхневі зусилля);
- 3) на частині границі задані переміщення, а на решті поверхні – напруження.

У всіх трьох випадках передбачається, що всюди в тілі масові сили є відомими.

Для тих задач, в яких на всій границі задані компоненти переміщення у вигляді функції

$$u_i = g_i(\mathbf{x}) \text{ або } \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (6.30)$$

вирази деформацій через переміщення (6.29) можна підставити в закон Гука (6.28), а цей результат у свою чергу підставити в (6.27).

Таким чином отримуються основні рівняння в переміщеннях

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \text{ або } \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (6.31)$$

які називаються *рівняннями Нав'є-Коші*.

Розв'язання задач цього типу полягає в пошуку вектора переміщення u_i , що задовольняє рівнянню (6.31) всюди всередині тіла і умовам (6.30) на його границі.

Для тих задач, в яких на всій границі відомі поверхневі сили

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.32)$$

комбінацією рівнянь сумісності (3.104), закону Гука (6.24) і рівнянь рівноваги (6.27), отримуємо основні рівняння в напруженнях

$$\begin{aligned} \sigma_{ij, kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk, ij} + \rho(b_{i, j} + b_{j, i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k, k} &= 0 \\ \text{або } \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho(\nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla) + \frac{\nu}{1-\nu} \hat{\mathbf{I}} \rho \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \quad (6.33)$$

яке називається рівнянням сумісності *Бельтрамі-Мічела*.

Розв'язання задач цього типу полягає в знаходженні тензора напруження, який задовольняє рівнянням (6.27) і (6.33) всюди всередині тіла і умовам (6.32) на границі.

Для задач, що мають змішані граничні умови, повинна розв'язуватися система рівнянь (6.27), (6.28) і (6.29). Розв'язок дає поле напруження і переміщення для всіх точок тіла. На деякій частині граничної поверхні компоненти напруження повинні задовольняти умовам (6.32), а на решті її частини переміщення повинні задовольняти умовам (6.30).

Для постановки динамічних задач рівняння рівноваги (6.27) необхідно замінити рівняннями руху (5.16)

$$\sigma_{ji, j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (6.34)$$

і нарівні з *граничними умовами* необхідно задати ще й *початкові умови*.

Основні рівняння для поля переміщення в цьому випадку аналогічні рівнянням (6.31) статички

$$\begin{aligned} \mu u_{i, jj} + (\lambda + \mu) u_{j, ji} + \rho b_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \text{або } \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Розв'язок рівнянь (6.35) шукаємо у вигляді $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$. Це рівняння повинно задовольняти не тільки початковим умовам, які зазвичай записуються у вигляді рівностей

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, 0) \text{ або } \dot{u}_i = \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0), \quad (6.36)$$

але й граничним умовам, які накладаються або на переміщення

$$u_i = g_i(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (6.37)$$

або на напруження

$$t_i^{(n)} = t_i^{(n)}(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{x}, t). \quad (6.38)$$

6.5. Теорема про суперпозицію. Єдиність розв'язків. Принцип Сен-Венана

Внаслідок того, що в лінійній пружності рівняння і граничні умови лінійні, можна використовувати принцип суперпозиції для отримання нових розв'язків із раніше знайдених. Якщо, наприклад, $\sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ – розв'язок системи (6.27), (6.28) і (6.29) за масових сил, які рівні $b_i^{(1)}$, а $\sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ – розв'язок за умови масових сил $b_i^{(2)}$, то $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ буде розв'язком тієї ж системи рівнянь за умови масових сил $b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)}$.

Єдиність розв'язання статичної задачі теорії пружності може бути встановлена за допомогою принципу суперпозиції і закону збереження енергії.

Принцип Сен-Венана стосується відмінностями між напруженнями і деформаціями в деякій області всередині пружного тіла, що спричинені двома відмінностями (рис. 6.2), але статично еквівалентними системами поверхневих сил, які прикладені до певної частини границі. Принцип стверджує, що в областях, достатньо далеких від місця прикладення навантаження, ці відмінності нехтовно малі. Це припущення часто надає велику допомогу для розв'язання практичних задач.

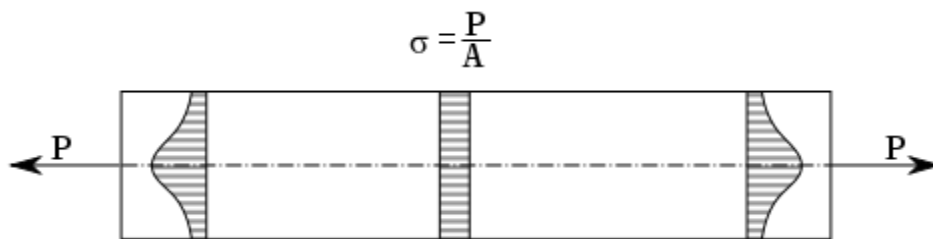


Рис. 6.2. Демонстрація принципу Сен-Венана

6.6. Плоскі задачі теорії пружності. Плоский напружений стан і плоска деформація

В багатьох задачах теорії пружності можна цілком задовільно обійтися двома вимірами, або так званою *плоскою теорією пружності*. Існує два типи задач такого роду: плосконапружений і плоскодеформований стан. Для

реалізації *плосконапруженого стану* тіло повинно представляти собою пластину, у якої один розмір набагато менший за два інших. Навантаження розподілене рівномірно по товщині пластини і діє в її площині, як показано стрілками на рис. 6.3, а. Для реалізації *плосконапруженого стану* або *плоскої деформації* тіло повинно мати форму циліндра, коли один розмір набагато більший за інші. Навантаження рівномірно розподілене вздовж осі найбільшого розміру і діє перпендикулярно до неї, як показано стрілками на рис. 6.3, б.

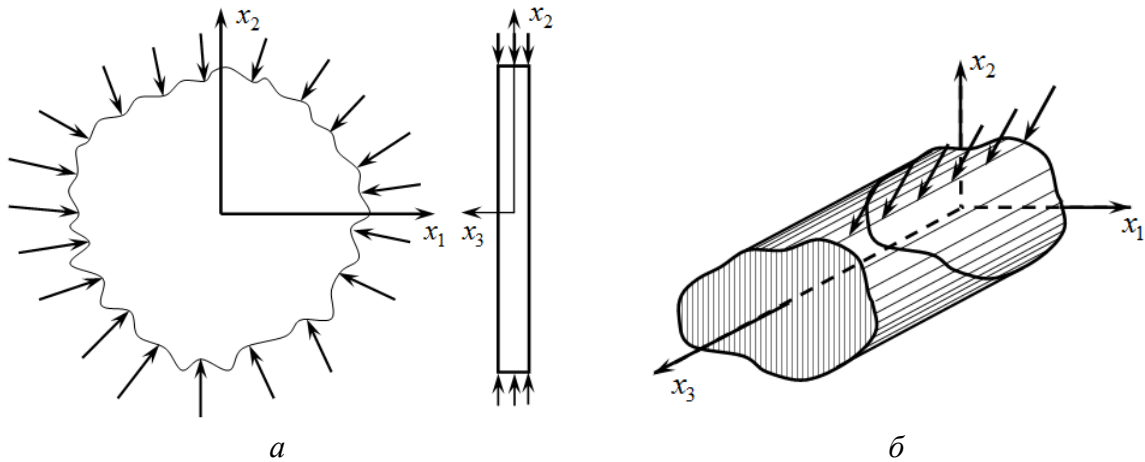


Рис. 6.3. Плосконапружений (а) і плоскодеформований (б) стан

У задачах з плоским напруженим станом (див. рис. 6.3,а) компоненти напруження $\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ приймаються всюди рівними нулю, а решта компонент – вважаються функціями тільки x_1 і x_2 ,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (6.39)$$

Відповідно до цього постановка задач для плоского поля напруження містить такі рівняння:

$$\text{а) } \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0; \quad (6.40)$$

$$\text{б) } \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha}; \quad (6.41)$$

$$\text{в) } \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}), \quad (6.42)$$

$$\text{де } \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2;$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Із-за спеціальної форми тензора деформації у випадку плоского напруженого стану шість рівнянь сумісності (3.104) для дуже тонких пластин з достатньою точністю зводяться до одного рівняння

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \quad (6.44)$$

Систему рівнянь (6.40) можна перетворити і отримати основне рівняння відносно компонент переміщення u_α

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)} u_{\alpha,\beta\beta} + \frac{E}{2(1-\nu)} u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha &= 0 \\ \text{або } \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{E}{2(1-\nu)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Для задач плоскодеформованого стану (див. рис. 6.3,б) компонента переміщення u_3 приймається рівною нулю, а решта компонент вважається функціями тільки x_1 і x_2 ,

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2). \quad (6.46)$$

Система рівнянь задачі плоскодеформованого стану має вигляд:

$$\text{а) } \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0; \quad (6.47)$$

$$\text{б) } \sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{33} = \nu \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{\alpha\alpha}; \quad (6.48)$$

$$\text{в) } \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}), \quad (6.49)$$

причому

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.50)$$

Із рівнянь (6.47)–(6.49) у випадку плоскої деформації отримується відповідна форма рівнянь Нав'є

$$\begin{aligned} \mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_{\alpha} &= 0 \\ \text{або } \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= 0. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Так само як для плоского напруженого стану, рівняння сумісності для плоских деформацій зводяться до одного рівняння (6.44)

Якщо сили, що прикладені до ребра пластини на рис. 6.3,а, розподілені по її товщині не рівномірно, а симетрично відносно середньої площини пластини, то напружений стан називають *узагальненим плоским напруженим станом*. В цьому випадку під час постановки задач змінні поля істинних величин $\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}$ і u_{α} необхідно замінити напруженнями, деформаціями і переміщеннями, що осереднені по товщині пластини. Для таких осереднених переміщень формулювання задач у випадку узагальненого плоского напруження по суті таке ж саме, як і за умови плоскої деформації, якщо λ замінити на величину

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}. \quad (6.52)$$

В теорії пружності також згадується поняття *узагальненої плоскої деформації*, коли ε_{33} в (6.50) буде сталою величиною, відмінною від нуля.

6.7. Функції напруження Ері

Якщо масові сили відсутні або сталі, то для розв'язання плоских статичних задач теорії пружності (задач про плоску деформацію або узагальнений плоский напружений стан) користуються функцією напружень Ері (якщо масові сили відмінні від нуля, то їх вклад у розв'язок може бути врахований додатково за допомогою принципу суперпозиції шляхом знаходження частинних інтегралів системи лінійних диференціальних рівнянь).

Для плоских статичних задач за умови відсутності масових сил рівняння рівноваги зводяться до наступних

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\sigma} = 0. \quad (6.53)$$

рівняння сумісності, що виражені через компоненти напружень (рівняння Бельтрами-Мічела) дають

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0, \quad \nabla^2 \Theta_1 = 0. \quad (6.54)$$

Із рівнянь (6.53) видно, що компоненти напружень можна представити частинними похідними *функції напружень Ері* $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$

$$\sigma_{11} = \varphi_{,22}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,12}, \quad \sigma_{22} = \varphi_{,11}. \quad (6.55)$$

При цьому рівняння рівноваги (6.53) задовольняються тотожно, а умова сумісності (6.54) перетворюється у *бігармонічне рівняння*

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) = \nabla^4 \varphi = \varphi_{,1111} + 2\varphi_{,1122} + \varphi_{,2222} = 0. \quad (6.56)$$

Функції, що задовольняють цьому рівнянню, називаються *бігармонічні*. Користуючись бігармонічними функціями з однозначними другими похідними, можна будувати багаточислені розв'язки плоских задач теорії пружності, які автоматично задовольняють і рівнянням рівноваги, і рівнянням сумісності. Звісно, ці розв'язки необхідно ще узгодити із заданими граничними умовами.

6.8. Двовимірні статичні задачі теорії пружності у полярних координатах

Із геометричних міркувань деякі двовимірні статичні задачі теорії пружності зручно формулювати у полярних координатах r і θ . Після перетворення координат

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (6.57)$$

компоненти тензора напружень, що показані на рис. 6.4, будуть задовольняти рівнянням рівноваги у полярних координатах:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r = 0; \quad (6.58)$$

$$\frac{2\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta = 0. \quad (6.59)$$

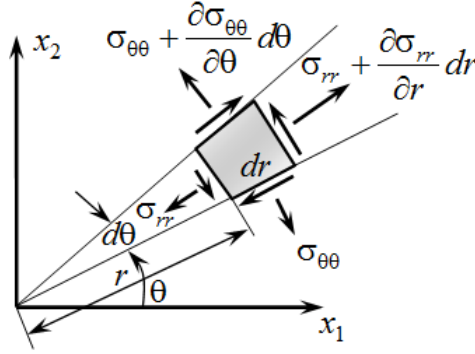


Рис. 6.4. До рівняння рівноваги у полярних координатах

Виберемо функцію Ері у вигляді $\Phi = \Phi(r, \theta)$ і виразимо через неї компоненти тензора напруження:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}; \quad (6.60)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad (6.61)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (6.62)$$

Умови сумісності знову приводять до бігармонічного рівняння вигляду

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \nabla^4 \Phi = 0, \quad (6.63)$$

причому у полярних координатах $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

6.9. Гіперпружність. Гіпопружність

В сучасній механіці суцільного середовища використовуються визначальні рівняння для середовищ, які є пружними в спеціальному сенсі. Матеріал називається *гіперпружним*, якщо для нього існує функція енергії

деформації u , така, що матеріальна похідна від неї дорівнює об'ємній потужності напруження. Таким чином, визначальне (фізичне) рівняння такого середовища має вигляд

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (6.64)$$

де D_{ij} – тензор швидкості деформації.

З іншого боку, матеріал називають *гіпопружним*, якщо швидкості зміни напруження є однорідними лінійними функціями швидкостей деформацій. В цьому випадку в якості визначального рівняння береться

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = \frac{d}{dt} K_{ijkl} D_{kl}, \quad (6.65)$$

причому тензор швидкості напруження σ_{ij}^{∇} визначається співвідношенням

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = \frac{d}{dt} \sigma_{ij} - \sigma_{iq} V_{qj} - \sigma_{jq} V_{qi}, \quad (6.66)$$

де V_{ij} – тензор завихреності.

6.10. Лінійна термопружність

Якщо враховувати теплові ефекти, то компоненти тензора лінійних деформацій можна представити сумою

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (6.67)$$

в якій $\varepsilon_{ij}^{(S)}$ – деформації, які викликані полем напруження, а $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ – полем температури.

Компоненти деформації елементарного об'єму ізотропного тіла, які спричинені зміною температури від деякого початкового значення T_0 до поточного значення T , за умови відсутності зовнішніх сил визначаються формулою

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.68)$$

де α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Підставляючи (6.68) і (6.22) в рівність (6.67), знаходимо вираз

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha(T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.69)$$

яке називається співвідношенням *Дюамеля-Неймана*.

Рівність (6.69) можна обернути і записати визначальне рівняння термопружності у вигляді

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0). \quad (6.70)$$

Теплопровідність в ізотропному пружному тілі підпорядковується відомому закону теплопровідності *Фур'є* (фізичне рівняння)

$$q_i = -k T_{,i}, \quad (6.71)$$

де k – скаляр, коефіцієнт теплопровідності⁴ середовища, який повинен бути додатним, щоб забезпечити позитивну швидкість прирощення ентропії.

Якщо ввести масову теплоємність за умови постійного об'єму c_v рівністю

$$-q_{i,i} = \rho c_v \dot{T} \quad (6.72)$$

і припустити, що внутрішня енергія є функцією компонент деформації ε_{ij} й температури T , то рівняння (5.45) запишеться у вигляді

$$k T_{,ii} = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\varepsilon}_{ii}. \quad (6.73)$$

Рівняння (6.73) називається рівнянням *притоку теплоти зв'язаної термопружності*.

Система рівнянь зв'язаної задачі термопружності для ізотропного середовища складається із:

а) рівняння руху

⁴ Фізичний зміст *теплопровідності*: коефіцієнт теплопровідність – це фізична величина, яка чисельно дорівнює тепловому потоку, який передається між ізотермічними поверхнями тіла при відстані між ними в 1 м і при різниці температур між ними в 1 К.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \ddot{u}_i \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}}; \quad (6.74)$$

б) визначальне рівняння термопружної моделі

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \\ \text{або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \lambda \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \hat{\mathbf{I}} (T - T_0); \end{aligned} \quad (6.75)$$

в) геометричне рівняння, що зв'язує деформації з переміщеннями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ або } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}); \quad (6.76)$$

г) рівняння притоку теплоти

$$\begin{aligned} k T_{,ii} &= \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\varepsilon}_{ii} \\ \text{або } k \nabla^2 T &= \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Із цієї системи треба знайти поля напруження, деформації та температури, при цьому задовольнивши вказаним початковим і граничним умовам. Умови сумісності будуть виконано автоматично відповідно (6.76).

Існує широке коло задач, в яких ефектами інерції і взаємозв'язку теплових та механічних процесів можна знехтувати. В таких випадках задача поділяється на дві окремі задачі, які розв'язуються послідовно, але незалежно. Так, для квазістатичної задачі незв'язаної термопружності (без врахування тепловиділення під час деформації – дисипації механічної енергії) основні рівняння будуть такі:

а) рівняння теплопровідності

$$k T_{,ii} = \rho c_v \dot{T} \text{ або } k \nabla^2 T = \rho c_v \dot{T}; \quad (6.78)$$

б) рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0; \quad (6.79)$$

в) рівняння, що зв'язують тензори напруження і деформації

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0) \\ \text{або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \lambda \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \hat{\mathbf{I}} (T - T_0); \end{aligned} \quad (6.80)$$

в) геометричне рівняння, що зв'язує деформації з переміщеннями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ або } \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}). \quad (6.81)$$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Запишіть узагальнений закон Гука. Дайте фізичний зміст функції енергії деформації.
2. Дайте визначення ізотропного та анізотропного середовища. Поясніть властивості симетрії пружних властивостей?
3. Наведіть пружні сталі та дайте їх фізичний зміст.
4. Наведіть постановку статичних і динамічних задач теорії пружності. Запишіть рівняння Нав'є-Коші та рівняння сумісності Бельтрамі-Мічела.
5. Сформулюйте теорему про суперпозицію. Чим можна пояснити єдиність розв'язків? Сформулюйте принцип Сен-Венана.
6. Опишіть плоскі задачі теорії пружності. Чим відрізняється плоский напружений стан від плоскої деформації?
7. Опишіть призначення функцій напруження E_i .
8. Сформулюйте двовимірні статичні задачі теорії пружності у полярних координатах.
9. В чому полягає гіперпружність, гіпопружність?
10. Охарактеризуйте задачі лінійної термопружності.
11. Запишіть рівняння Дюамеля-Неймана.

7. МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ

7.1. Тиск рідини. Тензор в'язких напружень. Баротропна течія

У будь-якій рідині в стані спокою вектор напруження $t_i^{(n)}$ на довільному плоскому елементі поверхні є колінеарним до нормалі $\mathbf{n}$ до цієї поверхні і однаковий за величиною для всіх напрямків в даній точці. Таким чином можна записати

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j = -p_0 n_i \text{ або } \mathbf{t}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n}, \quad (7.1)$$

де p_0 – величина напруження або *гідростатичне напруження*, Па.

Від'ємний знак вказує на стискаючу дію напруження у разі позитивного значення тиску. При цьому кожний напрямок є головним, і з (7.1) витікає, що

$$\sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p_0 \hat{\mathbf{I}}, \quad (7.2)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу.

Такий кульовий напружений стан (7.2) називається *гідростатичним стисканням*. Із (7.2) видно, що дотичні компоненти напруження дорівнюють нулю в рідині, що знаходиться в стані спокою.

Під час руху компоненти дотичних напружень у загальному випадку не дорівнюють нулю, і зазвичай у цьому випадку тензор напруження представляє суму двох доданків

$$\sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} + \tau_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p_0 \hat{\mathbf{I}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (7.3)$$

при цьому $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ називають *тензором в'язких напружень* 2-го рангу (τ_{ij} – компоненти тензором в'язких напружень), а p_0 – *тиском*.

Усі реальні рідини є стискуваними та в'язкими. Однак ці властивості дуже різняться в різних рідинах, і часто можна знехтувати цими ефектами в деяких ситуаціях без суттєвої втрати точності в розрахунках, що базуються на таких припущеннях. Відповідно до цього, *нев'язка*, або так звана *ідеальна рідина* – це така рідина, в якій компоненти τ_{ij} тотожно дорівнюють нулю, навіть якщо відбувається рух. Навпроти, *в'язка рідина* – це така рідина, в якій треба враховувати компоненти τ_{ij} . Для стисливих рідин тиск p по суті є параметром

стану, як в класичній термодинаміці. Згідно (7.3), середнє напруження дається формулою

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}\tau_{ij} \quad \text{або} \quad \frac{1}{3}\text{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = -p + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{t}}, \quad (7.4)$$

Для рідин, що знаходяться в стані спокою, τ_{ij} обертається в нуль, p зводиться до p_0 , який у цьому випадку дорівнює взятому зі зворотним знаком середньому нормальному напруженню. Для нестисливих рідин термодинамічний тиск незалежно від механічних умов не визначається, і для таких рідин p треба розглядати як самостійну невідому величину механічної природи.

У стисливих рідинах тиск p , густина ρ і абсолютна температура T зв'язані між собою рівнянням стану

$$p = p(\rho, T). \quad (7.5)$$

Прикладом такого рівняння стану може слугувати відомий з термодинаміки закон або рівняння ідеального газу

$$p = \rho RT, \quad (7.6)$$

де R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К).

Баротропними рідинами називаються такі рідини, в яких рівняння стану не містить температури і має вигляд

$$p = p(\rho).$$

Так, наприклад, ізотермічний процес ідеального газу є окремим випадком термодинамічних процесів, в якому виконується припущення баротропії.

7.2. Визначальні або фізичні рівняння. Стоксові рідини. Ньютонівські рідини

Наявність в рідинах в'язких напружень пов'язано з дисипацією енергії. Під час встановлення визначальних або фізичних рівнянь для рідин використано припущення, що тензор в'язких напружень τ_{ij} є функцією тензора швидкості деформації $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ або $\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$. Якщо цей функціональний зв'язок нелінійний, що символічно можна виразити формулою

$$\tau_{ij} = f_{ij}(D_{pq}) \text{ або } \hat{\tau} = \hat{f}(\hat{\mathbf{D}}), \quad (7.7)$$

то рідина називається *стоксовою*. Якщо ця функція лінійна, тобто має вигляд

$$\tau_{ij} = K_{ijpq} D_{pq} \text{ або } \hat{\tau} = \overset{4}{\hat{\mathbf{K}}} : \hat{\mathbf{D}}, \quad (7.8)$$

де тензор 4-го рангу *коефіцієнтів в'язкості* K_{ijpq} або $\overset{4}{\hat{\mathbf{K}}}$, то рідина називається *ньютонівською*.

Фізичні рівняння для ізотропної однорідної ньютонівської рідини можна отримати із (7.7) і (7.3), використовуючи точно таку ж процедуру як і для узагальненого закону Гука для пружного середовища (див. розділ 6). Остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij} \\ \text{або } \hat{\sigma} &= -p\hat{\mathbf{I}} + \lambda^* \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}) + 2\mu^* \hat{\mathbf{D}}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

де λ^* і μ^* – коефіцієнти в'язкості рідини, Па·с.

Із (7.9) неважко знайти середнє нормальне напруження

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sigma_{ii} &= -p + \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*) D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} \\ \text{або } \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\sigma}) &= -p + \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*) \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}) = -p + \chi^* \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}), \end{aligned} \quad (7.10)$$

де $\chi^* = \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*)$ – коефіцієнт об'ємної в'язкості, Па·с.

Умова виду

$$\chi^* = \lambda^* + \frac{2}{3} \mu^* = 0, \quad (7.11)$$

називається *умовою Стокса*.

Рівняння (7.9) можна також записати через градієнт і дивергенцію швидкості з врахуванням (7.11) $\lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*$

$$\sigma = \mu^* \left[(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{2}{3} v_{k,k} \delta_{ij} \right] - p \delta_{ij}$$

$$\text{або } \hat{\sigma} = \mu^* \left[(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}} \right] - p \hat{\mathbf{I}},$$

де $\text{grad } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = v_{i,j}$ і $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v_{k,k}$, μ^* – динамічна в'язкість)¹.

Умова Стокса стверджує, що тиск p визначається як середнє нормальне напруження стисливої рідини у стані спокою. У такому випадку термодинамічний тиск визначається через механічне напруження.

Використовуючи компоненти девіаторів напруження $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ і швидкості деформації $D'_{ij} = D_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} D_{kk}$, наведені вище фізичні рівняння (7.9) можна переписати таким чином

$$S_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} = -p \delta_{ij} + \delta_{ij} \left(\lambda^* + \frac{2}{3} \mu^* \right) D_{ii} + 2\mu^* D'_{ij}$$

$$\text{або } \hat{\mathbf{S}} + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\sigma}) = -p \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{I}} \left(\lambda^* + \frac{2}{3} \mu^* \right) \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}) + 2\mu^* \hat{\mathbf{D}}'. \quad (7.12)$$

Враховуючи співвідношення (7.10), рівняння (7.12) можна записати у вигляді двох груп рівнянь

$$S_{ij} = 2\mu^* D'_{ij} \text{ або } \hat{\mathbf{S}} = 2\mu^* \hat{\mathbf{D}}' \quad (7.13)$$

$$\sigma_{ii} = -3p + 3\chi^* D_{ii} \text{ або } \text{tr}(\hat{\sigma}) = -3p + 3\chi^* \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}). \quad (7.14)$$

Рівняння (7.13) відноситься до ефектів зсуву, а рівняння (7.14) – дає співвідношення для зміни об'єму.

¹ Фізичний зміст динамічної в'язкості або коефіцієнта внутрішнього тертя: (з фізичної точки зору динамічна в'язкість представляє собою питому силу тертя при градієнті швидкості, рівному одиниці – відповідно до закону в'язкості Ньютона $\sigma_{11} = 2\mu^* \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu^* (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}}$.

7.3. Основні рівняння ньютонівської рідини. Рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема

Під час формулювання задач про рух ньютонівської рідини основними рівняннями в ейлеревій формі будуть такими:

а) рівняння нерозривності (5.3)

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \text{ або } \dot{\rho} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad (7.15)$$

б) рівняння руху (5.16)

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (7.16)$$

в) рівняння енергії (5.32)

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m \text{ або } \dot{u} = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + q_m; \quad (7.17)$$

г) визначальні рівняння (7.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij} \\ \text{або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= -p\hat{\mathbf{I}} + \lambda^* \hat{\mathbf{I}} \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}) + 2\mu^* \hat{\mathbf{D}}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \text{або } \sigma &= \mu^* \left[(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{2}{3} v_{k,k} \delta_{ij} \right] - p\delta_{ij}, \\ \text{або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mu^* \left[(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}} \right] - p\hat{\mathbf{I}}, \end{aligned}$$

д) рівняння стану (7.5)

$$p = p(\rho, T). \quad (7.19)$$

Якщо в рідині враховуються теплові ефекти, що дуже часто є необхідним в задачах про рух рідини, то потрібно записати додаткове фізичне рівняння, а саме:

е) закон теплопровідності Фур'є (6.71), який встановлює зв'язок між вектором густини теплового потоку q_i (Вт/м²) та градієнтом температури T_i (К/м)

$$q_i = -kT_{,i} \text{ або } \mathbf{q} = -k\nabla T; \quad (7.20)$$

ж) калоричне рівняння стану

$$u = u(\rho, T). \quad (7.21)$$

Система рівнянь (7.15)– (7.21) містить 16 рівнянь з 16 невідомими і тому є замкнутою.

Якщо визначальні співвідношення (7.18) підставити в рівняння руху (7.16) і скористатися визначенням $2D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})$, то отримаємо так зване рівняння *Нав'є-Стокса-Дюгема*

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} \\ \text{або } \rho \dot{\mathbf{v}} &= \rho \mathbf{b} - \nabla p + (\lambda^* + \mu^*) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Для нестисливої рідини, коли $v_{j,j} = 0$ або $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, рівняння (7.22) зводиться до *рівнянь Нав'є-Стокса*

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} \text{ або } \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (7.23)$$

Якщо виконано умову Стокса $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$ (7.11), то для такого стисливого середовища отримується рівняння Нав'є-Стокса в формі

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \rho b_i - p_{,i} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} \\ \text{або } \rho \dot{\mathbf{v}} &= \rho \mathbf{b} - \nabla p + \frac{1}{3}\mu^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Рівняння Нав'є-Стокса (7.23) разом з рівнянням нерозривності (7.15) утворюють повну систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими: тиском p і трьома компонентами швидкості v_i , $i=1,2,3$. У кожній конкретній задачі розв'язок цієї системи повинен задовольняти початковим і граничним умовам, що накладаються на напруження і компоненти швидкості. У в'язкій рідині в якості граничних умов на нерухомій непроникній поверхні приймаються нульові значення нормальної і дотичних компонент швидкості. Ця умова витікає із експериментально встановленого факту прилипання, в результаті якого рідина набуває швидкості границі. Для нев'язкої рідини на нерухомій

непроникній поверхні необхідною умовою є тільки нульове значення нормальної компоненти швидкості.

Якщо рівняння Нав'є-Стокса записані в безрозмірній формі, то з'являються деякі коефіцієнти у вигляді комбінацій із характерних значень параметрів. Одним із найбільш важливих і найчастіше використовуваних таких коефіцієнтів є *число Рейнольдса* Re , яке виражає співвідношення між силами інерції і силами в'язкості. Так, якщо потік має такі характерні параметри: лінійний розмір L , швидкість V і густину ρ , то числом Рейнольдса є відношення

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (7.25)$$

де $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, m^2/s .

Для дуже великих значень числа Рейнольдса впливом в'язкості на напруження в рівняннях кількості руху можна нехтувати. В турбулентних потоках уявні (турбулентні) напруження діють в осередненому за часом потоці таким чином, як в'язкі напруження в ламінарному потоці. За відсутності турбулентності за великих чисел Re сили інерції переважають сили в'язкості і рідина веде себе так, наче вона нев'язка. Здатність потоку підтримувати турбулентні рухи встановлюється за числом Рейнольдса. Визначальні рівняння (7.18) застосовуються для описання реальних рідин тільки у випадку ламінарної течії.

7.4. Усталена течія. Гідростатика. Безвихрова течія

Рух рідини є *усталеним*, якщо компоненти швидкості не залежать від часу. При цьому похідні $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ дорівнюють нулю, а матеріальна похідна за часом від швидкості

$$\frac{dv_i}{dt} \equiv \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \text{ або } \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (7.26)$$

спрощується та приймає вигляд

$$\dot{v}_i = v_j v_{i,j} \text{ або } \dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (7.27)$$

Якщо швидкість по всій рідині дорівнює нулю, то рівняння Нав'є-Стокса зводяться до рівності

$$\rho b_i = p_{,i} \text{ або } \rho \mathbf{b} = \nabla p, \quad (7.28)$$

і описують стан *гідростатичної рівноваги*. У разі наявності баротропії, коли $\rho = \rho(p)$, можна ввести за визначенням *функцію тиску*

$$P(\rho) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (7.29)$$

Якщо до того ж масові сили є потенційними, тобто

$$b_i = -\Omega_{,i} \text{ або } \mathbf{b} = -\nabla \Omega, \quad (7.30)$$

то рівняння (7.28) приймає вигляд

$$(\Omega + P)_{,i} = 0 \text{ або } \nabla(\Omega + P) = 0, \quad (7.31)$$

Течія, в якій тензор завихреності (4.21)

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ або } \mathbf{V} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \nabla - \nabla \mathbf{v}), \quad (7.32)$$

всюди дорівнює нулю, називається *безвихровим*. Вектор завихреності q_i пов'язаний із тензором завихреності співвідношенням

$$q_i = \varepsilon_{ijk} V_{kj} \text{ або } \mathbf{q} = \mathbf{V}_v, \quad (7.33)$$

де ε_{ijk} – тензор Леві-Чивіти.

Тому цей вектор також перетворюється в нуль у безвихровому потоці. Крім того,

$$q_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \text{ або } \mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (7.34)$$

Але рівність $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ відображає необхідну та достатню умову існування потенціалу швидкості φ , значить вектор швидкості у безвихровому полі можна представити таким чином:

$$v_i = -\varphi_{,i} \text{ або } \mathbf{v} = -\nabla\varphi. \quad (7.35)$$

Отже безвихрове поле є потенційним.

7.5. Ідеальна рідина. Рівняння Бернуллі. Циркуляція

Якщо коефіцієнти в'язкості λ^* і μ^* дорівнюють нулю, то рідина називається *нев'язкою* або *ідеальною* (без тертя) і рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема (7.22) перетворюються в рівняння

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} \text{ або } \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{b} - \nabla p, \quad (7.36)$$

які називаються *рівняннями руху Ейлера*. Для баротропної рідини за умови потенціальних масових сил умови (7.29) і (7.30) можна ввести у рівняння (7.36), в результаті чого отримаємо

$$\dot{v}_i = -(\Omega + P)_{,i} \text{ або } \mathbf{v} = -\nabla(\Omega + P). \quad (7.37)$$

За умов усталеного руху рідини $\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0\right)$ (7.37) змінюється до вигляду (ліворуч в рівнянні (7.37) лишаються тільки конвективні члени)

$$v_j v_{i,j} = -(\Omega + P)_{,i} \text{ або } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla(\Omega + P). \quad (7.38)$$

Якщо виконати інтегрування рівняння Ейлера (7.37) вздовж лінії току, то отримаємо відоме рівняння Бернуллі

$$\Omega + P + \frac{v_i v_i}{2} + \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) dx_i = C(t). \quad (7.39)$$

За умов усталеного руху рідини $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ і $C(t)$ стає сталою Бернуллі C , яка, різна для різних ліній току в рідині. Але, якщо течія є до того ж і безвихровою ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), то стала C теж стає однаковою по всьому полю течії.

Коли масова сила є тільки сила поля тяжіння, то її можна представити потенціалом $\Omega = gh$ ($\text{м}^2/\text{с}^2$), де g – прискорення сили тяжіння ($\text{м}/\text{с}^2$), а h – висота стовпа рідини (м). Величина $h_p = \frac{P}{g} = \frac{p}{\rho g}$ характеризує так званий напір тиску (м), а $h_v = \frac{v^2}{2g}$ – швидкісний напір (м). Рівняння Бернуллі вимагає сталості повного напору вздовж лінії току. Для нестисливої рідини рівняння Бернуллі приймає такий вигляд

$$h + h_p + h_v = h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \quad (7.40)$$

За визначенням *циркуляцією швидкості рідини по замкнутій лінії* називають лінійний інтеграл по контуру

$$\Gamma_c = \oint v_i dx_i \quad \text{або} \quad \Gamma_c = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}. \quad (7.41)$$

За теоремою Стокса (1.153) лінійний інтеграл (7.41) можна перетворити в інтеграл по поверхні

$$\Gamma_c = \oint n_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} dS \quad \text{або} \quad \Gamma_c = \oint \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dS, \quad (7.42)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні S , що натягнута на дану лінію.

Якщо течія безвихрова, то $(\nabla \times \mathbf{v} = 0)$ і циркуляція відсутня (теж дорівнює нулю). У цьому випадку підінтегральний вираз в (7.41) стає повним диференціалом деякої функції $d\varphi = -\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$, а ця функція φ представляє собою потенціал швидкості.

Матеріальну похідну від циркуляції за часом $\frac{d\Gamma_c}{dt} = \dot{\Gamma}_c$ можна знайти, скориставшись формулою (4.60). В додатку до циркуляції ця формула дає

$$\dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i) \quad \text{або} \quad \dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}). \quad (7.43)$$

Можна показати, що в баротропній нев'язкій рідині за умови дії потенціальних масових сил циркуляція є сталою величиною. Це відома *теорема Кельвіна* (Томсона) про постійність циркуляції.

7.6. Потенціальна течія. Плоска потенціальна течія

Термін *потенціальна течія* часто використовують для позначення безвихрового руху, оскільки відсутність вихорів $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ є одночасно необхідним і достатнім для існування потенціалу швидкості φ , через який компоненти швидкості визначаються за формулами (7.35). Для безвихрової течії стисливої рідини рівняння Ейлера і рівняння нерозривності в деяких випадках можуть бути лінеаризовані та спільно перетворені до хвильового рівняння

$$\ddot{\varphi} = c^2 \varphi_{,ii} \text{ або } \ddot{\varphi} = c^2 \nabla^2 \varphi, \quad (7.44)$$

де c – швидкість звуку в середовищі, м/с.

У випадку усталеної безвихрової течії стискуваної баротропної рідини рівняння Ейлера та рівняння нерозривності спільно перетворюються до вигляду

$$(c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{j,i} = 0 \text{ або } c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = 0. \quad (7.45)$$

Це так звані *рівняння газової динаміки*.

Для потенціальної течії нестисливої рідини рівняння нерозривності зводиться до рівняння Лапласа

$$\varphi_{,ii} = 0 \text{ або } \nabla^2 \varphi = 0, \text{ або } \Delta \varphi = 0, \quad (7.46)$$

і розв’язок його забезпечить знаходження компонент швидкості за формулами (7.35). При цьому повинні також задовольнятися граничні умови для швидкості, наприклад, на нерухомій непроникній границі $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Внаслідок лінійності рівняння Лапласа суттєвою рисою цієї постановки є можливість використання методу суперпозиції розв’язків.

У двовимірній течії нестисливої рідини, яка паралельна $x_1 x_2$, $v_3 = 0$ і рівняння нерозривності має вигляд

$$v_{\alpha,\alpha} = 0 \text{ або } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (7.47)$$

де, як тут прийнято, грецькі символи приймають значення 1 і 2.

Відповідно до (7.47) незалежно від того, чи буде течія безвихровою, можна ввести функцію току $\psi = \psi(x_1, x_2)$, таку, що

$$v_{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi_{,\beta}. \quad (7.48)$$

Якщо плоска течія є до того ж безвихровою, тобто

$$v_{\alpha} = -\varphi_{,\alpha} \text{ або } \mathbf{v} = -\nabla\varphi, \quad (7.49)$$

то із рівностей (7.48) і (7.49) видно, що функція току і потенціал швидкості задовольняють умовам *Koши-Rімана*

$$\varphi_{,1} = \psi_{,2} \text{ і } \varphi_{,2} = -\psi_{,1}. \quad (7.50)$$

Виключаючи φ і ψ по чергово із рівнянь (7.50), легко показати, що

$$\varphi_{,\alpha\alpha} = 0 \text{ або } \nabla^2\varphi = 0, \quad (7.51)$$

$$\psi_{,\alpha\alpha} = 0 \text{ або } \nabla^2\psi = 0. \quad (7.52)$$

Таким чином, якщо течія безвихрова, то обидві функції φ і ψ є гармонічними. В наслідок чого можна ввести *комплексний потенціал*

$$\Phi(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad (7.53)$$

який буде аналітичною функцією комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$, а його похідна $\frac{d\Phi}{dz}$ буде визначати комплексну швидкість

$$\frac{d\Phi}{dz} = -v_1 + iv_2. \quad (7.54)$$

7.7. Основні рівняння для неньютонівської рідини

Рівняння стану для нестисливої неньютонівської рідини мають вигляд

$$\sigma_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})\dot{D}_{ij} - p\delta_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} - p\hat{\mathbf{I}} = 2\eta(\dot{\gamma})\hat{\mathbf{D}} - p\hat{\mathbf{I}}, \quad (7.55)$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – симетричний тензор напруження другого рангу, Па; $\hat{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\dot{\gamma})\hat{\mathbf{D}}$ – тензором в'язких напружень другого рангу, Па; $\dot{D}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ або

$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$ – тензор швидкості деформації, с^{-1} ; $v_i = \mathbf{v}$ – вектор швидкості, м/с ; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па ; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; $\eta(\dot{\gamma})$ – ефективна в'язкість рідини як функція другого інваріанта $\dot{\gamma}$ від $\hat{\mathbf{D}}$, $\text{Па}\cdot\text{с}$; $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\hat{\mathbf{D}}:\hat{\mathbf{D}}}$ – другий інваріант від $\hat{\mathbf{D}}$, с^{-1} .

Степеневий закон з врахуванням температурної залежності в'язкості для різних класів рідин має вигляд

$$\eta(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1}H(T), \quad (7.56)$$

де k – величина середньої в'язкості рідини, $\text{Па}\cdot\text{с}$; $\dot{\gamma}$ – другий інваріант $\hat{\mathbf{D}}$, с^{-1} ; n – показник ступеня, який визначає клас рідини; $H(T) = \exp\left[\frac{E_a}{RT_a}\left(\frac{1}{T-T_0} - \frac{1}{T_a-T_0}\right)\right]$; E_a – енергія активації течії, Дж/моль ; R – газова стала, $\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$; T_a – абсолютна температура активації, К ; T_0 – абсолютна температура відліку, К .

За умови $n=1$ маємо ньютонівську рідину; для $n>1$ – дилатантну рідину; для $n<1$ – псевдо-пластик.

Наприклад, система диференціальних рівнянь механіки суцільного середовища для ізотермічної нестисливої рідини має вигляд

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = \nabla \cdot \hat{\mathbf{\sigma}} + \rho \mathbf{g}, \end{cases} \quad (7.57)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; ρ – густина, кг/м^3 ; t – час, с ; $\hat{\mathbf{\sigma}}$ – тензор напруження (7.55), Па ; $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, м/с^2 .

Для замикання системи рівнянь (7.57) треба додати рівняння стану, що визначає тип рідини (ньютонівська або неньютонівська), початкові та відповідні граничні умови.

7.8. Моделі дилатантних (комполітичних) речовин. Постановка задачі тепло-гідродинамічного стану рідини типу Bingham-Papanastasiou

Комполітичні речовини, що складаються з наповнювача (твердих частинок) і зв'язувального (в'язкої рідини), проявляють дуалізм властивостей залежно від

значень внутрішнього напруження. З одного боку, нижче певного рівня зовнішньої механічної дії такий матеріал зберігає свою цілісність, проявляючи пластичні властивості, що схожі з твердим тілом, а з іншого – за умови достатнього зовнішнього зусилля речовина починає текти як в'язка рідина.

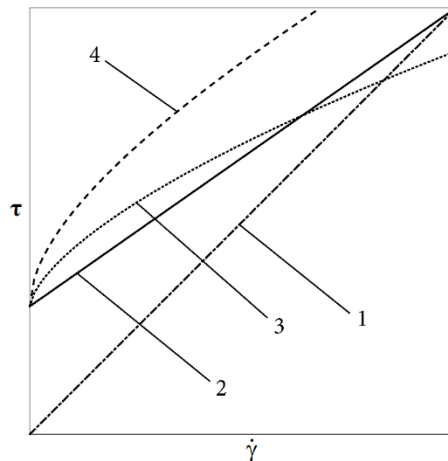
Для опису поведінки даного класу речовин застосовуються моделі Bingham (7.58), Herschel-Bulkley (7.59), Casson (7.60). Для простої двовимірної зсувної течії (течії Куетта) ці моделі запишуться таким чином (рис. 7.1):

$$\begin{cases} \tau = \tau_{\text{shear}} + \mu_{\text{eff}} \dot{\gamma}, & |\tau| > \tau_{\text{shear}}; \\ \dot{\gamma} = 0, & |\tau| \leq \tau_{\text{shear}}, \end{cases} \quad (7.58)$$

$$\begin{cases} \tau = \tau_{\text{shear}} + K \dot{\gamma}^n, & |\tau| > \tau_{\text{shear}}; \\ \dot{\gamma} = 0, & |\tau| \leq \tau_{\text{shear}}, \end{cases} \quad (7.59)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_{\text{shear}}} + \sqrt{\mu_{\text{eff}}} \dot{\gamma}, & |\tau| > \tau_{\text{shear}}; \\ \dot{\gamma} = 0, & |\tau| \leq \tau_{\text{shear}}, \end{cases} \quad (7.60)$$

де τ – вектор напруження зсуву, Па; τ_{shear} – критичне зсувне напруження (статичне напруження зсуву), Па; μ_{eff} – ефективний коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с; $\dot{\gamma} = 2\hat{\mathbf{D}}$ – тензор швидкості деформації, с⁻¹; K, n – коефіцієнти моделі Herschel-Bulkley.



1 – ньютонівська рідина; 2 – рідина Bingham; 3 – рідина Herschel-Bulkley;
4 – рідина Casson

Рис. 7.1. Залежність зсувних напружень від швидкості деформації для різних моделей в'язко-пластичної рідини

Для тривимірного випадку тензорна форма рівняння (7.58) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left(\mu_{eff} + \frac{\tau_{shear}}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} \right) \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}, & |\boldsymbol{\tau}| > \tau_{shear}; \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} = 0, & |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_{shear}, \end{cases} \quad (7.61)$$

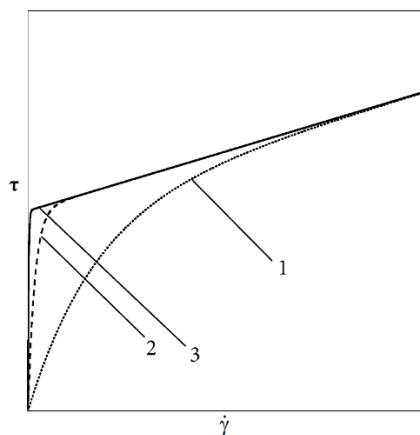
де $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ – тензор напруження зсуву, Па; $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} : \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}})}$ – другий інваріант від $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}$, с^{-1} ; $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla$ – швидкість деформації, с^{-1} ; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості, м/с ; ∇ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; $|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{\tau}}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} : \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}})}$ – другий інваріант від $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$, Па.

Модель Bingham (7.61) передбачає співіснування двох областей (рідкої і твердої), що тягне за собою значні обчислювальні труднощі при моделюванні в області сильної нелінійності фізичних властивостей рідини. Для подолання цієї проблеми Papanastasiou запропонував регуляризацію рівняння напружено-деформованого стану потоку в'язко-пластичного матеріала за допомогою введення експоненціального множника в рівняння (7.61)

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left(\mu_{eff} + \frac{\tau_{shear}}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|} [1 - \exp(-m|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)] \right) \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad (7.62)$$

де m – експоненціальний множник, с .

Рівняння (7.62) (модель Bingham-Papanastasiou) є справедливим для всіх значень $|\boldsymbol{\tau}|$ і дає близькі результати до ідеальної рідини Bingham за значень $m \geq 100$ (рис. 7.2).



1 – $m = 1$; 2 – $m = 10$; 3 – $m = 100$

Рис. 7.2. Залежність зсувних напружень від швидкості деформації для моделі рідини Bingham-Papanastasiou за різних значень параметра m

Математична модель неізотермічної екструзії композитної речовини може бути представлена системою рівнянь, яка включає квазістаціонарне рівняння нерозривності, нестационарні рівняння збереження кількості руху та енергії:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{\tau}}}; \\ \rho \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}h) \right] = \nabla \cdot [\lambda_{eff}(T) \nabla T] + \bar{\bar{\mathbf{\tau}}} : \nabla \mathbf{v}, \end{array} \right. \quad (7.63)$$

де ρ – густина, кг/м³; t – час, с; p – тиск, Па; $h = \int_0^T c_p(T) dT$ – явна масова ентальпія, Дж/кг; T – абсолютна температура, К; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); λ_{eff} – ефективний коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $\bar{\bar{\mathbf{\tau}}} : \nabla \mathbf{v}$ – член, що відповідає дисипації механічної енергії, Вт/м³; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку.

За початкові умови системи рівнянь (7.63) приймаються розподіл полів компонент вектора швидкості, тиску та температури:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(x, y, z); \\ p_0 = p(x, y, z); \\ T_0 = T(x, y, z), \end{array} \right. \quad (7.64)$$

де $(x, y, z) \in \Omega$ – декартові координати, м; Ω – розрахункова область.

Граничні умови для (7.63) включають: у вхідному січенні – нормальна швидкість і температура (7.65); у відхідному січенні – нульовий градієнт тиску й температури (7.66); на поверхнях контакту рідини зі стінками каналу – умови проковзування та умови конвективного типу або густину теплового потоку (7.67):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_{inlet}(t); \\ T = T_{inlet}(t), \end{array} \right. \quad (7.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0, \end{array} \right. \quad (7.66)$$

$$\begin{cases} \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{wall}}; \\ \left\{ \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (-\lambda_{\text{eff}}(T) \nabla T) &= \alpha(T - T_{\infty}); \\ \mathbf{n} \cdot (-\lambda_{\text{eff}}(T) \nabla T) &= \mathbf{q}, \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (7.67)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні вхідного або відхідного січення; $v_{\text{inlet}}, T_{\text{inlet}}$ – швидкість (м/с) та абсолютна температура (К) у вхідному січенні, відповідно; $\boldsymbol{\tau}_{\text{wall}}$ – тензор зсувних напружень на границі контакту рідина-тверде тіло, Па; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_{∞} – абсолютна температура оточуючого середовища, К; $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м².

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення тиску рідини. Запишіть формулу для визначення тензора в'язких напружень. Чим характеризується баротропна течія?
2. Наведіть визначальні або фізичні рівняння. Що таке стоксові рідини і ньютонівські рідини?
3. Запишіть основні рівняння для ньютонівської рідини. Наведіть рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема.
4. Що таке усталена течія, гідростатика, безвихрова течія?
5. Дайте визначення ідеальної рідини. Запишіть рівняння Бернуллі. Що таке циркуляція?
6. Що таке потенціальна течія? Дайте визначення плоскої потенціальної течії.
7. Запишіть основні рівняння для неньютонівської рідини.
8. Наведіть моделі дилатантних (комполітних) речовин. Запишіть постановку задачі тепло-гідродинамічного стану рідини типу Bingham-Papanastasiou.

8. ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

8.1. Основні положення та визначення

Пружні деформації характеризуються властивістю повного відновлення недеформованого стану після зняття прикладеного навантаження. Крім того, пружні деформації залежать тільки від величини напруження і не залежать від історії деформування або навантаження. Будь-яка деформація, що виникає як відповідна реакція матеріалу на прикладене навантаження або зміни в оточуючому середовищі і не підпорядковується визначальним законам класичної теорії пружності, може розглядатися як *непружна деформація*. Зокрема, незворотні зміщення, які отримуються в результаті ковзання або дислокацій на атомному рівні і як наслідок ведуть до залишкових змін розмірів, називаються *пластичними деформаціями*. Такі деформації мають місце тільки за інтенсивності напруження вищого за деякий поріг, відомого як *границя пружності* або *границя плинності*. Будемо позначати цю границю σ_y .

Основні проблеми теорії пластичності полягають у математичному формулюванні співвідношень між напруженнями і деформаціями, що відповідають феноменологічному описанню пластичних деформацій, і встановленні правил визначення кількісних критеріїв для визначення початку настання деформації. З іншого боку, вивчення пластичних деформацій з мікроскопічної точки зору відноситься до області фізики твердого тіла.

Термін *пластична течія* широко застосовується в теорії пластичності для описання процесу пластичного деформування. Однак на відміну від течії рідини, під час якої припускається рух частинок середовища, поняття пластичної течії відноситься до неперервної зміни сумарної деформації, а швидкість представляє собою швидкість деформації. Насправді, тверде тіло у стані пластичності може зазнавати дотичних напружень, лишаючись при цьому в спокої.

Багато основних понять теорії пластичності можна ввести безпосередньо, розглядаючи діаграми залежності напруження від деформацій під час випробування деякого гіпотетичного матеріалу на просте одновісне розтягування (або стискання). Така діаграма представлена на рис. 8.1. На цій схемі σ – умовне напруження (сила, розділена на початкову площу перетину), тоді як в якості ϵ можна взяти або звичайну (*технічну*) відносну деформацію e , що визначається формулою

$$e = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (8.1)$$

де L – поточна довжина зразка, а L_0 – початкова довжина зразка, або *натуральну (логарифмічну) відносну деформацію*, яка визначається формулою

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(1 + e) = e - \frac{e^2}{2} + O(e^3). \quad (8.2)$$

За малих деформацій ці дві їх міри майже рівні, як видно із (8.2), і тому припустимо нехтувати різницею між ними.

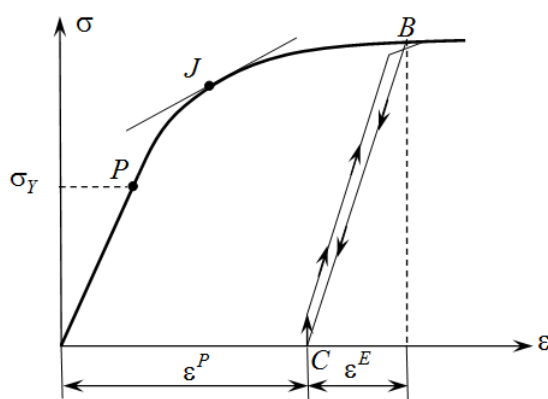


Рис. 8.1. Діаграми залежності напруження від деформації під час одновісного розтягування (або стискання)

Границя плинності точка P , що відповідає граничному напруженню σ_Y , розділяє криву напруження-деформація на рис. 8.1 на *пружну область* і *пластичну область*. На жаль, границю пружності різні автори визначають по різному. Іноді віна береться як *межа пропорційності* і лежить у верхньому кінці лінійної частини кривої, а іноді за нього приймають точку J , яка називається *границею плинності Джонсона* і за визначенням представляє собою точку, де уклін кривої досягає 50 % від свого початкового значення. Також існують інші способи визначення границі плинності. Так, за один з них за границю плинності приймається значення напруження, яке викликає 0,2 % залишкової деформації.

У початковій пружній області, яка може бути як лінійною, так і нелінійною, збільшення навантаження викликає переміщення точки, що показує напружено-деформований стан, рухатися вгору по кривій, а зменшення навантаження (розвантаження) призводить до руху точки вниз по тому ж самому шляху. Таким чином, у пружній області існує взаємно однозначна відповідність між напруженням і деформацією.

У пластичній області дещо інша картина. Під час розвантаження від деякого стану матеріалу, наприклад B (див. рис. 8.1), точка, що відповідає стану матеріалу, прямує за шляхом BC , майже паралельно лінійній частині

кривої. У точці C , де напруження досягає нуля, в результаті чого виявляється залишкова пластична деформація ε^P .

На рис. 8.1 символом ε^E позначена пружна деформація, що відповідає точці B . У разі повторного навантаження точка, що зображає стан, рухається із C назад до B за шляхом, що дуже близький до BC , але не потрапляє точно в B , із-за втрати енергії в циклі розвантаження-навантаження, утворюючи невелику *петлю гістерезису*. Після повернення до точки B потребується збільшення навантаження, щоб спричинити подальшу деформацію. Це явище пов'язано з так званою властивістю *зміцнення* матеріалу. Отже, ясно, що в пластичній області напруження залежить від всієї історії навантаження або деформування середовища.

Незважаючи на те, що відомо, що температура спричинює суттєвий вплив на пластичну поведінку реального матеріалу, в теорії пластичності часто приймають умову ізотермічності і за цих умов температура вважається просто параметром. Так само в загальноприйнятій теорії пластичності зазвичай нехтують впливом швидкості навантаження на діаграму напруження-деформація. Згідно з цим пластичні деформації вважаються не залежними від часу і вивчаються окремо від таких явищ, як повзучість і релаксація.

8.2. Ідеалізовані діаграми пластичної поведінки

Багато із тривимірних теорій, що вивчають пластичну поведінку, можна розглядати як деяке узагальнення низки ідеалізованих одновимірних діаграм залежності напруження від деформації. Чотири з найбільш часто використовуваних діаграм такого роду представлено на рис. 8.2. разом з простими механічними схемами здійснення кожної з них. У цих схемах переміщення маси M імітує пластичну деформацію, а сила $\vec{F}$ відіграє функцію напруження.

На рис. 8.2, *а* пружна область і явище зміцнення повністю відсутні, тоді як на рис. 8.2, *б* існує пружна зона, що передує границі плинності, а зміцнення немає. За відсутності зміцнення деформація називається *ідеально пластичною*. Представлення *а* і *б* найбільш корисні під час вивчення *обмежених пластичних деформацій*, коли великі деформації не відбуваються. На рис. 8.2, *в* пружна зона відсутня, а зміцнення вважається лінійним. Ця модель, так само як і модель, яка наведена на рис. 8.2, *г*, широко використовується під час вивчення необмеженої зовнішніми умовами *пластичної течії*.

Діаграми напруження-деформація, що зображені на рис. 8.2, називаються кривими розтягування. Крива стискання для попередньо недеформованого зразка (за умови відсутності історії пластичного деформування) зазвичай представляють собою відображення кривої розтягування відносно початку координат.

Однак, якщо зміна напруження на протилежне (розтягування на стискання або навпаки) відбувається для матеріалу, що вже знаходиться в пластичному стані, то спостерігається певне зменшення напруження границі плинності під час другого типу навантаження. Це явище називається ефектом Баушінгера і далі розглядатися не буде.

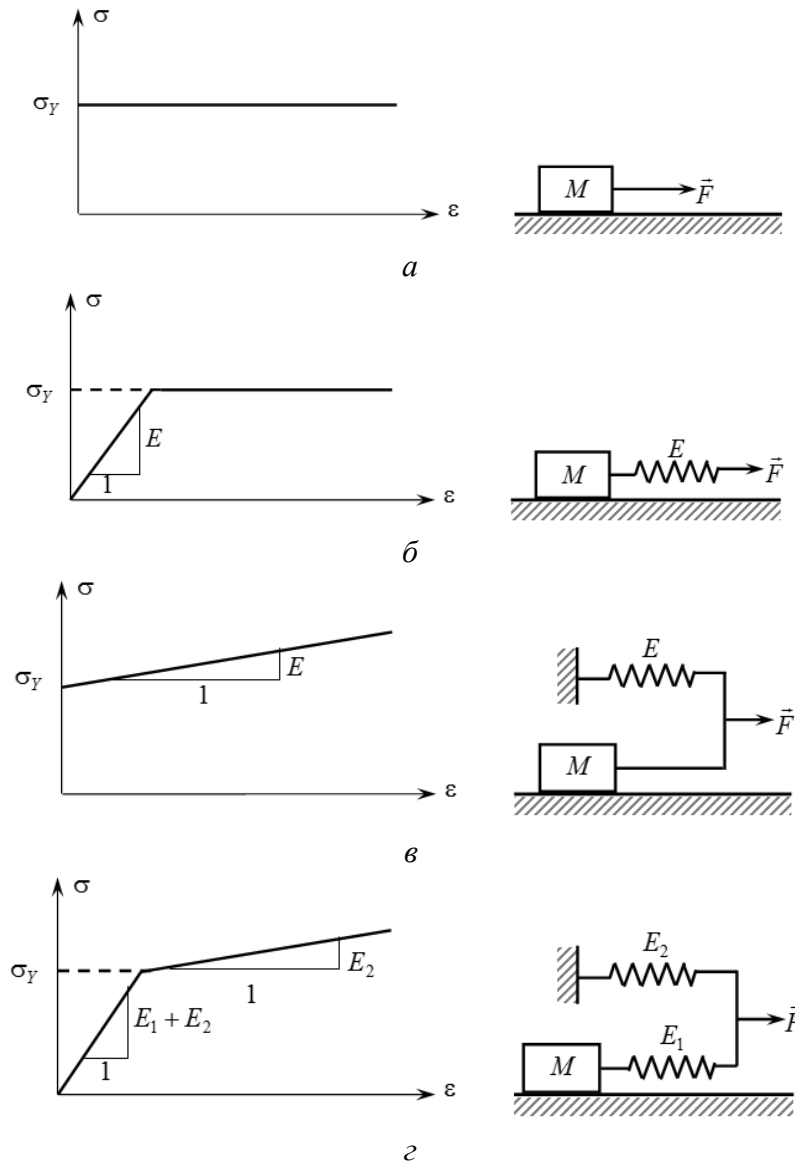


Рис. 8.2. Ідеалізовані діаграми пластичності:

a – жорстко-ідеально-пластичний матеріал; *б* – пружно-ідеально-пластичний матеріал;
в – жорстко-пластичний матеріал з лінійним зміцненням; *г* – пружно-пластичний матеріал з лінійним зміцненням

8.3. Умови пластичності. Критерії Треска та Мізеса

Умова (або критерій) пластичності є важливим узагальненням на тривимірний напружений стан поняття границі плинності для одновісного розтягування. З математичної точки зору умова пластичності представляє

собою співвідношення між компонентами напруження в точці, яка повинна бути виконана, коли в цій точці починається пластична поведінка середовища. У загальному випадку умову пластичності можна записати рівнянням

$$f(\sigma_{ij}) = C_Y, \quad (8.3)$$

де C_Y – стала плинності.

Іноді цю умову записують рівнянням

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad (8.4)$$

в якому $f_1(\sigma_{ij})$ називають *функцією плинності*.

Для ізотропного матеріалу умова пластичності не повинна залежати від напрямку і тому може бути виражена у вигляді функції інваріантів напруження, або, що все одно, у вигляді симетричної функції головних напружень. Тоді рівність (8.3) можна представити таким чином

$$f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y. \quad (8.5)$$

Окрім того, експерименти показують, що для багатьох середовищ (зокрема, для металів) напруження всестороннього стискання не викликає пластичних деформацій. Тому зазвичай вважають, що в умові пластичності фігурує функція інваріантів девіатора напруження

$$f_3(\Pi_{\hat{\sigma}_D}, \text{III}_{\hat{\sigma}_D}) = 0. \quad (8.6)$$

Із багаточисленних умов пластичності, які були запропоновані, два прийнятно прості математично і в той же час достатньо точні, щоб бути корисними під час вивчення початкової стадії пластичності ізотропних матеріалів. Це умови (критерії) Треска та Мізеса.

1. *Критерій плинності Треска* (теорія максимального дотичного напруження). Відповідно до цього критерію, пластична поведінка середовища починається тоді, коли максимальне дотичне напруження досягає заданої величини C_Y . Найпростіше за все критерій Треска записується в головних напруженнях. Так, за умови $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ критерій Треска згідно формули (2.54) виглядає так

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = C_Y = \text{const}. \quad (8.7)$$

Щоб встановити зв'язок між сталою плинності C_Y і границею плинності під час простого розтягу σ_Y , знайдемо максимальне дотичне напруження під час простого розтягу в умовах пластичності (наприклад, за допомогою кругів Мора, рис. 8.3, а).

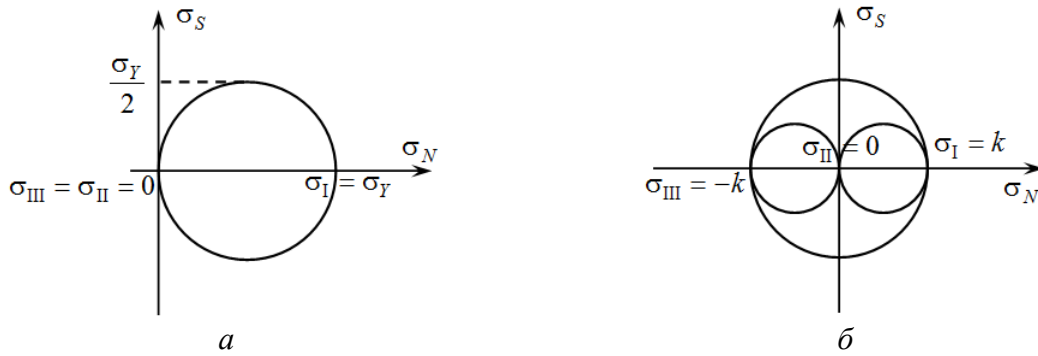


Рис. 8.3. Круги Мора в умовах пластичності:
а – простий розтяг; б – чистий зсув

Границя плинності під час простого розтягу стає рівною $\sigma_Y/2$. Тому критерій Треска виражається через границю плинності під час простого розтягу таким чином

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y. \quad (8.8)$$

З цією ж метою для встановлення величини сталої C_Y можна використовувати границю плинності в процесі, який називається *чистим зсувом*. Так, якщо границя плинності під час чистого зсуву дорівнює k , то величина сталої C_Y рівна k (цей результат отримується із кругів Мора, рис. 8.3, б) і критерій Треска записується рівністю

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2k. \quad (8.9)$$

2. *Критерій плинності Мізеса* (теорія енергії викривлення форми). Згідно з цим критерієм, пластична поведінка матеріалу починається тоді, коли другий інваріант девіатора напруження досягає деякого критичного значення. Математично критерій Мізеса записується так

$$-\Pi_{\hat{\sigma}_D} = C_Y, \quad (8.10)$$

або через головні напруження

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y. \quad (8.11)$$

Розглядаючи простий розтяг, легко показати, що (8.11) записати у вигляді

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2. \quad (8.12)$$

Критерій Мізеса (8.11) також можна записати через величину k – границю плинності під час чистого зсуву

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2. \quad (8.13)$$

Існують декілька варіантів представлення співвідношень (8.12) та (8.13), коли використовуються інші компоненти напруження, відмінні від головних.

8.4. Простір напруження. П-площина. Поверхня плинності

Простір напруження визначається тим, що в якості міри відстані вздовж осей координат беруться величини головних напружень. У просторі головних напружень (просторі Хей-Вестергарда), що зображено на рис. 8.4, по осях координат відкладаються головні значення тензора напруження.

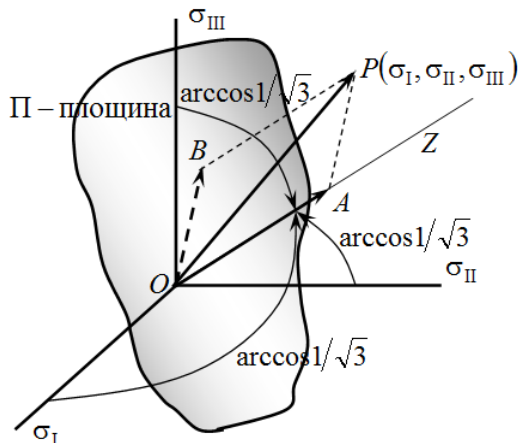


Рис. 8.4. Простір головних напружень Хей-Вестергарда

Кожна точка такого простору відповідає деякому напруженому стану. Радіус-вектор OP будь-якої точки $P(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ може бути розкладений на дві компоненти: OA – вздовж прямої OZ , який складає рівні кути з осями координат, і OB – в площині, перпендикулярній OZ і, який проходить через початок координат (ця площина відома під назвою П-площини). Компонента вздовж OZ , для якої $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, представляє гідростатичний тиск, а

компонента в Π -площині – девіаторну частину напруження. Легко показати, що Π -площина має рівняння

$$\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0. \quad (8.14)$$

У просторі напруження умова (8.5) $f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y$ визначає деяку поверхню. Ця поверхня називається *поверхнею плинності*. Якщо прийняти, що умова пластичності не залежить від гідростатичного напруження всебічного стискання, то відповідні поверхні плинності є циліндрами з утворюючими, паралельними OZ . Точки простору напруження, які лежать всередині циліндричної поверхні плинності, відповідають пружному напруженому стану, а точки, які лежать на поверхні плинності, представляють початковий пластичний напружений стан. Перетин поверхні плинності з Π -площиною називається *кривою плинності*.

Якщо поглянути вздовж прямої OZ (див. рис. 8.4) в напрямку до початку координат – точці O , то стане ясно, що проєкції осей координат на Π -площині виявляються розташовані симетрично під кутом 120° одна до другої, як показано на рис. 8.5, а.

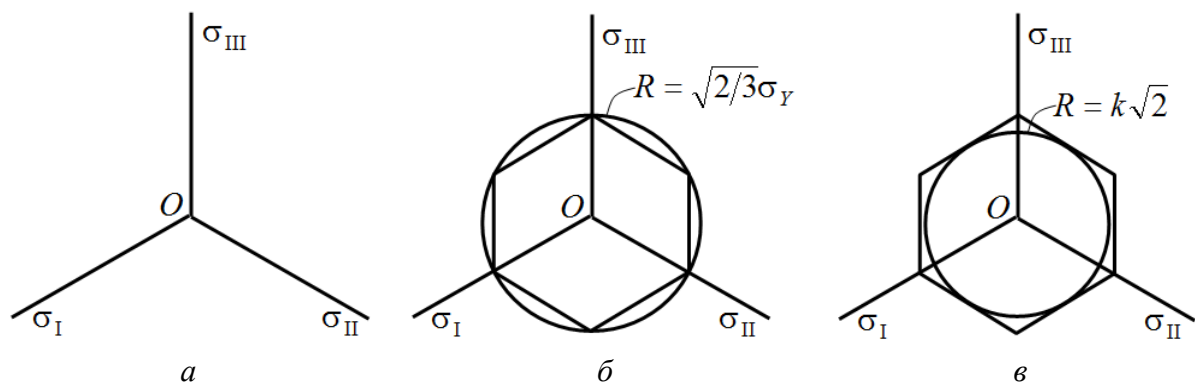


Рис. 8.5. Проєкції осей координат на Π -площині (а) та криві плинності, що відповідають критеріям Треска і Мізеса (б, в)

Криві плинності, що відповідають критеріям Треска і Мізеса, зображені на Π -площині на рис. 8.5, б, 8.5, в. Криві на рис. 8.5, б відповідають рівнянням (8.7) та (8.11), і за основу (точку, через яку повинна проходити крива) прийнято пластичний напружений під час простого розтягу. У цьому випадку коло Мізеса радіусом $\sqrt{2/3}\sigma_Y$ виявляється описаним навколо правильного шестикутника Треска. На рис. 8.5, в, обидві ці криві плинності мають в якості базису граничне напруження плинності k за умови чистого зсуву. У цьому випадку коло Мізеса вписане в шестикутник Треска.

Положення на Π -площині проєкції довільної точки напруження $P(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ знаходиться безпосереднім проєктуванням, оскільки кожна із

осей координат простору напруження складає з Π -площиною кут, косинус якого дорівнює $\sqrt{2/3}$. Таким чином, компоненти девіаторної проекції рівні $(\sqrt{2/3}\sigma_I, \sqrt{2/3}\sigma_{II}, \sqrt{2/3}\sigma_{III})$. Розв'язок зворотної задачі – визначення компонент напруження для будь-якої точки Π -площини – виявляється не єдиним, оскільки гідростатична компонента напруження може приймати яке завгодно значення.

8.5. Поведінка матеріалу за межею плинності. Ізотропне і кінематичне зміцнення

Продовження навантаження після досягнення початкової границі плинності призводить до пластичних деформацій, які можуть супроводжуватися змінами початкової поверхні плинності. Якщо матеріал припускається *ідеально пластичним*, то поверхня плинності не змінюється в процесі пластичного деформування і початкова умова пластичності лишається незмінною. Цьому відповідають одновимірні діаграми напруження-деформація, що показані на рис. 8.2, а і 8.2, б. Однак, для матеріалу зі *зміцненням* пластичне деформування супроводжується змінами поверхні плинності. Для врахування таких змін необхідно узагальнити функцію плинності $f_1(\sigma_{ij})$ у формулі (8.4), щоб в ній можна було задавати зміну поверхні плинності під час деформування (при цьому поверхню плинності називають *поверхнею навантаження*). Таке узагальнення досягається введенням *функції навантаження*

$$f_1^*(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, K) = 0, \quad (8.15)$$

яка залежить не тільки від напруження, але також і від пластичних деформацій ε_{ij}^P та характеристик зміцнення, що описується параметром K .

Рівняння (8.15) описує поверхню навантаження, що означає наступне: $f_1^* = 0$ – визначає границю пружної області, $f_1^* < 0$ – відповідає пружній області всередині поверхні навантаження, а $f_1^* > 0$ – відповідає області поза поверхнею навантаження і не має сенсу в теорії пластичності.

Знайдемо повний диференціал від функції навантаження (8.15)

$$df_1^* = \frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P + \frac{\partial f_1^*}{\partial K} dK. \quad (8.16)$$

Якщо $f_1^* = 0$ і $\frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$, то кажуть, що має місце процес розвантаження; якщо $f_1^* = 0$ і $\frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$, то має місце *нейтральне навантаження*; $f_1^* = 0$ і $\frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$, то відбувається процес *активного навантаження*. Той спосіб, яким пластична деформація ε_{ij}^P входить у функцію (8.15) в процесі навантаження, визначає *закон зміцнення*. Розглянемо два найбільш простих із цих законів.

Гіпотеза ізотропного зміцнення під час навантаження постулює, що поверхня плинності просто збільшується в розмірах, зберігаючи при цьому початкову форму. Криві плинності в Π -площині для критеріїв Мізеса і Треска будуть концентричними колами та правильними шестикутниками, відповідно (рис. 8.6).

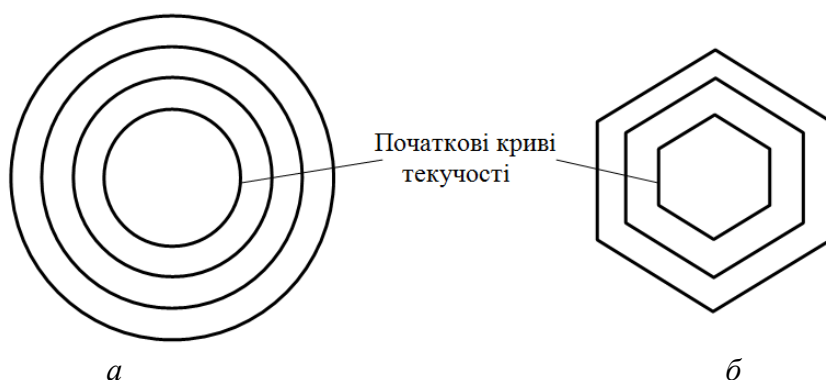


Рис. 8.6. Криві плинності в Π -площині для критеріїв Мізеса (а) і Треска (б) під час ізотропного зміцнення

Під час *кінематичного* зміцнення початкова поверхня плинності поступально переміщується в нове положення в просторі напруження без зміни розмірів і форми. Тоді формулу (8.4), що задає початкову поверхню плинності, слід замінити на таку

$$f_1(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0, \quad (8.17)$$

де α_{ij} – координати центра нової поверхні плинності.

Якщо зміцнення припускається *лінійним*, то

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \quad (8.18)$$

причому c – стала.

В одновимірному випадку крива плинності Треска переміщала б так, як показано на рис. 8.7.

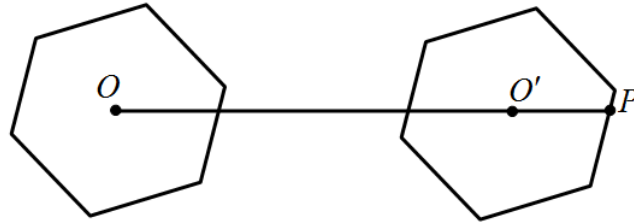


Рис. 8.7. Переміщення кривої плинності Треска під час кінематичного зміцнення

8.6. Співвідношення між напруженнями і деформаціями в пластичному стані. Теорія пластичного потенціалу

Як тільки виникають пластичні деформації, визначальні рівняння теорії пружності перестають бути вірними. Внаслідок того, що пластичні деформації залежать від усієї історії навантаження матеріалу, в теорії пластичності співвідношення між напруженнями і деформаціями формують у рамках *інкрементарної теорії* або *теорії течії* через припущення деформації. Наприклад, *рівняння Леві-Мізеса*, під час запису яких нехтують пружною частиною деформації і припускають, що головні осі тензорів припущення деформації та напруження збігаються, зв'язують припущення повної деформації з компонентами девіатора напруження таким чином

$$d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda. \quad (8.19)$$

Тут коефіцієнт пропорційності $d\lambda$ подається в диференціальній формі, щоб підкреслити, що припущення деформації зв'язані з кінцевими компонентами напруження. Множник $d\lambda$ може змінюватися в процесі навантаження і тому є скалярною функцією, а не фіксованою сталою. Співвідношення (8.19) представляють *закон течії* для жорстко-ідеально-пластичного матеріалу.

Виконуючи розкладання припущення деформації на пружну і пластичну складові

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P \quad (8.20)$$

та зв'язуючи припущення пластичної деформації з компонентами девіатора напруження

$$d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\lambda, \quad (8.21)$$

отримуємо рівняння *Прандтля-Рейса*. Формули (8.21) представляють закон течії пружно-ідеально-пластичного матеріалу. Вони встановлюють зв'язок між припущеннями деформації і девіатором поточного напруження, але не дають самих величин припущення деформації.

Функція компонент напруження $g(\dot{\sigma}_{ij})$, яка має властивість

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda, \quad (8.22)$$

називається *пластичним потенціалом*.

Для так званого стійкого пластичного матеріалу така функція існує і тотожно збігається з функцією плинності. Якщо ж до того функція плинності узята у вигляді $f_1(\sigma_{ij}) = \Pi_{\dot{\sigma}_D}$, то рівності (8.22) перетворюється в рівняння Прантля-Рейса.

8.7. Еквівалентне напруження. Еквівалентне припущення пластичної деформації

Для математичного формулювання закону зміцнення корисно визначити *еквівалентне* або *ефективне* напруження σ_{ekv} формулою

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}. \quad (8.23)$$

У скороченому вигляді (8.23) можна записати так

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{-3\Pi_{\dot{\sigma}_D}}. \quad (8.24)$$

Аналогічним чином вводиться *еквівалентне* або *ефективне* припущення пластичної деформації

$$d\varepsilon_{ekv}^P = \left\{ \frac{2}{9} \left[(d\varepsilon_{11}^P - d\varepsilon_{22}^P)^2 + (d\varepsilon_{22}^P - d\varepsilon_{33}^P)^2 + (d\varepsilon_{33}^P - d\varepsilon_{11}^P)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[(d\varepsilon_{12}^P)^2 + (d\varepsilon_{23}^P)^2 + (d\varepsilon_{31}^P)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (8.25)$$

Компактна форма (8.25) має вигляд

$$d\varepsilon_{ekv}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P}. \quad (8.26)$$

Використовуючи еквівалентні напруження і припущення пластичної деформації, що визначені згідно формул (8.24) і (8.26), отримуємо вираз для коефіцієнта $d\lambda$ із співвідношення (8.21)

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{ekv}^P}{\sigma_{ekv}}. \quad (8.27)$$

8.8. Робота на пластичних деформаціях. Гіпотези зміцнення

Швидкість, з якою напруження здійснюють роботу на деформаціях, або *об'ємна потужність напруження* визначена формулою (5.32) як $\sigma_{ij} D_{ij}$. Згідно (4.25), $d\varepsilon_{ij} = D_{ij} dt$, тому можна ввести припущення об'ємної роботи

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (8.28)$$

Використовуючи розкладання (8.20), цю величину можна також представити сумою

$$dW = \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P) = dW^E + dW^P. \quad (8.29)$$

Для пластичного нестисливого матеріалу *припущення роботи на пластичних деформаціях* буде дорівнювати

$$dW^P = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^P. \quad (8.30)$$

Якщо ж цей матеріал підпорядковується рівнянням Прандтля-Рейса

(8.21), то припущення роботи на пластичних деформаціях можна переписати у вигляді

$$dW^P = \sigma_{ekv} d\varepsilon_{ekv}^P, \quad (8.31)$$

а (8.21) приймає вигляд

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{dW^P}{\sigma_{ekv}^2} s_{ij}. \quad (8.32)$$

З усіх гіпотез, що запропоновано для обчислення миттєвих пластичних напружень під час пластичного деформування матеріалу з *ізотропним зміцненням*, найбільшого розповсюдження отримали два припущення: енергетичне й деформаційне. *Енергетична гіпотеза* зміцнення полягає в тому, що миттєва поверхня плинності залежить тільки від повної роботи на пластичних деформаціях. Отже, через повну роботу на пластичних деформаціях, яка визначається інтегралом,

$$W^P = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P, \quad (8.33)$$

критерій пластичності виражається рівністю

$$f_1(\sigma_{ij}) = F(W^P), \quad (8.34)$$

в якій точний вигляд функціональної залежності повинен бути визначений експериментально.

Деформаційна гіпотеза зміцнення полягає в тому, що зміцнення визначається величиною пластичних деформацій. Через повну еквівалентну деформацію

$$\varepsilon_{ekv}^P = \int d\varepsilon_{ekv}^P. \quad (8.35)$$

закон зміцнення представляється співвідношенням

$$f_1(\sigma_{ij}) = H(\varepsilon_{ekv}^P), \quad (8.36)$$

в якому вигляд функціонального зв'язку знаходиться із експериментальної залежності напруження-деформація під час одновісного випробування

матеріалу. Можна показати, що для критерію Мізеса закони зміцнення (8.34) і (8.35) є еквівалентними.

8.9. Співвідношення інкрементарної теорії пластичності для середовища з ізотропним зміцненням

Розглянемо умову пластичності

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - \psi(k) = 0, \quad (8.37)$$

де k – параметр, що характеризує роботу зміцнення.

Для того щоб отримати співвідношення між напруженнями і деформаціями, що описують поведінку матеріалу під час пластичних деформацій, скористаємося співвідношенням для фізичного рівняння

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad \text{або} \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p), \quad (8.38)$$

де C_{ijkl} – тензор четвертого рангу пружних констант.

Згідно з положеннями асоціативної теорії пластичності закон течії, відомий як принцип нормальності, можна записати у вигляді

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (8.39)$$

де $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності, що характеризує пластичні властивості матеріалу.

Слід звернути увагу на те, що звідси можна отримати рівняння Прандтля-Рейса за умови плинності Мізеса, однак в подальшому коефіцієнт $d\lambda$ не буде

визначатися виразом (8.27) $d\lambda = \frac{2}{3} \frac{d\varepsilon_{ekv}^p}{\sigma_{ekv}}$.

Підставляючи вираз (8.39) в співвідношення (8.38), знайдемо

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (8.40)$$

За пластичних деформацій напруження будуть задовольняти умові (8.37), виконавши диференціювання якого, отримаємо

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{dk} dk = 0, \quad (8.41)$$

або з врахуванням $dk = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = 0. \quad (8.42)$$

Тут і далі $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$.

Застосовуючи принцип нормальності до рівняння (8.42), знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\lambda = 0. \quad (8.43)$$

Якщо в (8.43) підставити (8.40) для $d\sigma_{ij}$ то, отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) - \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\lambda = 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] d\lambda = 0, \end{aligned} \quad (8.44)$$

Звідки можна отримати вираз для $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (8.45)$$

$$\text{де } \gamma' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{d\psi}{dk} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (8.46)$$

Розглянемо рівність (8.46) детальніше. Неважко показати, що $f(\sigma_{ij})$ – однорідна функція першого порядку. Тоді, застосовуючи теорему Ейлера, можна отримати

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_{ekv}. \quad (8.47)$$

Підставляючи (8.47) і вираз $\sigma_{ekv} d\varepsilon_{ekv}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = dk$ у формулу (8.46), отримуємо

$$\gamma' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{d\psi}{d\varepsilon_{ekv}^p}, \quad (8.48)$$

де $\frac{d\psi}{d\varepsilon_{ekv}^p} = H'$, якщо ψ – границя плинності підчас одновісного навантаження.

Вираз (8.45) можна використовувати, якщо підставити $d\lambda$ у формулу (8.40), якщо застосовується співвідношення між прирощеннями напруження і деформації вигляду

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}, \quad (8.49)$$

$$\text{де } C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rp}} C_{rpkl}. \quad (8.50)$$

Для того щоб ці співвідношення застосовувати, використовуючи формулювання з початковими напруженнями, зручніше провести додаткові перетворення. Введемо наступні позначення

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (8.51)$$

де $d\sigma_{ij}^e$ – компоненти прирощення пружних напружень, що відповідають пружній деформації.

Вираз (8.49) можна переписати у формі

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= d\sigma_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rp}} C_{rpkl} d\varepsilon_{kl}^e \\ \text{або } d\sigma_{ij} &= d\sigma_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}^e, \end{aligned} \quad (8.52)$$

де $C_{rpkl} d\varepsilon_{kl}^e = d\sigma_{rp}^e$.

Рівняння (8.52) означає, що істинні значення напруження можна обчислити за допомогою відповідних пружних напружень, якщо взяти їх значення у формі прирощення. Крім того, можна обчислити прирощення початкових напружень, скориставшись наступним співвідношенням

$$d\sigma_{ij}^p = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij} = \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}^e, \quad (8.53)$$

де $d\sigma_{ij}^p$ – прирощення початкових (пластичних) напружень, що відповідають прирощенню пластичній деформації $d\varepsilon_{ij}^p$.

8.10. Деформаційна теорія пластичності

Під час вивчення пластичних деформацій поряд з теорією течії, яка базується на рівняннях (8.19) і (8.20) і зв'язує прирощення деформацій з напруженнями, існує ще й *деформаційна теорія пластичності* Генки, в якій припускається залежність між напруженнями і повними деформаціями. Ці співвідношення мають вигляд

$$e_{ij} = \left(\varphi + \frac{1}{2G} \right) s_{ij}, \quad (8.54)$$

$$\varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu) \frac{\sigma_{ii}}{E}. \quad (8.55)$$

Параметр Генки φ можна виразити через еквівалентні напруження й деформацію

$$\varphi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{ekv}^p}{\sigma_{ekv}}, \quad (8.56)$$

$$\text{де } \varepsilon_{ekv}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}.$$

Таким чином

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{ekv}^p}{\sigma_{ekv}} s_{ij}. \quad (8.57)$$

8.11. Задачі пружно-пластичності

У випадку, коли і пружні, і пластичні деформації, що виникають у тілі під час навантаження, мають приблизно однаковий порядок, зазвичай відносять до задач пружно-пластичності. Багато відомих задач такого типу зустрічається в теорії балок і теорії крутіння валів, а також у дослідженнях товстостінних труб і оболонок, що знаходяться під тиском. У загальному випадку постановка задач у пружній області, пластичній зоні та на границі між ними включає такі співвідношення.

а) *Пружна область*:
рівняння рівноваги (2.23)

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0,$$

фізичні рівняння – зв'язок між напруженнями і деформаціями (6.23) або (6.24)

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right),$$

граничні умови, які накладено на напруження або переміщення,
умови сумісності.

б) *Пластична область*:
рівняння рівноваги (2.23),
фізичні рівняння – зв'язок між напруженнями й припущеннями
деформації (8.20), (8.21)

$$d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\lambda$$

і (6.24)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk},$$

умова сумісності повних деформацій,
умова пластичності (8.8) або (8.11)

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y, (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y,$$

граничні умови на границі пластичної області, якщо така границя існує.

в) *Границя між пружною і пластичною областями:*
умова неперервності напружень й переміщень.

8.12. Алгоритм розв'язання задачі пластичності з використанням методів Ейлера і Ньютона

Спочатку розглянемо застосування **зворотного (неяного) методу Ейлера** до розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \text{ або } \dot{x} = f(x, t). \quad (8.58)$$

Неявна формула Ейлера для числового інтегрування (8.58) має вигляд

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \frac{dx_{k+1}}{dt} = x_k + \Delta t f(x_{k+1}, t_{k+1}), \quad (8.59)$$

де Δt – крок інтегрування за часом; $x_k = x(t_k) = x(k\Delta t)$, $k = \overline{0, n}$ – значення змінної x в дискретні моменти часу $t_k = k\Delta t$; $x_0 = x(0)$ – початкове значення змінної x .

Неявним (зворотним) цей метод називається тому, що змінна x_{k+1} входить в ліву частину формули (8.59) і неявно, у вигляді похідної $\frac{dx_{k+1}}{dt} = f(x_{k+1}, t_{k+1})$, в праву.

Тепер розглянемо яким чином отримується формула для поверхні плинності за умови Мізеса

$$\bar{\sigma}^{pr} - 3G\Delta\bar{\epsilon}^{pl} = \sigma_y(\bar{\epsilon}^{pl}), \quad (8.60)$$

де $\bar{\sigma}^{pr} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{pr} s_{ij}^{pr}}$ – пробні еквівалентні напруження за Мізесом;
 $s_{ij}^{pr} = s_{ij}^0 + 2G\Delta e_{ij}$ – компоненти девіатора тензора пробних пружних напружень;
 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}/3$ – компоненти девіатора тензора напруження;
 Δe_{ij} – приращення девіаторних пружних деформацій; $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon_{kk}/3$ – компоненти девіатора тензора пружних деформацій; $\Delta\bar{\epsilon}^{pl}$ – приращення еквівалентних за Мізесом пластичних деформацій; $\sigma_y(\bar{\epsilon}^{pl})$ – границя плинності, що залежить від $\bar{\epsilon}^{pl}$; $\bar{\epsilon}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\epsilon}_{ij}^{pl} \bar{\epsilon}_{ij}^{pl}}$ – поточні еквівалентні за Мізесом пластичні деформації; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; E – модуль

пружності;
 ν – коефіцієнт Пуасона.

Тензор девіаторний напружень

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{el}, \quad (8.61)$$

де $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ – тензор девіаторних пружних напружень; $\mathbf{e}^{el} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$ – тензор девіаторних пружних деформацій; $\mathbf{I}$ – одиничний тензор другого рангу; G – модуль зсуву.

Закон пластичної течії в диференціальній формі

$$d\mathbf{e}^{pl} = d\bar{\varepsilon}^{pl}\mathbf{n}, \quad (8.62)$$

де $d\mathbf{e}^{pl}$ – тензор швидкості девіаторних пластичних деформацій;
 $d\bar{\varepsilon}^{pl}$ – швидкість еквівалентних пластичних деформацій; $\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{q} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$;
 F – функція умови пластичної течії.

Тензор швидкості повної деформації $d\boldsymbol{\varepsilon}$ визначається як сума пружної і пластичної

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}. \quad (8.63)$$

В інтегральній формі (8.63) набуває вигляду

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}. \quad (8.64)$$

Границя плинності матеріалу, що залежить від $\bar{\varepsilon}^{pl}$

$$q = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{pl}). \quad (8.65)$$

Рівняння (8.64) і (8.65) визначають поведінку матеріалу.

Інтегрування рівняння закону пластичної течії (8.62) за допомогою зворотного методу Ейлера дає рівняння у вигляді прирощень

$$\Delta\mathbf{e}^{pl} = \Delta\bar{\varepsilon}^{pl}\mathbf{n}. \quad (8.66)$$

Комбінуючи рівняння тензора девіаторний напружень (8.61) з рівнянням для швидкості деформацій (8.63), отримуємо

$$\mathbf{s} = 2G\left(\mathbf{e}^{el}\Big|_t + \Delta\mathbf{e} - \Delta\bar{\varepsilon}^{pl}\mathbf{n}\right). \quad (8.67)$$

Розглянемо більш детально отримання виразу у скобках рівняння (8.67).
 З (8.63) маємо, що $d\mathbf{\epsilon}^{el} = d\mathbf{\epsilon} - d\mathbf{\epsilon}^{pl} \rightarrow d\mathbf{\epsilon}^{el} = d\mathbf{\epsilon} - d\mathbf{\epsilon}^{pl} \rightarrow d\mathbf{e}^{el} = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^{pl}$.

Виконаємо інтегрування за часом $\int_0^{t+\Delta t} d\mathbf{e}^{el} = \int_0^t d\mathbf{e}^{el} + \int_t^{t+\Delta t} d\mathbf{e}^{el} = \mathbf{e}^{el} \Big|_t + \int_t^{t+\Delta t} d\mathbf{e}^{el}$. Для

визначення другого інтегралу скористаємося $d\mathbf{e}^{el} = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^{pl}$, отримаємо

$\int_t^{t+\Delta t} d\mathbf{e}^{el} = \Delta\mathbf{e} - \Delta\mathbf{e}^{pl} = \Delta\mathbf{e} - \Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\mathbf{n}$. Звідки остаточно отримуємо, що

$$\int_0^{t+\Delta t} d\mathbf{e}^{el} = \left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e} - \Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\mathbf{n}\right).$$

Виконаємо перетворення рівняння (8.67). Для цього скористаємося виразом $\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{q}$ в (8.62)

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2G\left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e} - \Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\mathbf{n}\right) \rightarrow \mathbf{s} + 2G\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\mathbf{n} = 2G\left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{s} + 2G\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}}{q}\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl} = 2G\left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e}\right) \rightarrow \mathbf{s} + \mathbf{s}\frac{3G}{q}\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl} = \\ &= 2G\left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e}\right) \rightarrow \left(1 + \frac{3G}{q}\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\right)\mathbf{s} = 2G\left(\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e}\right) \end{aligned} \quad (8.68)$$

Виконаємо спрощення виразу у правій частині (8.68)

$$\mathbf{e}^{el} \Big|_t + \Delta\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}, \quad (8.69)$$

так що рівняння (8.68) набуває вигляду

$$\left(1 + \frac{3G}{q}\Delta\bar{\mathbf{e}}^{pl}\right)\mathbf{s} = 2G\hat{\mathbf{e}}. \quad (8.70)$$

Скалярний добуток рівняння (8.70) самого на себе дає

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{e}^{pl}\right) \mathbf{s} = 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow (q + 3G \Delta \bar{e}^{pl}) \mathbf{s} = q 2G \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \\
& \rightarrow (q + 3G \Delta \bar{e}^{pl})^2 (\mathbf{s} : \mathbf{s}) = (q 2G)^2 (\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) \rightarrow \\
& \rightarrow (q + 3G \Delta \bar{e}^{pl})^2 (\mathbf{s} : \mathbf{s}) = \frac{3}{2} (\mathbf{s} : \mathbf{s}) 4G^2 \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}} \rightarrow (q + 3G \Delta \bar{e}^{pl})^2 = \quad (8.71) \\
& = 3G^2 (2\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}) \rightarrow q + 3G \Delta \bar{e}^{pl} = \sqrt{3}G (\sqrt{2\hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}) \rightarrow \\
& \rightarrow q + 3G \Delta \bar{e}^{pl} = 3G \left(\sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}} \right) \rightarrow q + 3G \Delta \bar{e}^{pl} = 3G \tilde{e},
\end{aligned}$$

де $\tilde{e} = \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}}$ – еквівалентна девіаторна деформація.

Еквівалентне напруження Мізеса q повинно задовольняти одновісній формі в рівнянні (8.65) $q = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{pl})$, так що рівняння (8.71) можна записати в формі

$$3G(\tilde{e} - \Delta \bar{e}^{pl}) - \bar{\sigma}(\bar{e}^{pl}) = 0. \quad (8.72)$$

Рівняння (8.72) відповідає рівнянню $\bar{\sigma}^{pr} - 3G \Delta \bar{\varepsilon}^{pl} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{pl}) = 0$ (8.60), в якому $\bar{\sigma}^{pr} = 3G \tilde{e}$.

В загальному вигляді рівняння (8.72) є нелінійним відносно $\Delta \bar{e}^{pl}$, оскільки існує ненульове деформаційне зміщення, що впливає на $\bar{\sigma}(\bar{e}^{pl})$. Рівняння (8.72) розв'язується методом Ньютона

$$\bar{e}^{pl} = \frac{3G(\tilde{e} - \Delta \bar{e}^{pl}) - \bar{\sigma}(\bar{e}^{pl})}{3G + H}, \quad (8.73)$$

де $\Delta \bar{e}^{pl} = \Delta \bar{e}^{pl} + \bar{e}^{pl}$; $H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}^{pl}}$ – тангенс кута нахилу кривої у точці, що відповідає $\bar{\sigma}$ – границя пластичності. Величина H має місце підчас ізотропного зміщення матеріалу.

Після розв'язання (8.73), величина $\Delta \bar{e}^{pl}$ стає відомою і за формулою (8.65) визначається

$$q = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{pl}), \quad (8.74)$$

Далі з рівняння (8.70) $\left(1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{e}^{pl}\right) \mathbf{s} = 2G \hat{\mathbf{e}}$ визначається $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \frac{2G}{1 + \frac{3G}{q} \Delta \bar{e}^{pl}} \hat{\mathbf{e}}. \quad (8.75)$$

Потім визначається $\mathbf{n}$ (8.62)

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{q}. \quad (8.76)$$

Після чого визначається тензор прирощення девіаторних пластичних деформацій $\Delta \mathbf{e}^{pl}$ за формулою (8.66)

$$\Delta \mathbf{e}^{pl} = \Delta \bar{e}^{pl} \mathbf{n}. \quad (8.77)$$

8.13. Елементарна теорія ліній ковзання під час плоскої пластичної деформації

У необмеженій пластичній течії, наприклад, під час прокатування металу, припустимо нехтувати пружними деформаціями та розглядати матеріал як жорстко-ідеально-пластичне середовище. Якщо течію в подальшому можна вважати такою, як у випадку плоскої деформації, то поле швидкості, що отримується, можна вивчати, використовуючи *теорію ліній ковзання*.

Нехай $x_1 x_2$ – площа течії, тоді

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (8.78)$$

і, оскільки пружними деформаціями можна знехтувати, тензор швидкості пластичної деформації буде мати вигляд

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.79)$$

Невідомі у виразах (8.78) і (8.79) є функціями тільки x_1 і x_2 . Крім того, відомо, що

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (8.80)$$

де v_i – компоненти вектора швидкості.

За припустимих умов плоскої деформації маємо $d\varepsilon_{33} = 0$. Тоді для визначення напруження σ_{33} отримаємо формулу з рівнянь Прандтля-Рейса (8.21)

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (8.81)$$

Використовуючи звичайні позначення теорії ліній ковзання $\sigma_{33} = -p$ і $\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 / 4 + (\sigma_{12})^2} = k$, знаходимо головні значення тензора напруження (8.78)

$$\sigma_{(1)} = -p + k, \quad \sigma_{(2)} = -p - k, \quad \sigma_{(3)} = -p. \quad (8.82)$$

Положення головних напрямків тензора напруження відносно осей $x_1 x_2$ показано на рис. 8.6, де $\operatorname{tg} 2\theta = 2\sigma_{12} / (\sigma_{11} - \sigma_{22})$.

Напрямки головних площадок максимальних дотичних напружень (див. розділ 2, п. 2.11) утворюють кути 45° з головними осями тензора напруження. На рис. 8.8 відповідні напрямки помічені грецькими літерами α і β .

З рис. 8.8 видно, що $\theta = \pi/4 + \varphi$, отже

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\operatorname{ctg} 2\theta. \quad (8.83)$$

Для даного поля напруження під час пластичної течії можна ввести в розгляд два сімейства кривих, які в кожній точці йдуть вздовж напрямів максимальних дотичних напружень. Ці криві називаються *лініями зсуву* або *лініями ковзання* (у подальшому будемо їх називати також α -лініями і β -лініями).

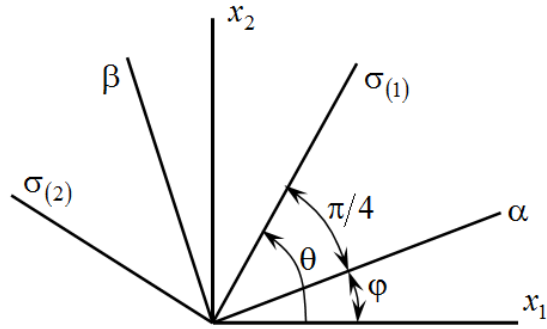


Рис. 8.8. Напрямки головних площадок максимальних дотичних напружень

Розглядаючи малий елемент, що обмежений двома парами ліній ковзання і зображений на рис. 8.9, отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p - k \sin 2\varphi; \\ \sigma_{22} &= -p + k \sin 2\varphi; \\ \sigma_{12} &= k \cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{8.84}$$

Використовуючи рівняння рівноваги, можна показати, що

$$\begin{aligned}p + 2k\varphi &= C_1 \text{ постійно вздовж } \alpha \text{ -лінії,} \\ p - 2k\varphi &= C_2 \text{ постійно вздовж } \beta \text{ -лінії.}\end{aligned}\tag{8.85}$$

Що стосується компонент швидкості, то рис. 8.10 показує, як вони зв'язані з положенням α - і β -ліній

$$\begin{aligned}v_1 &= v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi; \\ v_2 &= v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi.\end{aligned}\tag{8.86}$$

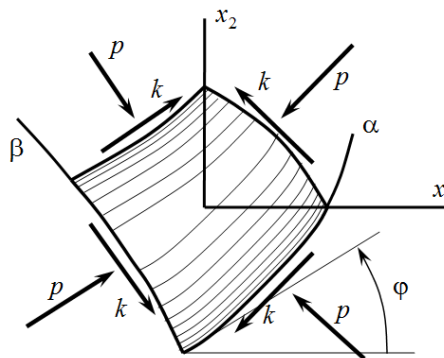


Рис. 8.9. Малий елемент, обмежений двома парами ліній ковзання

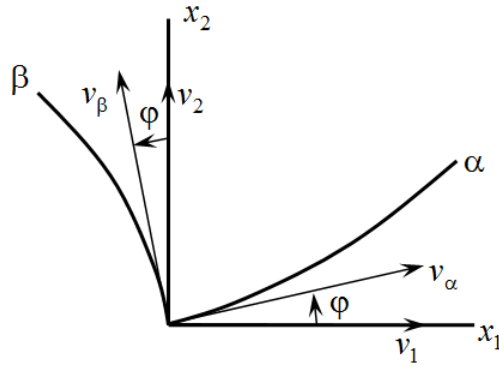


Рис. 8.10. Визначення компонент швидкості

У теорії течії у випадку ізотропного середовища головні осі тензорів напруження і швидкості пластичної деформації збігаються. Тому, якщо x_1 і x_2 є напрямки ліній ковзання, то $\dot{\epsilon}_{11}$ і $\dot{\epsilon}_{22}$ дорівнюють нулю вздовж цих ліній, так що:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi) \right\}_{\varphi=0} = 0; \quad (8.87)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi) \right\}_{\varphi=0} = 0. \quad (8.88)$$

Звідки отримуються співвідношення:

$$dv_1 - v_2 d\varphi = 0 \text{ на } \alpha \text{-лінії}; \quad (8.89)$$

$$dv_2 + v_1 d\varphi = 0 \text{ на } \beta \text{-лінії}, \quad (8.90)$$

Отже, для статично визначених задач поле ліній ковзання знаходиться із (8.85). Потім, використовуючи це поле та співвідношення (8.89) і (8.90), можна побудувати поле швидкості.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте основні положення та визначення теорії пластичності.
2. Наведіть ідеалізовані діаграми пластичної поведінки матеріалу та дайте їх фізичне тлумачення.
3. Сформулюйте умови пластичності. Запишіть критерії Треска та Мізеса і дайте їх фізичне тлумачення.
4. Чим характеризуються круги Мора в умовах пластичності?

5. Що таке простір напруження, Π -площина, поверхня плинності?
6. Опишіть поведінку матеріалу за межею плинності. В чому полягає сутність ізотропного і кінематичного зміцнення?
7. Наведіть гіпотези ізотропного і кінематичного зміцнення.
8. Запишіть співвідношення між напруженнями і деформаціями в пластичному стані. Чим характеризується теорія пластичного потенціалу?
9. Що таке еквівалентне напруження і для чого ця величина потрібна? Що таке еквівалентне прирощення пластичної деформації?
10. В чому полягає робота на пластичних деформаціях? Наведіть гіпотези зміцнення.
11. Опишіть співвідношення інкрементарної теорії пластичності для середовища з ізотропним зміцненням.
12. В чому полягає деформаційна теорія пластичності?
13. Сформулюйте задачу пружно-пластичності.
14. Запишіть алгоритм розв'язання задачі пластичності з використанням методів Ейлера і Ньютона.
15. В чому полягає сутність елементарної теорії ліній ковзання під час плоскої пластичної деформації?

9. ЛІНІЙНА В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ

9.1. В'язкопружна поведінка матеріалу

Пружні тіла і в'язкі рідини суттєво відрізняються своїми властивостями під час деформування. Пружні деформівні тіла після зняття прикладеного навантаження повертаються до свого природного або недеформованого стану. На відміну від них нестисливі в'язкі рідини зовсім не мають тенденцій повертатися у вихідний стан після зняття навантаження. Окрім того, напруження в пружному тілі безпосередньо зв'язані з деформаціями, в той час як напруження у в'язкій рідині залежать (за виключенням гідростатичної складової) від швидкості деформації.

Поведінка матеріалу, яка об'єднує в собі обидві ці властивості і пружності, і в'язкості, називається *в'язкопружною*. Пружне тіло і в'язка рідина займають крайні протилежні точки в широкому спектрі в'язкопружних середовищ. Не зважаючи на те, що в'язкопружні матеріали чутливі до температури, подальше викладення обмежується ізотермічними умовами і тому температура входить у рівняння в'язкопружності тільки як параметр.

9.2. Найпростіші механічні моделі в'язкопружної поведінки

Лінійну в'язкопружність для одновимірного стану зручно трактувати за допомогою механічних моделей, які наочно демонструють поведінку різних в'язкопружних матеріалів. Ці моделі будуються з таких механічних елементів, як лінійно-пружна пружина з модулем пружності G (масою цієї пружини нехтують) і в'язкий елемент (демпфер) з коефіцієнтом в'язкості η (в'язкий елемент представляє собою поршень, що рухається в циліндрі з в'язкою рідиною). Як показано на рис. 9.1, сила σ , що розтягує пружину, пов'язана з її відносним подовженням ε формулою

$$\sigma = G\varepsilon. \quad (9.1)$$

Подібне співвідношення також існує і для демпфера

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (9.2)$$

де $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$.

Можна надати більшій спільності цим моделям і встановити розмірні ефекти, якщо в якості σ розглядати *напруження*, а в якості ε – відносну деформацію.

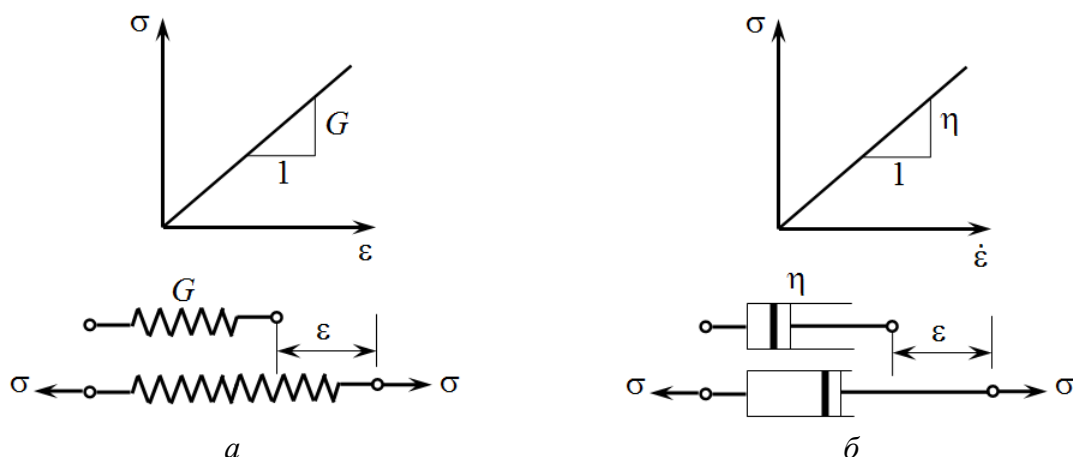


Рис. 9.1. Приклади лінійного пружного елемента (а) і в'язкого елемента (б)

Модель Максвела в'язкопружного середовища є комбінацією пружини і в'язкого елемента (демпфера), які з'єднано послідовно (рис. 9.2, а). Модель Кельвіна або Фойхта представляє собою паралельне з'єднання тих самих елементів (рис. 9.2, б).

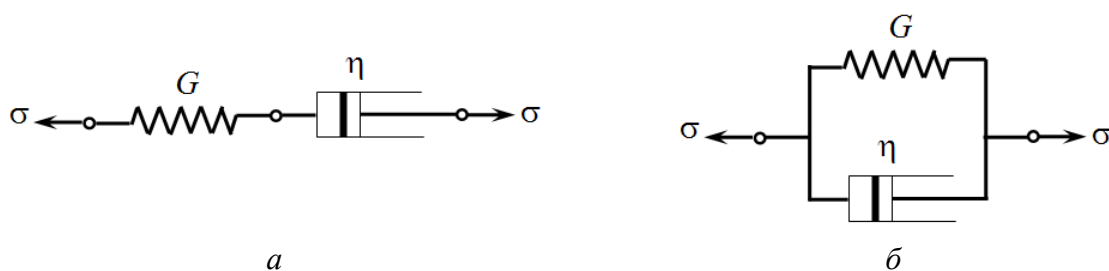


Рис. 9.2. Моделі в'язкопружного середовища Максвела (а) і Кельвіна (б)

Співвідношення між напруженнями і деформаціями (швидкостями) для моделі Максвела записуються формулою

$$\frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}, \quad (9.3)$$

а для моделі Кельвіна

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (9.4)$$

Рівняння (9.3) і (9.4) по суті є визначальними (фізичними) рівняння в'язкопружності для одновимірного випадку. Корисно записати їх в операторній формі, використовуючи лінійний оператор диференціювання за часом $\partial_t \equiv \partial/\partial t$. Тоді рівняння (9.3) будуть мати вигляд

$$\left\{ \frac{\partial_t}{G} + \frac{1}{\eta} \right\} \sigma = \{ \partial_t \} \varepsilon, \quad (9.5)$$

а рівняння (9.4) приймають форму

$$\sigma = \{ G + \eta \partial_t \} \varepsilon, \quad (9.6)$$

де відповідні оператори виділені дужками.

Прості моделі Максвела і Кельвіна не дають точного повного опису поведінки реальних середовищ. Ускладнені моделі мають більшу гнучкість під час відображення процесів у реальних матеріалах. Так, існує трипараметрична модель, яка складається з двох пружних і одного в'язкого елементів (рис. 9.3, *а*) і називається *стандартним лінійним твердим тілом*. Трипараметрична модель в'язкої рідини, що складається з двох в'язких і одного пружного елементів, представлена на рис. 9.3, *б*. Корисно відмітити, що з точки зору форми визначальних рівнянь аналогом стандартного лінійного твердого тіла, що відповідає рис. 9.3, *а*, є вузол Максвела, паралельно з'єднаний з пружним елементом, а аналогом в'язкої рідини (рис. 9.3, *б*) є вузол Максвела, паралельно з'єднаний з в'язким елементом.

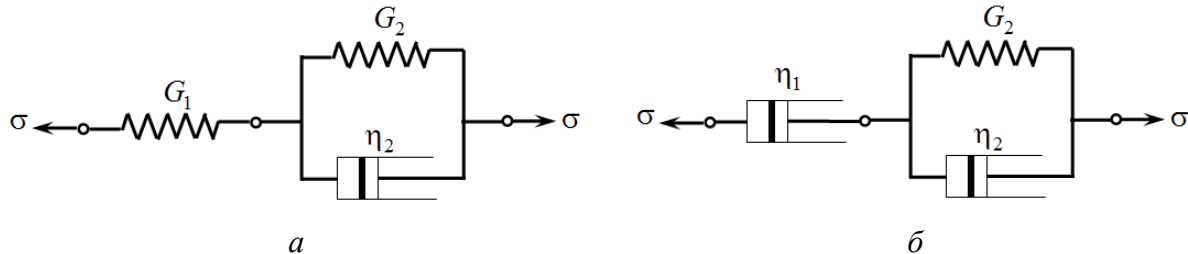


Рис. 9.3. Трипараметричні моделі в'язкопружного середовища:
а – стандартне лінійне тверде тіло; *б* – в'язка рідина

Чотирьохпараметрична модель, що складається з двох пружних і двох в'язких елементів, може розглядатися як послідовно з'єднані вузли (моделі) Максвела і Кельвіна (рис. 9.4).

Існує декілька еквівалентних форм цієї моделі. За допомогою чотирьохпараметричної моделі можна описати всі три основних типи поведінки в'язкопружного середовища. Ця модель об'єднує в собі *миттєву пружну реакцію* (за рахунок вільного пружного елементу G_1), *в'язку течію* (за рахунок вільного в'язкого елементу η_1) і, на кінець, *пружну реакцію із запізненням* (за рахунок вузла Кельвіна).

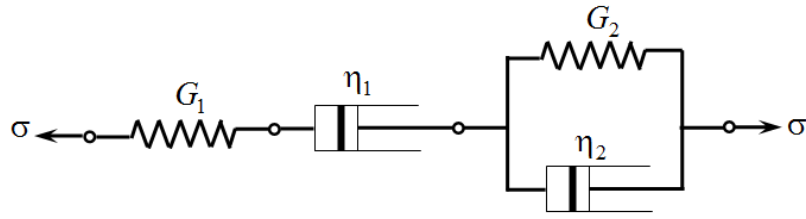


Рис. 9.4. Чотирьохпараметрична модель в'язкопружного середовища

Співвідношення між напруженням і деформацією для будь-якої з три- або чотирьох параметричних моделей записуються формулою

$$p_2 \ddot{\sigma} + p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon} + q_0 \epsilon, \quad (9.7)$$

де величини p_i і q_i представляють собою комбінації коефіцієнтів G і η та залежать від способу з'єднання елементів у моделі.

В операторній формі співвідношення (9.7) набуває вигляду

$$\{p_2 \partial_t^2 + p_1 \partial_t + p_0\} \sigma = \{q_2 \partial_t^2 + q_1 \partial_t + q_0\} \epsilon. \quad (9.8)$$

9.3. Узагальнені моделі. Лінійне диференціальне операторне рівняння

Узагальнена модель Кельвіна складається з сукупності ряду вузлів Кельвіна, з'єднаних послідовно, як показано на рис. 9.5. Повна деформація в такій моделі дорівнює сумі деформацій в окремих вузлах. Тоді в операторній формі визначальне рівняння згідно (9.6) можна записати таким чином

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\{G_1 + \eta_1 \partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} + \dots + \frac{\sigma}{\{G_N + \eta_N \partial_t\}}. \quad (9.9)$$

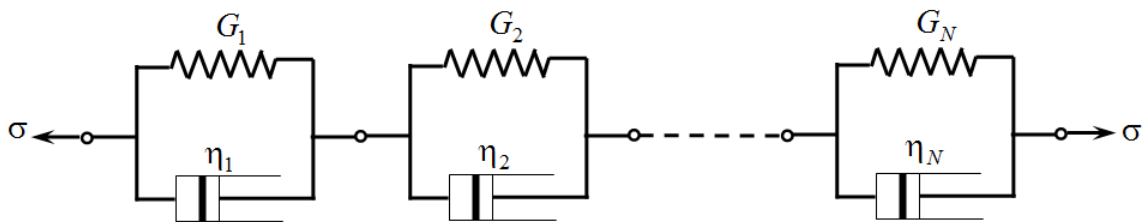


Рис. 9.5. Узагальнена модель Кельвіна

Аналогічно, набір вузлів Максвелла, з'єднаних паралельно (рис. 9.6), називається узагальненою моделлю Максвелла.

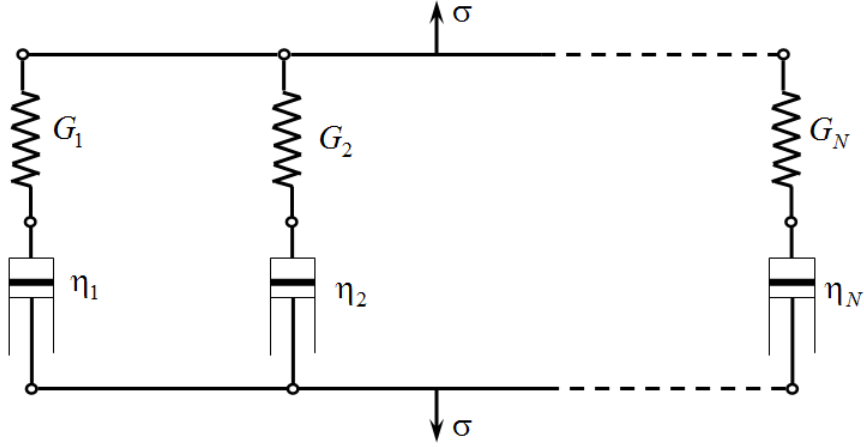


Рис. 9.6. Узагальнена модель Максвелла

У цьому випадку повне напруження дорівнює сумі напружень в кожному вузлі, тобто згідно (9.5) можна записати

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_1 + 1/\eta_1\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_2 + 1/\eta_2\}} + \dots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_N + 1/\eta_N\}}. \quad (9.10)$$

Для узагальнених моделей співвідношення (9.9) і (9.10) можна записати так

$$p_0 + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \dots = q_0 + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \dots, \quad (9.11)$$

або в більш компактній формі так

$$\sum_{i=0}^m p_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^m q_i \frac{\partial^i \varepsilon}{\partial t^i}. \quad (9.12)$$

Це лінійне диференціальне операторне рівняння можна записати в символічній формі

$$\{P\}\sigma = \{Q\}\varepsilon, \quad (9.13)$$

де оператори $\{P\}$ і $\{Q\}$ визначаються формулами

$$\{P\} = \sum_{i=0}^m p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad \{Q\} = \sum_{i=0}^m q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}. \quad (9.14)$$

9.4. Повзучість і релаксація

Двома основними експериментами в'язкопружності є випробування на *повзучість* і *релаксацію*. Їх можна виконати як досліди на одновірне розтягування (стискання) або на простий зсув. *Експеримент на повзучість* полягає в миттєвому прикладенні до зразка з в'язкопружного матеріалу напруження σ_0 , яке потім лишається незмінним, і вимірюванні деформації як функції часу (прояв повзучості). В *експериментах на релаксацію* зразок піддається миттєвій деформації ε_0 , яка потім лишається сталою, в той час як проводяться вимірювання напруження як функції часу (ефект релаксації). Математично процес навантаження під час повзучості і релаксації виражається *одиночною ступінчастою функцією* $[U(t - t_1)]$, яка визначається таким чином

$$[U(t - t_1)] = \begin{cases} 0 & \text{для } t < t_1, \\ 1 & \text{для } t > t_1 \end{cases} \quad (9.15)$$

і зображений на рис. 9.7.

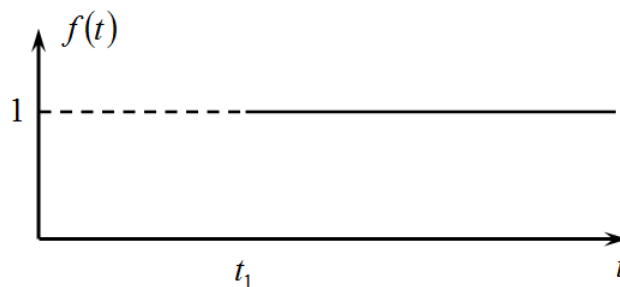


Рис. 9.7. Функція навантаження під час повзучості і релаксації

Навантаження в досліді на повзучість представляється функцією

$$\sigma = \sigma_0 [U(t)], \quad (9.16)$$

причому $[U(t)]$ – одиночна ступінчаста функція зі стрибком в момент часу $t_1 = 0$.

Деформація повзучості для моделі Кельвіна визначається розв'язанням диференціального рівняння

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\sigma_0 [U(t)]}{\eta}, \quad (9.17)$$

яке отримується за допомогою підстановки функції (9.16) в рівняння (9.4).

Уведена тут величина $\tau = \eta/G$ називається *часом запізнення*. Можна показати, що для будь-якої неперервної функції часу $f(t)$ справедливе інтегральне співвідношення

$$\int_{-\infty}^t f(t') [U(t' - t_1)] dt' = [U(t - t_1)] \int_{t_1}^t f(t') dt', \quad (9.18)$$

де t' – змінна інтегрування.

За допомогою (9.18) можна проінтегрувати рівняння (9.17) та знайти зміну деформації з часом під час повзучості для моделі Кельвіна

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} (1 - e^{-t/\tau}) [U(t)]. \quad (9.19)$$

Закон навантаження в досліді на повзучість разом з відповідною деформацією повзучості для моделей Кельвіна і Максвела представлені на рис. 9.8.

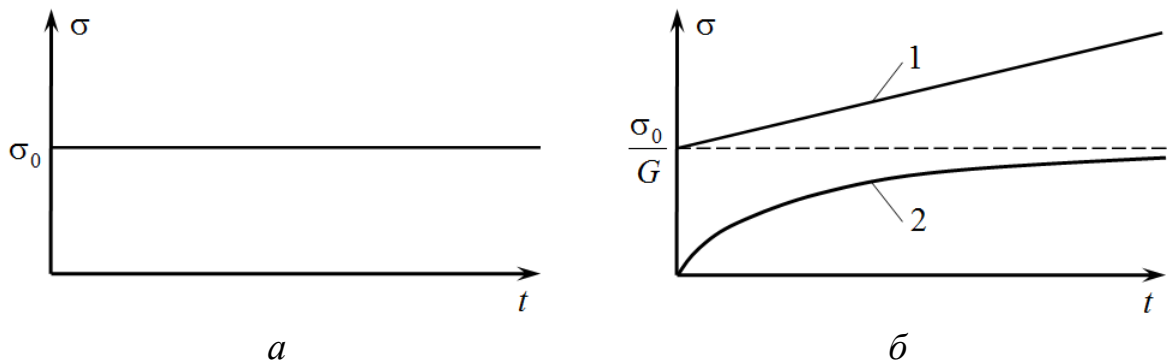


Рис. 9.8. Закон навантаження (а) в досліді на повзучість разом з відповідною деформацією повзучості (б) для моделей Кельвіна і Максвела:
1 – модель Кельвіна; 2 – модель Максвела

Релаксація напруження, що має місце в матеріалі Максвела після прикладання деформації, що змінюється за законом

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [U(t)], \quad (9.20)$$

знаходиться із розв'язання диференціального рівняння

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = G \varepsilon_0 [\delta(t)], \quad (9.21)$$

яке отримано підставкою похідної за часом від функції (9.20) в рівняння (9.3). Тут $[\delta(t)] = d[U(t)]/dt$ – функція, що називається *одиничною імпульсною функцією* або *дельта-функцією Дірака*. За визначенням це функція, для якої

$$[\delta(t - t_1)] = 0, \quad t \neq t_1, \quad (9.22a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - t_1)] dt = 1. \quad (9.22b)$$

Функція Дірака дорівнює нулю всюди, окрім $t = t_1$, де, як видно із визначення, вона повинна мати нескінченно великий пік. Можна показати, що для будь-якої неперервної функції $f(t)$ за умови $t > t_1$ виконується рівність

$$\int_{-\infty}^t f(t') [\delta(t' - t_1)] dt' = f(t_1) [U(t - t_1)], \quad (9.23)$$

за допомогою якої можна виконати інтегрування рівняння (9.21) і знайти релаксацію напруження для матеріалу Максвела

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau} [U(t)]. \quad (9.24)$$

Релаксація напруження для матеріалу Кельвіна отримується безпосередньою підстановкою $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 [\delta(t)]$ в рівняння (9.4), звідки

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 [U(t)] + \eta\varepsilon_0 [\delta(t)]. \quad (9.25)$$

Наявність дельта-функції в рівнянні (9.25) вказує на те, що було б потрібним нескінченне значення напруження, щоб викликати миттєву скінченну деформацію в матеріалі Кельвіна.

9.5. Функції повзучості та релаксації. Інтеграли спадковості

Деформація повзучості будь-якого матеріалу (моделі), що викликана навантаженням спеціального вигляду $\sigma = \sigma_0 [U(t)]$, може бути записана у вигляді

$$\varepsilon(t) = \psi(t) \sigma_0. \quad (9.26)$$

Введена таким чином функція $\psi(t)$ називається *функцією повзучості*. Наприклад, для узагальненої моделі Кельвіна (див. рис. 9.5) функція повзучості визначається згідно (9.19) формулою

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^N J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) [U(t)], \quad (9.27)$$

де $J_i = 1/G_i$ – називається *піддатливістю* матеріалу.

Якщо кількість вузлів Кельвіна необмежено зростає, так що $N \rightarrow \infty$ і скінченну сукупність сталих (τ_i, J_i) можна замінити неперервною функцією піддатливості $J(\tau)$, то функція повзучості для моделі Кельвіна прийме вигляд

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} J(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau. \quad (9.28)$$

Функція $J(\tau)$ називається *функцією розподілу часу запізнювання* або *спектром запізнювання*.

За аналогією з повзучістю релаксація напруження для будь-якої моделі, що піддається деформації вигляду $\varepsilon = \varepsilon_0 [U(t)]$, може бути записана так

$$\sigma(t) = \varphi(t) \varepsilon_0, \quad (9.29)$$

де $\varphi(t)$ – називається *функцією релаксації*.

Для узагальненої моделі Максвела (див. рис. 9.6) функція релаксації згідно (9.24) визначається як

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^N G_i e^{-t/\tau_i} [U(t)]. \quad (9.30)$$

У випадку, коли $N \rightarrow \infty$, дискретний набір сталих (τ_i, G_i) замінюється функцією $G(\tau)$ і функція релаксації визначається виразом

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-t/\tau} d\tau. \quad (9.31)$$

Функція $G(\tau)$ називається *функцією розподілу часу релаксації* або *спектром релаксації*.

У лінійній в'язкопружності має місце принцип суперпозиції, тобто повний «ефект» від суми «причин» дорівнює сумі «ефектів» від кожної з «причин». З причини цього, якщо до матеріалу, для якого функція повзучості дорівнює $\psi(t)$, прикладається напруження зі ступінчастою зміною за часом, як показано на рис. 9.9, а, то деформація повзучості буде обчислюватися формулою

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \psi(t) + \sigma_1 \psi(t - t_1) + \sigma_2 \psi(t - t_2) + \sigma_3 \psi(t - t_3) = \sum_{i=0}^3 \sigma_i \psi(t - t_i). \quad (9.32)$$

Тоді довільний закон зміни напруження $\sigma = \sigma(t)$, представлений на рис. 9.9, б, можна розглядати як функцію, що складається із нескінченного числа сходинок, величина кожної з яких дорівнює $d\sigma$. Відповідна деформація повзучості за принципом суперпозиції визначається інтегралом

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.33)$$

Інтеграл (9.33) часто називають *інтегралом спадковості*, оскільки деформація в будь-який момент часу виявляється залежною від усієї історії зміни напруження.

Для матеріалу спершу «мертвого», тобто повністю вільного від напруження і деформацій у нульовий момент часу, в формулі (9.33) можна замінити нулем нижню границю інтегралу і представити деформацію повзучості в такому вигляді

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.34)$$

Окрім того, якщо закон навантаження містить у собі ще розрив у вигляді сходинки величини σ_0 в момент $t = 0$, то вираз (9.34) зазвичай записують таким чином

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \psi(t) + \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'} \psi(t - t') dt'. \quad (9.35)$$

Виконуючи міркування, аналогічні тим, що були проведені вище, за принципом суперпозиції можна представити напруження як функцію часу

через інтеграл, що містить вказану історію деформації $\varepsilon(t)$ і функцію релаксації $\varphi(t)$. Подібно (9.33), напруження визначається формулою

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t-t') dt'. \quad (9.36)$$

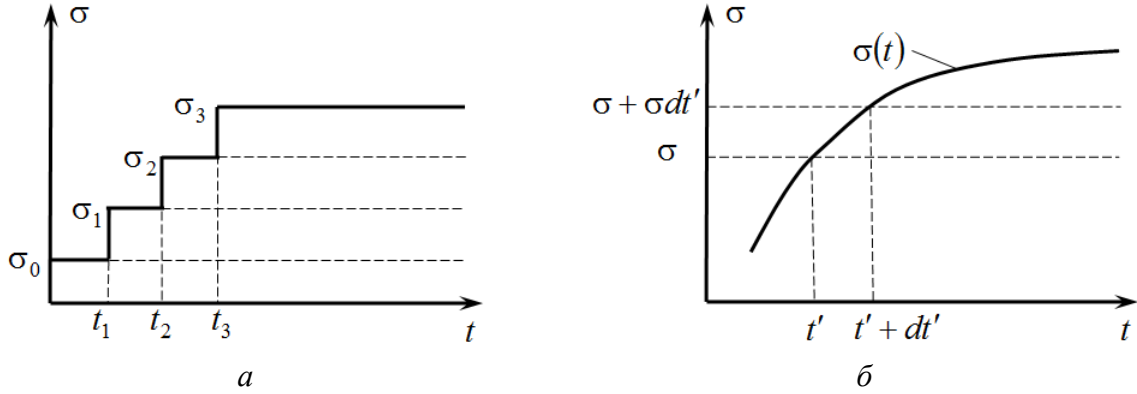


Рис. 9.9. Напруження з дискретною (ступінчатою) (а) і функціональною (неперервною) (б) зміною за часом

Для матеріалу, у якого в момент $t = 0$ відсутні напруження і деформації, інтеграли аналогічні (9.34) і (9.35), будуть мати вигляд

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t-t') dt' \quad (9.37)$$

і

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \varphi(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \varphi(t-t') dt'. \quad (9.38)$$

Оскільки для описання характерних в'язкопружних властивостей даного матеріалу можуть бути використані в однаковій мірі як інтеграл повзучості (9.34), так і інтеграл релаксації (9.37), повинно існувати деяке співвідношення між функцією повзучості $\psi(t)$ і функцією релаксації $\varphi(t)$. Для загального випадку таке співвідношення отримати непросто, але, скориставшись перетворенням Лапласа, яке за визначенням дається інтегралом

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (9.39)$$

можна показати, що вказані перетворення $\bar{\psi}(s)$ і $\bar{\varphi}(s)$ функцій $\psi(t)$ і $\varphi(t)$ зв'язані рівністю

$$\bar{\psi}(s)\bar{\varphi}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (9.40)$$

де s – параметр перетворення.

9.6. Комплексні модулі та піддатливість

Якщо зразок із лінійного в'язкопружного матеріалу зазнає одномірного (розтягу або зсуву) навантаження за законом $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, то в результаті встановлюється деформований стан $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$. Тобто деформація буде синусоїдальною з тією ж частотою ω , що і напруження, але за фазою буде відставати від напруження на кут запізнювання δ . У цьому випадку напруження і деформацію можна графічно представити вертикальними проекціями векторів, що мають сталу довжину і обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω , як показано на рис. 9.10.

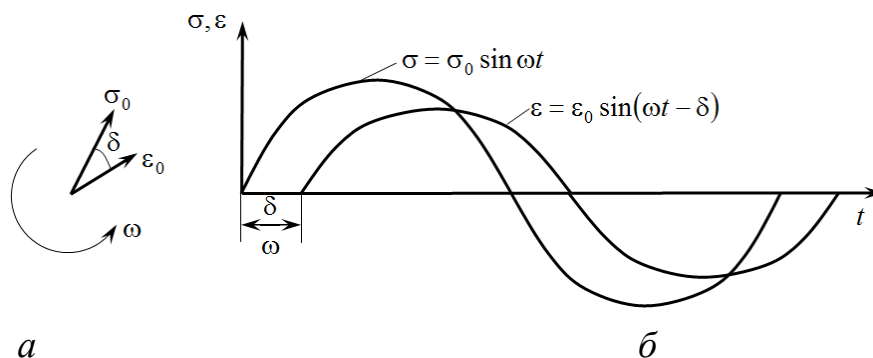


Рис. 9.10. Графіки зміни напруження і деформації під час одномірного навантаження за законом $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$

Відношення амплітуд напруження і деформації визначають *абсолютний динамічний модуль* σ_0/ε_0 і *абсолютну динамічну піддатливість* ε_0/σ_0 . Окрім того, компоненти векторів напруження і деформації, що обертаються і які збігаються та не збігаються за фазою (див. рис. 9.10, а), використовуються для визначення таких коефіцієнтів:

а) модуль накопичення	$G_1 = \frac{\sigma_0 \cos \delta}{\varepsilon_0},$
б) модуль втрати	$G_2 = \frac{\sigma_0 \sin \delta}{\varepsilon_0},$

$$\begin{aligned} \text{в) піддатливість накопичення} \quad J_1 &= \frac{\varepsilon_0 \cos \delta}{\sigma_0}, \\ \text{г) піддатливість втрати} \quad J_2 &= \frac{\varepsilon_0 \sin \delta}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Узагальнення приведенного вище опису поведінки в'язкопружного матеріалу досягається представлення в комплексній формі напруження

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad (9.41)$$

і деформації

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (9.42)$$

Використання співвідношень (9.41) і (9.42) зумовлює введення *комплексного модулю* $G^*(i\omega)$, який за визначення дорівнює величині

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = G^*(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = G_1 + iG_2, \quad (9.43)$$

дійсна частина якої дорівнює модулю накопичення, а уявна частина – модулю втрати.

Аналогічно *комплексна піддатливість* визначається формулою

$$\frac{\varepsilon^*}{\sigma^*} = J^*(i\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} e^{-i\delta} = J_1 - iJ_2, \quad (9.44)$$

де дійсна частина дорівнює піддатливості накопичення, а уявна частина – узятій зі зворотним знаком піддатливості втрати.

На рис. 9.11 наведено векторні діаграми G^* і J^* (відмітимо, що за визначення $G^* = 1/J^*$).

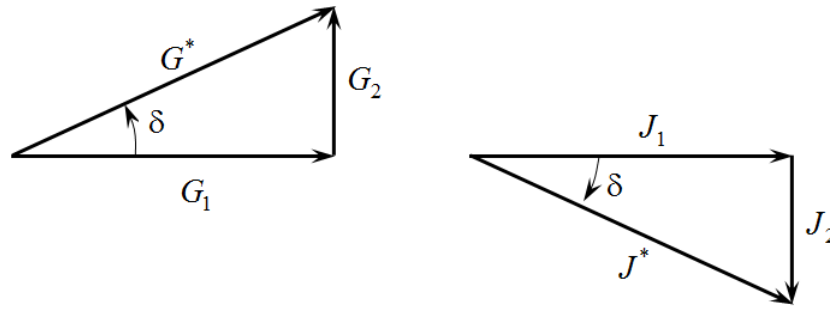


Рис. 9.11. Векторні діаграми G^* і J^*

9.7. Тривимірна теорія лінійної в'язкопружності

В основі створення тривимірної теорії лінійної в'язкопружності прийнято окремо розглядати в'язкопружну поведінку матеріалу в умовах чистого зсуву і чистого розширення. Таким чином, ефекти викривлення форми і зміни величини об'єму вивчаються незалежно та потім їх описання комбінується, щоб побудувати загальну теорію. Математично це забезпечується розкладанням тензорів напруження і деформацій на їх девіаторну та кульову складові, для кожної з яких потім записуються визначальні (фізичні) співвідношення в'язкості. Розкладання тензора напруження приведено формулою (2.70)

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad (9.45)$$

а розкладання тензора малих деформацій – формулою (3.98)

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{kk}}{3}. \quad (9.46)$$

Приймаючи позначення, що використані в цих рівностях, напишемо в операторній формі тривимірне узагальнення визначальних рівнянь в'язкопружності (9.13):

$$\begin{aligned} \{P\} s_{ij} &= 2\{Q\} e_{ij} \\ \{M\} \sigma_{ii} &= 3\{N\} \varepsilon_{ii}, \end{aligned} \quad (9.47)$$

де $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{M\}$ і $\{N\}$ – диференціальні оператори, які визначено згідно (9.14), а числові множники введені для зручності.

Оскільки майже всі матеріали пружно реагують на помірні гідростатичні навантаження, в якості операторів $\{M\}$ і $\{N\}$, які пов'язані з розширенням, зазвичай беруть сталі і перетворюють співвідношення (9.47) до вигляду:

$$\begin{aligned}\{P\}s_{ij} &= 2\{Q\}e_{ij}, \\ \sigma_{ii} &= 3K\varepsilon_{ii},\end{aligned}\tag{9.48}$$

де K – об'ємний модуль пружності.

Дотримуючись того ж загального правила розділення ефектів викривлення форми і зміни величини об'єму, напишемо тривимірні визначальні співвідношення в'язкопружності в формі *інтегралів повзучості*:

$$\begin{aligned}e_{ij} &= \int_0^t \psi_s(t-t') \frac{\partial s_{ij}}{\partial t'} dt', \\ \varepsilon_{ii} &= \int_0^t \psi_v(t-t') \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'} dt'\end{aligned}\tag{9.49}$$

та *інтегралів релаксації*:

$$\begin{aligned}s_{ij} &= \int_0^t \varphi_s(t-t') \frac{\partial e_{ij}}{\partial t'} dt', \\ \sigma_{ii} &= \int_0^t \varphi_v(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'} dt' .\end{aligned}\tag{9.50}$$

Для того щоб розповсюдити на тривимірний випадок опис в'язкопружного процесу за допомогою комплексного модуля, необхідно ввести комплексний об'ємний модуль K^* . Рівняння, які роздільно написані для чистого зсуву і для чистого розширення, мають вигляд:

$$\begin{aligned}s_{ij} &= 2G^*(i\omega)e_{ij}^* = 2(G_1 + iG_2)e_{ij}^*, \\ \sigma_{ii} &= 3K^*(i\omega)\varepsilon_{ii}^* = 3(K_1 + iK_2)\varepsilon_{ii}^* .\end{aligned}\tag{9.51}$$

9.8. Аналіз в'язкопружного напруженого стану. Принцип відповідності

Задача дослідження напруженого стану в деякому ізотропному в'язкопружному середовищі, яке займає об'єм V і обмежене поверхнею S (рис. 9.12), формулюється таким чином.

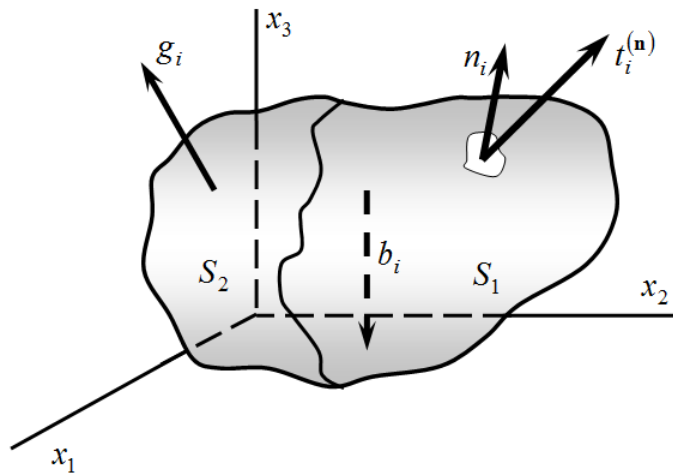


Рис. 9.12. Ізотропне в'язкопружне середовище, що займає об'єм V і обмежене поверхнею S (S_1, S_2)

Нехай задано масові сили b_i , що діють всередині об'єму V (тіла) суцільного середовища, і нехай на частині поверхні тіла S_1 відомі зовнішні поверхневі сили $t_i^{(n)}(x_k, t)$, а на частині поверхні S_2 – зміщення поверхні $g_i(x_k, t)$. Тоді система рівнянь, що описує постановку даної задачі, буде включати такі співвідношення:

1) рівняння руху або рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (9.52)$$

2) геометричні рівняння, що виражають деформації через переміщення

$$2\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9.53)$$

або швидкості деформації через швидкості

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (9.54)$$

3) граничні умови

$$\sigma_{ij}(x_k, t) n_j(x_k) = t_i^{(n)}(x_k, t) \text{ на } S_1, \quad (9.55)$$

$$u_i(x_k, t) = g_i(x_k, t) \text{ на } S_2; \quad (9.56)$$

4) початкові умови

$$u_i(x_k, 0) = u_0, \quad (9.57)$$

$$v_i(x_k, 0) = v_0; \quad (9.58)$$

- 5) визначальні рівняння, що записані в одному із таких видів:
- а) через лінійні диференціальні оператори, тобто у формі (9.48),
 - б) через інтеграл спадковості, тобто у формі (9.49) або (9.50),
 - в) через комплексний модуль, тобто у формі (9.51).

Якщо форма тіла і умови навантаження достатньо прості та якщо поведінка матеріалу може бути представлена одною з найпростіших моделей, то приведену вище систему рівнянь можна безпосередньо проінтегрувати. Однак для більш загальних умов зазвичай прийнято шукати розв'язок, користуючись *принципом відповідності пружної і в'язкої задач*. Цей принцип базується на тому, що система основних рівнянь теорії пружності і перетворення Лапласа за часом вищенаведеної системи основних рівнянь теорії в'язкопружності записуються однаково. Відповідні рівняння для квазістатичних ізотермічних задач, в яких риси над величинами означають перетворення Лапласа за часом, наприклад

$$\bar{f}(x_k, s) = \int_0^{\infty} f(x_k, t) e^{-st} dt, \quad (9.59)$$

зіставлені в наступній таблиці 9.1

Таблиця 9.1. Відповідні рівняння для квазістатичних ізотермічних задач теорії пружності та в'язкопружності

Рівняння теорії пружності	Перетворення рівнянь теорії в'язкопружності
$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ $2\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$ $\sigma_{ij} n_j = t_i^{(n)}$ на S_1 $u_i = g_i$ на S_2 $s_{ij} = 2G e_{ij}$ $\sigma_{ii} = 3K \varepsilon_{ii}$	$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0$ $2\bar{\varepsilon}_{ij} = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$ $\bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j = \bar{t}_i^{(n)}$ на S_1 $\bar{u}_i = \bar{g}_i$ на S_2 $\bar{P}(s) \bar{s}_{ij} = 2\bar{Q}(s) \bar{e}_{ij}$ $\bar{\sigma}_{ii} = 3K \bar{\varepsilon}_{ii}$

Із таблиці 9.1 видно, що якщо G в рівняннях теорії пружності замінити на $\bar{Q}/\bar{P}$, то обидві групи рівнянь будуть мати однакову форму. Внаслідок цього, якщо під час розв'язання відповідної задачі теорії пружності G замінити

на $\bar{Q}/\bar{P}$ для в'язкопружного матеріалу, то отриманий результат буде перетворенням Лапласа розв'язку задачі теорії в'язкопружності. Зворотним перетворенням можна знайти розв'язок для в'язкопружного матеріалу.

Цей принцип відповідності може бути встановлений і для задач, відмінних від квазістатичних. Більш того, визначальні рівняння не обов'язково записувати через лінійні диференціальні оператори, а можна брати у вигляді (9.49), (9.50) або (9.51).

Постановка задач термо-в'язко-пружно-пластичності також наведена в Додатку В.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. В чому полягає в'язкопружна поведінка матеріалу?
2. Наведіть найпростіші механічні моделі в'язкопружної поведінки середовища та розкрийте їх сутність
3. Чим характеризуються узагальнені моделі? Що таке лінійне диференціальне операторне рівняння?
4. Опишіть явища повзучості й релаксації.
5. Чим характеризуються функції повзучості та релаксації? Що таке інтеграли спадковості?
6. Що таке комплексні модулі та піддатливість?
7. На чому базується тривимірна теорія лінійної в'язкопружності?
8. Проведіть аналіз в'язкопружного напруженого стану. Сформулюйте принцип відповідності.
9. Наведіть постановку задачі термо-в'язко-пружно-пластичності.

10. РІВНЯННЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ ТЕЧІЇ РЕАГУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩ

10.1. Загальні положення

Рівняння збереження для реагуючих потоків порівняно зі звичайними рівняннями Нав'є-Стокса для нереагуючих середовищ (газів) мають три основні відмінності:

а) реагуючий газ являє собою неізотермічну суміш декількох газів (вуглеводні, кисень, водяна пара, діоксид вуглецю та ін.), які повинні бути відслідковані індивідуально. Термодинамічні властивості цих газів також є більш складними, чим у класичній газодинаміці, оскільки теплоємності в реагуючому газі значно змінюються з температурою і його складом;

б) компоненти газів, що вступають в хімічну реакцію та швидкість, з якою ці реакції протікають, потребують спеціального розгляду;

в) оскільки реагуючий газ являє собою суміш газів, то вплив таких транспортних коефіцієнтів як теплової дифузії, дифузії компонентів реакції, в'язкості та інших набувають особливої уваги.

10.1.1. Вибір вихідних змінних

Процес горіння включає взаємодію множини реагуючих компонентів через багатоступінчасті хімічні реакції. Тому для застосування рівнянь Нав'є-Стокса для опису хімічної взаємодії множини реагуючих компонентів через багатоступінчасті хімічні реакції необхідно додати додаткові умови.

По перше, компоненти хімічних реакцій характеризуються масовими частками Y_k , $k = \overline{1, N}$, де N кількість компонентів в реагуючій суміші газів. масова частка Y_k визначається за формулою

$$Y_k = \frac{m_k}{m}, \quad (10.1)$$

де m_k – масова частка компонент k в об'ємі газу V , кг; m – маса газу в об'ємі V , кг.

Реагуючий потік стисливого середовища характеризується такими величинами:

- густиною $\rho = \frac{m}{V}$;
- швидкістю u_i , $i = 1, 2, 3$;

- одна з величин для визначення енергії (або тиску p , або ентальпії h , або температури T);
- масовими частками Y_k для N реагуючих компонент хімічних реакцій горіння.

Система диференціальних рівнянь МСС для течії реагуючого середовища включає $N + 5$ рівнянь замість 5 для нереагуючого. Відомо, що більшість хімічних реакцій включають велику кількість компонентів (N перевищує 50 для більшості простих вуглеводневих палив).

10.1.1.1. Термохімія

Для суміші з N компонентів ідеального газу повний тиск складається з суми парціальних тисків її складових

$$p = \sum_{k=1}^N p_k, \quad (10.2)$$

де $p_k = \rho_k \frac{R}{W_k} T$ – парціальний тиск компонент суміші, Па; T – абсолютна температура, К; $R = 8,314$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала; $\rho_k = \rho Y_k$ – густина (кг/м³) і W_k – молярна маса (кг/моль) k -ої компоненти суміші, відповідно.

Оскільки, густина ρ багатоконпонентного газу дорівнює

$$\rho = \sum_{k=1}^N \rho_k, \quad (10.3)$$

то рівняння стану має вигляд

$$p = \rho \frac{R}{W} T, \quad (10.4)$$

де W – середня молярна маса суміші

$$\frac{1}{W} = \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}. \quad (10.5)$$

Окрім масової частки, для визначення концентрації компонентів хімічних реакцій також використовуються декілька інших величин (табл. 10.1):

- молярна частка X_k , яка є відношенням кількості молей компоненти k в об'ємі V до загальної кількості молей в цьому об'ємі;
- молярна концентрація $[X_k]$, яка є відношенням кількості молей компоненти k до одиниці об'єму. Ця величина використовується для оцінки кінетичної швидкості хімічних реакцій.

Таблиця 10.1. Визначення масової і молярної частки, молярної концентрації та зв'язку між ними

Величина	Визначення	Позначення та співвідношення
Масова частка Y_k	Маса компоненти k / Загальна маса	Y_k
Молярна частка X_k	Молей компоненти k / Загальна кількість молей	$X_k = \frac{W}{W_k} Y_k$
Молярна концентрація $[X_k]$	Молей компоненти k / Одиниця об'єму	$[X_k] = \rho \frac{Y_k}{W_k} = \rho \frac{X_k}{W}$
Середня молярна маса W	$\frac{1}{W} = \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}$ і $\frac{1}{W} = \sum_{k=1}^N X_k W_k$	

Для реагуючих потоків існує декілька понять для енергії або ентальпії: в табл. 10.2 наведено визначення для повної енергії (e_k) і ентальпії (h_k) середовища з врахуванням стандартної хімічної енергії їх утворення та без її врахування, або явної, або неізотермічної енергії (e_{sk}) і ентальпії (h_{sk}).

Таблиця 10.2. Форми енергії і ентальпії для частки k середовища. Енергія та ентальпія зв'язані співвідношеннями $e_{sk} = h_{sk} - p_k / \rho_k$ і $e_k = h_k - p_k / \rho_k$

Форма	Енергія	Ентальпія
Явна, неізотермічна без врахування ентальпії утворення речовини	$e_{sk} = \int_{T_0}^T c_{vk} dT - RT_0 / W_k$	$h_{sk} = \int_{T_0}^T c_{pk} dT$
Повна з врахуванням ентальпії утворення речовини	$e_k = e_{sk} + \Delta h_{f,k}^\circ$	$h_k = h_{sk} + \Delta h_{f,k}^\circ$

Тут C_{vk} масова ізохорна теплоємність частки компоненти k середовища, а c_{pk} – масова ізобарна теплоємність. Величина $\Delta h_{f,k}^\circ$ є масовою стандартною

ентальпією компоненти середовища k за температури T_0 . Для табулювання ентальпії за стандартну відлікову температуру прийнято температуру $T_0 = 298,15$ К і тиск 1 бар.

На додаток до відлікової температури також повинна бути введена повна ентальпія, що складається з явної (неізотермічної) та прихованої (латентної, ізотермічної) складових. Повна ентальпія h_k встановлюється співвідношенням

$$h_k = \int_{T_0}^T c_{pk} dT + \Delta h_{f,k}^{\circ}, \quad (10.6)$$

так що для всіх речовин неізотермічна ентальпія $h_{sk} = 0$ за температури $T = T_0$. Зв'язок між h_{sk} та e_{sk} встановлюється співвідношенням

$$h_{sk} = e_{sk} + \frac{p_k}{\rho_k}.$$

На відміну від неізотермічна ентальпії h_{sk} явна енергія e_{sk} за температури $T = T_0$ не дорівнює нулю

$$e_{sk}(T_0) = -\frac{RT_0}{W_k}.$$

Усі ці форми енергії і ентальпії є масовими величинами: наприклад, латентна ентальпія утворення речовини $\Delta h_{f,k}^{\circ}$ являє собою необхідну теплоту для утворення 1 кг компоненти k середовища за температури $T_0 = 298,15$ К. Ці масові величини також зв'язані з молярними величинами $\Delta h_{f,k}^{\circ,m}$ у вигляді співвідношення

$$\Delta h_{f,k}^{\circ} = \frac{\Delta h_{f,k}^{\circ,m}}{W_k}. \quad (10.7)$$

Наприклад, масова ентальпія утворення CH_4 дорівнює $\Delta h_{f,k}^{\circ} = -4675$ кДж/кг, в той час як молярна – $\Delta h_{f,k}^{\circ,m} = -74,5$ кДж/моль. В табл. 10.3 наведено значення $\Delta h_{f,k}^{\circ}$ і $\Delta h_{f,k}^{\circ,m}$ деяких типових палив та компонентів і продуктів процесу горіння.

Теплоємність за умови сталого тиску компоненти k називається масовою ізобарною теплоємністю c_{pk} або молярною ізобарною теплоємністю $c_{pk}^m = c_{pk} W_k$. Для ідеального двохатомного газу ці величини відповідно дорівнюють:

$$c_{pk} = 3,5 \frac{R}{W_k} \text{ і } c_{pk}^m = 3,5R. \quad (10.8)$$

Таблиця 10.3. Стандартні ентальпії утворення газоподібних речовин за температури $T_0 = 298,15 \text{ K}$

Речовина	Молярна маса W_k , кг/моль	Масова ентальпія утворення $\Delta h_{f,k}^\circ$, кДж/кг	Молярна ентальпія утворення $\Delta h_{f,k}^{\circ,m}$, кДж/моль
CH ₄	0,016	−4675	−74,8
C ₃ H ₈	0,044	−2360	−103,8
C ₈ H ₁₈	0,114	−1829	−208,5
CO ₂	0,044	−8943	−393,5
H ₂ O	0,018	−13435	−241,8
O ₂	0,032	0	0
H ₂	0,002	0	0
N ₂	0,028	0	0

В реагуючих потоках, в яких відбувається процеси горіння палива, температурна залежність c_{pk}^m є значною і тому величини c_{pk}^m зазвичай табулюються у вигляді функцій температури з використанням поліномів. На рис. 10.1 наведено масштабовані графіки температурної залежності c_{pk}^m . Теплоємності газів H₂ і N₂ за низьких температур мають значення близько $3,5R$, але швидко відхиляються від цього значення за високих температур.

Температурні залежності масової ізобарної теплоємності звичайних газів c_{pk} наведено на рис. 10.2. Такі гази як CO₂, CO і N₂ мають дуже близькі значення c_{pk} . Водяна пара характеризується високими значеннями масової ізобарної теплоємності (від 2000 до 3000 Дж/(кг·К)), але H₂ має ще набагато вищі значення c_{pk} (близько 16000 Дж/(кг·К)).

Масова ізохорна теплоємність c_{vk} ідеального газу пов'язана з c_{pk} співвідношенням

$$c_{pk} - c_{vk} = R/W_k. \quad (10.9)$$

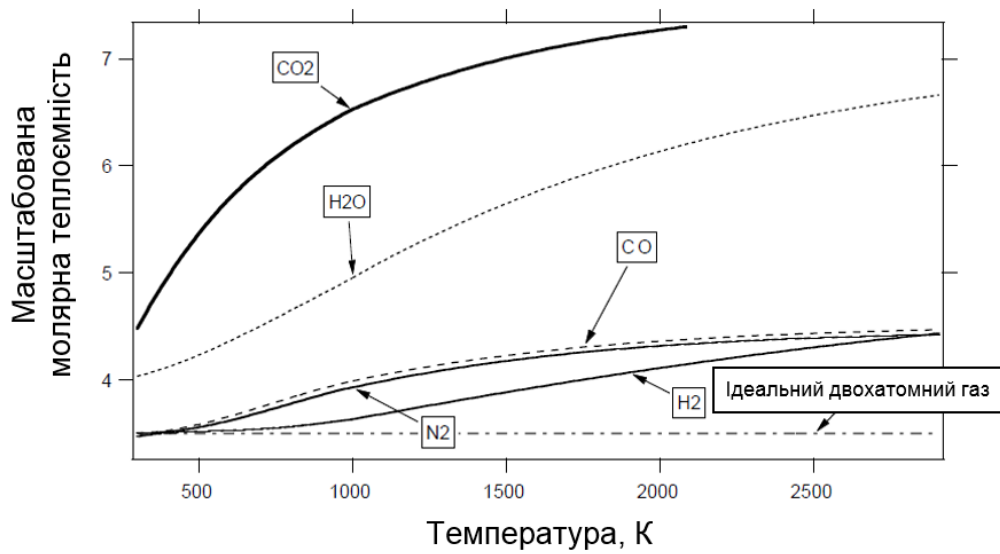


Рис. 10.1. Масштабована малярна ізобарна теплоємність c_{pk}^m/R газів CO_2 , CO , H_2O , H_2 і N_2

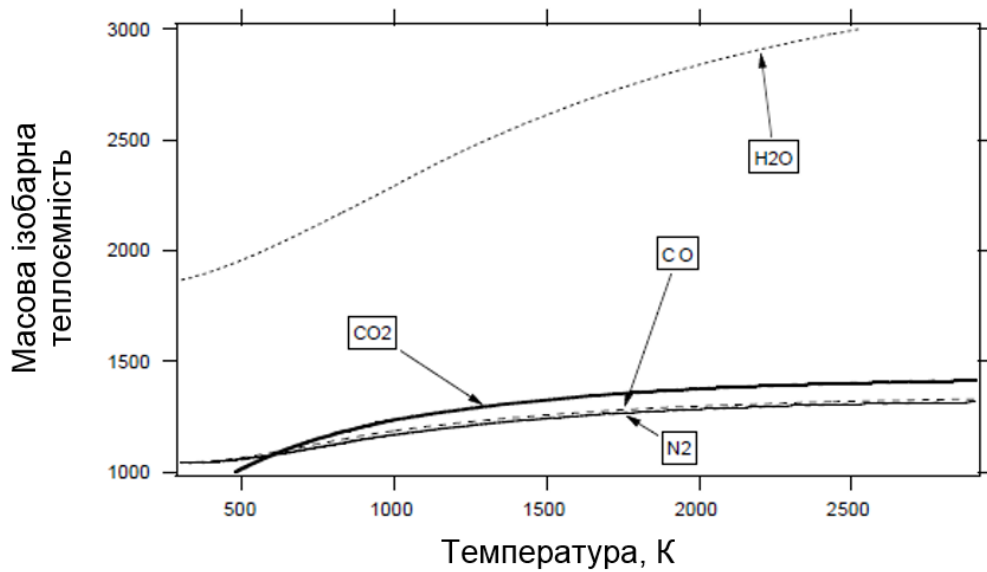


Рис. 10.2. Масова ізобарна теплоємність c_{pk} газів CO_2 , CO , H_2O і N_2

Для суміші з N компонентами в табл. 10.4 наведено різні форми, які використовуються для визначення енергії і ентальпії. Ентальпія h визначається як

$$h = \sum_{k=1}^N h_k Y_k = \sum_{k=1}^N \left(\int_{T_0}^T c_{pk} dT + \Delta h_{f,k}^\circ \right) Y_k = \int_{T_0}^T c_p dT + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k, \quad (10.10)$$

в той час як енергія $e = h - p/\rho$ задається за допомогою рівнянь (10.4), (10.5) і (10.9)

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{T_0}^T c_{pk} dT - RT/W_k + \Delta h_{f,k}^\circ \right) Y_k = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{T_0}^T c_{vk} dT - RT_0/W_k + \Delta h_{f,k}^\circ \right) Y_k = \int_{T_0}^T c_v dT - RT_0/W + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k = \\ &= \sum_{k=1}^N e_k Y_k. \end{aligned} \quad (10.11)$$

В багатьох випадках запису рівнянь збереження для стиснутого середовища використовуються форми загальної нехімічної енергії (E) та ентальпії (H) для нереагуючих потоків.

Таблиця 10.4. Форми енергії і ентальпії для запису рівнянь збереження

Форма	Енергія	Ентальпія
Явна, неізотермічна	$e_s = \int_{T_0}^T c_v dT - RT_0/W$	$h_s = \int_{T_0}^T c_p dT$
Явна + хімічна	$e = e_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k$	$h = h_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k$
Повна хімічна	$e_t = e + \frac{1}{2} u_i u_i$	$h_t = h + \frac{1}{2} u_i u_i$
Повна явна (неізотермічна, нехімічна)	$E = e_s + \frac{1}{2} u_i u_i$	$H = h_s + \frac{1}{2} u_i u_i$

Масова ізобарна теплоємність суміші газів c_p визначається співвідношенням

$$c_p = \sum_{k=1}^N c_{pk} Y_k = \sum_{k=1}^N c_{pk}^m \frac{Y_k}{W_k}. \quad (10.12)$$

Рівняння (10.12) вказує на те, що масова ізобарна теплоємність суміші газів c_p є функцією як температури (T) так і складу (Y_k). Тобто c_p може істотно змінюватись від однієї до іншої точки середовища. Проте, в більшості випадків полум'я вуглеводень/повітря, властивості азоту домінують і масова ізобарна теплоємність суміші має дуже близьке значення до азоту. Крім того, значення c_p змінюється тільки від 1000 Дж/(кг·К) до 1300 Дж/(кг·К), коли температура

підвищується від 300 К до 3000 К, так що c_p часто вважається сталою в багатьох теоретичних викладках та практичних розрахунках.

Масова ізохорна теплоємність суміші газів c_p визначається рівнянням

$$c_v = \sum_{k=1}^N c_{vk} Y_k = \sum_{k=1}^N c_{vk}^m \frac{Y_k}{W_k}, \quad (10.13)$$

де c_{vk} – теплоємність індивідуальної компоненти, що визначається як: $c_{vk} = c_{pk} - R/W_k$ для її масового значення або $c_{vk}^m = c_{pk}^m - R$ – для молярного.

10.1.1.2. Тензор напруження

Тензор в'язкого напруження визначається співвідношенням (див. розділ 7):

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad \text{або} \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mu (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}}, \quad (10.14)$$

де $v_i, i=1,2,3$ – компоненти вектора швидкості, м/с; μ – динамічна в'язкість, Па·с; δ_{ij} – символ Кронекера; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу.

Тензори в'язкості і тиску часто об'єднуються в тензор напруження τ_{ij} , що визначається:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - p \delta_{ij} \quad (10.15)$$

$$\text{або} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}} - p \hat{\mathbf{I}},$$

де p – статичний тиск, Па.

10.1.1.3. Теплопровідність і дифузія компонентів реакцій

Зазвичай коефіцієнт теплопровідності (закон Фур'є) позначається через λ . Коефіцієнт молекулярної дифузії k -ї компоненти має місце в суміші газів (закон Фіка) і позначається через D_k . Дифузійні процеси також включають

бінарні коефіцієнти молекулярної дифузії (D_{kj}) і вимагають знання швидкості дифузії. Отже, розв'язання задачі дифузії багатокомпонентної суміші газів є складною проблемою. Тому дуже часто в таких задачах використовують спрощені закони дифузії (наприклад, закон Фіка). Коефіцієнт D_k часто характеризується числом Левіса, яке визначається за формулою

$$\text{Le}_k = \frac{\lambda}{\rho c_p D_k} = \frac{D_{th}}{D_k}, \quad (10.16)$$

де $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ – коефіцієнт теплової дифузії або коефіцієнт температуропровідності, $\text{м}^2/\text{с}$; D_k – коефіцієнт молекулярної дифузії, $\text{м}^2/\text{с}$.

Число Левіса Le_k є відношенням коефіцієнтів дифузії швидкості передачі теплоти до молекулярної дифузії компоненти k . Цей параметр є дуже важливим для ламінарного режиму полум'я. Взагалі число Le_k характеризується локальним значенням, але для багатьох газів у разі переходу від однієї точки середовища до іншої його величина майже не змінюється. Кінетична теорія газів показує, що λ змінюється пропорційно $T^{0,7}$, ρ пропорційно $1/T$ і D_k пропорційно $T^{1,7}$, так що Le_k змінюється тільки на кілька відсотків в межах полум'я.

Число Прандтля Pr являє собою відношення кінематичної в'язкості (перенесення імпульсу) до коефіцієнта температуропровідності (перенесення теплоти)

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad (10.17)$$

де ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, $\text{м}^2/\text{с}$.

Число Шмідта Sc_k порівнює імпульс з молекулярною дифузією компоненти k

$$\text{Sc}_k = \frac{\nu}{D_k} = \text{Pr} \text{Le}_k. \quad (10.18)$$

10.1.1.4. Хімічна кінетика

Розглянемо хімічну систему N компонентів, що реагують за допомогою M реакцій

$$\sum_{k=1}^N v'_{kj} \mathcal{M}_k \leftrightarrow \sum_{k=1}^N v''_{kj} \mathcal{M}_k, \quad j = \overline{1, M}. \quad (10.19)$$

де $\mathcal{M}_k$ – символ для компоненти k хімічної реакції; v'_{kj} , v''_{kj} – молярні стехіометричні коефіцієнти k -х компонентів в реакції j .

Рівняння збереження маси для компонентів реакції мають вигляд

$$\sum_{k=1}^N v'_{kj} W_k = \sum_{k=1}^N v''_{kj} W_k \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^N v_{kj} W_k = 0, \quad j = \overline{1, M}, \quad (10.20)$$

де

$$v_{kj} = v'_{kj} - v''_{kj}. \quad (10.21)$$

Для спрощення, використовуються тільки масові швидкості реакції. Для компоненти k масова швидкість $\dot{\omega}_k$ є сумою швидкостей $\dot{\omega}_{kj}$ всіх M хімічних реакцій

$$\dot{\omega}_k = \sum_{j=1}^M \dot{\omega}_{kj} = W_k \sum_{j=1}^M v_{kj} Q_j, \quad (10.22)$$

де $Q_j = \frac{\dot{\omega}_{kj}}{W_k v_{kj}}$ – швидкість проходження хімічної реакції j .

Підсумовуючи всі швидкості реакції $\dot{\omega}_k$ за допомогою (10.20), отримуємо

$$\sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = \sum_{j=1}^M \left(Q_j \sum_{k=1}^N W_k v_{kj} \right) = 0, \quad (10.23)$$

показуючи, що повна маса реакцій зберігається.

Швидкість проходження Q_j реакції j виражається співвідношенням

$$Q_j = K_{fj} \prod_{k=1}^N [X_k]^{v'_{kj}} - K_{rj} \prod_{k=1}^N [X_k]^{v''_{kj}}, \quad (10.24)$$

де K_{fj} , K_{rj} – пряма і зворотна швидкості реакції j , відповідно; $[X_k] = \rho \frac{Y_k}{W_k} = \frac{\rho_k}{W_k}$ – кінетичні швидкості, що виражені через молярні концентрації (див. табл. 10.1).

Визначення констант швидкості K_{fj} , K_{rj} представляють головну проблему моделювання процесу горіння. Ці константи зазвичай визначаються з використанням емпіричного закону Ареніуса

$$K_{fj} = A_{fj} T^{\beta_j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right) = A_{fj} T^{\beta_j} \exp\left(-\frac{T_{aj}}{T}\right). \quad (10.25)$$

Вирази для швидкості проходження Q_j для кожної реакції включають дані про передекспоненціальну сталу A_{fj} , показник ступеня для температури β_j та температуру активації реакції T_{aj} (що еквівалентно енергії активації $E_j = RT_{aj}$). Перш ніж визначити ці сталі треба спочатку задати хімічну кінетику реакцій. Навіть знання того, які компоненти і які реакції повинні відбуватися в даній схемі є недостатнім. Повне математичне формулювання взаємодії потоків передбачає визначеність хімічної схеми з вказання кінетики реакцій. Наприклад, кінетична схема згоряння H_2-O_2 передбачає 9 компонент та 12 хімічних реакцій, для кожної з яких відомі значення A_{fj} , β_j і E_j . Зворотні швидкості реакцій K_{rj} визначаються через швидкості прямих реакцій через константи рівноваги

$$K_{rj} = \frac{K_{fj}}{\left(\frac{p_a}{RT}\right)^{\sum_{k=1}^N \nu_{kj}} \exp\left(\frac{\Delta S_j^0}{R} - \frac{\Delta H_j^0}{RT}\right)}, \quad (10.26)$$

де $p_a = 1$ бар; ΔS_j^0 , ΔH_j^0 – зміна ентропії (Дж/(кг·К)) і ентальпії (Дж/кг) j -ї реакції, відповідно.

Взагалі вибір хімічної схеми процесу згоряння палива є складним і навіть дещо суперечливим завданням, оскільки в літературних джерелах з цієї проблеми зустрічають багато різних схем.

10.1.1.5. Стехіометрія полум'я попередньо змішаної суміші газів

Для характеристики полум'я зазвичай використовуються відношення масових часток палива і окиснювача. Існують різні способи для визначення еквівалентного відношення (рис. 10.3) в залежності від конфігурації пальника (з попереднім змішуванням або без нього).

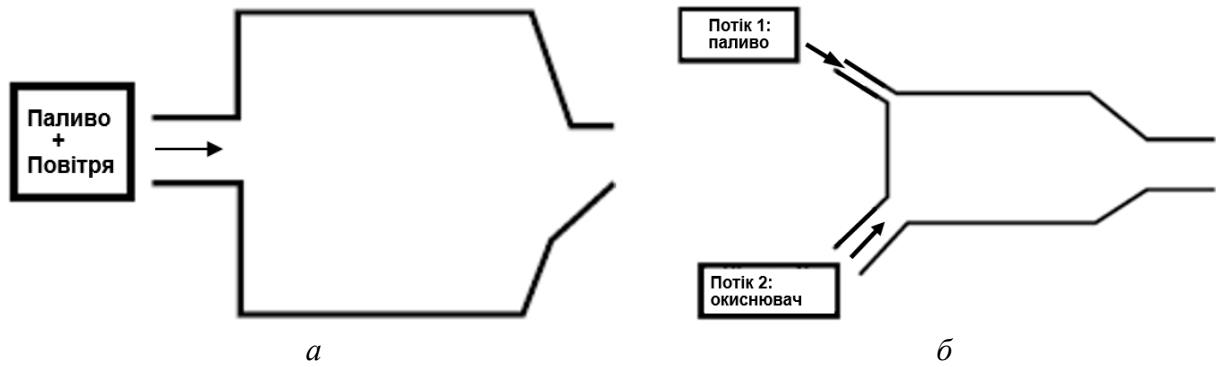


Рис. 10.3. Конфігурації полум'я з попереднім змішуванням (а) та без нього (б) – дифузне полум'я

У камері згоряння попереднього змішування (див. рис. 10.3, а) паливо і окиснювач змішуються перед надходженням у камеру згоряння. Якщо v'_F і v'_O коефіцієнти, відповідно, палива і окиснювача під час розгляду загальної реакції типу



(наприклад, $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$), масові частки палива і окиснювача відповідають стехіометричним умовам, коли

$$\left(\frac{Y_O}{Y_F} \right)_{st} = \frac{v'_O W_O}{v'_F W_F} = s. \quad (10.28)$$

Величина s називається масовим стехіометричним відношенням. Еквівалентне відношення даної суміші визначається формулою

$$\phi = s \frac{Y_F}{Y_O} = \left(\frac{Y_F}{Y_O} \right) / \left(\frac{Y_F}{Y_O} \right)_{st}. \quad (10.29)$$

Співвідношення (10.29) можна переписати у вигляді

$$\phi = s \frac{\dot{m}_F}{\dot{m}_O} . \quad (10.30)$$

де $\dot{m}_F$ і $\dot{m}_O$ масові швидкості потоків палива і окиснювача.

Відношення еквівалентності є головним параметром попередньо змішаних газів перед спалюванням: багату суміш (коли паливо в надлишку) отримують для $\phi > 1$, в той час як бідну суміш, коли окиснювач в надлишку, отримують для $\phi < 1$.

На практиці більшість пальників працюють на рівні або нижче стехіометричного значення. В полум'ї вуглеводні-повітря суміш газів містить паливо, O_2 і N_2 з типовими 3,76 молей азоту на й моль кисню. Оскільки сума масових часток повинна дорівнювати одиниці, то масова частка палива у суміші повинна складати

$$Y_F = \frac{1}{1 + \frac{s}{\phi} \left(1 + 3,76 \frac{W_{N_2}}{W_{O_2}} \right)} . \quad (10.31)$$

В табл. 10.5 наведені типові значення стехіометричного відношення s та відповідних масових часток палива для стехіометричних сумішей ($\phi = 1$) з повітрям.

Таблиця 10.5. Значення стехіометричного відношення s та відповідних масових часток палива для стехіометричних сумішей ($\phi = 1$) з повітрям (10.31)

Підсумкова реакція	s	Y_F
$CH_4 + 2(O_2 + 3,76N_2) \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 7,52N_2$	4,00	0,055
$C_3H_8 + 5(O_2 + 3,76N_2) \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O + 18,8N_2$	3,63	0,060
$2C_8H_{18} + 25(O_2 + 3,76N_2) \rightarrow 16CO_2 + 18H_2O + 84N_2$	3,51	0,062
$2H_2 + (O_2 + 3,76N_2) \rightarrow 2H_2O + 3,76N_2$	8,00	0,028

Величина масової частки палива за умови стехіометрії деже малі (див. табл. 10.5), так що попередньо змішана горюча суміш, яка надходить у камеру згоряння, містить головним чином повітря. Додавання палива в повітря для одержання реакційної суміші не має істотного впливу на властивості повітря з

точки зору молекулярної маси, тобто транспортні властивості та теплоємність суміші близькі до чистого повітря.

10.1.1.6. Стехіометрія дифузного полум'я

У разі дифузійного полум'я, паливо і окиснювач вводяться в камеру згоряння окремо через два (або більше) входних отворів, де швидкість потоків і масових фракцій регулюється окремо. Для камери згоряння за рис. 10.3, б з двома вводами (один для потоку палива з масовою часткою палива Y_F^1 , а другий для потоку окиснювача з масовою часткою окиснювача Y_O^2), перше визначення коефіцієнта відношення еквівалентності має вигляд

$$\phi = s \frac{Y_F^1}{Y_O^2}. \quad (10.32)$$

Це відношення характеризує локальну структуру полум'я, що утворюється, коли два потоки (палива і окиснювача) взаємодіють між собою. Проте, (10.32) не відображає загальної поведінки камери згоряння, для визначення якої необхідно ввести загальне (глобальне) відношення ϕ_g

$$\phi_g = s \frac{\dot{m}_F^1}{\dot{m}_O^2}, \quad (10.33)$$

де $\dot{m}_F^1$ і $\dot{m}_O^2$ – швидкість подачі палива через перший вхід камери згоряння і окиснювача – через другий, відповідно.

Глобальне (ϕ_g) і локальне (ϕ) відношення еквівалентності зв'язані між собою співвідношенням

$$\phi_g = \phi \frac{\dot{m}^1}{\dot{m}^2}, \quad (10.34)$$

де $\dot{m}^1$ і $\dot{m}^2$ – сумарні швидкості потоків через входи 1 і 2 камери згоряння, відповідно.

В камери згоряння з попереднім змішуванням паливо і окиснювач подається одним потоком і $\dot{m}^1 = \dot{m}^2$, так що $\phi_g = \phi$. Для камер згоряння без попереднього змішування ці дві величини можуть істотно відрізнятись.

10.1.2. Рівняння збереження імпульсу

Рівняння збереження імпульсу або руху мають такий самий вигляд в реакційних середовищах як і для нереагуючих потоків, тобто без наявності хімічних реакцій:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,j} \quad (10.35)$$
$$\text{або } \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \sum_{k=1}^N Y_k \mathbf{f}_{k,j},$$

де $f_{k,j}$ – компонента об'ємної сили, що діє на компоненту k в напрямку j .

Навіть якщо рівняння (10.35) не включає явні умови реакції, потік змінюється в результаті згоряння: динамічна в'язкість μ сильно змінюється, оскільки температура змінюється в співвідношенні від 1: 8 до 1:10. Густина також змінюється і тому ж співвідношення, що і μ , і дилатація (розширення) фронту полум'я збільшує всі швидкості в тій же пропорції. Як наслідок цього, локальне число Рейнольдса змінюється значно більше, не в нереагуючих потоках: хоч рівняння імпульсу збігаються для умов з горінням та без нього, але поведінка потоків сильно різниться між собою. Типовим прикладом можуть слугувати реактивні струмені: турбулентні потоки, які не є реагуючими, можуть стати ламінарними у разі їх спалахування.

10.1.3. Рівняння збереження маси для компонентів реакцій

Коли процес горіння не генерує масу, рівняння збереження маси не змінюється порівняно з випадком нереагуючих потоків:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{або} \quad \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (10.36)$$

Рівняння збереження маси для компоненти реакції k має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho (u_i + V_{k,i}) Y_k] = \dot{\omega}_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (10.37)$$

де $V_{k,i}$ – i -а компонента швидкості дифузії V_k компоненти k , м/с; Y_k – масова частка компоненти k ; $\dot{\omega}_k$ – швидкість реакції компоненти k , кг/(м³·с).

За визначенням

$$\sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i} = 0 \text{ і } \sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = 0. \quad (10.38)$$

10.1.4. Швидкість дифузії: точні рівняння та наближення

Швидкість дифузії V_k для N компонентів реакції отримуються за допомогою розв'язання системи рівнянь

$$\nabla X_q = \sum_{k=1}^N \frac{X_q X_k}{D_{qk}} (V_k - V_q) + (Y_q - X_q) \frac{\nabla p}{p} + \frac{\rho}{p} \sum_{k=1}^N Y_q Y_k (f_q - f_k), \quad p = \overline{1, N}, \quad (10.39)$$

де $D_{qk} = D_{kq}$ – подвійний коефіцієнт масової дифузії компоненти q в компоненту k ; $X_k = Y_k \frac{W}{W_k}$ – молярна частка компоненти k .

Ефектом Сорі, тобто дифузією маси через температурний градієнт, можна знехтувати.

10.1.4.1. Бінарна дифузія

Якщо суміш газів містить тільки дві компоненти, і якщо градієнти тиску невеликі і об'ємні сили нехтовно малі, то система (10.39) зводиться до скалярного рівняння де невідомими є дві швидкості дифузії V_1 і V_2

$$\nabla X_1 = \frac{X_1 X_2}{D_{12}} (V_2 - V_1). \quad (10.40)$$

Знаючи, що $Y_1 + Y_2 = 1$, і що $Y_1 V_1 + Y_2 V_2 = 0$ з (10.38), рівняння (10.40) перетворюється до вигляду

$$Y_1 V_1 = -D_{12} \nabla Y_1, \quad (10.41)$$

що є законом Фіка.

Співвідношення (10.41) є точним для бінарної дифузії.

10.1.4.2. Багатокомпонентна дифузія

Система рівнянь (10.39) для багатокомпонентного газу часто замінюється наближенням Хіршфельдера, яке є найкращою апроксимацією першого порядку до точного розв'язку системи рівнянь (10.39)

$$X_k V_k = -D_k \nabla X_k, \quad (10.42)$$

$$\text{де } D_k = \frac{1 - Y_k}{\sum_{j \neq k} X_j / D_{jk}}.$$

Коефіцієнт D_k не є коефіцієнтом бінарної дифузії, а є еквівалентним коефіцієнтом дифузії компоненти k до решти компонент суміші. Якщо суміш містить тільки два компоненти позначені через 1 і 2, то рівняння (10.42) зводиться до $V_1 X_1 = -\frac{Y_2}{X_2} D_{12} \nabla X_1$, а це і є закон Фіка (10.41):

для бінарної суміші, без врахування градієнта тиску та будь-яких об'ємних сил, закон Фіка і наближення Хіршфельдер є точними. Однак, у всіх інших випадках, рівняння (10.42) відрізняється від закону Фіка і призводить до рівняння наступного вигляду

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i Y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}_k. \quad (10.43)$$

Наближення Хіршфельдера для дифузії швидкості є зручним наближенням, оскільки коефіцієнти дифузії D_k можуть бути просто пов'язані з тепловою дифузією D_{th} в багатьох видах полум'я: Число Левіса окремих компонентів $Le_k = \frac{D_{th}}{D_k}$, як правило, мають малий вклад у фронтах полум'я.

10.1.4.3. Рівняння збереження маси для горючої суміші та корекція швидкості

Запис рівняння збереження маси для реагуючих потоків є специфічною проблемою. Очевидно, що сума масових часток повинна дорівнювати одиниці

$\sum_{k=1}^N Y_k = 1$. Це рівняння додає N рівнянь до (10.37), в той час як існують тільки

N невідомих: тобто система є перевизначеною. Легко перевірити, що якщо всі рівняння для компонентів (10.37) додані і використовуються тотожності

$\sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i} = 0$, $\sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = 0$ (10.38), рівняння збереження маси набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i} \right) + \sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = 0. \quad (10.44)$$

Це рівняння показує, що існує лише N незалежних рівнянь, і що будь-яке з N рівнянь для компонент (10.37) або рівняння збереження маси (10.36) можуть бути усунені: ця очевидна проблема зникає, коли для швидкості дифузії використовуються точні вирази. Однак, це вже не той випадок, коли використовується закон Хіршфельдера. У цьому випадку рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \text{ вже не дорівнює нулю: умова збереження повної маси}$$

суміші не відбувається. Незважаючи на цей недолік, у більшості розв'язків задач згоряння палива використовується закон Хіршфельдера (або навіть закон Фіка), оскільки знаходження швидкостей дифузії є занадто складним. Для забезпечення умови збереження повної маси суміші у разі застосування цих наближень використовуються два методи:

- перший і найпростіший спосіб для виконання закону збереження маси полягає у запису (10.36) тільки для $N-1$ компонент суміші. Масова частка останньої компоненти визначається за допомогою $Y_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} Y_k$ і поглинає всі невідповідності, введені формулою (10.42).

Це спрощення використовуватися тільки тоді, коли полум'я є сильно розбавленим масовою часткою азоту в ньому;

- у другому способі вектор корекції швидкості V_i^c додається до швидкості конвективного члену рівняння для компонент (10.43)

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho (u_i + V_i^c) Y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}_k. \quad (10.45)$$

Вектор корекції швидкості V_i^c вводиться з метою забезпечення збереження повної маси. Якщо всі рівняння для компонент (10.45) підсумовуються, то збереження маси відновлюється

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \rho V_i^c \right) = 0, \quad (10.46)$$

$$\text{де } V_i^c = D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

10.1.5. Рівняння збереження енергії

Рівняння збереження енергії потребує найбільшої уваги, оскільки існує безліч форм його запису. Перш за все треба зазначити, що через рівняння нерозривності (10.36), наступне співвідношення (яке може бути використано у всіх лівих частинах ентальпійного, енергетичного або температурного рівнянь) має місце для будь-якої величини f

$$\rho \frac{df}{dt} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i f}{\partial x_i}, \quad (10.47)$$

де остання форма називається консервативною.

Розглянемо рівняння збереження для повної енергії e_t

$$\rho \frac{de_t}{dt} = \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i e_t}{\partial x_i} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}), \quad (10.48)$$

де q_v – густина джерела теплоти за рахунок, наприклад, електричної іскри, лазерного або радіаційного випромінювання, яке не слід плутати з теплотою від горіння, Вт/м³; $\rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$ – потужність джерел теплоти від об'ємних сил f_k компоненти k , Вт/м³.

Вектор потоку енергії q_i визначається за формулою

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N h_k Y_k V_{k,i}. \quad (10.49)$$

Цей вектор потоку включає складову теплової дифузії або теплопровідності, що описується законом Фур'є $\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$ і другу складову, яка пов'язана з дифузією компонентів реакцій з різними ентальпіями, що має місце в багатокомпонентному газі.

Використовуючи співвідношення між повною ентальпією і енергією $h_t = e_t + \frac{p}{\rho}$ і рівняння нерозривності (10.36), можна отримати

$$\rho \frac{de_t}{dt} = \rho \frac{dh_t}{dt} - \frac{dp}{dt} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{або} \quad \rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (10.50)$$

Використовуючи (10.50), щоб виключити e_t в рівнянні (10.48) отримуємо рівняння збереження для повної ентальпії h_t

$$\rho \frac{dh_t}{dt} = \frac{\partial \rho h_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i h_t}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}). \quad (10.51)$$

Якщо рівняння збереження імпульсу помножити на u_j можна отримати рівняння для кінетичної енергії $\frac{u_j u_j}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_j u_j \right) = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,j} u_j. \quad (10.52)$$

Віднімаючи (10.52) від (1.48) отримуємо рівняння для e

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i e) = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.53)$$

Рівняння збереження для повної ентальпії h отримується з (10.53) з врахуванням (10.50)

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i h) = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}, \quad (10.54)$$

де $\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ – джерело теплоти, що пов'язане з дисипацією механічної енергії

руху рідини за рахунок в'язкості, Вт/м³.

Використовуючи визначення явної ентальпії у вигляді $h_s = h - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k$ та підставляючи вираз для h_s замість h в рівняння (10.54) використовуючи рівняння для компонентів (10.37), отримуємо

$$\rho \frac{Dh_s}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} +$$

$$+ q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}, \quad (10.55)$$

де $h_{s,k} = \int_{T_0}^T c_{p,k} dT$ – явна або неізотермічна ентальпія, Дж/кг; $\dot{\omega}_T$ – джерело теплоти за рахунок згоряння, Вт/м³

$$\dot{\omega}_T = - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k. \quad (10.56)$$

Член $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right)$ рівняння (1.55) дорівнює нулю в таких випадках:

- якщо суміш містить одну компоненту;
- якщо всі компоненти мають одну й ту саму (однакову) явну ентальпію

$$\sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} = h_s \sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i}.$$

Слід також відмітити, що навіть у разі $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) \neq 0$, цим членом в (10.55) нехтують, оскільки, він нехтовно малий порівняно з $\dot{\omega}_T$.

Рівняння для явної енергії $e_s = \int_{T_0}^T c_v dT - RT_0/W$ (див. табл. 10.4) можна отримати з рівнянь (1.55) і (1.50)

$$\rho \frac{De_s}{Dt} = \frac{\partial \rho e_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i e_s) = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) +$$

$$+ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.57)$$

Дещо іншу форму рівняння (10.57) для неізотермічної енергії, що виражається співвідношенням $e'_s = \int_{T_0}^T c_v dT$

$$\rho \frac{De'_s}{Dt} = - \sum_{k=1}^N \Delta e_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N \left(h_{s,k} + R \frac{T_0}{W_k} \right) Y_k V_{k,i} \right) +$$

$$+ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i},$$

де $\Delta e_{f,k}^\circ = \Delta h_{f,k}^\circ - R \frac{T_0}{W_k}$ – енергія формування речовини за температури T_0 .

За допомогою додавання рівнянь (1.57) і (1.52) можна отримати рівняння для повної явної енергії $E = e_s + \frac{1}{2} u_i u_i$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i E) = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}). \quad (10.58)$$

Рівняння для повної явної ентальпії $H = h_s + \frac{1}{2} u_i u_i$ отримується аналогічним чином, а саме додаванням рівнянь (1.57) і (1.52)

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i H) = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}). \quad (10.59)$$

Повну похідну від h_s у рівняння (10.55) можна виразити у такий спосіб

$$\rho \frac{Dh_s}{Dt} = \sum_{k=1}^N h_{s,k} \rho \frac{DY_k}{Dt} + \rho c_p \frac{DT}{Dt}. \quad (10.60)$$

Заміна цієї похідної в рівнянні (10.55) дає

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \left(\rho \sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k V_{k,i} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.61)$$

Слід відзначити, що реакційний (джерельний) член $\dot{\omega}'_T$ не дорівнює члену $\dot{\omega}_T$, який входить у рівнянні для e_s або h_s

$$\dot{\omega}_T = - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k; \quad \dot{\omega}'_T = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\omega}_k = - \sum_{k=1}^N h_{s,k} \dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k. \quad (10.62)$$

Різниця між $\dot{\omega}'_T$ і $\dot{\omega}_T$ є не значною завдяки малому внеску явної ентальпії $h_{s,k}$ в другому рівнянні (10.62). Однак, ці члени стають однаковими за умови коли величини ізобарної теплоємності $c_{p,k}$ для всіх компонентів реакції прийняти також однаковими.

Аналогічна форма рівняння (10.60) може бути записана з ізохорною теплопровідністю c_v для визначення e_s

$$\rho \frac{De_s}{Dt} = \sum_{k=1}^N e_{s,k} \rho \frac{DY_k}{Dt} + \rho c_v \frac{DT}{Dt}, \quad (10.63)$$

так що заміна похідної за часом e_s в рівняння (10.57) приводить до

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}''_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - RT \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i} / W_k \right) - \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} \sum_{k=1}^N (Y_k V_{k,i} c_{p,k}) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.64)$$

де $\dot{\omega}''_T = \sum_{k=1}^N e_k \dot{\omega}_k$ – джерельний член від реакцій горіння, величина якого дорівнює $\dot{\omega}_T$ за умови коли всі величини $c_{v,k}$ компонент реакцій рівні між собою.

В табл. 10.6 підсумовано різні форми рівняння енергії.

Таблиця 10.6. Ентальпійні і енергетичні форми та відповідні рівняння енергії

Форма	Енергія	Ентальпія
Явна, неізотермічна	$e_s = h_s - p/\rho = \int_{T_0}^T c_v dT - RT_0/W$	$h_s = \int_{T_0}^T c_p dT$
Явна + хімічна	$e = h - p/\rho = e_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k$	$h = h_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k$
Повна хімічна	$e_t = h_t - p/\rho = e_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k + \frac{1}{2} u_i u_i$	$h_t = h_s + \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ Y_k + \frac{1}{2} u_i u_i$
Повна явна (нехімічна)	$E = H - p/\rho = e_s + \frac{1}{2} u_i u_i$	$H = h_s + \frac{1}{2} u_i u_i$

e_t	$\rho \frac{De_t}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$
h_t	$\rho \frac{Dh_t}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$
e	$\rho \frac{De}{Dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}$
h	$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}$
e_s	$\rho \frac{De_s}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}$
h_s	$\rho \frac{Dh_s}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}$
E	$\rho \frac{DE}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \frac{\partial (\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$
H	$\rho \frac{DH}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \frac{\partial (\tau_{ij} u_i)}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$

У табл. 10.6 використано такі величини: $q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N h_k Y_k V_{k,i}$ – густина потоку ентальпії; $V_{k,i}$ – швидкості дифузії компонентів; $f_{k,i}$ – об’ємні сили, що діють на компоненту k в напрямку i ; $\tau_{ij} = -2/3\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор в’язкого напруження; $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij}$ – тензор напруження; $\dot{\omega}_T = -\sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k$ – джерело теплоти від згоряння палива; $\rho \frac{Df}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i f)$ – матеріальна похідна від енергії або ентальпії f .

10.2. Спрощені форми рівняння енергії

На практиці повні форми рівнянь збереження енергії (див. табл. 10.6) не завжди використовуються з причин їх складності. Тому в розрахунках процесів горіння широкого застосування дістали спрощені форми їх запису, які будуть розглянуті в наступних підрозділах.

10.2.1. Сталий тиск полум’я

У випадку, коли швидкість полум’я мала порівняно зі швидкістю звуку (у більшості камер згоряння типові значення для діапазону s_L змінюються від 0,1 до 5 м/с, а швидкість звуку вихідних газів c_1 коливається в межах від 300 до 600 м/с), виникає можливість зробити такі спрощення:

- 1) Число Маха M_a в потоці порядку s_L/c_1 є малим. Ця умова є достатньою, щоб показати, що тиск у рівнянні стану можна вважати сталою величиною, що може бути перевірено, виходячи із рівняння збереження руху (10.35), написаного для спрощення в одновимірній формі і зі сталою в’язкістю

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (10.65)$$

Це рівняння може бути зведено до безрозмірного вигляду за допомогою таких безрозмірних параметрів:

$$u^+ = \frac{u}{c_1}, \quad x^+ = \frac{x}{L}, \quad \rho^+ = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad t^+ = \frac{c_1 t}{L}, \quad p^+ = \frac{p}{\rho_1 c_1^2}. \quad (10.66)$$

де L – визначальна відстань (наприклад розмір пальника), м; c_1 – швидкість звуку, м/с. Тут індекс 1 відноситься до початкового стану.

З врахуванням (10.66) і числа Рейнольдса $Re = \frac{\rho_1 c_1 L}{\mu_1}$ рівняння (10.65)

перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial p^+}{\partial x^+} = -\rho^+ \frac{\partial u^+}{\partial t^+} - \rho^+ u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial u^+}{\partial x^+}. \quad (10.67)$$

У правій частині (10.67) перший нестационарний член має порядок малості $O(M_a)$, другий стаціонарний член – $O(M_a^2)$ і третій в'язкісний член – $O(M_a/Re)$. Тому рівняння (10.67) показує, що за великих чисел Рейнольдса стаціонарної течії, зміна середнього тиску має порядок малості $O(M_a^2)$, а нестационарної – $O(M_a)$. Для режиму дозвукового горіння з низьким числом Маха, ці зміни незначні і тиск можна вважати сталою величиною в рівнянні стану $p = \rho \frac{RT}{W}$, який

замінюється на $\rho \frac{RT}{W} = p_0 = \text{const}$. Таким чином, зміна густини газу через фронт полум'я безпосередньо пов'язана зі зміною температури через фронт полум'я

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (10.68)$$

Виходячи з цього матеріальна (повна) похідна від тиску $\frac{Dp}{Dt}$ в рівнянні енергії приймається рівною нулю.

- 2) Аналогічним чином дисипативним членом – джерелом теплоти в рівнянні енергії $\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, що пов'язаний з в'язкістю, також можна знехтувати.

Таким чином, рівняння енергії (10.61) спрощується до вигляду

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k V_{k,i} \right) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.69)$$

10.2.2. Рівність теплоємності для всіх компонентів реакції

Рівняння енергії також можуть бути спрощені за допомогою припущення про рівність масової ізобарної теплоємності компонентів реакції. По-перше, якщо припустити, що всі теплоємності однакові $c_{p,k} = c_p$ і $h_{s,k} = h_s$ (припущення, яке не часто вірно в полум'ї, але часто використовується), то член у рівнянні енергії (10.61) $\sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k V_{k,i}$ стає рівним нулю $c_p \sum_{k=1}^N Y_k V_{k,i} = 0$ і рівняння (10.61) набуває вигляду:

1) за умови змінного тиску і однакових значень $c_{p,k} = c_p$ в полум'ї

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.70)$$

2) за умови сталого тиску, малої швидкості в полум'ї і однакових значень $c_{p,k} = c_p$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.71)$$

Тут дві швидкості реакцій $\dot{\omega}'_T$ і $\dot{\omega}_T$ є рівними між собою

$$\dot{\omega}'_T = -\sum_{k=1}^N h_k \dot{\omega}_k = -\sum_{k=1}^N h_{s,k} \dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k = -h_s \sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k = \dot{\omega}_T, \quad (10.72)$$

оскільки $\sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = 0$.

У разі рівності $c_{p,k} = c_p$ рівняння для енергії (10.58) і ентальпії (10.59) також спрощуються до форм

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i E) = \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) +$$

$$+ q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}), \quad (10.73)$$

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i H) = \dot{\omega}_T + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) +$$

$$+ q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i}). \quad (10.74)$$

Зверніть увагу, що, якщо всі теплоємності рівні, але при цьому також залежать від температури, то рівняння для ρe_s є рівнянням для тиску, оскільки

$$\rho e_s = \rho \left(\int_{T_0}^T c_v dT - R \frac{T_0}{W} \right) = \rho (c_v T - c_p T_0) = \frac{p}{\gamma - 1} - \rho c_p T_0,$$

де $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показник адіабати.

Заміна ρe_s в (10.57) з використанням рівняння нерозривності дає

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{Dp}{Dt} = - \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}. \quad (10.75)$$

Для більшості випадків швидкого горіння (спалаху), p майже стала величина: в рівнянні (10.75), перший член (за рахунок дилатації) компенсує інші члени. Наприклад, якщо швидкість виділення теплоти $\dot{\omega}_T$ занадто висока, то тиск буде змінюватися локально. Член $\frac{\gamma p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ у правій частині рівняння (10.75) також викликає зміну тиску.

10.2.3. Постійна теплоємність суміші

Можна також припустити, що масова ізобарна теплоємність суміші c_p стала величина, оскільки один із компонентів (наприклад, N_2) переважає в суміші, але при цьому $c_{p,k}$ не однакові. Таке наближення є дещо некоректним,

оскільки $c_p = \sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k$, але інколи використовується, щоб отримати рівняння енергії за допомогою підстановки $\frac{Dh_s}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt}$ в рівняння для h_s (10.55)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}_T + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \sum_{k=1}^N h_{s,k} Y_k V_{k,i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} V_{k,i}, \quad (10.76)$$

де $h_s = c_p dT$.

10.3. Підсумкові рівняння збереження

В табл. 10.7 наведено підсумкові рівняння збереження для розрахунків реагуючих потоків.

Таблиця 10.7. Рівняння збереження для реагуючих потоків

Рівняння збереження маси $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$
Компоненти: для $k = 1, N-1$ (або $k = 1, N$) Рівняння збереження маси через швидкості дифузії $\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (u_i + V_{k,i}) Y_k) = \dot{\omega}_k$ Рівняння збереження маси з використанням наближень Хіршфельдера і Куртіса $\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (u_i + V_i^c) Y_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}_k$ і $V_i^c = \sum_{k=1}^N D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$
Рівняння збереження кількості руху $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,j}$
Рівняння збереження енергії (для суми явної і кінетичної) $\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i E) = \dot{\omega}_T - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) + q_v + \rho \sum_{k=1}^N Y_k f_{k,i} (u_i + V_{k,i})$

$$\text{з } \dot{\omega}_T = - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k \text{ і } q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N h_k Y_k V_{k,i}$$

Рівняння енергії в табл. 10.7 може бути замінено будь-яким з рівнянь, наведених у табл. 10.6.

У більшості випадків процесів швидкого горіння, тиск є сталою величиною, масові сили дорівнюють нулю ($f_{k,i} = 0$), в'язкий нагрів за рахунок дисипації в'язких напружень незначний, зовнішнє джерело теплоти дорівнює нулю ($q_v = 0$) так що рівняння збереження можна спростити, як це показано в табл. 10.8.

Таблиця 10.8. Рівняння збереження для сталого тиску та малих чисел Маха реагуючих потоків

Рівняння збереження маси $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$
Компоненти реакції: для $k = \overline{1, N-1}$ (або $k = \overline{1, N}$) Рівняння збереження маси через швидкості дифузії $\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (u_i + V_{k,i}) Y_k) = \dot{\omega}_k$ Рівняння збереження маси з використанням наближень Хіршфельдера і Куртіса $\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (u_i + V_i^c) Y_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}_k$ і $V_i^c = \sum_{k=1}^N D_k \frac{W_k}{W} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$
Рівняння збереження кількості руху $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$
Рівняння збереження енергії записане через енергію (для суми явної і кінетичної) $\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i E) = \dot{\omega}_T - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ з $\dot{\omega}_T = - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^\circ \dot{\omega}_k$ і $q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \sum_{k=1}^N h_k Y_k V_{k,i}$ Рівняння збереження енергії записане через температуру $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k V_{k,i} \right)$

$$\sum \dot{\omega}'_T = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\omega}_k$$

10.4. Постановка задачі тепло-гідродинамічного стану реагуючого середовища під час згоряння природного газу без попереднього змішування

Спочатку розглянемо деякі припущення стосовно властивостей реагуючого середовища в камері згоряння.

Реагуючий потік є турбулентним стисливим середовищем і описується осередненими за Рейнольдсом рівняннями Нав'є-Стокса (RANS) в наближенні $k - \varepsilon$ моделі (розділ 11). Теплообмін в реагуючому потоці ідеального газу є складним радіаційно-конвективним в наближенні «сірого» середовища.

Аналіз горіння метану без попереднього змішування ґрунтується на припущенні повного згоряння природного газу до CO_2 і H_2O . Тоді рівняння хімічної реакції горіння матиме вид



Реакція (10.77) визначається стехіометричними коефіцієнтами і миттєвими термодинамічними параметрами, від яких залежить її швидкість. Турбулентне змішування реагентів є фактором, що обмежує швидкість реакції. Турбулентно-хімічна взаємодія при горінні природного газу описується за допомогою двох моделей: перша – модель обмеженої швидкості реакції на основі закону Ареніуса (10.25); друга – модель вихрової дисипації (Magnussen). У результаті використовується менше з отриманих значень по швидкості реакції.

Джерело k -ї компоненти хімічної реакції (10.77) згідно моделі обмеженої швидкості реакції визначається як

$$\bar{\dot{\omega}}_k = W_k Q_k, \quad (10.78)$$

де W_k – молекулярна маса компоненти, кг/моль; Q_k – молярна швидкість утворення/розкладання компонентів реакції, моль/(м³·с).

Реакція горіння (10.77) в узагальненому вигляді може бути представлена через (10.19)

$$\sum_{k=1}^N v'_k \mathcal{M}_k \xleftarrow{K_f, K_r} \sum_{k=1}^N v''_k \mathcal{M}_k, \quad (10.79)$$

де v'_k, v''_k – стехіометричні коефіцієнти k реагенту і продукту реакції, відповідно; $\mathcal{M}_k$ – символ, який визначає k компоненту; K_f, K_r – константа швидкості прямої і зворотної реакції, відповідно, 1/с.

Молярна швидкість розкладу компонентів прямої реакції визначається співвідношенням (10.24)

$$Q_k = v_k \left(K_f \prod_{j=1}^N [X_j]^{v'_j} - K_r \prod_{j=1}^N [X_j]^{v''_j} \right), \quad (10.80)$$

де $v_k = v''_k - v'_k$; $[X_j] = \rho Y_j / W_j = \rho_j / W_j$ – молярна концентрація j -го компонента, моль/м³.

Константа швидкості прямої реакції горіння визначається із закону Ареніуса (10.25)

$$K_f = A \exp \left[-\frac{E}{RT} \right], \quad (10.81)$$

де $A = BT^\alpha$ – частотний фактор, 1/с; B, α – постійні реакції (B – стеричний фактор, який враховує орієнтацію молекул при зіткненні), ($\alpha = 0,5 - 1,5$); E – енергія активації, Дж/моль.

Константа швидкості зворотної реакції визначається через K_f (10.26)

$$K_r = K_f \left[\left(\frac{p_a}{RT} \right)^{\sum_{k=1}^N v_k} \exp \left(\frac{\Delta s^0}{R} - \frac{\Delta h^0}{RT} \right) \right]^{-1}, \quad (10.82)$$

де $p_a = 1$ бар; $\Delta s^0, \Delta h^0$ – зміна молярної ентропії (Дж/(моль·К)) та ентальпії (Дж/моль) реакції, відповідно.

Молярна швидкість розкладання компонентів прямої реакції відповідно до моделі вихрової дисипації визначається як:

$$Q_k = v'_k W_k A \rho \frac{\varepsilon}{k} \min \left(\frac{Y_R}{v'_R W_R} \right), \quad (10.83)$$

$$Q_k = v'_k W_k A B \rho \frac{\varepsilon}{k} \frac{\sum_P Y_P}{\sum_{j=1}^N (v''_j W_j)}, \quad (10.84)$$

де $A=4$, $B=0,5$ – емпіричні константи Магнусена для реагентів і продуктів реакції, відповідно; індекси R , P – стосуються реагентів і продуктів реакції, відповідно.

У рівняннях (10.83), (10.84) швидкість реакції визначається масштабом часу змішування великих вихорів і відношення k/ε як в моделі Spalding.

Згідно зроблених припущень математична модель нестационарного згоряння природного газу в турбулентному потоці без попереднього змішування включає такі рівняння: нерозривності (10.37), збереження кількості руху (10.35), транспорту хімічних компонентів реакції горіння, енергії в ентальпійному вигляді типу (10.55), турбулентної кінетичної енергії і швидкості її дисипації (11.10) та рівняння стану ідеального газу (10.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} + \bar{\rho} \mathbf{g}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{Y}_k) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_k + \bar{\omega}_k, \quad k = 1, N; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{h}) = \bar{\omega}_T + \frac{\bar{D}p}{D\tau} + \nabla \cdot \left(\bar{\lambda} \nabla T + \frac{\bar{\mu}_t}{Sc_t} \nabla h \right) + \\ + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \left(\bar{\rho} \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k h_k \right) + E(\tilde{T}); \\ \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \bar{\rho} C_1 S \varepsilon - \bar{\rho} C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b; \\ \bar{p} = \bar{\rho} \frac{R}{W} \tilde{T}, \end{array} \right. \quad (10.85)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds (див. розділ 11), кг/м³; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор швидкості, осереднений за Favre ($\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$), м/с; $\bar{p}$ – тиск осереднений за Reynolds, Па;

$\bar{\tau}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \hat{\mathbf{I}}$ – тензор ефективних напружень, Па;

μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентна в'язкість, Па·с;

k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; ε – швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с); $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, м/с²; $Y_k = m_k / m$, $k = 1, N$ – масова частка компоненти хімічної реакції горіння; m_k – маса k компоненти, кг; m – маса горючої суміші, кг; N – кількість компонент реакції горіння;

$\bar{\mathbf{J}}_k = - \left(\bar{\rho} D_k + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \nabla \tilde{Y}_k$ – вектор дифузного турбулентного потоку k

компоненти, кг/(м²·с); D_k – коефіцієнт дифузії k компоненти, м²/с; $Sc_t = \frac{\mu_t}{\rho D_t}$ –

число Шмідта, D_t – коефіцієнт турбулентної дифузії, м²/с; $\bar{\omega}_k$ – джерело за рахунок середньої швидкості реакції k компоненти $\left(\sum_{k=1}^N \bar{\omega}_k = 0 \right)$, кг/(м³·с);

$\tilde{h}_k = \int_{T_{ref,k}}^{\tilde{T}} c_{p,k} dT$ – явна ентальпія k компоненти, Дж/кг; T – абсолютна

температура, К; $T_{ref,k}$ – абсолютна температура відліку, К; $\bar{\omega}_T = - \sum_{k=1}^N h_k^0(T_{ref,k}) \bar{\omega}_k$

– об'ємне джерело теплоти за рахунок горіння, Вт/м³;

$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\mu_t}{\bar{\rho} Sc_t} \nabla \bar{p}$ – субстанціональна похідна від тиску, Вт/м³; λ –

коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $(:)$ – оператор скалярного добутку двох

тензорів; $E(\tilde{T}) = K \left(\int_{\Omega=4\pi} I(s) d\Omega - 4n^2 \sigma T^4 \right)$ – об'ємна густина радіаційного

теплового потоку «сірого» середовища, Вт/м³; K і n – коефіцієнт поглинання (м⁻¹) і показник заломлення, відповідно; Ω – тілесний кут, ср;

$I(s) = I(s_0) \exp \left(- \int_{s_0}^s K ds \right) + n^2 \sigma \int_{s_0}^s K \exp \left(- \int_{s'}^s K ds'' \right) ds'$ – інтенсивність

випромінювання (Вт·с/(м²·ср)) у напрямку s в тілесному куті $d\Omega$; σ – стала

Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); s_0 – відповідає границі; $G_k = \mu_t S^2$ – джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок середнього градієнта швидкості,

Вт/м³; $S = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ – модуль тензора середньої швидкості деформації, с⁻¹;

$\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla]$ – тензор середньої швидкості деформації другого рангу, с^{-1} ;

$G_b = -\mathbf{g} \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \nabla p$ – джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок

гравітації, Вт/м^3 ; $\text{Pr}_t = \frac{\mu_t c_p}{k}$ – турбулентне число Прандтля; $Y_M = 2\rho \varepsilon M_t^2$ –

член, який враховує ефект стискання турбулентного потоку, Вт/м^3 ; $M_t = \sqrt{k/a^2}$

– турбулентне число Маха; $a = \sqrt{\gamma RT/W}$ – швидкість звуку, м/с ; γ – показник

адіабати; R – універсальна газова постійна, $\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$; W – молярна маса газу,

кг/моль ; $C_1 = \max\left(0.43, \frac{\eta}{\eta + 5}\right)$; $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$; $C_\mu = \left[A_0 + A_s \frac{k U^*}{\varepsilon}\right]^{-1}$;

$U^* = \sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S} + \tilde{\mathbf{\Omega}}:\tilde{\mathbf{\Omega}}}$, с^{-1} ; $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ – тензор середньої швидкості обертання другого

рангу, с^{-1} ; $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$; $\phi = \left[3 \cos(\sqrt{6} \bar{W})\right]^{-1}$, рад; $\bar{W} = \frac{3J_3}{\tilde{S}^3}$; $J_3 = \det(\mathbf{S})$ – третій

інваріант $\mathbf{S}$; $\tilde{S} = \sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}$, с^{-1} ; $C_{3\varepsilon} = \tanh\left|\frac{V_\parallel}{V_\perp}\right|$ [67]; $V_\parallel$, $V_\perp$ – складові швидкості

потоку – паралельна і перпендикулярна до вектору гравітації, м/с ; ν – кінематична в'язкість, $\text{м}^2/\text{с}$; $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$, $A_0 = 4.04$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_2 = 1.9$ – константи k – ε моделі (див. розділ 11).

Перший член у правій частині рівняння енергії (10.85) пов'язаний з джерелом теплоти хімічної реакції горіння, другий – з роботою тиску, третій – з теплопровідністю, четвертий – з дисипацією в'язкості, п'ятий – з дифузійною компонентів хімічної реакції і шостий – з тепловим випромінюванням.

Початкові умови:

$$\begin{cases} \tilde{T}(X) = T_0; \\ \tilde{\mathbf{v}}(X) = 0; \\ Y_k(X) = Y_{0k}, \quad k = \overline{1, N}; \\ k(X) = k_0; \\ \varepsilon(X) = \varepsilon, \end{cases} \quad (10.86)$$

де $X(x, y, z) \in \Omega$ – декартові координати, м ; Ω – розрахункова область.

Граничні умови:

– на вході природного газу (10.87) і окиснювача (10.88) і на виході із камери згоряння (10.89)

$$\left\{ \begin{array}{l} G = G_{\text{inlet-g}}; \\ Y_{\text{CH}_4} = Y_{\text{CH}_4\text{-inlet}}; \\ T = T_{\text{inlet-g}}; \\ k = k_{\text{inlet-g}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{inlet-g}}, \end{array} \right. \quad (10.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G = G_{\text{inlet-oxid}}; \\ Y_{\text{O}_2} = Y_{\text{O}_2\text{-inlet}}; \\ T = T_{\text{inlet-oxid}}; \\ k = k_{\text{inlet-oxid}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{inlet-oxid}}, \end{array} \right. \quad (10.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\text{outlet}} = 0; \\ Y_{\text{O}_2} = Y_{\text{O}_2\text{-outlet}}; \\ T = T_{\text{outlet}}; \\ k = k_{\text{outlet}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{outlet}}, \end{array} \right. \quad (10.89)$$

– на стінках камери згоряння

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{p} = 0; \\ \mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla \tilde{T} - \mathbf{q}_r) = q_n \vee \mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla \tilde{T} - \mathbf{q}_r) = \alpha(T - T_\infty);; \\ \tilde{\mathbf{v}} = 0; \\ k = 0; \\ \varepsilon = 0. \end{array} \right. \quad (10.90)$$

де $\mathbf{q}_r$ – вектор густини радіаційного теплового потоку, Вт/м²; q_n – нормальна густина сумарного теплового потоку, Вт/м²; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_∞ – абсолютна температура оточуючого середовища, К.

Система рівнянь (10.77)–(10.90) є повним математичним формулюванням задачі згоряння природного газу в камері згоряння без попереднього змішування.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які відмінності мають рівняння збереження для реагуючих потоків порівняно зі звичайними рівняннями Нав'є-Стокса для нереагуючих середовищ?
2. Опишіть явище процесу горіння.
3. Що таке масова частка компонент хімічних реакцій?
4. Опишіть характеристики реагуючого потоку стисливого середовища.
5. З яких рівнянь складається система диференціальних рівнянь МСС для течії реагуючого середовища та від чого залежить їх кількість?
6. Дайте визначення повного і парціального тиску.
7. Дайте визначення густини багатоконцентного газу.
8. Дайте визначення концентрації компонентів хімічних реакцій через молярну частку та молярну концентрацію.
9. Наведіть форми енергії і ентальпії для реагуючих потоків.
10. Дайте визначення теплоємності частки компонентів реагуючих потоків. Що таке стандартна ентальпія?
11. Наведіть формули для повної ентальпії та її складових.
12. Покажіть зв'язок між h_{sk} та e_{sk} .
13. Дайте визначення енергії і ентальпії для суміші з N компонент.
14. Наведіть форми енергії і ентальпії для запису рівнянь збереження.
15. Як визначаються масові ізохорна та ізобарна теплоємності суміші газів?
16. Дайте визначення тензора в'язкого напруження.
17. Опишіть сутність явищ теплопровідності й дифузії компонентів реакцій.
18. Сформулюйте закони Фур'є і Фіка. Наведіть фізичний зміст коефіцієнтів теплопровідності і молекулярної дифузії.
19. Дайте фізичний зміст числа Левіса.
20. Що означає число Прандтля, його фізичний зміст?
21. Що означає число Шмідта та його зв'язок з числами Прандтля і Левіса?
22. Чим характеризується хімічна кінетика?
23. Наведіть рівняння збереження маси для N компонентів реакції.
24. Дайте визначення для констант швидкості реакцій.
25. Що передбачає собою повне математичне формулювання взаємодії потоків?
26. Наведіть конфігурації дифузного полум'я та з попереднім змішуванням.
27. Що таке стехіометрія полум'я попередньо змішаної суміші газів?
28. Опишіть способи для визначення еквівалентного відношення суміші

газів.

29. Наведіть формулу для визначення масового стехіометричного відношення.

30. Дайте визначення еквівалентного відношення суміші газів. Багата та бідна суміш.

31. Запишіть формулу для визначення масової частки палива у суміші.

32. Опишіть стехіометрію дифузного полум'я.

33. Запишіть рівняння збереження імпульсу для реакційних середовищ.

34. Запишіть рівняння збереження маси для компонентів реакцій.

35. Дайте визначення швидкості дифузії за допомогою точних та наближених рівнянь. В чому полягає ефект Сорі?

36. Чим характеризується бінарна і багатокомпонентна дифузія? Опишіть наближення Хіршфельдера.

37. Запишіть рівняння збереження маси для горючої суміші та корекція швидкості.

38. Запишіть рівняння збереження для повної енергії.

39. Дайте визначення вектора потоку енергії.

40. Запишіть рівняння збереження для повної ентальпії.

41. Запишіть рівняння збереження для явної або неізотермічної ентальпії.

42. Запишіть рівняння збереження для явної або неізотермічної енергії.

43. Запишіть ентальпійні і енергетичні форми та відповідні рівняння енергії.

44. Наведіть спрощені форми рівняння енергії.

45. Охарактеризуйте випадок сталого тиску полум'я.

46. Охарактеризуйте випадок рівності теплоємності для всіх компонентів реакції.

47. Охарактеризуйте випадок постійної теплоємності суміші.

48. Запишіть підсумкові рівняння збереження.

49. Наведіть постановку задачі тепло-гідродинамічного стану реагуючого середовища підчас згоряння природного газу без попереднього змішування.

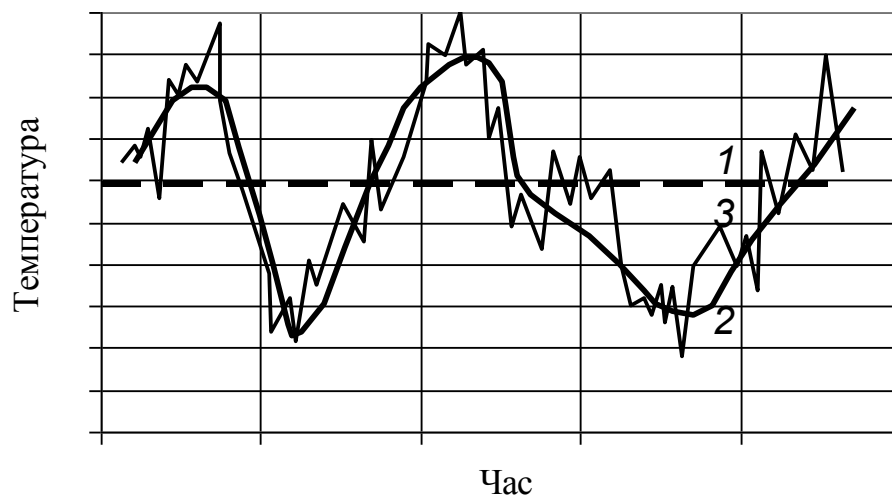
11. МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

11.1. Математичні моделі для числового моделювання турбулентних потоків

Наразі існує три основних групи або рівні математичних моделей для описання турбулентних потоків:

- 1) моделі на базі осереднених за Reynolds або Favre рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds averaged Navier-Stokes equations, RANS);
- 2) моделі або методи прямого моделювання великих вихорів або великомасштабної турбулентності (Large Eddy Simulation, LES);
- 3) моделі або методи безпосереднього прямого моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation, DNS).

У практиці числового моделювання турбулентних потоків поряд з пошуком раціональних моделей турбулентності на базі RANS все більшого поширення дістають методи прямого моделювання великих вихорів LES і прямого моделювання турбулентності DNS. Різниця між цими рівнями числового моделювання наочно показана рис. 11.1.



1 – RANS; 2 – LES ; 3 – DNS

Рис. 11.1. Залежність температури турбулентного потоку від часу при використанні різних методів розрахунку

Задачі, що розв'язуються за допомогою DNS і RANS вимагають суттєво різних розмірів розрахункових сіток (10–50 мкм для DNS і 1–5 мм для RANS). Тобто різниця між сітками RANS і DNS становить біля 100. Вимоги до обчислювальних ресурсів за умови застосування LES моделей дещо послаблюються порівняно з DNS, але все одно є досить високими відносно RANS. Тому, останнім часом, для розширення можливостей найбільш застосовуваних моделей RANS для числового моделювання турбулентних потоків отримали

розвиток альтернативні гібридні моделі LES/RANS або DES (Detached Eddy Simulation), що мають прийнятну економічність й ступінь адекватності. Моделі DES застосовуються за умови великих чисел Reynolds і базуються на таких RANS моделях: Spalart-Allmaras з одним рівнянням; $k-\varepsilon$ і $k-\omega$ – моделях з двома скалярними рівняннями; модифікації моделі $k-\omega$ з використанням чотирьох транспортних рівнянь. Обчислювальні ресурси, що потрібні для реалізації моделей DES є меншими за LES, але більшими за RANS. З розглянутих моделей тільки RANS можна використовувати при розв’язанні двовимірних стаціонарних задач, решта – реалізуються тільки у тривимірних нестационарних задачах.

Система рівнянь Нав’є-Стокса стисливого середовища має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\mathbf{\tau}}; \\ \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho e + p)] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \mathbf{v} : \hat{\mathbf{\tau}}; \\ p = \rho R T, \end{array} \right. \quad (11.1)$$

де ρ – густина, кг/м³; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості, м/с; p – статичний тиск, Па; $\hat{\mathbf{\tau}} = \mu \left[\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}} \right]$ – тензор зсувних напружень 2-го рангу, Па; μ – динамічна в’язкість, Па·с; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор 2-го рангу; $e = c_v T + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$ – повна масова енергія, Дж/кг; c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К).

Система рівнянь (11.1) описує як ламінарні, так і турбулентні потоки. У разі наявності турбулентності розв’язок (11.1) виходить на рівень DNS, який вже є непрактичним в обчислювальному сенсі великого масштабу інженерних конфігурацій завдяки великим значень числа Reynolds. Тим не менш, застосування DNS має сенс за порівняно низьких числах Reynolds для більшого розуміння фізичних процесів турбулентних відривних течій. Тому для моделювання великого масштабу інженерних конфігурацій в системі рівнянь (11.1) виконується заміна миттєвих значень величин на статистично-середні (див. рис. 11.1). Тобто, таким чином отримується система рівнянь RANS. Для

цього можна використати, наприклад, осереднення за Favre і отримати середньозважені значення величин:

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f\rho)_k; \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}; \\ f &= \tilde{f} + f'',\end{aligned}\tag{11.2}$$

де f – миттєва величина; $\tilde{f}$ – середня складова; f'' – складова коливання; n – кількість точок за якими проводиться осереднення.

З використанням (11.2) система рівнянь (11.1) перетворюється до виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) &= 0; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} &= -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot [\tilde{\mathbf{v}} (\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{p})] &= -\nabla \cdot \mathbf{Q} + \nabla \tilde{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{T}}; \\ \bar{p} &= \bar{\rho} R \tilde{T}, \end{aligned} \right.\tag{11.3}$$

де тензор повних напружень і вектор повного теплового потоку визначаються співвідношеннями:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= -\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''} + \bar{\mathbf{t}}; \\ \mathbf{Q} &= c_p \overline{\rho T'' \mathbf{v}''} + \bar{\mathbf{q}}. \end{aligned} \right.\tag{11.4}$$

В (11.4) члени $()''$ представляють флуктуації швидкості. Для замикання системи рівнянь RANS (11.3) необхідно записати додаткові рівняння для визначення турбулентних напружень $-\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}$ або напружень Reynolds і турбулентного теплового потоку $c_p \overline{\rho T'' \mathbf{v}''}$. Ці рівняння можуть бути записані по аналогії з тензором зсувних напружень для стисливого середовища та із законом Fourier:

$$\left\{ \begin{aligned} -\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''} &= \mu_t \left[\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \rho k \hat{\mathbf{I}}; \\ c_p \overline{\rho T'' \mathbf{v}''} &= \lambda_t \nabla T, \end{aligned} \right.\tag{11.5}$$

де μ_t – турбулентна в'язкість, Па·с; $k = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})$ – кінетична турбулентна енергія, Дж/кг; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); $\lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t}$ – турбулентна теплопровідність, Вт/(м·К); Pr_t – турбулентне число Prandtl.

Тепер для замикання системи рівнянь (11.3), (11.5) треба вирішити питання оцінки турбулентної в'язкості μ_t . Для цього запропоновано три основних класичних підходи: алгебраїчний вираз (модель Prandtl), який не потребує ніякого додаткового рівняння балансу; одне (модель Spalart-Allmaras) і два скалярних рівняння.

Для задач числового моделювання взаємодії між стрибком ущільнення і пограничним шаром при надзвуковому обтіканні ЛА найбільшого застосування дістали моделі турбулентності $k - \varepsilon$ Launder і $k - \omega$ Wilcox та їх різноманітні варіації.

Другим наближенням при числовому аналізі турбулентних потоків є LES (див. рис. 11.1), система рівнянь якої отримується за допомогою середньої за простором величини функції, що відповідає середній за Favre $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} = \frac{1}{V} \int_V G f dV; \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}, \quad (11.6)$$

де G – функція фільтр.

В LES великі масштаби турбулентності визначаються явно, в той час як ефект більш дрібних моделюється за допомогою підсіткових правил замикання. Рівняння балансу для моделювання великих вихорів отримуються шляхом фільтрації миттєвих рівнянь балансу. LES визначає миттєве положення «великого» масштабу вирішеного фронту течії, але підсіткова модель все ще необхідна для того щоб прийняти до уваги ефекти малих турбулентних масштабів. В LES система рівнянь Нав'є-Стокса з врахуванням (11.6) має вигляд (11.3). Різниця між записами цих систем рівнянь полягає у визначенні тензора повних напружень і вектора повного теплового потоку:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{T}} = -\bar{\rho} \left(\tilde{\mathbf{v}\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}} \right) + \bar{\boldsymbol{\tau}}; \\ \mathbf{Q} = \bar{\rho} c_p \left(\tilde{T\mathbf{v}} - \tilde{T}\tilde{\mathbf{v}} \right) + \bar{\mathbf{q}}. \end{cases} \quad (11.7)$$

В системі рівнянь член $-\bar{\rho}(\tilde{\mathbf{v}\mathbf{v}}-\tilde{\tilde{\mathbf{v}\mathbf{v}}})$ являє собою підсітковий масштаб напружень або SGS (Subgrid Scale) і член $\bar{\rho}c_p(\tilde{T\mathbf{v}}-\tilde{\tilde{T\mathbf{v}}})$ – підсітковий масштаб теплового потоку. Для визначення цих членів (11.7) запропоновано два різних наближення: перше – використовує явну модель для SGS напруження і теплового потоку; друге – неявний метод для визначення SGS напруження і теплового потоку з використанням монотонного інтегрування.

11.2. Моделі турбулентності RANS

11.2.1. Стандартна $k-\varepsilon$ модель турбулентності

Стандартна $k-\varepsilon$ модель включає два додаткових скалярних рівняння для кінетичної турбулентної енергії та швидкості дисипації кінетичної енергії турбулентності, що записуються додатково до системи рівнянь Нав'є-Стокса (див. розд. 7). Система двох скалярних рівнянь стандартної $k-\varepsilon$ моделі турбулентності мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \bar{\mathbf{t}}_{eff} : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho}\varepsilon; \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{\mathbf{t}}_{eff} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}) - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{cases} \quad (11.8)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds, кг/м³; k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор швидкості, осереднений за Favre, м/с; μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \frac{\bar{\rho}C_\mu k^2}{\varepsilon}$ –

турбулентна в'язкість, Па·с; $\bar{\mathbf{t}}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \hat{\mathbf{I}}$ – тензор

2-го рангу ефективних зсувних напружень, Па; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор 2-го рангу; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку; ε – швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с); $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $C_\mu = 0,09$; $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$ – коефіцієнти $k-\varepsilon$ моделі турбулентності.

11.2.2. $k - \omega$ модель турбулентності

$k - \omega$ модель також як і $k - \varepsilon$ модель включає два додаткових скалярних рівняння для кінетичної турбулентної енергії та відносної швидкості дисипації кінетичної енергії турбулентності. Система двох скалярних рівнянь $k - \omega$ моделі турбулентності мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}k) = \nabla \cdot [(\mu + \sigma^* \mu_t) \nabla k] + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} : \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \beta^* \bar{\rho}k\omega; \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\omega) = \nabla \cdot [(\mu + \sigma \mu_t) \nabla \omega] + \alpha \frac{\omega}{k} (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}) - \beta \bar{\rho}\omega^2, \end{cases} \quad (11.9)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds, кг/м³; k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор швидкості, осереднений за Favre, м/с; μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \frac{\bar{\rho}k}{\omega}$ – турбулентна

в'язкість, Па·с; $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \hat{\mathbf{I}}$ – тензор 2-го рангу

ефективних зсувних напружень, Па; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор 2-го рангу; $(:)$ – оператор подвійного скалярного добутку; ω – відносна швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності, с⁻¹; $\alpha = 5/9$, $\beta = 3/40$, $\beta^* = 9/100$, $\sigma = 1/2$, $\sigma^* = 1/2$ – коефіцієнти $k - \omega$ моделі турбулентності.

11.2.3. Повне формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на базі $k - \varepsilon$ моделі турбулентності з врахуванням стисливості в'язкого середовища

Математичне формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на прикладі $k - \varepsilon$ моделі турбулентності Realizable для в'язкого середовища, в якій враховується вплив зміни чисел Reynolds у широкому діапазоні та стисливість рідини, має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff}; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M + S_k; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \bar{\rho} C_1 S \varepsilon - \bar{\rho} C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) = \nabla \cdot \left[\left(\lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \right] + \nabla \tilde{\mathbf{v}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} + q_v; \\ \bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \end{array} \right. \quad (11.10)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds, кг/м³; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор швидкості, осереднений за Favre, м/с; $\bar{p}$ – тиск, осереднений за Reynolds, Па; $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \hat{\mathbf{I}}$ – тензор дівіаторних напружень, Па; k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентна в'язкість, Па·с; $C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{k U^*}{\varepsilon}}$; $U^* = \sqrt{\hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}} + \tilde{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} : \tilde{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}}$, с⁻¹; $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla)$ – тензор другого рангу швидкості деформації, с⁻¹; $\tilde{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} - 2 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 \boldsymbol{\omega}$; $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \bar{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 \boldsymbol{\omega}$; $\bar{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}} \nabla)$, с⁻¹; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ – компоненти тензора 3-го рангу Levi-Civita; $\boldsymbol{\omega} = \omega_k \mathbf{e}_k$ – компоненти вектора кутової швидкості, м/с; $A_0 = 4,04$; $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$; $\phi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6} W)$; $W = \frac{(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}) : \hat{\mathbf{S}}}{\tilde{S}^3}$; $\tilde{S} = \sqrt{\hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}}}$, с⁻¹; $C_1 = \max \left[0,43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right]$; $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$; $S = \sqrt{2 \hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}}}$, с⁻¹; $G_k = \mu_t S^2$ – джерельний член для k , Вт/м³; $G_b = (\mu + \mu_t) S^2$ – за умови великих чисел Reynolds; $G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \nabla \tilde{T}$ – джерельний член для k , який пов'язаний з виштовхувальною силою, Вт/м³; Pr_t – турбулентне число Prandtl; $\beta = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T} \right)_p$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К⁻¹;

$\tilde{T}$ – абсолютна температура, осереднена за Favre, К; $G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\bar{\rho} Pr_t} \nabla \bar{\rho}$ – джерельний член для k за умов ідеального газу, Вт/м³; ε – швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с); $Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2$ – джерельний член для k , що враховує стисливість середовища, Вт/м³; $M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$ – турбулентне число Mach; $a = \sqrt{\gamma RT}$ – швидкість звуку, м/с; γ – показник адіабати; R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К); $\tilde{E} = \tilde{h} - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{2}$ – повна масова енергія, осереднена за Favre, Дж/кг; $\tilde{h} = \int_{T_0}^{\tilde{T}} c_p dT$ – масова ентальпія, осереднена за Favre, Дж/кг; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_v – густина об’ємного джерела теплоти, Вт/м³.

Коефіцієнти $k - \varepsilon$ – моделі турбулентності (11.10):

$$C_{1\varepsilon} = 1,44; C_2 = 1,9; \sigma_k = 1,0; \sigma_\varepsilon = 1,2. \quad (11.11)$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} \tilde{T}(X) = T_0; \\ \tilde{\mathbf{v}}(X) = \mathbf{v}_0; \\ \bar{p}(X) = p_0; \\ k(X) = k_0; \\ \varepsilon(X) = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (11.12)$$

де $X(x, y, z) \in \Omega$ – декартові координати, м; Ω – розрахункова область.

Граничні умови:

– на вході газового потоку (11.13) і на виході – (11.14)

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = v_{\text{inlet}}; \\ \bar{p} = p_{\text{inlet}}; \\ \tilde{T} = T_{\text{inlet}}; \\ k = k_{\text{inlet}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{inlet}}, \end{cases} \quad (11.13)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні;

$$\begin{cases} \bar{p}_{\text{outlet}} = 0; \\ \tilde{T} = T_{\text{outlet}}; \\ k = k_{\text{outlet}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{outlet}}, \end{cases} \quad (11.14)$$

– на поверхні твердого тіла

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{p} = 0; \\ \mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla \tilde{T}) = q_n \vee \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{T} = 0; \\ \tilde{\mathbf{v}} = 0; \\ k = 0; \\ \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (11.15)$$

де q_n – нормальна густина теплового потоку, Вт/м².

11.2.4. Формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на базі $k - \omega$ моделі турбулентності з врахуванням стисливості в'язкого середовища

Математичне формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на прикладі $k - \omega$ моделі турбулентності для в'язкого середовища, в якій враховується вплив зміни чисел Reynolds у широкому діапазоні та стисливість рідини, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff}; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k - Y_k + S_k; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \omega \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right] + G_\omega - Y_\omega + S_\omega; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}} (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p})) = \nabla \cdot \left[\left(\lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \right] + \nabla \tilde{\mathbf{v}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}_{eff} + q_v; \\ \bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \end{cases} \quad (11.16)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds, кг/м³; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м⁻¹; $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор швидкості, осереднений за Favre [25], м/с; $\bar{p}$ – тиск, осереднений за Reynolds, Па; k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; ω – відносна швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності, с⁻¹; μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$ – турбулентна в'язкість, Па·с; α^* – коефіцієнт ослаблення μ_t (корекції) для малих чисел Reynolds, $\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k} \right)$, $\text{Re}_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$, $\alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}$, а для великих чисел Reynolds $\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$ і тоді $\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$ як у D. Wilcox; $G_k = \mu_t S^2$ – джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок середнього градієнта швидкості, яке визначається відповідно до гіпотези Boussinesq, Вт/м³; $S = \sqrt{2\hat{\mathbf{S}}:\hat{\mathbf{S}}}$ – модуль тензора середньої швидкості деформації, с⁻¹; $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}\nabla)$ – тензор швидкості деформації, с⁻¹; $G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} G_k$ – джерельний член для ω , кг/(м³·с²) (для малих чисел Reynolds, $\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left(\frac{\alpha_0 + \text{Re}_t / R_\omega}{1 + \text{Re}_t / R_\omega} \right)$, а для великих чисел Reynolds $\alpha = \alpha_\infty = 1$); $Y_k = \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega$ – дисипативний член для k , Вт/м³;

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0; \\ \frac{1 + 680\chi_k^2}{1 + 400\chi_k^2} & \chi_k > 0; \end{cases} \quad \chi_k = \frac{1}{\omega^3} \nabla k \cdot \nabla \omega, \quad \beta^* = \beta_i^* [1 + \xi^* F(M_t)],$$

$$\beta_i^* = \beta_\infty^* \left[\frac{4/15 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4} \right], \text{ за умови великих чисел Reynolds приймається, що } \beta_i^* = \beta_\infty^*,$$

а для нестисливого середовища – $\beta^* = \beta_i^*$; $Y_\omega = \rho \beta f_\beta \omega^2$ – дисипативний член для ω , кг/(м³·с²); $f_\beta = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega}$, $\chi_\omega = \left| \frac{(\hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}):\hat{\mathbf{S}}}{(\beta_\infty^* \omega)^3} \right|$, $\hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}\nabla)$, с⁻¹,

$$\beta = \beta_i \left[1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \xi_i F(M_t) \right]; F(M_t) = \begin{cases} 0 & M_t \leq M_{t0}; \\ M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0}; \end{cases} \text{ – функція стисливості}$$

середовища, яка використовується для корекції стисливості; $M_t^2 = \frac{2k}{a^2}$ –

турбулентне число Mach, $a = \sqrt{\gamma RT}$ – швидкість звуку, м/с; γ – показник адіабати; S_k , S_ω – джерельні члени для рівнянь k і ω , відповідно; $\tilde{E} = \tilde{h} - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{2}$ – масова повна енергія, Дж/кг; $\tilde{h} = \int_{T_0}^{\tilde{T}} c_p dT$ – масова ентальпія, Дж/кг; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); Pr_t – турбулентне число Prandtl; $\bar{\tau}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \hat{\mathbf{I}}$ – тензор девіаторних напружень, Па; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_v – густина об’ємного джерела теплоти, Вт/м³; $\tilde{T}$ – абсолютна температура, осереднена за Favre, К.

Коефіцієнти $k - \omega$ – моделі турбулентності (11.16):

$$\alpha_\infty^* = 1; \alpha_\infty = 0,52; \alpha_0 = \frac{1}{9}; \beta_\infty^* = 0,09; \beta_i = 0,072; R_\beta = 8; \xi^* = 1,5; \quad (11.17)$$

$$R_k = 6; R_\omega = 2,95; M_{t0} = 0,25; \sigma_k = 2,0; \sigma_\omega = 2,0.$$

За початкові умови приймаються умови (11.12), а за граничні – (11.13)–(11.15).

11.2.5. Модель турбулентності Spalart-Allmaras

На відміну від розглянутих моделей турбулентності з двома скалярними рівняннями в моделі турбулентності Spalart-Allmaras використовується одне скалярне рівняння транспорту турбулентної кінетичної в’язкості виду

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\nu})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\nu} \mathbf{v}) = G_v + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \nabla \cdot [(\mu + \bar{\rho} \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \bar{\rho} (\nabla \tilde{\nu})^2 - Y_v, \quad (11.18)$$

де $\tilde{\nu}$ – кінематична турбулентна, в’язкість, м²/с; $G_v = C_{b1} \bar{\rho} \tilde{S} \tilde{\nu}$ – джерело в’язкості, Па; $\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$; $S = \sqrt{2 \hat{\boldsymbol{\Omega}} : \hat{\boldsymbol{\Omega}}}$ – середнє значення тензору завихреності, с⁻¹; $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}} \nabla)$ – тензор завихреності потоку, с⁻¹; d – відстань до стінки, м; $f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$; $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}$ – функція згасання для

в'язкості; $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$; ν – молекулярна кінематична в'язкість, м²/с; $Y_v = C_{w_1} \rho f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$ – деструкція турбулентної кінетичної в'язкості поблизу стінок, Па;

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w_3}^6}{g^6 + C_{w_3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}; \quad g = r + C_{w_2} (r^6 - r); \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{S \kappa^2 d^2}; \quad C_{b_1}, C_{b_2}, C_{v_1}, \kappa, C_{w_1}, C_{w_2}, C_{w_3},$$

$\sigma_{\tilde{\nu}}$ – константи.

Константи рівняння (11.18)

$$C_{b_1} = 0,1355; \quad C_{b_2} = 0,622; \quad C_{v_1} = 7,1; \quad \kappa = 0,4187; \\ C_{w_1} = \frac{C_{b_1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b_2})}{\sigma_{\tilde{\nu}}}; \quad C_{w_2} = 0,3; \quad C_{w_3} = 2,0; \quad \sigma_{\tilde{\nu}} = \frac{2}{3}. \quad (11.19)$$

Турбулентна динамічна в'язкість моделі турбулентності Spalart-Allmaras визначається за формулою

$$\mu_t = \bar{\rho} \tilde{\nu} f_{v_1}. \quad (11.20)$$

11.3. Моделі турбулентності LES

Як відомо (див. підрозділ 11.1), турбулентні потоки характеризуються вихорами, які мають широкий діапазон масштабів довжини і часу. Найбільші з цих вихорів, як правило, зіставляються з характерним масштабом довжини усередненої течії, наприклад з товщиною зсувного шару. При цьому найменші масштаби відповідають дисипації турбулентної кінетичної енергії k .

Для визначення всього спектру масштабів турбулентності від великих до самих маленьких можна застосовувати DNS-модель, але при цьому вимоги до обчислювальних ресурсів зростають пропорційно Re_t^3 , де Re_t – турбулентне число Reynolds. Одним із способів вирішення цієї проблеми є застосування LES-модель.

В LES великі вихорі вирішуються прямо, а маленькі моделюються за допомогою підсіткових моделей турбулентності. Тому, з точки зору визначення масштабів турбулентних вихорів, LES знаходиться поміж DNS і RANS моделей.

Доцільність застосування моделі LES можна обґрунтувати наступними чинниками:

- імпульс, маса, енергія та інші скалярні характеристики потоку переносяться в основному за допомогою вихорів великого масштабу;

- вихорі великого масштабу залежать від геометрії та граничних умов потоку, в той час як малі вихорі менш залежні від геометрії потоку, є ізотропними і тому вважаються універсальними з точки зору моделювання;
- вирішення тільки великого масштабу вихорів в LES дає змогу використовувати більш грубу розрахункову сітку і більші кроки інтегрування за часом порівняно з DNS. Однак, LES порівняно з RANS потребує більш дрібної сітки і моделювання нестационарного процесу течії на протязі досить великого масштабу часу, для того щоб отримати стабільні статистичні характеристики потоку;
- при використанні LES вимоги до обчислювальних ресурсів (пам'ять і процесорний час) приблизно на порядок вищі за RANS у разі розв'язання стаціонарних задач;
- обмеження на застосування LES накладають значення чисел Reynolds у пристінних потоках ($Re \sim 10^4 - 10^5$).

11.3.1. Підсіткові моделі

В результаті операції фільтрації в LES масштабу вихорів масштаб підсіткових напружень лишається невідомим і потребує спеціального моделювання. Зазвичай, моделі підсіткового масштабу турбулентності базуються на гіпотезі Boussinesq, як і в моделях RANS (див. підрозділ 11.2). Підсітковий масштаб турбулентних напружень обчислюється за формулою

$$\hat{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\tau}) \hat{\mathbf{I}} = -2\mu_t \bar{\mathbf{S}}, \quad (11.21)$$

де $\hat{\tau}$ – тензор напружень 2-го рангу, Па; $\text{tr}(\hat{\tau}) = \tau_{kk}$, $k = \overline{1,3}$ – слід тензора напружень, Па; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор 2-го рангу; μ_t – турбулентна в'язкість підсіткового масштабу, Па·с; $\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$ – тензор 2-го рангу швидкості деформації, с⁻¹.

Використовуючи осереднення за Favre фізичного рівняння Нав'є-Стокса, для підсіткового тензора напружень у формі з врахуванням стиснення середовища отримуємо вираз

$$\hat{\tau} = \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}. \quad (11.22)$$

Далі тензор напружень середовища розкладається на дві складові: дівіаторну і кульову або ізотропну, що відповідає статичному тиску.

Девіаторна частина підсіткового тензора напружень записується відповідно до моделі Smagorinsky з врахуванням стисливості середовища

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \hat{\mathbf{I}} = -2\mu_t \left(\hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\mathbf{S}}) \hat{\mathbf{I}} \right) = -2\rho(C_s \Delta)^2 |\hat{\mathbf{S}}| \hat{\mathbf{S}}, \quad (11.23)$$

де $\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}) = S_{kk}$, $k = \overline{1,3}$ – слід тензора швидкості деформації, с^{-1} ; C_s – константа Smagorinsky; $|\hat{\mathbf{S}}| = \sqrt{2\hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}}}$; $\mu_t = \mu_{\text{SGS}} = \rho(C_s \Delta)^2 |\hat{\mathbf{S}}|$ – турбулентна підсіткова в'язкість, $\text{Па}\cdot\text{с}$.

Підсіткові турбулентні потоки скалярних величин визначаються з використанням підсіткового турбулентного числа Prandtl. Так, наприклад, підсіткове значення потоку ентальпії визначається із співвідношення

$$\bar{\rho} \left(\mathbf{v} \tilde{h}_s - \tilde{\mathbf{v}} \tilde{h}_s \right) = - \frac{\mu_{\text{SGS}} c_p}{\text{Pr}_{\text{SGS}}} \nabla \tilde{T}, \quad (11.24)$$

де $\tilde{h}_s$ – масова ентальпія, осереднена за Favre [25], Дж/кг ; μ_{SGS} – підсіткова динамічна в'язкість, $\text{Па}\cdot\text{с}$; Pr_{SGS} – підсіткове турбулентне число Prandtl; c_p – ізобарна масова теплоємність, $\text{Дж}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

11.3.2. Модель Smagorinsky-Lilly

Найпростіша підсіткова модель вперше була запропонована Smagorinsky. В моделі Smagorinsky-Lilly турбулентна в'язкість визначається за формулою

$$\mu_t = \rho L_s^2 |\bar{\mathbf{S}}|, \quad (11.25)$$

де $L_s = \min(\kappa d, C_s, \Delta)$ – довжина шляху перемішування потоку підсіткового масштабу, м ; κ – стала Kármán; d – відстань до найближчої стінки, м ; C_s – стала Smagorinsky; $\Delta = \sqrt[3]{V_{\text{cell}}}$ – лінійний розмір розрахункової комірки, м ; V_{cell} – об'єм розрахункової комірки, м^3 ; $|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2\hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}}}$ – модуль тензора середньої швидкості деформації, с^{-1} .

Підсітковий масштаб напружень за моделлю Smagorinsky-Lilly визначається за формулою (11.21).

11.4. Гібридні моделі турбулентності DES

DES (Detached Eddy Simulation) моделі відносяться до гібридних LES/RANS моделей, що застосовуються для моделювання зовнішньої аеродинаміки за умови великих чисел Reynolds. Моделі DES зазвичай базуються на таких RANS моделях: Spalart-Allmaras з одним рівнянням; realizable $k-\varepsilon$ – моделі і SST $k-\omega$ – моделі турбулентності. При цьому обчислювальні ресурси, що потрібні для реалізації моделей DES є меншими чим LES, але більшими за RANS.

У разі DES моделі, що побудована з використанням realizable $k-\varepsilon$ – моделі турбулентності, дисипативний член у рівнянні для k (11.10) модифікований таким чином

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2 \Rightarrow Y_k = \frac{\rho k^{\frac{3}{2}}}{l_{DES}}, \quad (11.26)$$

де $l_{DES} = \min(l_{rke}, l_{LES})$, м; $l_{rke} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$, м; $l_{LES} = C_{DES}\Delta_{\max}$, м; $C_{DES} = 0,61$ – константа калібрування DES моделі; $\Delta_{\max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ – максимальний локальний крок сітки, м.

В (11.26) $l_{DES}, l_{rke}, l_{LES}$ – є довжина шляху перемішування турбулентних потоків DES, $k-\varepsilon$ і LES моделей.

У випадку, коли $l_{DES} = l_{rke}$, l_{DES} визначається за формулою

$$l_{DES} = l_{rke} - f_d \max(0, l_{rke} - C_{DES}\Delta_{\max}), \quad (11.27)$$

де $f_d = 1 - \tanh[(8r_d)^3]$; $r_d = \frac{v + v_t}{\kappa^2 d \sqrt{\hat{\mathbf{U}} : \hat{\mathbf{U}}}}$; $\kappa = 0,41$; v, v_t – кінематична та кінематична турбулентна в'язкість, відповідно, $\text{м}^2/\text{с}$; d – відстань до найближчої стінки, м; $\hat{\mathbf{U}}$ – тензор швидкості деформації (11.10), с^{-1} .

У разі DES моделі, що побудована на базі SST $k-\omega$ – моделі турбулентності, дисипативний член у рівнянні для k модифікований таким чином

$$Y_k = \rho\beta^* k\omega \Rightarrow Y_k = \rho\beta^* k\omega F_{DES}, \quad (11.28)$$

де $F_{DES} = \max\left(\frac{L_t}{C_{DES}\Delta_{\max}}, 1\right)$; $L_t = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}$ – довжина шляху перемішування турбулентних потоків, що визначається за RANS моделлю, м; $C_{DES} = 0,61$ – константа калібрування DES моделі; $\Delta_{\max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ – максимальний локальний крок сітки, м.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Опишіть три основних групи математичних моделей для описання турбулентних потоків.
2. В чому полягає осереднення фізичних величин за Рейнольдсом і Фаврем?
3. Наведіть систему рівнянь RANS.
4. Опишіть основні класичні підходи для оцінки турбулентної в'язкості.
5. В чому полягає різниця між визначеннями тензора повних напружень і вектора повного теплового потоку в моделях RANS і LES?
6. Запишіть скалярні рівняння стандартної $k - \varepsilon$ моделі турбулентності.
7. Запишіть скалярні рівняння $k - \omega$ моделі турбулентності.
8. Наведіть формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на базі $k - \varepsilon$ моделі турбулентності з врахуванням стисливості в'язкого середовища.
9. Наведіть формулювання задачі тепло-гідродинамічного стану на базі $k - \omega$ моделі турбулентності з врахуванням стисливості в'язкого середовища.
10. Чим характеризується модель турбулентності Spalart-Allmaras.
11. Наведіть моделі турбулентності LES та дайте їх характеристики.
12. Чим спричинюється необхідність у підсіткових моделях.
13. Охарактеризуйте модель Smagorinsky-Lilly.
14. Опишіть гібридні моделі турбулентності DES.

Аксіоматика механіки суцільних середовищ

Основні положення МСС можна представити у вигляді аксіом або найважливіших теорем:

1. *Евклідність простору*. Простір, в якому розглядається рух тіла є тривимірний евклідовий простір E^3 .
2. *Абсолютність часу t* . Плин часу не залежить від вибору системи відліку.
3. *Гіпотеза суцільності*. Матеріальне тіло це суцільне середовище – континуум у просторі E^3 .
4. *Закон збереження маси*. Усяке матеріальне тіло V має скалярну невід’ємну характеристику – масу M , яка: а) не змінюється при будь-яких рухах тіла, якщо тіло складається з одних і тих самих матеріальних частинок; б) маса є адитивною величиною $M(V) = M(V_1) + M(V_2)$, де $V = V_1 + V_2$.
5. *Закон збереження імпульсу* (або зміни кількості руху).
6. *Закон збереження моменту імпульсу* (або зміни моменту кількості руху).
7. *Закон збереження енергії* (або перший закон термодинаміки).
8. *Аксіома про існування абсолютної температури* (або нульовий початок термодинаміки).
9. *Закон балансу ентропії* (або другий закон термодинаміки).

Постановка задач статичної пружності

Система стаціонарних диференціальних рівнянь задачі статичної пружності для ізотропного матеріалу включає рівняння руху і рівноваги, геометричне рівняння – тензор малих деформацій та фізичне рівняння – узагальнений закон Гука:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0; \\ \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}); \\ \hat{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\hat{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\text{tr}}(\hat{\varepsilon}) \right), \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0; \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \\ \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right), \end{array} \right. \quad (\text{Б.1})$$

де $\nabla = \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ – декартові

координати, м ; $(\cdot)$ – оператор скалярного добутку тензорів;

$\hat{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти симетричного тензора напруження другого рангу, Па ;

$\nabla \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot (\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j)) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ –

частинна похідна від тензора напруження (або скалярний добуток оператора Гамільтона на тензор напруження), Па/м ; ρ – густина, кг/м^3 ;

$\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти вектора масових сил, наприклад, гравітаційних, Н/кг ; $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти симетричного тензора

другого рангу пружних деформацій; $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти вектора

переміщень, м ; $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = u_{i,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ – частинна похідна від

вектора переміщення (або тензорний добуток оператора Гамільтона на вектор); E – модуль пружності, Па ; ν – коефіцієнт Пуасона;

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Граничні умови для (Б.1):

– переміщення або защемлення (повинно бути задано хоча б в одній точці на поверхні тіла)

$$\mathbf{u}|_{S_u} = 0 \text{ або } u_i|_{S_u} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{Б.2})$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення, м²;
– симетрії

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{S_{su}} = 0 \text{ або } n_i u_i|_{S_{su}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{Б.3})$$

де $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла, м²;
– зовнішній тиск

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = \mathbf{p} \text{ або } (\sigma_{ij} n_j) n_i|_{S_p} = p, \quad (\text{Б.4})$$

де p – зовнішній тиск, який задано на поверхні S_p , Па;
– зовнішня сила, що прикладена в деякій точці тіла

$$\mathbf{F}_P = \int_{\Delta S_p} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \text{ або } F_i^P = \int_{\Delta S_p} \sigma_{ij} n_j dS, \quad (\text{Б.5})$$

де $\mathbf{F}_P = F_i^P \mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ – компоненти вектора зовнішньої сили в точці P , Н;
 ΔS_p – елементарна площадка поверхні тіла в околі точки P , м²;

Співвідношення для визначення запасу міцності.

Еквівалентні напруження σ_{eqvM} за Мізесом визначаються за формулами:

$$\sigma_{\text{eqvM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}, \quad (\text{Б.6})$$

або

$$\sigma_{\text{eqvM}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (\text{Б.7})$$

де $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ – компоненти тензора напружень, Па; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – компоненти вектора головних напружень, Па.

Запас міцності F_s пластичних матеріалів визначається за формулою

$$F_s = \frac{[\sigma_T]}{\sigma_{eqvM}}, \quad (Б.8)$$

де $[\sigma_T]$ – межа текучості матеріалу, Па; σ_{eqvM} – еквівалентне напруження за Мізесом (Б.6), (Б.7), Па.

Постановка задач термо-в'язко-пружнопластичності

В.1. Квазістатичні рівняння термо-в'язко-пружнопластичності. Початкові та граничні умови

Однією з найбільш загальних моделей непружної поведінки матеріалів є пружно-в'язкопластична модель Перцини. В цій моделі передбачається, що матеріал проявляє в'язкі властивості тільки в пластичній області, а це значить, що при $F < 0$ (тут F – функція текучості) має місце виключно пружний стан. Крім того, умова текучості $F(\sigma_{ij}, h) = \sigma - \sigma_0(h) = 0$ тепер буде представляти лише початкову умову, яка називається тут статичною умовою текучості. Тоді в'язко-пластичний стан виникає за умови

$$F(\sigma_{ij}, h) > 0, \quad (B.1)$$

що неможливо для так званих нереологічних¹ теорій пластичності.

Тут в (B.1) F – функція текучості; σ_{ij} – напруження; $h = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ – параметр пов'язаний з роботою зміцнення, який визначає положення поверхні текучості при статичному навантаженні в 9-и вимірному просторі напружень.

Пластична деформація при одновісному навантаженні для чутливих до швидкості навантаження пластичних тіл визначається швидкістю деформації у вигляді

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \langle \Phi(F / \sigma_0) \rangle, \quad (B.2)$$

де $\dot{\varepsilon}^p$ – швидкість деформації; γ – параметр матеріалу, який може бути функцією часу, температури та ін.; σ_0 – границя пластичності матеріалу при одновісному навантаженні.

Крім того для функції Φ мають місце такі випадки:

$$\langle \Phi(F / \sigma_0) \rangle = 0 \quad \text{коли} \quad F \leq 0, \quad (B.3)$$

¹ РЕОЛОГІЯ (від грецької rheos-течія, потік та logos-слово, вчення), наука, що вивчає деформаційні властивості реальних тіл. Реологія розглядає діючі на тіло механічні напруження і деформації, що спричинені ними, як зворотні, так і незворотні (залишкові). У вузькому розумінні – термін «реологія» іноді відносять тільки до вивчення течії в'язких та пластичних тіл. Об'єктами реології є різноманітні матеріали, наприклад, метали, полімери, композити, гума та ін.

$$\langle \Phi(F/\sigma_0) \rangle \neq 0 \quad \text{коли } F > 0.$$

Тут $\langle \Phi \rangle$ – означає середню величину.

Функція Φ вибирається на основі експериментів і може мати різноманітний вигляд, наприклад:

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= X^n, & \Phi(X) &= \exp(X) - 1, \\ \Phi(X) &= \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} X^{\alpha}, & \Phi(X) &= \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} [\exp(X^{\alpha}) - 1]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

З виразів (B.4) видно, що швидкість наростання непружних деформацій є функцією прирощення напружень відносно статичного критерію текучості. Ця функція вказаних прирощень напружень визначає швидкість в'язко-пластичних деформацій відповідно до попередньо вибраного закону (рівнянням стану), який представлено реологічною моделлю рис. B.1.

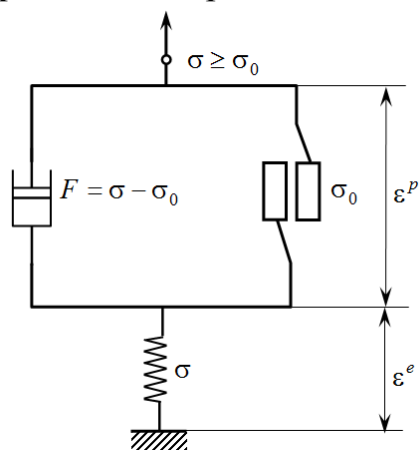


Рис. B.1. Реологічна модель, що описує пружно-в'язко-пластичні властивості середовища (тут σ є скаляром – деяким еквівалентним напруженням)

В цій механічній моделі передбачається, що вузол з тертям здатен витримати напруження σ впритул до $\sigma = \sigma_0$, після чого при $\sigma > \sigma_0$ у вузлі виникає проковзування. Коли це відбувається, прирощення напружень $\sigma - \sigma_0$ сприймається демпфером (який може мати нелінійну характеристику), що породжує в'язко-пластичну деформацію. Пружна частина повної деформації створюється пружною пружиною.

Слід зазначити, що в загальному випадку демпфер та вузол тертя можуть мати властивості, які залежать від в'язко-пластичної деформації зі зміцненням ($H' \neq 0$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що визначає залежність напружень від деформації при одновісному розтягуванні). Таким чином, через деякий час при дії постійного напруження механізм з тертям стає

знову жорстким та при виконанні статичного критерію текучості знову відновлюється асимптотична статична конфігурація ($\varepsilon^p = 0$).

Для того щоб показати еквівалентність реологічної моделі (див. рис. В.1) і виразу (В.2), розглянемо умову рівноваги у разі $\sigma \geq \sigma_0$

$$\sigma = F + \sigma_0, \quad (\text{В.5})$$

де F – напруження, що сприймається демпфером; σ_0 – частина напруження, що відноситься до механізму тертя. Напруження у в'язкому демпфері пов'язано зі швидкістю в'язко-пластичної деформації співвідношенням

$$F = \mu \dot{\varepsilon}^p = \mu (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e), \quad (\text{В.6})$$

Підставляючи вираз (В.6) у рівність (В.5), отримуємо

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \frac{1}{\mu} (\sigma - \sigma_0), \quad (\text{В.7})$$

Оскільки швидкість повної деформації дорівнює

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p, \quad (\text{В.8})$$

із виразу (В.7) маємо, що

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\mu} (\sigma - \sigma_0). \quad (\text{В.9})$$

Цей вираз буде відповідати (В.2), якщо покласти, що

$$\mu = \frac{\sigma_0}{\gamma}, \quad \Phi(F / \sigma_0) = F / \sigma_0. \quad (\text{В.10})$$

Розглянемо деякі аналітичні розв'язки рівняння (В.7). Для спрощення покладемо, що $H' = 0$ ($\sigma_0 = \sigma_{\text{yield}}$), використовуючи модель одновісного розтягу-стискання і те, що навантаження відповідає постійній повній швидкості деформації. Тоді рівняння (В.7) приймає вигляд

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\gamma}{\sigma_{\text{yield}}} (\sigma - \sigma_{\text{yield}}), \quad (\text{В.11})$$

звідки отримуємо наступне лінійне диференціальне рівняння

$$\dot{\sigma} + \frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}} = E(\dot{\varepsilon} + \gamma), \quad (\text{B.12})$$

де $\dot{\varepsilon} = \text{const}$; E – модуль пружності під час одновісного розтягу/стискання.
Розв'язок (B.2) має вид

$$\sigma = \sigma_{\text{yield}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma} + 1 \right) + C \exp \left(- \frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}} t \right), \quad (\text{B.13})$$

де t – час; C – постійна інтегрування, яка залежить від початкових умов.

Якщо при $t = 0$ маємо $\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{E}$ і $\varepsilon^p = 0$, то для напружень отримуємо вираз

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{yield}} \dot{\varepsilon}}{\gamma} \left[1 - \exp \left(- \frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}} t \right) \right] + \sigma_{\text{yield}}, \quad (\text{B.14})$$

яке можна представити як функцію не часу, а деформації

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{yield}} \dot{\varepsilon}}{\gamma} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\gamma}{\dot{\varepsilon}} \left(1 - \frac{E \varepsilon}{\sigma_{\text{yield}}} \right) \right] \right\} + \sigma_{\text{yield}}. \quad (\text{B.15})$$

З іншого боку, можна припустити, що в початковий момент виникає деформація $\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{E} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma} + 1 \right)$, а потім повна деформація збільшується з постійною швидкістю. В цьому випадку приведений вище вираз спрощується і напруження стає постійним

$$\sigma = \sigma_{\text{yield}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma} + 1 \right). \quad (\text{B.16})$$

Цей випадок показаний на рис. B.2.

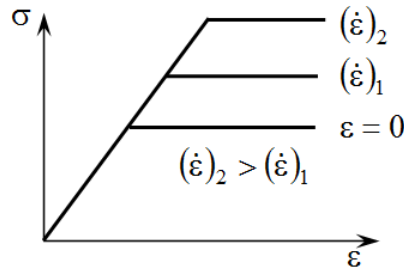


Рис. В.2. Діаграма напруження-деформації при одновісному розтягу/стисканні, коли

$$\dot{\varepsilon} = \text{const} \quad (\text{при } t = 0 \text{ миттєво прикладається деформація } \varepsilon = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{E} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma} + 1 \right))$$

В.2. Різниця між нереологічною теорією пластичності і теорією в'язко-пластичності

У випадку чистої пластичності критерій текучості $F(\sigma^{ij}, h) = 0$ дає необхідну умову виникнення пластичної поведінки середовища. Як тільки точка, що характеризує напружений стан, буде задовольняти умові $F = 0$, можна визначити умову навантаження ($H' > 0$), яка залежить від того, що відбудеться потім, а саме при $\dot{\sigma} < 0$, має місце розвантаження (пружне деформування), а при $\dot{\sigma} > 0$ – навантаження (пружнопластичне деформування). Однак, для в'язко-пластичних матеріалів має місце випадок $F > 0$, і тому ці матеріали будуть проявляти свою в'язко-пластичну поведінку в незалежності від умов $\dot{\sigma} > 0$ або $\dot{\sigma} < 0$.

Цікавою особливістю пружно-в'язко-пластичної моделі є те, що при повільному збільшенні навантаження отримуємо результати, що відповідають класичній теорії пластичності (за умови, що можливий статичний стан $F = 0$). У даному випадку функція Φ та параметр γ стають несуттєвими, причому останній буде скалярним коефіцієнтом при часі, перетворюючи час на фіктивну змінну величину. Цю особливість можна легко пояснити, переписавши вираз (В.2) у вигляді ($F \geq 0$)

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \Phi(F / \sigma_0), \quad (\text{В.17})$$

що можна представити в наступних еквівалентних формах:

$$F = \sigma_0 \Phi^{-1}(\dot{\varepsilon}^p / \gamma), \quad (\text{В.18})$$

$$F = \sigma_0 \Phi^{-1}\{\dot{\varepsilon} - (\dot{\sigma} / E)\} / \gamma. \quad (\text{В.19})$$

Підчас повільного крокового процесу навантаження швидкість стає нехтовно малою на шляху навантаження, тому всюди наближено виконується умова $F = 0$.

В.3. Розв'язуючі рівняння термо-в'язко-пружнопластичності

Розглянемо основні диференціальні рівняння для непружного суцільного середовища. При цьому будемо застосовувати запис рівнянь через швидкості (аналогічно до задач пластичності). Згідно з теорією малих пружнопластичних деформацій, повна швидкість деформації $\dot{\epsilon}_{ij}$ непружного середовища може бути записана у формі

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e - \dot{\epsilon}_{ij}^a, \quad (\text{B.20})$$

де $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ і $\dot{\epsilon}_{ij}^a$ – пружна та непружна частини тензора деформації повної швидкості деформації, відповідно; $\dot{u}_i$ – швидкість переміщення. Тут під непружними деформаціями розуміється будь-якого виду поле деформацій, які можна розглядати як початкові деформації, а саме

$$\dot{\epsilon}_{ij}^a = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^c + \dot{\epsilon}_{ij}^T + \dot{\epsilon}_{ij}^I, \quad (\text{B.21})$$

де $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ – швидкість пластичної або в'язко-пластичної деформації; $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ – швидкість, що обумовлена повзучістю; $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ – швидкість температурної деформації; $\dot{\epsilon}_{ij}^I$ – швидкість початкової деформації, що обумовлена різними іншими причинами.

Рівняння руху і рівноваги також записується через швидкості

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0, \quad (\text{B.22})$$

де $\dot{\sigma}_{ij}$ – компоненти тензора напружень; $\dot{f}_i$ – компоненти вектора об'ємних сил.

Рівняння (B.22) справедливе для внутрішніх точок середовища. Умова рівноваги для граничної поверхні тіла записана через швидкості має вигляд

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{p}_i, \quad (\text{B.23})$$

де n_j – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Якщо непружні деформації розглядати як початкові, то застосування закону Гука до пружної частини тензора швидкості повної деформації дає наступні вирази для компонент швидкості деформації

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^a) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^a)\delta_{ij}, \quad (\text{B.24})$$

де G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; $\dot{\epsilon}_{kk}^a$ – швидкість непружної об'ємної деформації; δ_{ij} – символ Кронекера.

Вираз (B.24) можна переписати через початкові напруження

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a, \quad (\text{B.25})$$

де $\dot{\sigma}_{ij}^a$ – компоненти тензора початкових напружень, які виражаються співвідношенням

$$\dot{\sigma}_{ij}^a = 2G\dot{\epsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}^a\delta_{ij}. \quad (\text{B.26})$$

Підставляючи вираз (B.24) в рівняння рівноваги (B.22), з врахуванням виразів (B.23) і тензора малих деформацій (B.20), отримуємо:

$$\dot{u}_{j,ii} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{i,ij} = 2\left(\dot{\epsilon}_{ij,i}^a + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk,j}^a\right) - \frac{\dot{f}_j}{G}, \quad (\text{B.27})$$

$$\dot{p}_i + 2G\left(\dot{\epsilon}_{ij}^a n_j + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}^a n_i\right) = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{i,i}n_i + G(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,t})n_j. \quad (\text{B.28})$$

Рівняння (B.27) є розширеною формою рівняння Нав'є, а співвідношення (B.28) описує граничні умови в напруженнях. Інша форма записаних вище рівнянь і граничних умов має вигляд:

$$\dot{u}_{j,ii} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{i,ij} = -\frac{\dot{f}_j}{G}, \quad (\text{B.29})$$

$$\dot{p}_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{i,i}n_i + G(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,t})n_j. \quad (\text{B.30})$$

де $\dot{\tilde{f}}_j$ і $\dot{\tilde{p}}_i$ є псевдооб'ємними силами та псевдозусиллями:

$$\dot{\tilde{f}}_j = \dot{f}_j - 2 \left(\dot{\varepsilon}_{ij,i}^a + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}_{kk,j}^a \right) = \dot{f}_j - \dot{\sigma}_{ij,i}^a, \quad (\text{B.31})$$

$$\dot{\tilde{p}}_i = \dot{p}_i + 2G \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^a n_j + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}_{kk}^a n_i \right) = \dot{p}_i + \dot{\sigma}_{ij}^a n_j. \quad (\text{B.32})$$

Рівняння (B.29) визначає систему трьох квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно швидкостей переміщень (тому, що складові обумовлені непружною поведінкою середовища, знаходяться в правій частині рівняння).

Для визначення поля температур в задачі *термо-в'язко-пружнопластичності* використовується рівняння енергії виду

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \hat{\sigma} : \dot{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + q_v. \quad (\text{B.33})$$

Початкові умови включають розподіл температур та припущення непружних напружень або деформацій середовища:

$$\begin{cases} T_a = \varphi_T(\mathbf{x}); \\ \dot{\sigma}_a^{ij} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \vee \dot{\varepsilon}_a^{in} = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Граничні умови для (B.29) окрім зусиль (B.30) також можуть включати швидкість переміщень

$$\dot{\mathbf{u}} = 0; \quad (\text{B.35})$$

Теплові умови на границі середовища
– температурні

$$T = T_b; \quad (\text{B.36})$$

конвективні або тепловий потік

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = \alpha (T - T_p) \vee \mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_n. \quad (\text{B.37})$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М. : Мир. — 1974. — 319 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды : монография / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1973. — Т.1,2. — 584, 492 с.
3. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды / Л. И. Седов. — М. : Изд-во физ-мат. лит., 1962. — 284 с.
4. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды — М. : МГУ, 1978. — 286 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1,2 / Под. ред. М. Э. Эглит. — М. : «Московский Лицей», 1996. — с. 396, 394.
6. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И. С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контонта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с.
7. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Корнейчука Л. Г. ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.
8. Poinsoth T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsoth, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.
9. Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD / David C. Wilcox. — 1st ed. — California : DCW Industries, Inc, 1993. — 460 p.
10. Механіка суцільних середовищ — 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках: Текст лекцій для студентів спеціальностей 7.05050315, 8.05050315—«Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: О. С. Сахаров, А. Я. Карвацький — К. : НТУУ «КПІ», 2013. — 231 с. (Свідцтво про електронну публікацію ІХФ № Х 10/13-88). — Електронні текстові дані (1 файл: 1,55 Мбайт). — Київ : НТУУ «КПІ», 2013. — 231 с. — Назва з екрана. — Доступ : <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/4161>.
11. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів [Текст]: навч. посіб. / А. Я. Карвацький — К. : НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. — 392 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 4 від 12.05.2015 р.).
12. Карвацький А. Я. Механіка суцільних середовищ. Розв'язання задач [Текст]: навч. посіб. / А. Я. Карвацький — К.: НТУУ «КПІ» Вид-во «Політехніка», 2016. — 392 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 5 від 11.04.2016 р.).
13. Безухов Н. И. Сборник задач по теории упругости и пластичности / Н. И. Безухов. — М. : Госизд-во теоретико-технической лит-ры, 1957. — с. 286.
14. Жермен П. Курс механики сплошных сред — М. : Высшая школа. 1983 — 399 с.
15. Техническая термодинамика / Под общ. ред. Кругова В. И. — М. : Выс. школа. — 1971. — 472 с.
16. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. — М. : Мир, 1976. — 669 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2,6,7. — М., 1985.
18. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — К. : Наукова думка, 1970. — 307 с.
19. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
20. Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. — Харьков : изд-во Харьковского ун-та, 1964. — 484 с.
21. Механики сплошных сред. Лекции. (Университетский курс общей физики) /

В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. — М. : изд-во Физического фак-та МГУ, 1998. — 98 с.

22. *Георгиевский Д. В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел / Д. В. Георгиевский. М. : «УРСС», 1998. — 176 с.

23. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. — К. : «Наукова думка», 1972. — 508 с.

24. *Mathematical Model of Solid-Fuel Gasification in a Fluidized Bed* / E. N. Panov, A. Ya. Karvatskii, T. B. Shilovich, T. V. Lazarev, A. S. Moroz // *Chemical and Petroleum Engineering*. — 2014. — Vol. 50, Nos. 5–6. — P. 312—322.

25. *Anderson J. D.* Fundamentals of Aerodynamics / John D. Anderson. — New York : McGraw-Hill, 1991. — 772 p.

26. *Hinze J. O.* Turbulence / J. O. Hinze. — 2nd ed. — New York : McGraw-Hill Publishing Co., 1975. — 790 p.

27. *Андерсон Д.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен : в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Тинненхилл, Р. Плетчер ; пер. с англ. под ред. С. В. Сенина, Е. Ю. Шельмана. — М. : Мир, 1990. — Т. 1. — 1990. — 384 с. — Т. 2. — 1990. — 392 с.

28. *Математичне моделювання та експериментальні дослідження складного теплообміну при рості кристалів [Текст] : моногр.* / В. І. Дешко, А. Я. Карвацький, Ю. В. Лохманець та ін. // Серія: Стан та перспективи розвитку функціональних матеріалів для науки і техніки / Під ред. Гриньова Б. В. — Харків : НАНУ Інститут сцинтиляційних матеріалів, 2012. — 248 с.

29. *Grinstein F.* Implicit Large Eddy Simulation / F. Grinstein, L. Margolin, W. Rider. — New York : Cambridge University Press, 2007.

30. *A New $k - \varepsilon$ Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows-Model Development and Validation* / T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu // *Computers Fluids*. — 1995. — Vol. 24, No. 3. — P. 227—238.

31. *Menter F.* Ten Years of Experience with the SST Turbulence Model / F. Menter, M. Kuntz, R. Langtry // In: *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4* (Editors K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers). — Begell House Inc., 2003. — P. 625—632.

32. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations / J. Smagorinsky // *Mon. Wea. Rev.* — 1963. — Vol. 91. P. 99—164.

33. *Gaudio R.* Nonuniversality of von Kármán's κ in fluvial streams / R. Gaudio, R. Miglio, S. Dey // *Journal of Hydraulic Research*. — 2010. — Vol. 48, No. 5. — P. 658—663.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ	5
1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕНЗОРНОГО ЧИСЛЕННЯ	11
1.1. Тензори і механіка суцільного середовища	11
1.2. Тензори. Декартові тензори. Ранг тензора	11
1.3. Вектори і скаляри	12
1.4. Векторне додавання. Множення вектора на скаляр	13
1.5. Скалярний і векторний добуток векторів	14
1.6. Діади і діадики	16
1.7. Системи координат. Базисні вектори. Трієдр одиничних векторів	19
1.8. Лінійні векторні функції. Діадики як лінійні векторні оператори	23
1.9. Індексні позначення. Інтервал зміни індексів і погодження про підсумовування	24
1.10. Погодження про підсумовування у символічних позначеннях	26
1.11. Перетворення координат. Загальне поняття тензора	28
1.12. Метричний тензор. Декартові тензори	30
1.13. Закони перетворення декартових тензорів. Дельта Кронекера. Умови ортогональності	31
1.14. Додавання декартових тензорів. Множення тензора на скаляр	35
1.15. Добуток тензорів	35
1.16. Векторний добуток. Тензор Леві-Чивіті. Бівектор	38
1.17. Матриці. Матричні представлення декартових тензорів	39
1.18. Симетрія диадиків, матриць і тензорів	42
1.19. Головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу	44
1.20. Ступені тензорів другого рангу. Співвідношення Гамільтона-Келі	46
1.21. Тензорні поля. Диференціювання тензорів	47
1.22. Кривопінійні інтеграли. Теорема Стокса	49
1.23. Теорема Гауса-Остроградського	51
Запитання і завдання для самоконтролю	51
2. НАПРУЖЕНИЙ СТАН.....	53
2.1. Поняття суцільного середовища	53
2.2. Однорідність. Ізотропність. Густина.....	53
2.3. Масові сили. Поверхневі сили	54
2.4. Принцип напруження Коші. Вектор напруження	54
2.5. Напружений стан в точці. Тензор напруження	56
2.6. Зв'язок між тензором напруження і вектором напруження	59
2.7. Рівновага сил і моментів. Симетрія тензора напруження	61
2.8. Закони перетворення тензора напруження	63
2.9. Поверхні напруження Коші.....	65
2.10. Головні напруження. Інваріанти тензора напруження. Еліпсоїд напружень	66
2.11. Максимальне і мінімальне дотичне напруження	68
2.12. Круги Мора для напруження.....	71
2.13. Плоский напружений стан.....	75
2.14. Девіатор та кульовий тензор напруження.....	77
Запитання і завдання для самоконтролю	78

3. ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН	79
3.1. Частинки і точки	79
3.2. Конфігурація суцільного середовища. Деформація і течія	79
3.3. Радіус-вектор. Вектор переміщення	79
3.4. Лагранжевий і ейлерів опис руху	82
3.5. Градієнти деформації. Градієнти переміщення	83
3.6. Тензори деформацій. Тензори скінченних деформацій	86
3.7. Теорія малих деформацій. Тензори нескінченно малих деформацій	89
3.8. Відносне переміщення. Тензор лінійного повороту. Вектор повороту	90
3.9. Геометричний зміст тензорів лінійних деформацій	93
3.10. Коефіцієнт довжини. Інтерпретація скінченних деформацій	96
3.11. Тензори коефіцієнтів довжини. Тензор повороту	98
3.12. Властивості перетворення тензорів деформацій	99
3.13. Головні деформації. Інваріанти деформації. Об'ємне розширення	101
3.14. Кульовий тензор і девіатор деформацій	104
3.15. Плоска деформація. Круги Мора для деформації	104
3.16. Рівняння сумісності для лінійних деформацій	106
Запитання і завдання для самоконтролю	107
4. РУХ І ТЕЧІЯ	109
4.1. Рух. Течія. Матеріальна похідна	109
4.2. Швидкість. Прискорення. Миттєве поле швидкості	112
4.3. Траєкторії. Лінії току. Усталений рух	113
4.4. Швидкість деформації. Завихреність. Прирошення деформації	113
4.5. Фізична інтерпретація тензорів швидкості деформації і завихреності	114
4.6. Матеріальні похідні від елемента об'єму, елемента поверхні і лінійного елемента	117
4.7. Матеріальні похідні від інтегралу по об'єму, інтегралу по поверхні і лінійного інтегралу	119
Запитання і завдання для самоконтролю	122
5. ОСНОВНІ ЗАКОНИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА	123
5.1. Закон збереження маси. Рівняння нерозривності	123
5.2. Теорема про зміну кількості руху. Рівняння руху. Рівняння рівноваги	124
5.3. Теорема про зміну моменту кількості руху	126
5.4. Закон збереження енергії. Перший закон термодинаміки. Рівняння енергії	127
5.5. Рівняння стану. Ентропія. Другий закон термодинаміки	130
5.6. Нерівність Клаузіуса-Дюгема. Дисипативна функція	131
5.7. Визначальні рівняння. Термомеханічний і механічний континууми	133
Запитання і завдання для самоконтролю	135
6. ЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ	136
6.1. Узагальнений закон Гука. Функція енергії деформації	136
6.2. Ізотропні та анізотропні середовища. Симетрія пружних властивостей	139
6.3. Ізотропне середовище. Пружні сталі	141
6.4. Постановка статичних і динамічних задач теорії пружності	142
6.5. Теорема про суперпозицію. Єдиність розв'язків. Принцип Сен-Венана	145
6.6. Плоскі задачі теорії пружності. Плоский напружений стан і плоска деформація	145
6.7. Функції напруження Ермі	148
6.8. Двовимірні статичні задачі теорії пружності у полярних координатах	149
6.9. Гіперпружність. Гіпопружність	150

6.10. Лінійна термопружність	151
Запитання і завдання для самоконтролю	154
7. МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ.....	155
7.1. Тиск рідини. Тензор в'язких напружень. Баротропна течія.....	155
7.2. Визначальні або фізичні рівняння. Стоксові рідини. Ньютонівські рідини.....	156
7.3. Основні рівняння ньютонівської рідини. Рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема	159
7.4. Усталена течія. Гідростатика. Безвихрова течія.....	161
7.5. Ідеальна рідина. Рівняння Бернуллі. Циркуляція.....	163
7.6. Потенціальна течія. Плоска потенціальна течія.....	165
7.7. Основні рівняння для неньютонівської рідини	166
7.8. Моделі дилатантних (комполитних) речовин. Постановка задачі тепло-гідродинамічного стану рідини типу Bingham-Papanastasiou	167
Запитання і завдання для самоконтролю	171
8. ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ	172
8.1. Основні положення та визначення	172
8.2. Ідеалізовані діаграми пластичної поведінки.....	174
8.3. Умови пластичності. Критерії Треска та Мізеса	175
8.4. Простір напруження. П-площина. Поверхня плинності.....	178
8.5. Поведінка матеріалу за межею плинності. Ізотропне і кінематичне зміцнення	180
8.6. Співвідношення між напруженнями і деформаціями в пластичному стані. Теорія пластичного потенціалу.....	182
8.7. Еквівалентне напруження. Еквівалентне прирощення пластичної деформації.....	183
8.8. Робота на пластичних деформаціях. Гіпотези зміцнення.....	184
8.9. Співвідношення інкрементарної теорії пластичності для середовища з ізотропним зміцненням	186
8.10. Деформаційна теорія пластичності.....	189
8.11. Задачі пружно-пластичності.....	190
8.12. Алгоритм розв'язання задачі пластичності з використанням методів Ейлера і Ньютона	191
8.13. Елементарна теорія ліній ковзання під час плоскої пластичної деформації	195
Запитання і завдання для самоконтролю	198
9. ЛІНІЙНА В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ	200
9.1. В'язкопружна поведінка матеріалу	200
9.2. Найпростіші механічні моделі в'язкопружної поведінки	200
9.3. Узагальнені моделі. Лінійне диференціальне операторне рівняння	203
9.4. Повзучість і релаксація	205
9.5. Функції повзучості та релаксації. Інтеграли спадковості.....	207
9.6. Комплексні модулі та піддатливість	211
9.7. Тривимірна теорія лінійної в'язкопружності	213
9.8. Аналіз в'язкопружного напруженого стану. Принцип відповідності.....	214
Запитання і завдання для самоконтролю	217
10. РІВНЯННЯ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ ТЕЧІЙ РЕАГУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩ	218
10.1. Загальні положення	218
10.1.1. Вибір вихідних змінних.....	218
10.1.2. Рівняння збереження імпульсу	232
10.1.3. Рівняння збереження маси та компонентів реакцій	232
10.1.4. Швидкість дифузії: точні рівняння та наближення.....	233
10.1.5. Рівняння збереження енергії	236

10.2. Спрощені форми рівняння енергії	242
10.2.1. Сталій тиск полум'я.....	242
10.2.2. Рівність теплоємності для всіх компонентів реакції	244
10.2.3. Постійна теплоємність суміші	245
10.3. Підсумкові рівняння збереження	246
10.4. Постановка задачі тепло-гідродинамічного стану реагуючого середовища підчас згоряння природного газу без попереднього змішування	248
Запитання і завдання для самоконтролю	254
11. МОДЕЛІ ТУРБУЛЕНТНОСТІ	256
11.1. Математичні моделі для числового моделювання турбулентних потоків	256
11.2. Моделі турбулентності RANS	260
11.3. Моделі турбулентності LES	267
11.4. Гібридні моделі турбулентності DES	270
Запитання і завдання для самоконтролю	271
Додаток А. Аксиоматика механіки суцільних середовищ	272
Додаток Б. Постановка задач статичної пружності.....	273
Додаток В. Постановка задач термо-в'язко-пружнопластичності	276
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ	284

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Навчальний посібник

В авторській редакції