КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шурыгин В.В.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ III.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть III.
Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка.

Казань — 2007

1 Аффинное пространство.

Определение. *Аффинным пространством размерности* n *над полем* $\mathbf{R}$ *вещественных чисел называется тройка* $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$, *состоящая из некоторого множества* $\mathcal{A}_n$, *элементы которого называются точками, векторного пространства* $\mathbf{V_n}$ *и отображения* $\psi : \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n \to \mathbf{V}_n$, *относящего упорядоченной паре точек* $\{A, B\}$ *множества* $\mathcal{A}_n$ *некоторый вектор из* $\mathbf{V}_n$, *обозначаемый* $\overrightarrow{AB}$, *такого, что выполняются следующие две аксиомы*:

1°. *Для любых* $A \in \mathcal{A}_n$ *и* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ *существует единственная точка* B *такая, что* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

2°. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *для любых* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *(равенство треугольника).*

Для обозначения аффинного пространства будем использовать один символ $\mathcal{A}_n$. Векторное пространство $\mathbf{V}_n$ называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$.

Из определения аффинного пространства легко выводятся следующие два соотношения:

1) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Для их доказательства достаточно записать равенство треугольника 2° сначала при $B = C = A$, а затем при $C = A$.

Примеры:

1. Пусть $\mathbf{V}_n$ — произвольное векторное пространство размерности n. Положим

$$\psi : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \longmapsto \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbf{V}_n.$$

Тройка $(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ является аффинным пространством.

2. В частности, взяв арифметическое (числовое) векторное пространство $\mathbf{R}^n$, получим арифметическое аффинное пространство $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \psi)$, обозначаемое для краткости просто $\mathbf{R}^n$.

1.1 Плоскости в аффинном пространстве.

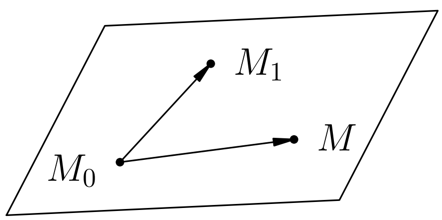
Определение. *Пусть* $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, *— подпространство в вектор-*

ном пространстве $\mathbf{V}_n$, ассоциированном с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$. Плоскостью размерности m (m-плоскостью) в $\mathcal{A}_n$ с направляющим подпространством $\mathbf{L}_m$, проходящей через точку M_0, называется следующее подмножество в $\mathcal{A}_n$:

$$\pi = \{M \in \mathcal{A}_n \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{L}_m\}. \tag{1}$$

Обозначать m-плоскость (1) будем следующим образом: $\{M_0, \mathbf{L}_m\}$.

Предложение. *Пусть задана m-плоскость $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ и $M_1 \in \pi$. Тогда $\{M_1, \mathbf{L}_m\} = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$, т. е., m-плоскость π с направляющим подпространством $\mathbf{L}_m$ однозначно определяется любой своей точкой.*



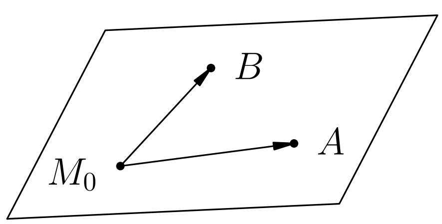
Доказательство. $M \in \{M_1, \mathbf{L}_m\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_1M} \in \mathbf{L}_m \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M} \in \mathbf{L}_m$ (так как $\overrightarrow{M_0M_1} \in \mathbf{L}_m$ и $(\mathbf{V}_n, +)$ — группа по сложению) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{L}_m \Longleftrightarrow M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\}$. $\square$

Предложение. *Пусть $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ — m-плоскость в аффинном пространстве $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ и $\psi_\pi = \psi|\pi \times \pi : \pi \times \pi \to \mathbf{V}_n$. Тогда*

1) $\psi_\pi(\pi \times \pi) \subset \mathbf{L}_m$ и, следовательно, $\psi_\pi : \pi \times \pi \to \mathbf{L}_m$.

2) Тройка $(\pi, \mathbf{L}_m, \psi_\pi)$ — аффинное пространство размерности m.

Доказательство. 1) Пусть $A, B \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B} \in \mathbf{L}_m \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A} \in \mathbf{L}_m$.



2) Пусть $A \in \pi$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_m$. Тогда существует (по аксиоме 1°) единственная точка $B \in \mathcal{A}_n$ такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$. Но $\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}_m \Longrightarrow B \in \pi$. Таким образом, аксиома 1° выполняется для π. Аксиома 2° выполняется для точек, принадлежащих плоскости π, поскольку она выполняется для всех точек аффинного пространства $\mathcal{A}_n$. $\square$

Определение. *Подмножество $\pi \subset \mathcal{A}_n$ такое, что для некоторого $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$ тройка $(\pi, \mathbf{L}_m, \psi_\pi)$ является аффинным пространством, называется m-мерным подпространством в $\mathcal{A}_n$.*

Из доказанного выше предложения следует, что m-мерными подпространствами в $\mathcal{A}_n$ являются m-плоскости этого пространства и только они.

Замечание. В определении m-плоскости размерность m принимает значения $m = 0, 1, \ldots, n$. При этом, 0-плоскость в $\mathcal{A}_n$ (0-мерное аффинное подпространство)— это точка, 1-плоскость называется *прямой*, $(n-1)$-плоскость называется *гиперплоскостью*, n-плоскость совпадает со всем пространством $\mathcal{A}_n$.

Способы задания m-плоскостей. В зависимости от того, как задано подпространство $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$, получаем следующие два основных способа задания m-плоскости $\pi = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$:

1. Пусть $\mathbf{L}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, где $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ — базис в $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M \in \mathcal{A}_n$, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0. Тогда $M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ $\Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, $\Longleftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha \Longleftrightarrow$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha. \tag{2}$$

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ задана аффинная система координат, определяемая репером $\{O, \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда уравнение (2) эквивалентно системе уравнений

$$x^i = x_0^i + t^\alpha a_\alpha^i, \tag{3}$$

где $\mathbf{a}_\alpha = a_\alpha^i \mathbf{e}_i$, которая в матричной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} + \ldots + t^m \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix}. \tag{3$'$}$$

Уравнения (2) и (3) называются *параметрическими уравнениями.*

В частности, прямая ℓ пространства $\mathcal{A}_n$ задается уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x_0^i + ta^i. \tag{4}$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется направляющим вектором прямой ℓ.

Замечание. Если точка M принадлежит m-плоскости π, имеющей параметрическое уравнение (2), то ее радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + t_M^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. При этом числа $\{t_M^\alpha\}$ являются координатами точки M в аффинном пространстве π относительно репера $\{M_0, \mathbf{a}_\alpha\}$. Эти координаты $\{t_M^\alpha\}$ называются *внутренними* координатами точки M.

2. Пусть $\mathrm{Ann}(\mathbf{L}_m) = \mathcal{L}\{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^{n-m}\}$, где $\{\widetilde{\mathbf{b}}^a\}$, $a = 1, \ldots, n-m$, — базис в $\mathrm{Ann}(\mathbf{L}_m)$. Тогда $M \in \{M_0, \mathbf{L}_m\} \Longleftrightarrow$

$$\widetilde{\mathbf{b}}^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m. \tag{5}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{b}}^a = b_i^a \widetilde{\mathbf{e}}^i$, где $\{\widetilde{\mathbf{e}}^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — базис в $\mathbf{V}_n^*$, сопряженный базису $\{\mathbf{e}_i\}$. Тогда система уравнений (5) эквивалентна следующей:

$$b_i^a(x^i - x_0^i) = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m. \tag{6}$$

Раскрывая скобки в (6), получаем систему линейных уравнений

$$b_i^a x^i + b_{n+1}^a = 0, \quad a = 1, \ldots, n-m, \tag{7}$$

где $b_{n+1}^a = -b_i^a x_0^i$. Таким образом, m-плоскость в пространстве $\mathcal{A}_n$ задается системой из $n-m$ линейных уравнений ранга $n-m$. Очевидно, имеет место и обратное утверждение, а именно:

Предложение. *Совместная система (7) из $n-m$ линейных (неоднородных) уравнений ранга $n-m$ для координат $\{x^i\}$ точки M относительно репера $\{O, \mathbf{e}_i\}$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ задает m-плоскость в $\mathcal{A}_n$.*

В частности, одно линейное уравнение

$$b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} = 0 \tag{8}$$

задает гиперплоскость π_{n-1} в $\mathcal{A}_n$. При этом $\widetilde{\mathbf{b}} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — линейная форма, аннулирующая направляющее подпространство $\mathbf{L}_{n-1}$ гиперплоскости π_{n-1}.

Доказательство. Действительно, общее решение системы (7) имеет вид (3) и определяет m-плоскость с направляющим подпространством $\mathbf{L}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, где $\mathbf{a}_\alpha = a_\alpha^i \mathbf{e}_i$, проходящую через точку M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i$. $\square$

Из этого предложения следует, что всякая совместная система линейных уравнений ранга $n-m$ относительно n переменных $x^1, \ldots, x^n$ задает m-плоскость в аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Предложение. *Пусть $S \subset \mathcal{A}_n$ — произвольное подмножество, $\widetilde{S} = \{\overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}_n \,|\, A, B \in S\}$ — множество векторов, начала и концы которых принадлежат множеству S, а $M_0 \in S$ — произвольная точка. Плоскость*

$$\pi(S) = \{M_0, \mathcal{L}(\widetilde{S})\} \tag{9}$$

содержит подмножество S и содержится в любой другой плоскости π', содержащей S.

Доказательство. Пусть $M \in S$. Поскольку $\mathcal{L}(\widetilde{S}) \supset \widetilde{S} \ni \overrightarrow{M_0M}$, то $\pi(S) \ni M$. Если какая-то другая плоскость π' содержит все точки из множества S, то ее направляющее подпространство $\mathbf{L}(\pi')$ должно содержать все векторы из $\widetilde{S}$ и, следовательно, $\mathbf{L}(\pi') \supset \mathcal{L}(\widetilde{S}) \implies \pi' \supset \pi(S)$. $\square$

Определение. *Плоскость $\pi(S)$ называется плоскостью, натянутой на подмножество S.*

Очевидно, размерность плоскости $\pi(S)$ равна рангу системы векторов $\widetilde{S}$ (это подмножество может быть и бесконечным). В частности, для конечного набора точек $M_0, M_1, \ldots, M_k$ размерность натянутой на него плоскости равна рангу системы векторов $\{\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}\}$. Говорят, что точки $M_0, M_1, \ldots, M_k$ находятся *в общем положении*, если размерность натянутой на них плоскости равна k.

В случае точек общего положения $M_0, M_1, \ldots, M_k$ параметрическое уравнение натянутой на них плоскости имеет вид (2): $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, а $\mathbf{a}_\alpha = \overrightarrow{M_0M_\alpha}$. В частности, уравнение прямой ℓ, проходящей через две (различные) точки M_0 и M_1, имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0). \tag{10}$$

При этом множество точек

$$[M_0M_1] = \{M \in \ell | t_M \in [0;1]\}$$

называется *отрезком* с концами M_0 и M_1.

Определение. *Простым отношением трех точек A, B и C аффинного пространства $\mathcal{A}_n$, лежащих на прямой ℓ этого пространства и таких, что $B \neq C$, называется следующее число:*

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Если известны точки A, B и простое отношение $(ABC) = \lambda$, то радиус-вектор и координаты точки C находятся следующим образом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda} \iff x^i_C = \frac{x^i_A + \lambda x^i_B}{1 + \lambda}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Формулы (11) выводятся также как и в случае аффинных пространств малых размерностей (см. [19], с. 18).

Определение. *Пусть дана гиперплоскость* π_{n-1}. *Будем говорить, что две (различные) точки* P *и* Q *лежат по одну сторону от* π_{n-1}, *если отрезок* $[PQ]$ *не содержит точек, принадлежащих* $\pi_{n-1} : [PQ] \cap \pi_{n-1} = \varnothing$. *В противном случае говорим, что точки* P *и* Q *лежат по разные стороны от* π_{n-1}.

Задача 1. Пусть гиперплоскость $\pi_{n-1} \subset \mathcal{A}_n$ имеет уравнение (8). Определим функцию $f : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}$ формулой $f(M) = b_1 x_M^1 + \ldots + b_n x_M^n + b_{n+1}$. Доказать, что точки P и Q лежат по одну сторону от π_{n-1} тогда и только тогда, когда $\mathrm{sgn}(f(P)) = \mathrm{sgn}(f(Q))$. Таким образом, у гиперплоскости в аффинном пространстве имеется две стороны: по одну сторону гиперплоскости функция $f(M)$ принимает положительные значения, а по другую — отрицательные.

1.2 Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.

Пусть заданы две плоскости π_m и π'_k в аффиннос пространстве $\mathcal{A}_n$. Рассмотрим возможные случаи их взаимного расположения.

1. $\underline{\pi_m \cap \pi'_k \neq \varnothing.}$

Предложение. *Если плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ *в пространстве* $\mathcal{A}_n$ *имеют непустое пересечение, то они пересекаются по плоскости. А именно, если* $\pi_m \cap \pi'_k \ni A$, *то* $\pi_m \cap \pi'_k = \{A, \mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k\}$.

Доказательство. Действительно, $B \in \pi_m \cap \pi'_k \iff \overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}_m, \mathbf{L}'_k \iff \overrightarrow{AB} \in \mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k$. $\square$

Пусть плоскости $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ и $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ заданы, соответственно, параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 + u^a \mathbf{b}_a$, $a = 1, \ldots, k$. Радиус-вектор всякой точки $M \in \pi_m \cap \pi'_k$ имеет два набора внутренних координат $\{t^\alpha\}$ и $\{u^a\}$. При этом $\mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}'_0 + u^a \mathbf{b}_a$. Отсюда следует, что внутренние координаты точки M удовлетворяют векторному уравнению

$$t^\alpha \mathbf{a}_\alpha - u^a \mathbf{b}_a = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \tag{12}$$

или эквивалентной ему системе координатных уравнений

$$a^i_\alpha t^\alpha - b^i_a u^a = x'^i_0 - x^i_0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Уравнение (12) совместно тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \in \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}. \tag{14}$$

В результате получаем следующее

Предложение. *Плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\}$ *в пространстве* $\mathcal{A}_n$ *имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 \in \mathbf{L}_m + \mathbf{L}'_k. \tag{15}$$

Решение системы (13). Предположим, что система уравнений (13) совместна, то есть выполняется условие (14). Тогда ранг r системы уравнений (13) равен рангу системы векторов

$$\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \dim(\mathbf{L}_m + \mathbf{L}'_k).$$

Решения системы уравнений (13) представляют собой векторы

$$\{t^1, \dots, t^m; u^1, \dots, u^k\}$$

из числового пространства $\mathbf{R}^{m+k}$. Всякому частному решению $\{t^\alpha_0; u^a_0\}$ системы уравнений (13) соответствует точка M''_0 из пересечения $\pi_m \cap \pi'_k$, имеющая радиус-вектор $\mathbf{r}''_0 = \mathbf{r}_0 + t^\alpha_0 \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}'_0 + u^a_0 \mathbf{b}_a$. Всякое решение $\{t^\alpha_1; u^a_1\}$ однородной системы уравнений

$$a^i_\alpha t^\alpha - b^i_a u^a = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{16}$$

соответствующей системе (12), определяет вектор из пересечения $\mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k$. Если $\{t^\alpha_A; u^a_A\}$, $A = 1, \dots, m + k - r$, — фундаментальная система решений (см. [8], §§ 11, 12) системы (16), то $\mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}'_k$ представляет собой линейную оболочку системы векторов $\mathbf{c}_A = t^\alpha_A \mathbf{a}_\alpha = u^a_A \mathbf{b}_a$, $A = 1, \dots, m + k - r$. Отсюда следует, что плоскость $\pi_m \cap \pi'_k$ имеет следующее параметрическое уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}''_0 + v^A \mathbf{c}_A.$$

При нахождении пересечения конкретных плоскостей достаточно вычислять только части $\{u^1, \ldots, u^k\}$ решений $\{t^1, \ldots, t^m; u^1, \ldots, u^k\}$ систем (13) и (16). При этом получаются параметрические уравнения $u^a = u_0^a + \lambda^A u_A^a$ плоскости $\pi_m \cap \pi'_k$ в аффинном пространстве π'_k. При их подстановке в уравнения $x^i = x'^i_0 + u^a b_a^i$ плоскости π'_k получаются окончательные уравнения $x^i = x'^i_0 + u_0^a b_a^i + \lambda^A (u_A^a b_a^i)$ плоскости $\pi_m \cap \pi'_k$ в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$.

Рассмотрим пример.

Задача 2. Найти пересечение двух 3-плоскостей π и π' в $\mathbf{R}^5$, заданных уравнениями

$$\pi : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi' : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы уравнений (13) для данной задачи

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Уравнения $\pi \cap \pi'$ в π' находятся из последнего уравнения преобразованной системы $-2u^1 - 2u^2 - u^3 = 1$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку плоскость $\pi \cap \pi'$, рассматриваемая как подмножество в аффинном пространстве π' с координатами $\{u^1, u^2, u^3\}$, задается одним уравнением $-2u^1 - 2u^2 - u^3 = 1$, то $\pi \cap \pi'$ — гиперплоскость в π'.

2. $\pi_m \cap \pi_k' = \varnothing$.

Определение. *Пусть даны две плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi_k' = \{M_0', \mathbf{L}_k'\}$ *и, для определенности,* $m \leqslant k$.

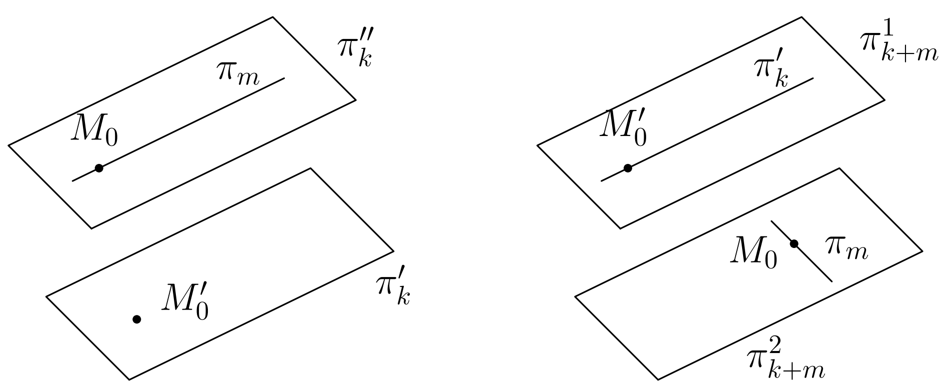
Плоскости π_m *и* π_k' *называются параллельными в строгом смысле слова* ($\pi_m \| \pi_k'$), *если* $\pi_m \cap \pi_k' = \varnothing$ *и* $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{L}_k'$.

Плоскости π_m *и* π_k' *называются скрещивающимися, если* $\pi_m \cap \pi_k' = \varnothing$ *и* $\mathbf{L}_k' \cap \mathbf{L}_m = \{\mathbf{0}\}$.

Имеет место следующее очевидное

Предложение. 1) *Если плоскость* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{L}_m\}$ *параллельна плоскости* $\pi_k' = \{M_0', \mathbf{L}_k'\}$, $m \leqslant k$, *то* $\pi_m \subset \pi_k''$, *где* $\pi_k'' \| \pi_k'$. *Эта* k*-плоскость* π_k'' *имеет следующий вид* $\pi_k'' = \{M_0, \mathbf{L}_k'\}$.

2) *Если плоскости* π_m *и* π_k' *скрещиваются, то они лежат в параллельных* $(k+m)$*-плоскостях* $\pi_{k+m}^1 = \{M_0, \mathbf{L}_k' \oplus \mathbf{L}_m\}$ *и* $\pi_{k+m}^2 = \{M_0', \mathbf{L}_k' \oplus \mathbf{L}_m\}$.



Из условия (15) следует, что если π_m и π_k' скрещиваются, то $\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0 \notin \mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}_k'$. Так как $\dim(\mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}_k') = m+k$, то $1+m+k \leqslant n$. Следовательно, сумма размерностей скрещивающихся плоскостей не может превышать $n-1$.

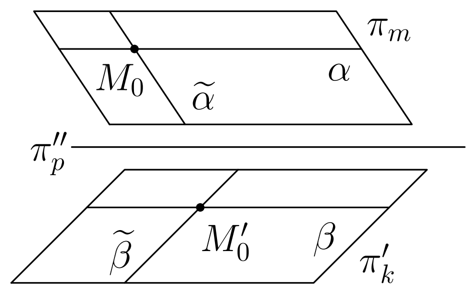
Поэтому в $\mathcal{A}_4$ могут скрещиваться две прямые или прямая и 2-плоскость, в $\mathcal{A}_5$ могут скрещиваться прямая и 3-плоскость или две 2-плоскости.

Общая ситуация описывается следующим предложением.

Предложение. *Пусть* $\pi_m \cap \pi'_k = \varnothing$, *а* $\mathbf{L}'_k \cap \mathbf{L}_m = \mathbf{L}''_p$, *где* $p > 0$, $p < m$, $p < k$. *Тогда обе плоскости* π_m *и* π'_k *параллельны* p*-плоскости* $\pi''_p = \{M_1, \mathbf{L}''_p\}$, *где* M_1 *— середина отрезка* $[M_0M'_0]$, *и не существует плоскости* π_q, *где* $q < k$, $q < m$, *размерности большей* p *параллельной каждой из плоскостей* π_m *и* π'_k.

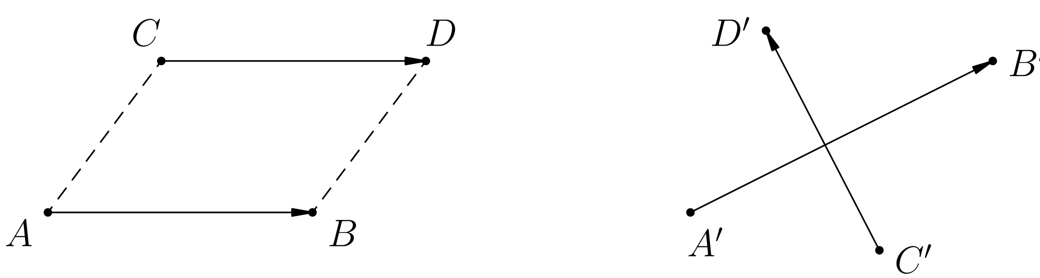
Задача 3. Показать, что плоскости π_m и π'_k из предыдущего предложения содержат параллельные p-плоскости α_p и β_p, скрещивающиеся плоскости $\widetilde{\alpha}_{m-p}$ и $\widetilde{\beta}_{k-p}$ и при этом π_m натянута на α_p и $\widetilde{\alpha}_{m-p}$, а π'_k натянута на β_p и $\widetilde{\beta}_{k-p}$.

Указание. Рассмотреть прямые дополнения подпространства подпространства $\mathbf{L}''_p$ в $\mathbf{L}'_k$ и в в $\mathbf{L}_m$.



1.3 Аффинные отображения.

Пусть $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ и $(\mathcal{A}'_m, \mathbf{V}'_m, \psi')$ — аффинные пространства, а $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — некоторое отображение. Рассмотрим точки $A, B, C, D \in \mathcal{A}_n$ такие, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Пусть $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$, $C' = \alpha(C)$, $D' = \alpha(D)$. При этом, вообще говоря, $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{C'D'}$, то есть отображение α не определяет никакого отображения из $\mathbf{V}_n$ в $\mathbf{V}'_m$.



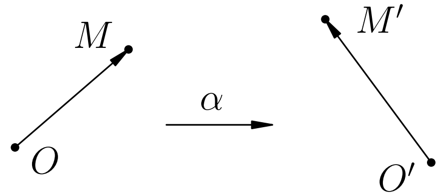
Определение. *Отображение* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *называется аффинным отображением (морфизмом аффинных пространств), если оно индуцирует линейное отображение из* $\mathbf{V}_n$ *в* $\mathbf{V}'_m$, *точнее, если существует линейное* *отображение*

$$\widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}'_m$$

такое, что

$$\widehat{\alpha}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\alpha(A)\alpha(B)} \quad \textit{для любых } A, B \in \mathcal{A}_n\,.$$

Из этого определения следует,что аффинное отображение α однозначно определяется образом $O' = \alpha(O)$ любой одной точки $O \in \mathcal{A}_n$ и линейным отображением $\widehat{\alpha}$.

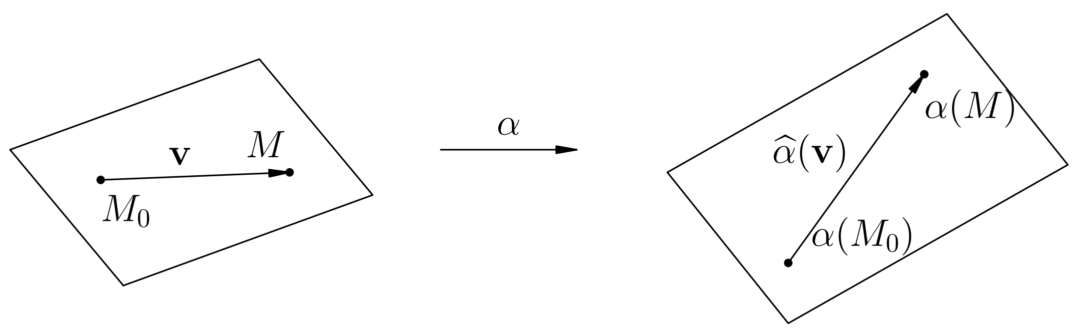


Действительно, пусть $M \in \mathcal{A}_n$ — произвольная точка и пусть $M' = \alpha(M)$. Тогда $\overrightarrow{O'M'} = \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM})$.

Как следствие получаем

Предложение. *Образ $\alpha(\pi_k)$ плоскости $\pi_k = \{M_0, \mathbf{L}_k\} \subset \mathcal{A}_n$ при аффинном отображении $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ является плоскостью $\pi'_p = \{\alpha(M_0), \widehat{\alpha}(\mathbf{L}_k)\} \subset \mathcal{A}'_m$ размерности $p = \dim \widehat{\alpha}(\mathbf{L}_k) \leqslant k$.*

В частности, образом аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ при аффинном отображении α является плоскость $\{\alpha(M_0), \mathrm{im}(\widehat{\alpha})\} \subset \mathcal{A}'_m$.



Если $\mathrm{im}(\widehat{\alpha}) = \mathbf{V}'_m$, то α сюръективно (отображает пространство $\mathcal{A}_n$ на все пространство $\mathcal{A}'_m$).

Если $\mathrm{im}(\widehat{\alpha}) = \mathbf{0}$, то α отображает пространство $\mathcal{A}_n$ в одну точку пространства $\mathcal{A}'_m$.

Предложение. *Прообраз $\alpha^{-1}(\pi'_k)$ плоскости $\pi'_k = \{M'_0, \mathbf{L}'_k\} \subset \mathcal{A}'_m$ при аффинном отображении $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ является либо пустым множеством либо плоскостью с направляющим подпространством $\alpha^{-1}(\mathbf{L}'_k)$.*

Доказательство. Если $\alpha^{-1}(\pi'_k) \neq \varnothing$ и $M_0 \in \alpha^{-1}(\pi'_k)$, то $\alpha^{-1}(\pi'_k) = \{M_0, \widehat{\alpha}^{-1}(\mathbf{L}'_k)\}$. $\square$

Отметим частные случаи этого предложения: 1) $\alpha^{-1}(\mathcal{A}'_m) = \mathcal{A}_n$, 2) если $M' \in \alpha(\mathcal{A}_n)$, то $\alpha^{-1}(M') \subset \mathcal{A}_n$ — плоскость.

Предложение. *Пусть $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ и $\beta : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}''_k$ — аффинные отображения. Тогда композиция $\beta \circ \alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}''_k$ — аффинное отображение.*

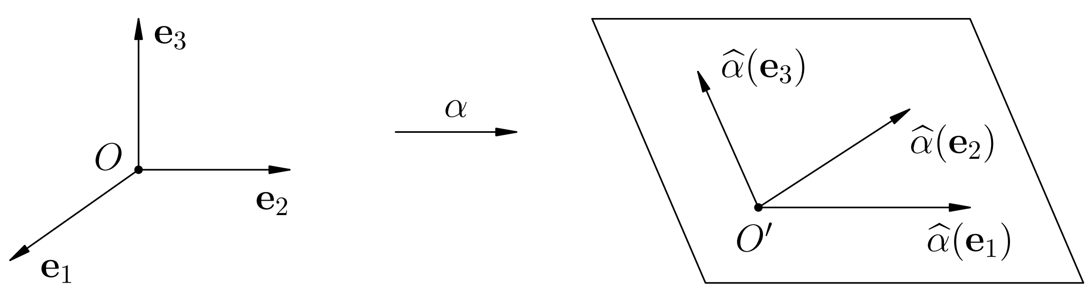
Доказательство. Очевидно, $\widehat{\beta \circ \alpha} = \widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha}$.

Определение. *Аффинное отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ называется изоморфизмом аффинных пространств, если α — биекция (взаимно однозначное отображение на все пространство $\mathcal{A}'_m$).*

Если $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — изоморфизм, то $\widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}'_m$ — взаимно однозначное отображение на все пространство $\mathbf{V}'_m$, то есть изоморфизм векторных пространств. Отсюда следует, что $n = m$. В этом случае $\alpha^{-1} : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}_n$ — тоже изоморфизм аффинных пространств. В частности, соответствие $h : \mathcal{A}_n \ni M \mapsto \{x^i_M\} \in \mathbf{R}^n$, относящее точке M набор ее координат относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в $\mathcal{A}_n$, — изоморфизм аффинных пространств.

Аффинные отображения в координатах. Пусть $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ — аффинное отображение, $\{O; \mathbf{e}_i\}$ — репер в $\mathcal{A}_n$. Всякая точка $M \in \mathcal{A}_n$ определяется своим радиус-вектором $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^i\mathbf{e}_i$. Пусть $O' = \alpha(O)$ и $M' = \alpha(M)$. Имеем:

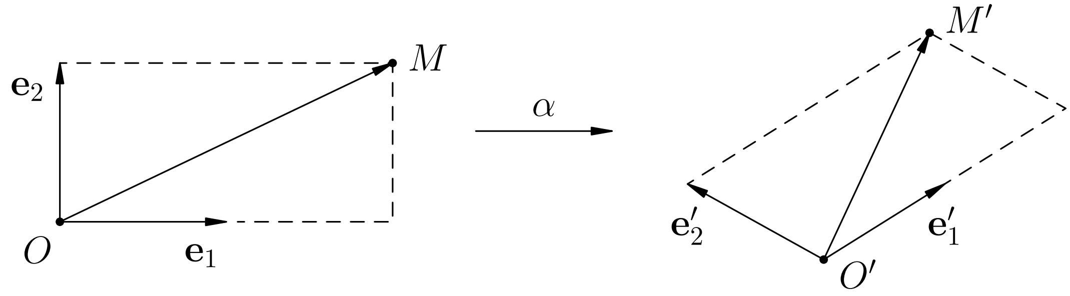
$$\overrightarrow{O'M'} = \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM}) = \widehat{\alpha}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i).$$



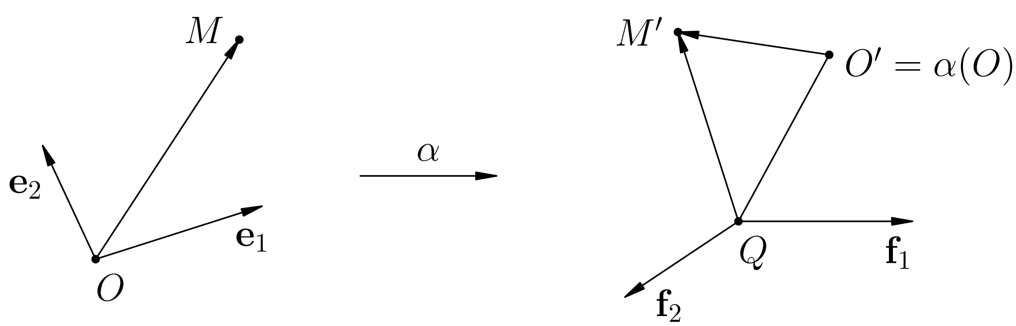
Таким образом, для того, чтобы получить точку $M' = \alpha(M)$, надо отложить от точки $O' = \alpha(O)$ вектор $x^i\mathbf{e}'_i$, где $\mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)$.

В частном случае, когда α — изоморфизм, $\{\mathbf{e}'_i\}$ — базис в $\mathbf{V}'_n$. В результате получаем следующее

Предложение. *Изоморфизм аффинных пространств $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_n$ устанавливает соответствие (взаимно однозначное) между точками, имеющими одинаковые координаты относительно реперов $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$.*



Пусть теперь $\{Q; \mathbf{f}_a\}$, $a, b, \ldots = 1, \ldots, m$, — произвольный репер в $\mathcal{A}'_m$. Найдем соответствие между координатами $\{x^i\}$ точки M относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и координатами $\{y^a\}$ точки M' относительно репера $\{Q; \mathbf{f}_a\}$. Радиус-векторы точек M и M' имеют вид $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}_{M'} = \overrightarrow{QM'} = y^a \mathbf{f}_a$. Поэтому $\mathbf{r}_{M'} = \overrightarrow{QM'} = \overrightarrow{QO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{QO'} + \widehat{\alpha}(\overrightarrow{OM}) = b^a \mathbf{f}_a + x^i \alpha_i^a \mathbf{f}_a$, где $b^a \mathbf{f}_a = \overrightarrow{QO'}$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \alpha_i^a \mathbf{f}_a$, то есть $\{b^a\}$ — координаты точки O' относительно репера $\{Q; \mathbf{f}_a\}$, а (α_i^a) — матрица линейного отображения $\widehat{\alpha}$ по отношению к базисам $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_a\}$.



В результате получаем следующие уравнения для аффинного отображения α:

$$y^a = \alpha_i^a x^i + b^a \tag{17}$$

или, в матричном виде,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Определение. *Изоморфизм* $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ *аффинного пространства* $\mathcal{A}_n$ *называется аффинным преобразованием пространства* $\mathcal{A}_n$.

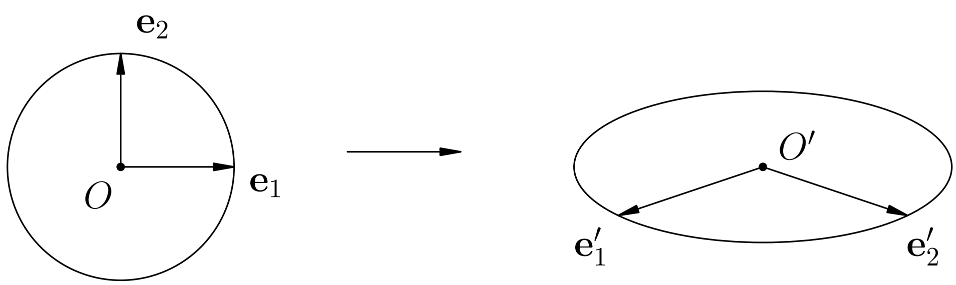
Аффинные преобразования называют также аффинными движениями или просто движениями, если не возникает двусмысленности (аффинные движения можно рассматривать и в евклидовых пространствах).

При рассмотрении аффинного движения $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ естественно рассматривать координаты точек $M \in \mathcal{A}_n$ и их образов $\alpha(M) \in \mathcal{A}_n$ относительно одного и того же репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Из (17) следует, что в координатах, определяемых аффинным репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$, аффинное движение α задается уравнениями α:

$$y^j = \alpha_i^j x^i + b^j, \quad \det(\alpha_i^j) \neq 0. \tag{19}$$

Множество $GA(\mathcal{A}_n)$ всех аффинных преобразований пространства $\mathcal{A}_n$ образует группу относительно композиции преобразований.

Замечание. В соответствии с рассмотренным ранее случаем изоморфизма аффинных пространств одной размерности аффинное движение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ переводит точку M, имеющую координаты $\{x^i\}$ относительно некоторого репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, в точку M', имеющую такие же координаты $\{x^i\}$ относительно репера $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, где $O' = \alpha(O)$, а $\mathbf{e}'_i = \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \alpha_i^j \mathbf{e}_j$.



Задача 4. Доказать, что аффинное движение α пространства $\mathcal{A}_n$ переводит всякий набор точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$, находящихся в общем положении, в набор точек $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$, также находящихся в общем положении, и для любых двух наборов $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и $M'_0, M'_1, \ldots, M'_n$ точек, находящихся в общем положении, существует единственное аффинное движение, переводящее точку M_p в точку M'_p для всех $p = 0, 1, \ldots, n$.

Решение. Движение α переводит репер $\{M_0; \overrightarrow{M_0 M_i}\}$ в репер $\{M'_0; \overrightarrow{M'_0 M'_i}\}$.

Предмет аффинной геометрии. Аффинная геометрия изучает свойства объектов в аффинных пространствах, которые остаются неизменными при аффинных преобразованиях.

Свойства и характеристики объектов, не изменяющиеся при преобразованиях, называются *инвариантными.*

Основной инвариант аффинной геометрии. Всякое аффинное преобразование пространства $\mathcal{A}_n$ сохраняет простое отношение (ABC) трех точек A, B и C, лежащих на одной прямой ℓ.

Действительно, $(ABC) = \lambda \implies \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \implies \overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{C'B'}$ (так как $\widehat{\alpha}$ — линейное отображение) $\implies (A'B'C') = \lambda$.

Замечание. Соответствие, относящее точке M аффинного пространства ее координаты $\{x^i\}$ относительно репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, представляет собой изоморфизм аффинных пространств $h : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}^n$. Пусть $h' : \mathcal{A}_n \to \mathbf{R}^n$ — отображение, относящее точке M ее координаты $\{x^{i'}\}$ относительно другого репера $\{O'; \mathbf{e}_{i'}\}$, тогда преобразование координат $x^i = p^i_{i'}x^{i'} + b^i$ представляет собой аффинное преобразование $h \circ (h')^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[rr, "h \circ (h')^{-1}"] & & \mathbf{R}^n \\
& \mathcal{A}_n \arrow[ul, "h'"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Задача 5. Найти аффинное преобразование α плоскости $\mathcal{A}_2$, переводящее точки $A(-2;1)$, $B(0;2)$ и $C(1;3)$ соответственно в точки $A'(-2;-3)$, $B'(2;9)$ и $C(1;13)$.

Решение. Преобразование α имеет вид

$$
\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}. \tag{20}
$$

Подставляя в (20) координаты данных точек, получим систему уравнений относительно 6-ти неизвестных α_1^1, α_2^1, α_1^2, α_2^2, b^1, b^2:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Систему уравнений (21) можно решать обычным способом методом Гаусса [8], однако лучше сначала найти линейное отображение (изоморфизм) $\widehat{\alpha}$. Отображение $\widehat{\alpha}$ переводит векторы $\overrightarrow{AB} = \{2;1\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{3;2\}$ соответственно в векторы $\overrightarrow{A'B'} = \{4;12\}$ и $\overrightarrow{A'C'} = \{3;16\}$, поэтому для нахождения матрицы (α_i^j) получаем матричное уравнение

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.
$$

Отсюда

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.
$$

Окончательный результат имеет вид:

$$
\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Задача 6. Какими уравнениями задаются образы прямой ℓ: $x^1 + 2x^2 - 3 = 0$ и параболы Φ: $(x^2)^2 = x^1$ при аффинном преобразовании α

$$
\begin{cases} y^1 = 2x^1 + 3x^2 - 1 \\ y^2 = x^1 + 2x^2 + 3 \ ? \end{cases}
$$

Решение. Перепишем уравнения аффинного преобразования в матричном виде:

$$
\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.
$$

Обратное преобразование α^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x^1 = 2y^1 - 3y^2 + 11 \\ x^2 = -y^1 + 2y^2 - 7 \end{cases} \tag{22}$$

Подставляя уравнения (22) в уравнения прямой ℓ и параболы Φ, получим уравнения их образов при аффинном преобразовании α, а именно,

$$\begin{aligned} &\alpha(\ell):\ (2y^1 - 3y^2 + 11) + 2(-y^1 + 2y^2 - 7) - 3 = 0, \\ &\alpha(\Phi):\ (-y^1 + 2y^2 - 7)^2 = 2y^1 - 3y^2 + 11. \end{aligned}$$

Задача 7. Найти инвариантные прямые аффинного преобразования α

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

для линейного оператора $\widehat{\alpha}$, находим его собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$. Собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, являются направляющими векторами инвариантных прямых. Вектор $\mathbf{a}_1$, соответствующий значению $\lambda_1 = 3$, является решением уравнения $(7-3)a^1 - a^2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{a}_1 = \{1; 4\}$. Отсюда следует, что первая инвариантная прямая имеет уравнение $4x^1 - x^2 + A_3 = 0$. Поскольку прямая ℓ инвариантна относительно преобразования α тогда и только тогда, когда она инвариантна отнорсительно преобразования α^{-1}, то для нахождения первой инвариантной прямой подставим выражения

$$\begin{cases} y^1 = 7x^1 - x^2 + 1 \\ y^2 = 4x^1 + 2x^2 + 4 \end{cases}$$

в уравнение $4y^1 - y^2 + A_3 = 0$. Получаем $4(7x^1 - x^2 + 1) - (4x^1 + 2x^2 + 4) + A_3 = 0 \Longleftrightarrow 24x^1 - 6x^2 + A_3 = 0$. Для того, что бы прямые $4x^1 - x^2 + A_3 = 0$ и

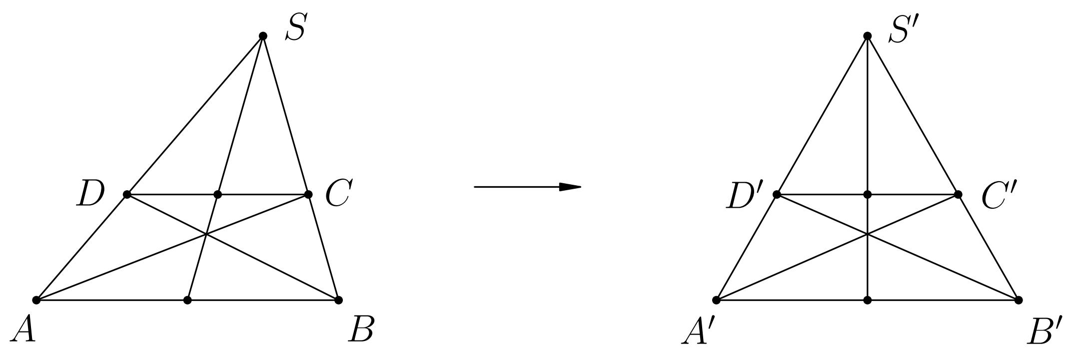
$24x^1 - 6x^2 + A_3 = 0$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $A_3 = 6A_3 \iff A_3 = 0$. Таким образом, первому собственному значению соответствует одна инвариантная прямая $4x^1 - x^2 = 0$.

Инвариантная прямая, соответствующая собственному значению $\lambda_2 = 6$, имеет уравнение $x^1 - x^2 + A_3 = 0$. При преобразовании α^{-1} она переходит в прямую $(7x^1 - x^2 + 1) - (4x^1 + 2x^2 + 4) + A_3 = 0 \iff 3x^1 - 3x^2 - 3 + A_3 = 0$. Отсюда $-3 + A_3 = 3A_3$ и $A_3 = -\frac{3}{2}$. Таким образом, второму собственному значению соответствует одна инвариантная прямая $2x^1 - 2x^2 - 3 = 0$.

Аффинные преобразования могут успешно применяться при решении некоторых задач евклидовой геометрии.

Задача 8. Доказать, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

Решение. Аффинным преобразованием всякая трапеция может быть переведена в равнобочную, для которой утверждение выполняется очевидным образом.

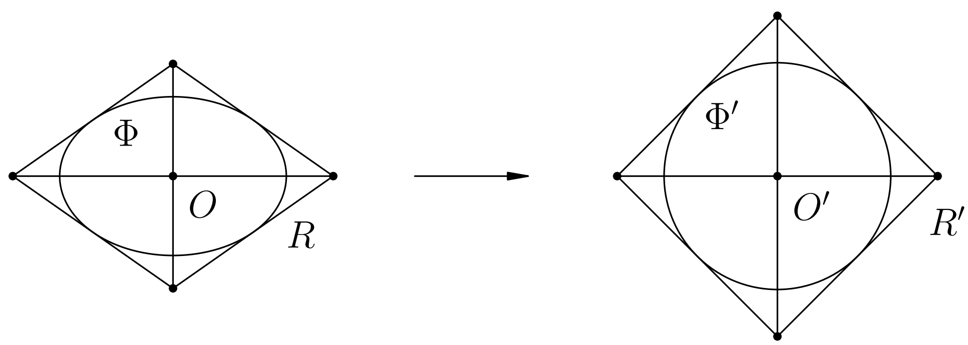


Задача 9. Около эллипса описан ромб. Доказать, что вершины ромба лежат на осях эллипса.

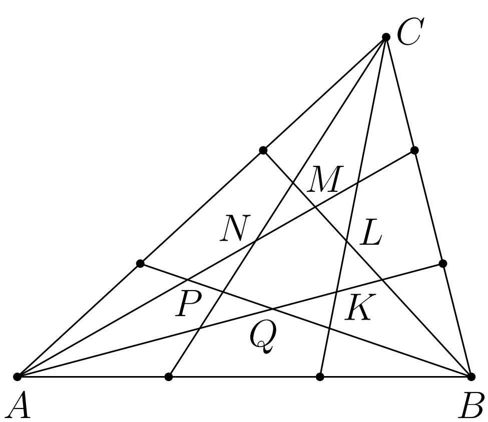
Решение. Пусть Φ — эллипс, имеющий уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и R — ромб, описанный около эллипса Φ. При аффинном преобразовании $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$ эллипс Φ переходит в окружность Φ' с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. При этом ромб R переходит в параллелограмм R', описанный около окружности Φ'. Но всякий параллелограмм, описанный около окружности, очевидно, является ромбом. Таким образом, R' — ромб. Диагонали ромба R' являются парой взаимно ортогональных диаметров окружности Φ'. Отсюда, в частности, следует, что эти диаметры сопряжены относительно окружности Φ' (каждый из этих диаметров, очевидно, делит пополам хорды, параллельные другому диаметру). Но тогда и диагонали ромба R — сопряженные диаметры эллипса Φ (при аффинном преобразовании центр эллипса Φ переходит в центр окружности Φ', следовательно, диаметры переходят в диаметры, кроме того, сопряженность диаметров, очевидно, сохраняется). Поскольку, помимо этого, диагонали ромба R взаимно ортогональны, они являются осями симметрии эллипса Φ.



Задача 10. Из каждой вершины треугольника ABC проведены по две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части и являющиеся сторонами шестиугольника $KLMNPQ$. Доказать, что диагонали шестиугольника $KLMNPQ$, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.



Решение. Применяя аффинное преобразование, переведем треугольник ABC в равносторонний и воспользуемся тем, что медианы равностороннего треугольника являются его осями симметрии.

1.4 Комплексификация вещественных векторных и аффинных пространств.

В определениях векторного и аффинного пространств поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ можно заменить на любое другое поле $\mathbf{F}$, то есть на множество $\mathbf{F}$, на котором заданы две операции: сложения $+ : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ и умножения

$* : \mathbf{F}\times\mathbf{F}\to\mathbf{F}$ такие, что $(\mathbf{F},+)$ — коммутативная группа, $(\mathbf{F}\setminus\{0\},*)$ — коммутативная группа и умножение дистрибутивно по отношению к сложению. При этом сохраняют смысл такие понятия, введенные ранее для аффинного пространства над полем $\mathbf{R}$, как линейная зависимость и независимость векторов, базис, репер, координаты, подпространство, m-плоскость, линейное отображение, аффинное отображение.

Задача 11. Остатки от деления на 2 образуют поле $\mathbf{F}_2$, состоящее из двух элементов 0 и 1 ($0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$, $0*0=0$, $0*1=0$, $1*1=1$). Доказать, что трехмерное аффинное пространство $\mathcal{A}_3(\mathbf{F}_2)$ состоит из 8-ми элементов и найти все прямые и все плоскости этого пространства.

Указание. Воспользоваться тем, что каждая из трех координат точки или вектора может принимать ровно два значения 0 и 1.

Предложение. *Пусть $\mathbf{V}_n(\mathbf{C})=(\mathbf{V},+,\,\cdot\,)$ — комплексное векторное пространство размерности n, где $\cdot : \mathbf{C}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ — операция умножения элементов из $\mathbf{V}$ на комплексные числа, и $\cdot' = \cdot\,|\,\mathbf{R} : \mathbf{R}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ — операция умножения элементов из $\mathbf{V}$ на вещественные числа. Тогда $\mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n}=(\mathbf{V},+,\,\cdot'\,)$ — вещественное векторное пространство размерности $2n$.*

Доказательство. Если $\{\mathbf{e}_k\}$, $k=1,\dots,n$ — базис в $\mathbf{V}_n(\mathbf{C})$, то $2n$ векторов $\{\mathbf{e}_k, i\mathbf{e}_k\}$, $k=1,\dots,n$ линейно независимы с вещественными коэффициентами. Действительно, $a^k\mathbf{e}_k+b^k(i\mathbf{e}_k)=\mathbf{0}\Longrightarrow(a^k+ib^k)\mathbf{e}_k=\mathbf{0}\Longrightarrow a^k+ib^k=0\in\mathbf{C}$, $k=1,\dots,n$, $\Longrightarrow a^k,b^k=0\in\mathbf{R}$, $k=1,\dots,n$. При этом $\mathbf{v}=v^k\mathbf{e}_k$, $v^k\in\mathbf{C}\Longrightarrow\mathbf{v}=(a^k+ib^k)\mathbf{e}_k$, где $v^k=a^k+ib^k\Longrightarrow \mathbf{v}=a^k\mathbf{e}_k+b^k(i\mathbf{e}_k)$. $\square$

Определение. *Векторное пространство $\mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n}=(\mathbf{V},+,\,\cdot'\,)$ называется овеществлением комплексного векторного пространства $\mathbf{V}_n(\mathbf{C})=(\mathbf{V},+,\,\cdot\,)$.*

Аффинное пространство $\mathcal{A}^{\mathbf{R}}_{2n}=(\mathcal{A},\mathbf{V}^{\mathbf{R}}_{2n},\psi)$ называется овеществлением комплексного аффинного пространства $\mathcal{A}_n(\mathbf{C})=(\mathcal{A},\mathbf{V}_n(\mathbf{C}),\psi)$.

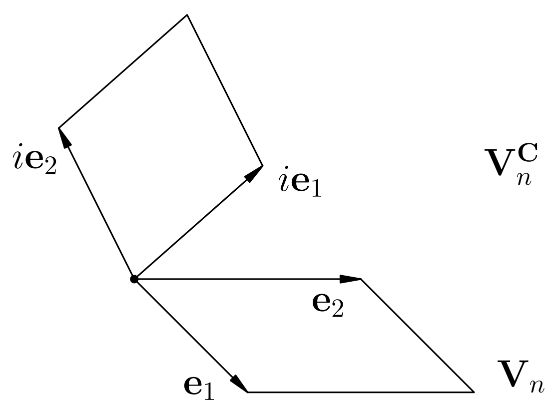
Переход к овеществлениям позволяет считать, что комплексные векторные и аффинные пространства являются одновременно и вещественными векторными и (соответственно) аффинными пространствами.

Пример. Пусть в комплексном аффинном пространстве $\mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ в (комплексных) координатах $\{z^1, z^2\}$, определяемых некоторым репером $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, задано множество точек Φ, координаты которых удовлетворяют уравнению $(z^1)^2 + (z^2)^2 = 1$. В (вещественных) координатах $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ в пространстве $\mathcal{A}_4^{\mathbf{R}}$, определяемых репером $\{O, \mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, i\mathbf{e}_2\}$, это же множество Φ задается системой уравнений $(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 1$, $x^1x^2 + x^3x^4 = 0$.

Определение. *Комплексификацией n-мерного вещественного векторного пространства $\mathbf{V}_n$ называется пара $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}, \varphi)$, состоящая из n-мерного комплексного векторного пространства $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ и линейного отображения $\varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ такого, что линейная оболочка (с комплексными коэффициентами) $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(\mathrm{im}(\varphi))$ совпадает со всем пространством $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$.*

При этом начальное вещественное пространство $\mathbf{V}_n$ отождествляется с его образом $\mathrm{im}(\varphi) = \varphi(\mathbf{V}_n) \subset \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$.

Из этого определения следует, что если $\{\mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{V}_n$, то $\{\varphi(\mathbf{e}_k) \equiv \mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$. Таким образом, переход к комплексификации позволяет считать, что координаты векторов могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.



Очевидно, что для любого векторного пространства $\mathbf{V}_n$ существует комплексификация. Для ее построения достаточно взять произвольные базисы $\{\mathbf{e}_k\}$ в $\mathbf{V}_n$ и $\{\mathbf{e}'_k\}$ в $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ и определить отображение $\varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ следующим образом: $\varphi(v^k\mathbf{e}_k) = v^k\mathbf{e}'_k$.

Определение. *Комплексификацией n-мерного вещественного аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ называется пара $(\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}, \alpha)$, состоящая из n-мерного комплексного аффинного пространства $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ и аффинного отображения $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ такого, что пара $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}, \widehat{\alpha} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}})$, где $\mathbf{V}_n$ и $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ —*

векторные пространства, ассоциированные соответственно с $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, является комплексификацией векторного пространства $\mathbf{V}_n$.

При этом начальное вещественное аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ отождествляется с его образом $\alpha(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.

Очевидно, что для любого аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ существует комплексификация. Для ее построения достаточно взять произвольные реперы $\{O; \mathbf{e}_k\}$ в $\mathcal{A}_n$ и $\{O'; \mathbf{e}'_k\}$ в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ и взять отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, относящее точке M с координатами (x^k) относительно репера $\{O; \mathbf{e}_k\}$ точку M', имеющую такие же (вещественные) координаты относительно репера $\{O'; \mathbf{e}'_k\}$.

Переход к комплексификации позволяет считать, что координаты точек в изучаемом аффинном пространстве могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.

Замечание. Всякое линейное отображение $\beta : \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}_m$ однозначно продолжается до $\mathbf{C}$-линейного отображения $\beta^{\mathbf{C}} : \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}} \to \mathbf{W}_m^{\mathbf{C}}$. В координатах отображения β и $\beta^{\mathbf{C}}$ имеют один и тот же вид $y^a = \beta_k^a x^k$, где (β_k^a) — вещественная матрица. Аналогично, всякое аффинное отображение $\alpha : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ однозначно продолжается до аффинного отображения $\alpha^{\mathbf{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \to \mathcal{A}'^{\mathbf{C}}_m$. В координатах отображения α и $\alpha^{\mathbf{C}}$ имеют один и тот же вид $y^a = \alpha_k^a x^k + b^a$, где (α_k^a) — вещественная матрица, а b^a, $a = 1, \ldots, m$ — вещественные числа.

Определение. *Соответствие, которое относит каждому n-мерному вещественному векторному (аффинному) пространству некоторую его комплексификацию, а линейному (аффинному) отображению — его продолжение, называется функтором комплексификации.*

Функторы комплексифицируют сразу все векторные (аффинные) пространства. Для их построения нужно указать некоторую стандартную схему комплексификации. Приведем примеры таких функторов.

Функтор комплексификации векторных пространств. На прямой сумме

$$\mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n = \{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n\}$$

введем операцию умножения векторов на комплексные числа

$$\cdot : \mathbf{C} \otimes (\mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n) \to \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{V}_n,$$

полагая

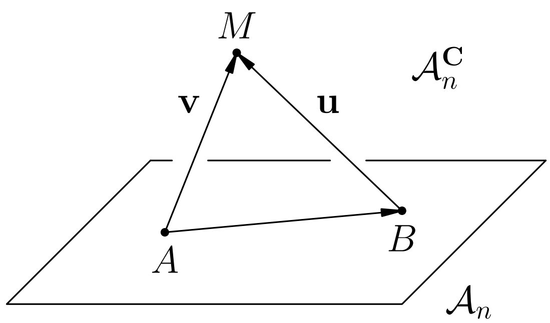
$$(a+ib)(\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}) = (a\mathbf{x}-b\mathbf{y})\oplus(b\mathbf{x}+a\mathbf{y}).$$

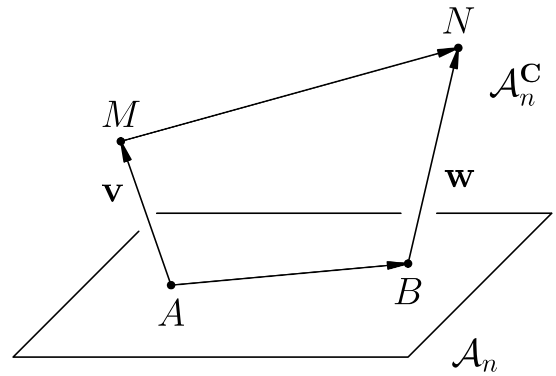
Легко проверяется, что тройка $(\mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n, +, \cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам комплексного векторного пространства. Мономорфизм вещественных векторных пространств

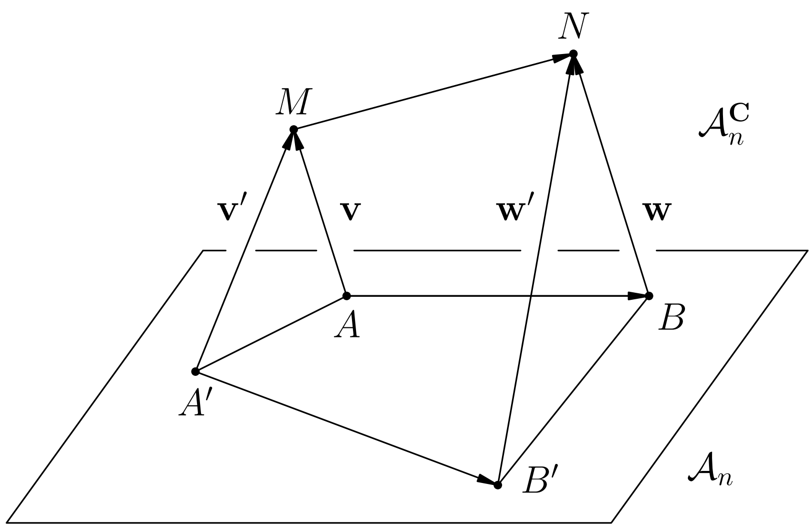
$$\varphi : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\oplus\mathbf{0} \in \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n$$

позволяет отождествить пространство $\mathbf{V}_n$ с вещественным подпространством $\varphi(\mathbf{V}_n) = \{\mathbf{x}\oplus\mathbf{0}\,|\,\mathbf{x}\in\mathbf{V}_n\} \subset \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n$, отождествляя $\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}\oplus\mathbf{0}$. При этом $i\cdot(\mathbf{x}\oplus\mathbf{0}) = \mathbf{0}\oplus\mathbf{x}$, откуда $\mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = \mathbf{x}+i\mathbf{y}$. Таким образом, $(\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n, \varphi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n\oplus\mathbf{V}_n)$ — комплексификация пространства $\mathbf{V}_n$.

Функтор комплексификации аффинных пространств. При построении функтора комплексификации аффинных пространств $(\mathcal{A}_n, \mathbf{V}_n, \psi)$ сначала нужно выбрать некоторый фуктор комплексификации векторных пространств. Считаем, что это уже осуществлено. Множество $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \supset \mathcal{A}_n$ построим, исходя из того, что каждая точка $M\in\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ является концом некоторого вектора $\overrightarrow{AM} = \mathbf{v}\in\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, начало которого лежит в $\mathcal{A}_n$. Поскольку точка A при этом может быть выбрана произвольно, то точке $M\in\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ однозначно соответствует класс векторов $\{\overrightarrow{BM}\,|\,B\in\mathcal{A}_n\}$. Таким образом, рассматриваем множество $\mathcal{A}_n\times\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, вводим на нем отношение эквивалентности $\{A,\mathbf{v}\}\sim\{B,\mathbf{u}\} \iff \mathbf{v} = \overrightarrow{AB}+\mathbf{u}$ и полагаем $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} = (\mathcal{A}_n\times\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}})/\!\sim$. Отображение $\psi^{\mathbf{C}}$, относящее паре точек $M,N\in\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ вектор $\overrightarrow{MN}\in\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$, корректно определяется соотношениями: если точки M и N задаются, соответственно, парами $\{A,\mathbf{v}\}$ и $\{B,\mathbf{w}\}$, то $\overrightarrow{MN} = -\mathbf{v}+\overrightarrow{AB}+\mathbf{w}$.







$$
\begin{aligned}
-\mathbf{v}' + \overrightarrow{A'B'} + \mathbf{w}' &= (-\mathbf{v} + \overrightarrow{AA'}) + \overrightarrow{A'B'} + (\overrightarrow{B'B} + \mathbf{w}) = \\
&= -\mathbf{v} + \overrightarrow{AB} + \mathbf{w}.
\end{aligned}
$$

2 Евклидово аффинное пространство.

Определение. *Евклидовым аффинным пространством называется аффинное пространство* $\mathcal{E}_n$, *ассоциированное с евклидовым векторным пространством* $(\mathbf{E}_n, g)$.

Билинейная форма

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R},$$

относящая паре векторов их скалярное произведение, называется *основной* или *метрической* формой евклидова пространства $\mathbf{E}_n$. Эта форма по определению удовлетворяет двум условиям: 1) она симметрична, то есть $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n$, 2) квадратичная форма

$$\mathbf{E}_n \ni \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

положительно определена, то есть $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ и $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Предложение. *Пусть* $(\mathbf{E}_n, g)$ — *евклидово пространство, а* $\mathbf{E}_m \subset \mathbf{E}_n$ — *подпространство и* g' — *ограничение формы* g *на подпространство* $\mathbf{E}_m$, *то есть* $g'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *для любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$. *Тогда* $(\mathbf{E}_m, g')$ — *евклидово пространство.*

Доказательство очевидно: $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ и $g'(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

Определение. *Пусть* $(\mathbf{E}_n, g)$ *и* $(\mathbf{E}'_n, g')$ — *два евклидова векторных пространства. Изоморфизм векторных пространств* $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ *называется изоморфизмом евклидовых векторных пространств, если*

$$g'(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n\,.$$

Если существует изоморфизм евклидовых векторных пространств $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$, *то евклидовы векторные пространства* $(\mathbf{E}_n, g)$ *и* $(\mathbf{E}'_n, g')$ *называются изоморфными.*

Предложение. *Любые два евклидовых векторных пространства* $(\mathbf{E}_n, g)$ *и* $(\mathbf{E}'_n, g')$ *одной размерности изоморфны.*

Доказательство. Выберем в этих пространствах ортонормированные базисы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$ и рассмотрим линейное отображение

$$\varphi : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{x}' = x^i \mathbf{e}'_i \in \mathbf{E}'_n.$$

Очевидно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$. $\square$

Множество $O(\mathbf{E}_n)$ всех изоморфизмов $\varphi : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_n$ евклидова пространства $\mathbf{E}_n$ на себя образует группу относительно композиции, являющуюся подгруппой в группе $GL(\mathbf{E}_n)$ всех линейных изоморфизмов пространства $\mathbf{E}_n$ на себя. Действительно, если $\varphi, \theta \in O(\mathbf{E}_n)$, то для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_n$ выполняется

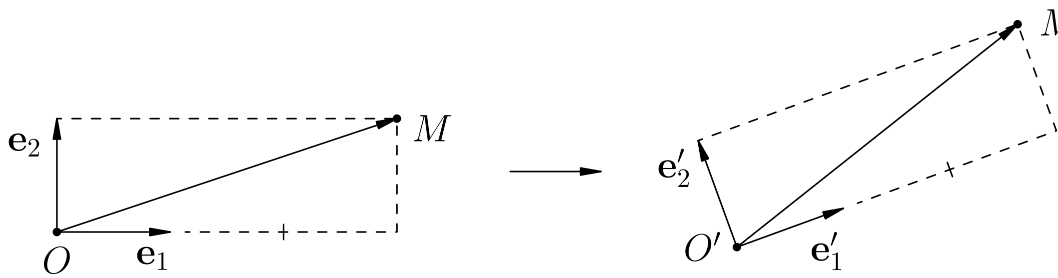
$$\begin{gathered} g((\varphi \circ \theta)(\mathbf{x}), (\varphi \circ \theta)(\mathbf{y}) = \\ g(\varphi(\theta(\mathbf{x})), \varphi(\theta(\mathbf{y}))) = g(\theta(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y})) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{gathered} \tag{23}$$

Пусть $\varphi \in O(\mathbf{E}_n)$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{E}_n$, тогда $\delta_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\varphi(\mathbf{e}_i), \varphi(\mathbf{e}_j)) = (\varphi_i^m \mathbf{e}_m, \varphi_j^k \mathbf{e}_k) = \varphi_i^m \varphi_j^k \delta_{mk} = \sum_{k=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k \iff \Phi = (\varphi_i^k)$ — ортогональная матрица ($\Phi^\top \Phi = E$, столбцы матрицы Φ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$).

Определение. *Пусть $(\mathcal{E}_n, \mathbf{E}_n, \psi)$ и $(\mathcal{E}'_n, \mathbf{E}'_n, \psi')$ — два евклидовых аффинных пространства. Изоморфизм аффинных пространств $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_n$ называется изоморфизмом евклидовых аффинных пространств, если ассоциированный изоморфизм векторных пространств $\widehat{\alpha} : \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}'_n$ является изоморфизмом евклидовых векторных пространств.*

Предложение. *Любые два евклидовых аффинных пространства $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}'_n$ одной размерности изоморфны.*

Доказательство. Выберем в пространствах $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}'_n$ ортонормированные реперы $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$ и установим соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к этим реперам. $\square$



Предложение. *Пусть* $\{\mathbf{e}_i\}$ *— базис (не обязательно ортонормированный) в евклидовом пространстве* $\mathbf{E}_n$ *и* (g_{ij}) *— матрица скалярного произведения в этом базисе* ($g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$). *Тогда*

$$\det{(g_{ij})} > 0. \tag{24}$$

Доказательство. Выберем некоторый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ в пространстве $\mathbf{E}_n$, и пусть $\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i$. Обозначим $G = (g_{ij})$, $G' = (g_{i'j'})$, $P = (p^i_{i'})$. Как было выяснено ранее (см. [20], с. 10), $G' = P^\top GP$, откуда $\det G' = \det P^\top \det G \det P$. Поскольку $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ — ортонормированный базис и, следовательно, $\det G' = 1$, а $\det P^\top = \det P$, то $(\det G)(\det P)^2 = 1$, что и доказывает предложение. □

Предложение (неравенство Коши-Буняковского). *Для любых двух векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *евклидова пространства* $\mathbf{E}_n$ *выполняется неравенство*

$$-|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{25}$$

Доказательство.

1) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы и $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, то соотношение (25) принимает вид

$$-|\lambda||\mathbf{x}||\mathbf{x}| \leqslant \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leqslant |\lambda||\mathbf{x}||\mathbf{x}|$$

и выполняется очевидным образом (одно из неравенств оказывается равенством).

2) Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то они образуют базис в двумерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_2 = \mathcal{L}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset \mathbf{E}_n$. Тогда по предыдущему предложению

$$\det \left\| \begin{matrix} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) & (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \end{matrix} \right\| > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 > 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 > (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

□

Следствие. *В формуле* (25) *равенство может иметь место только в случае, когда* $\mathbf{x}\|\mathbf{y}$. □

При $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ из (25) следует, что

$$-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leqslant 1,$$

поэтому существует единственное число $\theta \in [0;\pi]$ такое, что

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}. \tag{26}$$

Определение. *Число $\theta \in [0;\pi]$, однозначно определяемое формулой (26), называется углом между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства $\mathbf{E}_n$.*

Определение. *Пусть $\mathcal{E}_n$ — евклидово аффинное пространство и $A, B \in \mathcal{E}_n$. Число*

$$\operatorname{dist}(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

называется расстоянием между точками A и B.

Предложение. $\operatorname{dist}(A,B) = 0 \iff A = B$. $\square$

Предложение. *Имеет место следующее неравенство, называемое «неравенством треугольника»:*

$$\operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,C) \geqslant \operatorname{dist}(A,C).$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами скалярного произведения и неравенством Коши-Буняковского. Имеем: $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + |\overrightarrow{BC}|^2 \leqslant |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|^2 = (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|)^2$. $\square$

Движения евклидова аффинного пространства $\mathcal{E}_n$.

Определение. *Движением евклидова аффинного пространства $\mathcal{E}_n$ называется изоморфизм евклидовых аффинных пространств $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$.*

Множество $GO(\mathcal{E}_n)$ всех движений евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ образует группу относительно композиции, являющуюся подгруппой в группе $GA(\mathcal{E}_n)$ всех аффинных движений пространства $\mathcal{E}_n$. Действительно, если $\alpha, \beta \in GO(\mathcal{E}_n)$, то $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in O(\mathbf{E}_n)$ и, следовательно (см. (23)), $\widehat{\alpha \circ \beta} = \widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta} \in O(\mathbf{E}_n)$.

В системе координат в пространстве $\mathcal{E}_n$, определяемой ортонормированным репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$, движение $\alpha \in GO(\mathcal{E}_n)$ имеет уравнения

$$y^i = a^i_k x^k + b^i,$$

где (a^i_k) — ортогональная матрица (см. с. 26).

В частности, движение α евклидовой плоскости $\mathcal{E}_n$, сохраняющее ориентацию, имеет следующие уравнения в прямоугольной системе координат:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2$. Движение евклидовой плоскости $\mathcal{E}_n$, не сохраняющее ориентацию, имеет уравнения:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

Замечание. Соответствие, относящее точке $M \in \mathcal{E}_n$ ее координаты $\{x^i\}$ относительно ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, представляет собой изоморфизм евклидовых аффинных пространств $h : \mathcal{E}_n \to \mathbf{R}^n$. Преобразование $x^i = p^i_{i'} x^{i'} + b^i$ прямоугольных координат в $\mathcal{E}_n$ представляет собой евклидово движение $h \circ (h')^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[rr, "h \circ (h')^{-1}"] & & \mathbf{R}^n \\ & \mathcal{E}_n \arrow[ul, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Проекция вектора на подпространство.

Пусть m-мерное подпространство $\mathbf{E}_m$ в $\mathbf{E}_n$ задано как линейная оболочка своего базиса: $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Всякий вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ однозначно представляется в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$, $\mathbf{z} \in \mathbf{E}_m^\perp$. Поскольку $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_m$, то этот вектор можно разложить по базису $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ подпространства $\mathbf{E}_m$: $\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Таким образом, нужно найти y^α, удовлетворяющие соотношению

$$\mathbf{x} = y^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{z}, \tag{27}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbf{E}_m^\perp$. Умножая скалярно равенство (27) на $\mathbf{a}_\beta$, получаем систему уравнений для координат y^α:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\beta) = y^\alpha g_{\alpha\beta}, \quad \text{где} \quad g_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta). \tag{28}$$

Так как матрица $(g_{\alpha\beta})$ скалярного произведения векторов базиса пространства $\mathbf{E}_m$ невырождена, система (28) имеет единственное решение. Это решение, например, может быть найдено следующим образом:

$$y^\alpha = g^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_\beta),$$

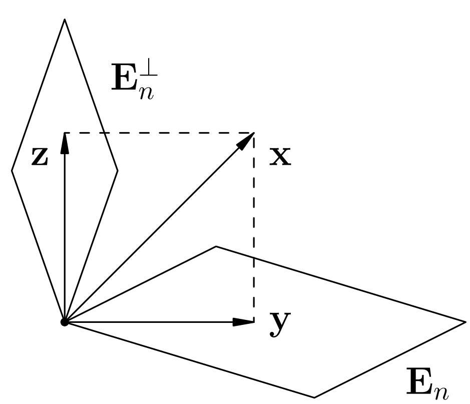
где $(g^{\alpha\beta})$ — матрица, обратная матрице $g_{\alpha\beta}$.

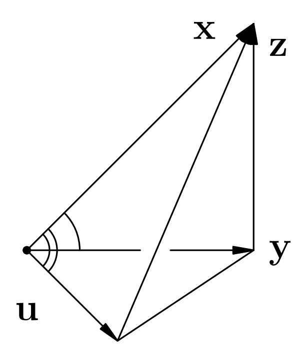
Проекцию $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\mathbf{E}_m$ будем обозначать следующим образом: $\mathbf{y} = \mathrm{pr}_{\mathbf{E}_m}\mathbf{x}$.

Угол между вектором и подпространством.

Определение. *Углом между вектором* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ *и подпространством* $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ *называется наименьший из углов, образуемых вектором* $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ *с векторами, принадлежащими подпространству* $\mathbf{E}_m = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$.

Этот угол совпадает с углом между вектором $\mathbf{x}$ и проекцией $\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространством $\mathbf{E}_m$. Для доказательства того, что угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ меньше угла между $\mathbf{x}$ и любым вектором $\mathbf{u} \in \mathbf{E}_m$, неколлинеарным вектору $\mathbf{x}$, достаточно рассмотреть трехмерное подпространство $\mathbf{E}_3 = \mathcal{L}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}\}$, для которого этот результат уже известен.





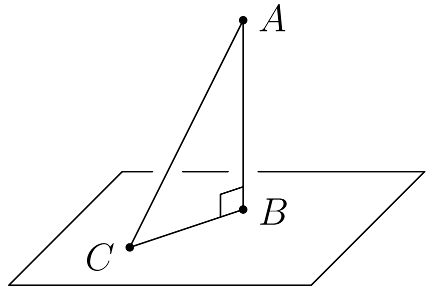
Расстояние от точки до m-плоскости в $\mathcal{E}_n$.

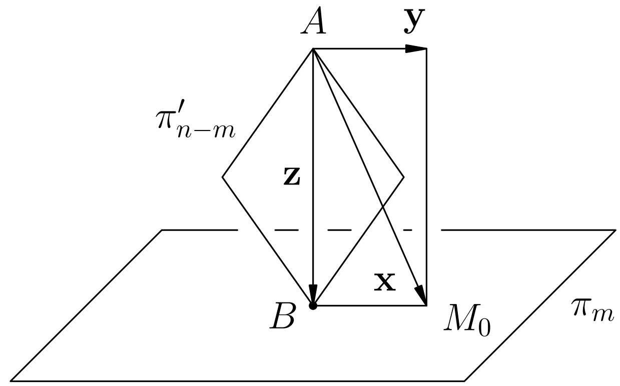
Определение. *Расстоянием* $\operatorname{dist}(A, \pi_m)$ *от точки* $A \in \mathcal{E}_n$ *до m-плоскости* $\pi_m = \{M_0, \mathbf{E}_m\}$ *называется наименьшее из расстояний от точки A до точек из* π_m.

Существует единственная точка $B \in \pi_m$ такая, что вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален $\mathbf{E}_m$ — это единственная точка пересечения плоскостей π_m и $\pi'_{n-m} = \{A, \mathbf{E}_m^\perp\}$. Покажем, что $\operatorname{dist}(A, \pi_m) = |\overrightarrow{AB}|$. Действительно, для любой другой точки $C \in \pi_m$ имеем: $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC}^2 =$

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2>\overrightarrow{AB}^2$, поскольку $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. Поскольку $\overrightarrow{AB}=\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_m^\perp}\overrightarrow{AM_0}$, то

$$\mathrm{dist}\,(A,\pi_m)=|\mathrm{pr}_{\mathbf{E}_m^\perp}\overrightarrow{AM_0}|.$$





Если m-плоскость π_m с направляющим подпространством $\mathbf{E}_m$ задана системой из $n-m$ линейных уравнений

$$b^a_i x^i + b^a_{n+1}=0,\quad a=1,\ldots,n-m, \tag{29}$$

относительно системы координат в $\mathcal{E}_n$, определяемой ортонормированным репером, то $\mathbf{E}_m^\perp=\mathcal{L}\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-m}\}$, где $\mathbf{b}_a=\sum_{i=1}^n b^a_i\mathbf{e}_i$. В частности, для гиперплоскости π_{n-1}, заданной уравнением

$$A_i x^i + A_{n+1}=0, \tag{30}$$

вектор с координатами $\{A_1,\ldots,A_n\}$ является нормальным вектором (ненулевым вектором из одномерного подпространства, ортогонального к направляющему подпространству гиперплоскости). Поэтому, рассуждая аналогично случаю пространства размерности 3, получим следующую формулу для расстояния от точки $M(x^i_M)$ до гиперплоскости (30):

$$\mathrm{dist}\,(A,\pi_{n-1})=\frac{|A_i x^i_M + A_{n+1}|}{\sqrt{A_1^2+\ldots+A_n^2}}.$$

Форма объема.

Определение. *Отображение*

$$\varepsilon:\underbrace{\mathbf{V}_n\times\mathbf{V}_n\times\ldots\times\mathbf{V}_n}_{p}\ni\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_p\}\ \mapsto\ \varepsilon(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_p)\in\mathbf{R}$$

называется полилинейным (p-линейным), если оно линейно по каждому из p его аргументов.

В координатах, определяемых базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{V}_n$, получаем $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \varepsilon(x_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, x_p^{i_p}\mathbf{e}_{i_p}) = \varepsilon_{i_1\ldots i_p}x_1^{i_1}\ldots x_p^{i_p}$, где $\varepsilon_{i_1\ldots i_p} = \varepsilon(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p})$. Числа $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ называются координатами отображения ε в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Поскольку каждый индекс $i_1, \ldots, i_p$ у координаты $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ может принимать любое значение от 1 до n, то общее количество координат у отображения ε равно n^p.

Определение. *Полилинейное отображение*

$$\varepsilon : \underbrace{\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \times \ldots \times \mathbf{V}_n}_{p} \to \mathbf{R}$$

называется кососимметричным (внешней p-формой), если при перестановке аргументов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ с помощью подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \tag{31}$$

значение отображения ε умножается на знак этой подстановки:

$$\varepsilon(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p). \tag{32}$$

Условие (32) эквивалентно тому, что $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ меняет знак при перестановке любых двух аргументов (это соответствует транспозициям $\sigma = (ij)$).

Раскладывая аргументы в соотношении (32) по базису, получим, что для выполнения условия (32) достаточно, чтобы оно выполнялось при подстановке в качестве аргументов всевозможных комбинаций базисных векторов. Таким образом, полилинейное отображение ε кососимметрично тогда и только тогда, когда координата $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ меняет знак при перестановке любых двух индексов. При этом, в частности, $\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$ равняется нулю, если какие-то два индекса совпадают.

Нас будут интересовать кососимметричные отображения n аргументов — внешние n-формы. Пусть ε — некоторая внешняя n-форма. Тогда для произвольной подстановки (31) выполняется

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon_{1\ldots n} \tag{33}$$

и $\varepsilon_{i_1\dots i_n} = 0$, если среди индексов $i_1, \dots, i_n$ есть одинаковые. Отсюда следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \varepsilon_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_{1\dots n} x_1^{\sigma(1)} \dots x_n^{\sigma(n)} = \varepsilon_{1\dots n} \det(x_k^i). \tag{34}$$

Таким образом, всякая внешняя n-форма определяется одним числом $\varepsilon_{1\dots n}$ и всякие две внешние n-формы пропорциональны. Поэтому векторное пространство $\Lambda^n(\mathbf{V}_n)$ всех внешних n-форм на векторном пространстве $\mathbf{V}_n$ имеет размерность 1.

Из (34) вытекает следующая формула преобразования координаты $\varepsilon_{1\dots n}$ при замене базиса $\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^i \mathbf{e}_i$:

$$\varepsilon_{1'\dots n'} = \varepsilon(\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}) = \varepsilon_{1\dots n} \det(p_{i'}^i).$$

Определение. *Формой объема на ориентированном евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *называется внешняя* n*-форма* ε *на* $\mathbf{E}_n$ *такая, что* $\varepsilon_{1\dots n} = 1$ *для всякого правого ортонормированного базиса* $\{\mathbf{e}_i\}$.

Определение. *Параллелепипедом* (n*-мерным*) *в векторном пространстве* $\mathbf{V}_n$*, построенном на векторах* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$*, называется следующее подмножество в* $\mathbf{V}_n$*:*

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n \,|\, \mathbf{x} = t^1 \mathbf{a}_1 + \dots + t^n \mathbf{a}_n,\ 0 \leqslant t^1, \dots, t^n \leqslant 1\}.$$

Значение формы объема $\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ *называется ориентированным объемом* n*-мерного параллелепипеда* $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ *в ориентированном евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$.

Число

$$\operatorname{vol}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = |\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)| \tag{35}$$

называется объемом n*-мерного параллелепипеда* $\mathrm{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ *в* $\mathbf{E}_n$.

Поскольку при смене ориентации в $\mathbf{E}_n$ форма объема меняется на противоположную, то понятие объема параллелепипеда сохраняет свой смысл и в неориентированном пространстве.

Выбирая одну из двух возможных n-форм на $\mathbf{E}_n$, удовлетворяющих условию $|\varepsilon_{1\dots n}| = 1$ в ортонормированных базисах, мы тем самым определяем ориентацию в $\mathbf{E}_n$, по отношению к которой эта форма будет формой объема.

Свойства формы объема.

$1^\circ.\quad \varepsilon(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)>0 \iff \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ — правый базис,

$\quad\ \ \varepsilon(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)<0 \iff \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ — левый базис,

$\quad\ \ \varepsilon(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)=0 \iff$ векторы $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ линейно зависимы.

Это свойство является прямым следствием формулы (34).

$$2^\circ.\quad \varepsilon(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\cdot\varepsilon(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)=\det\|(\mathbf{u}_k\mathbf{v}_\ell)\|\,. \tag{36}$$

Доказательство. Аналогично случаю трехмерного пространства, переходя к координатам, определяемым правым ортонормированным базисом, имеем:

$$\det\|(\mathbf{u}_k\mathbf{v}_\ell)\|=\det\|\sum_{i=1}^n u_k^i v_\ell^i\|=\det(\|u_k^i\|\cdot\|v_\ell^j\|^\top)=\det\|u_k^i\|\cdot\det\|v_\ell^j\|.\ \square$$

$$3^\circ.\quad (\varepsilon(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n))^2=\det\|(\mathbf{x}_k\mathbf{x}_\ell)\|\,. \tag{37}$$

Доказательство. Достаточно положить в (36) $\mathbf{u}_i=\mathbf{v}_i=\mathbf{x}_i$.

$4^\circ.\quad (\varepsilon_{i_1\ldots i_n})^2=\det(g_{ij})$.

Доказательство. Достаточно подставить в формулу (37) $\mathbf{x}_k=\mathbf{e}_k$. $\square$

5°. На всяком ориентированном подпространстве $\mathbf{E}_m\subset\mathbf{E}_n$, $m\geqslant 1$, возникает своя форма объема. Объем m-мерного параллелепипеда в $\mathbf{E}_n$ поэтому можно вычислять, используя формулу (37):

$$\operatorname{vol}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)=\sqrt{\det\mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)}, \tag{38}$$

где

$$\mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)=\begin{pmatrix}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_m)\\ (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_m)\end{pmatrix}$$

— матрица, составленная из скалярных произведений векторов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$, называемая матрицей Грама.

6°. Предположим, что пространство $\mathbf{E}_n$ разложено в прямую сумму $\mathbf{E}_n=\mathbf{E}_m\oplus\mathbf{E}_m^\perp$ и $\mathbf{E}_m=\mathcal{L}\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\}$, $\mathbf{E}_m^\perp=\mathcal{L}\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-m}\}$. Тогда

$$\operatorname{vol}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-m})=\operatorname{vol}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)\cdot\operatorname{vol}(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-m}).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (38), которая справедлива при любом $m = 1, \ldots, n$. Из того, что $(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_a) = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots m$ и всех $b = 1, \ldots, n - m$, получаем

$$\mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}) = \begin{pmatrix} \mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) & 0 \\ 0 & \mathrm{G}\,(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}) \end{pmatrix},$$

откуда и следует результат. $\square$

Формула для вычисления расстояния от точки до m-плоскости.

Пусть заданы точка M_1 с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ и m-плоскость π_m, имеющая параметрические уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Расстояние от M_1 до π_m находится как «высота» $(m+1)$-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, основанием которого является m-мерный параллелепипед $\mathrm{P}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$:

$$\operatorname{dist}\,(M_1, \pi_m) = \frac{\sqrt{\det \mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}}{\sqrt{\det \mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)}}.$$

Действительно, определитель $\det \mathrm{G}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ не изменится, если заменить точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ на $M_0'(\mathbf{r}_0') \in \pi_m$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0 + \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ такую, что $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0') \perp \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Коэффициенты λ_α находятся из системы уравнений

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_\beta) + (\lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, m. \tag{39}$$

Поскольку матрица системы уравнений (39) — это матрица Грама линейно независимого набора векторов $\mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, эта система имеет единственное решение.

Векторное произведение в $\mathbf{E}_n$.

Канонический изоморфизм $\mathbf{E}_n \cong \mathbf{E}_n^*$, $\mathbf{x} \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}$, где $\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, позволяет определить аналог векторного произведения в $\mathbf{E}_n$.

Фиксируя в форме объема $\varepsilon(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ первые $n-1$ аргументов $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{a}_{n-1}$, а последний оставляя произвольным $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, получим линейную форму $\widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x})$. Форме $\widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbf{E}_n^*$ в каноническом изоморфизме соответствует вектор $\mathbf{b} \in \mathbf{E}_n$. В результате получаем отображение

$$\widetilde{\varepsilon} : \underbrace{\mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \times \ldots \times \mathbf{E}_n}_{n-1} \ni \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\} \mapsto \mathbf{b} \in \mathbf{E}_n,$$

где

$$(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}). \tag{40}$$

Определение. *Вектор* $\mathbf{b}$*, однозначно определяемый соотношением* (40)*, называется векторным произведением векторов* $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$.

Векторное произведение обозначается следующим образом:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}].$$

Свойства векторного произведения.

1°. Отображение $\widetilde{\varepsilon} : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \times \ldots \times \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_n$ полилинейно и кососимметрично.

Это свойство вытекает из полилинейности и кососимметричности формы объема. Детали доказательства остаются в качестве упражнения.

2°. Если $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$, то $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_k) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$.

Для доказательства этого свойства достаточно подставить $\mathbf{x} = \mathbf{a}_k$ в формулу (40).

3°. Если векторы $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ линейно независимы и $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$, то $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}\}$ — правый базис.

Доказательство. $\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|^2 > 0$. $\square$

4°. $|[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]| = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$. Применяя формулу (40) и учитывая свойство 6° формы объема, получаем $|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) = \mathrm{vol}\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) \cdot |\mathbf{b}|$. $\square$

5°. В системе координат, определяемой правым ортонормированным базисом,

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}] = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & \mathbf{e}_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{n-1}^n & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \tag{41}$$

Доказательство. Умножив вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$ скалярно на вектор $\mathbf{e}_i$, получим

$$b^i = (\mathbf{b}, \mathbf{e}_i) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_i) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{n-1}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & \ldots & a_{n-1}^i & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix},$$

что очевидно совпадает с i-той координатой вектора, стоящего в правой части равенства (41).

6°. В произвольной системе координат в $\mathbf{E}_n$ координаты вектора $\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]$ вычисляются следующим образом:

$$b^j = \widetilde{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_{n-1}\cdot}{}^{j} a_1^{i_1} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\varepsilon}_{i_1 \ldots i_{n-1}\cdot}{}^{j} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} k} g^{kj}.$$

Доказательство. Действительно, поскольку $\widetilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x})$, то $b_k = \varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} k} a_1^{i_1} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}}$ и $b^j = b_k g^{kj} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} j} g^{jm} a_1^{i_1} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}}$.

Поведение объемов при аффинных преобразованиях.

Пусть аффинное преобразование $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_k\}$ задано уравнениями $y^i = \alpha_j^i x^j + b^i$. Объем $\mathrm{vol}\,(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ n-мерного параллелепипеда $\mathrm{P}\,(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ в соответствии с формулой (35) равен $|\det \|u_k^j\|\,|$. При аффинном преобразовании α параллелепипед $\mathrm{P}\,(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ переходит в параллелепипед $\mathrm{P}\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, где $\mathbf{v}_k = \widehat{\alpha}(\mathbf{u}_k$, $v_k^i = \alpha_j^i u_k^j$. Поэтому $\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = |\det \|v_k^i\|\,| = |\det \|\alpha_j^i u_k^j\|\,| = |\det \|\alpha_j^i\|\,| \cdot |\det \|u_k^\ell\|\,| = |\det \|\alpha_j^i\|\,| \cdot \mathrm{vol}\,(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Таким образом, для n-мерных тел в $\mathcal{E}_n$, для которых определено понятие объема (например, для многогранников), справедливо следующее предложение.

Предложение. *Пусть при аффинном преобразовании $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ n-мерное тело $\Phi \subset \mathcal{E}_n$ переходит в тело Φ'. Тогда отношение объемов* $\mathrm{vol}\,(\Phi')/\mathrm{vol}\,(\Phi)$ *есть величина постоянная для данного аффинного преобразования α, равная объему образа n-мерного куба с ребром длины единица.*

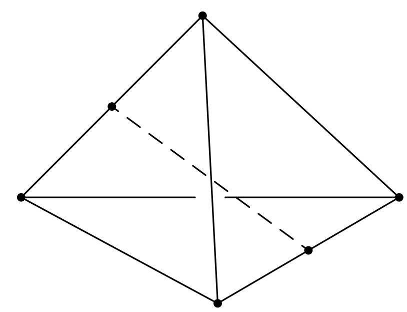
Если ребра n-мерного куба с ребром длины единица представляют собой векторы $\{\mathbf{e}_k\}$ ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_k\}$, то этот куб задается системой неравенств $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение. *Аффинное преобразование* $\alpha : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ *называется эквиаффинным, если приэтом преобразовании объемы тел не изменяются.*

Аффинное преобразование α является эквиаффинным тогда и только тогда, когда в системе координат, определяемой ортонормированным репером, $|\det \|\alpha^i_j\| \,| = 1$.

Задача 12. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

Решение. Всякий тетраэдр можно перевести аффинным преобразованием в правильный тетраэдр. Поскольку отношение объемов тел сохраняется при аффинных преобразованиях, то задачу достаточно решить для правильного тетраэдра. Но прямая, соединяющая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии.



3 Гиперповерхности второго порядка в аффинном пространстве.

Рассматриваем аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ вместе с некоторой его комплексификацией $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.

Определение. *Гиперповерхностью второго порядка в $\mathcal{A}_n$ называется множество точек $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, которое в системе координат, определяемой некоторым аффинным репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$ пространства $\mathcal{A}_n$, задается уравнением второй степени*

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \qquad a_{ij}, a_{i\,n+1} \in \mathbf{R}. \tag{42}$$

Множество $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, очевидно, не является пустым. Придавая $(n-1)$-ой координате произвольные значения (из $\mathbf{C}$), получим квадратное уравнение, которое разрешимо над $\mathbf{C}$.

Многочлен в левой части уравнения (42) будем обозначать для краткости $F(x^k)$ или $F(x^1, \ldots, x^n)$.

Каждое произведение $x^k x^\ell$ при фиксированных значениях индексов $k \neq \ell$ встречается в сумме $a_{ij}x^i x^j$ в уравнении (42) два раза: $x^k x^\ell$ с коэффициентом $a_{k\ell}$ и $x^\ell x^k$ с коэффициентом $a_{\ell k}$. Например, $x^2 x^5$ содержится в слагаемых $a_{25}x^2 x^5$ и $a_{52}x^5 x^2$. В дальнейшем всегда считаем, что $a_{ij} = a_{ji}$. При этом уравнение (42) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x^i)^2 + \sum_{i<j}^{n} 2a_{ij}x^i x^j + \sum_{i=1}^{n} 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0.$$

Множество Φ при $n = 2$ называется кривой второго порядка, а при $n = 3$ — поверхностью второго порядка. В соответствии с принятым соглашением уравнение кривой второго порядка в $\mathcal{A}_2$ записывается в виде

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1 x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + +2a_{23}x^2 + a_{33} = 0,$$

а уравнение поверхности второго порядка в $\mathcal{A}_3$ — в виде

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1 x^2 + 2a_{13}x^1 x^3 + 2a_{23}x^2 x^3 +$$
$$+2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0.$$

В дальнейшем будем также всегда полагать, что $a_{n+1\,j} = a_{j\,n+1}$. Тогда из коэффициентов уравнения (42) можно составить две следующие симметричные матрицы: $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ и $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n+1$. Матрица $A = (a_{ij})$ состоит из коэффициентов при $x^i x^j$, а в матрице $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ присутствуют все коэффициенты. Например, при $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Оказывается, что матрицы A и $\widetilde{A}$ являются матрицами некоторых квадратичных форм, ассоциированных с уравнением (42).

Преобразование коэффициентов уравнения (42) при замене аффинного репера.

Отметим, что предметом исследования в настоящий момент является уравнение (42), а не определяемая им гиперповерхность Φ. Так умножение многочлена $F(x^k)$ в левой части уравнения (42) на ненулевое вещественное число не изменяет множество Φ, но изменяет само уравнение.

Рассмотрим новую систему координат в $\mathcal{A}_n$, определяемую репером $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$. При переходе к новому реперу координаты точек в $\mathcal{A}_n$ преобразуются следующим образом:

$$x^i = p^i_{i'} x^{i'} + b^i. \tag{43}$$

Подставляя выражения (43) в уравнение (42), получим уравнение $F'(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = 0$ гиперповерхности Φ в новой системе координат. Имеем

$$F(x^k) = a_{ij} x^i x^j + 2a_{i\,n+1} x^i + a_{n+1\,n+1} =$$
$$a_{ij}(p^i_{i'} x^{i'} + b^i)(p^j_{j'} x^{j'} + b^j) + 2a_{i\,n+1}(p^i_{i'} x^{i'} + b^i) + a_{n+1\,n+1} =$$
$$(a_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'}) x^{i'} x^{j'} + (a_{ij} p^i_{i'} x^{i'} b^j + a_{ij} b^i p^j_{j'} x^{j'} + 2a_{i\,n+1} p^i_{i'} x^{i'}) +$$
$$+(a_{ij} b^i b^j + 2a_{i\,n+1} b^i + a_{n+1\,n+1}) = a_{i'j'} x^{i'} x^{j'} + 2a_{i'\,n+1'} x^{i'} + a_{n+1'\,n+1'} = F(x^{k'}).$$

Собирая подобные члены (учитывая симметричность матрицы (a_{ij}) и меняя индексы суммирования в случае необходимости), получим

$$a_{i'j'} = a_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'}, \quad a_{i'\,n+1'} = (a_{ij} b^j + a_{i\,n+1}) p^i_{i'}, \quad a_{n+1'\,n+1'} = F(b^1, \ldots, b^n). \tag{44}$$

Следствие 1. *Степень уравнения (42) инвариантна относительно преобразования координат.*

Следствие 2. *Формулой $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^iu^j$ инвариантно (независимо от выбора системы координат) определяется квадратичная форма на векторном пространстве $\mathbf{V}_n$, ассоциированном с аффинным пространством $\mathcal{A}_n$.*

Доказательство. Из первой формулы (44) получаем

$$a_{i'j'}u^{i'}u^{j'} = (a_{ij}p^i_{i'}p^j_{j'})u^{i'}u^{j'} = a_{ij}(p^i_{i'}u^{i'})(p^j_{j'}u^{j'}) = a_{ij}u^iu^j.$$

□

Матрица $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ является матрицей квадратичной формы, определенной на некотором $(n+1)$-мерном векторном пространстве. Она является матрицей аналогичной матрице $A = (a_{ij})$ для некоторой гиперповерхности в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве, а именно, матрица $\widetilde{A}$ ассоциирована с конусом $\widetilde{\Phi}$ в $\mathcal{A}_{n+1}$, направляющей которого является поверхность Φ. Уравнение этого конуса имеет вид $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$. Рассмотрим эту конструкцию подробнее.

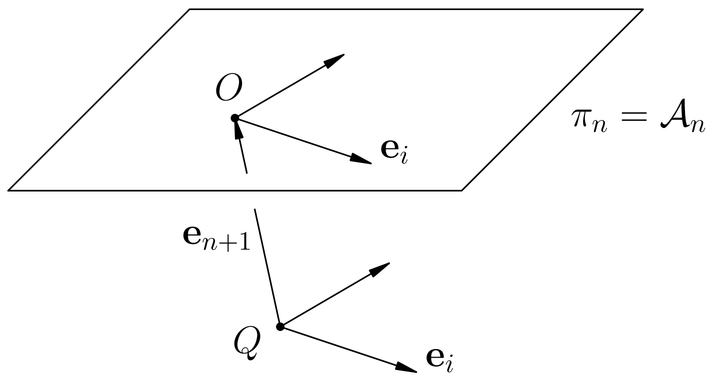
Поместим аффинное пространство $\mathcal{A}_n$ как гиперплоскость π_n в некоторое аффинное пространство $\mathcal{A}_{n+1}$, т. е. осуществим некоторый изоморфизм

$$\varphi : \mathcal{A}_n \to \pi_n \subset \mathcal{A}_{n+1}.$$

При этом

$$\varphi^{\mathbf{C}} : \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}} \to \pi_n^{\mathbf{C}} \subset \mathcal{A}_{n+1}^C.$$

В качестве пространства $\mathcal{A}_{n+1}$ можно взять, например, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{R}$. Далее, выберем и зафиксируем точку $Q \in \mathcal{A}_{n+1}$, не принадлежащую гиперплоскости π_n. В случае пространства $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n \oplus \mathbf{R}$ можно взять $Q = 0$ и $\pi_n = \mathbf{V}_n \oplus 1$. Реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в пространстве $\mathcal{A}_n \equiv \pi_n$ сопоставим репер $\{Q; \mathbf{e}_\alpha\} = \{Q; \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1} = \overrightarrow{QO}\}$ в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$.



При этом в системе координат, определяемой репером $\{Q; \mathbf{e}_\alpha\}$, гиперплоскость π_n будет иметь уравнение $x^{n+1} = 1$, а произвольная точка $M \in \pi_n$ будет иметь координаты $(x^1, \ldots, x^n; x^{n+1} = 1)$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты этой точки по отношению к реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Гиперповерхность $\Phi \subset \mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, рассматриваемая как подмножество в $\mathcal{A}_{n+1}^C$, задается системой уравнений

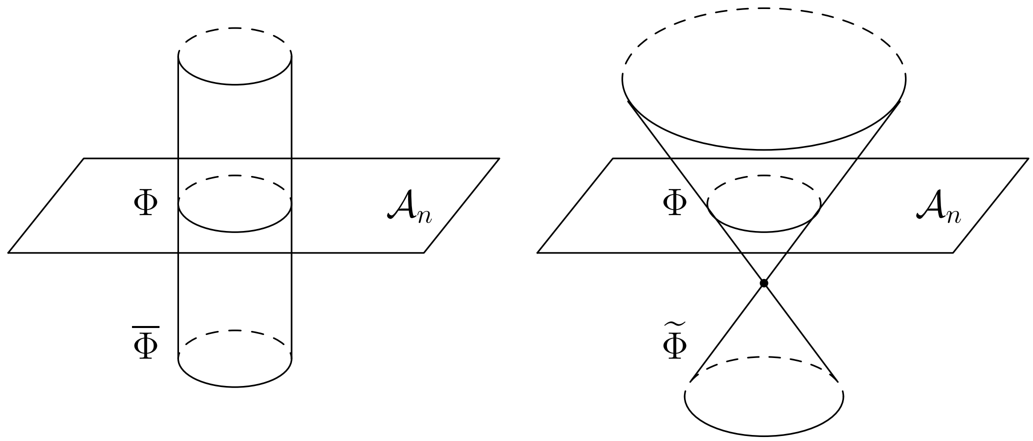
$$x^{n+1} = 1, \quad a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \tag{45}$$

которая эквивалентна системе уравнений

$$x^{n+1} = 1, \quad a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i x^{n+1} + a_{n+1\,n+1}x^{n+1}x^{n+1} = 0. \tag{46}$$

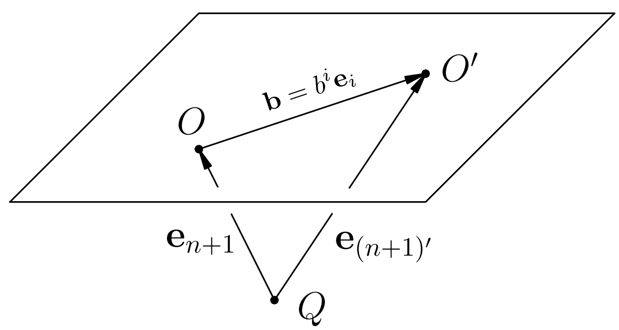
Второе из уравнений системы (45) задает в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ гиперповерхность $\overline{\Phi}$, называемую *цилиндром* с направляющей $(n-1)$-мерной поверхностью Φ. над Φ. Второе из уравнений системы (46): $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ является однородным. Если этому уравнению удовлетворяет некоторый набор чисел (x_0^α), то и набор (tx_0^α) при всяком $t \in \mathbf{R}$ также будет ему удовлетворять. Таким образом, вместе с каждой точкой M_0 гиперповерхность $\widetilde{\Phi}$ содержит всю прямую QM. Гиперповерхность $\widetilde{\Phi}$ называется *конусом* с вершиной Q и направляющей $(n-1)$-мерной поверхностью Φ.

Гиперповерхность Φ при этом представляется в виде пересечения $\Phi = \widetilde{\Phi} \cap \pi_n$.



Переходу (43) от репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ к реперу $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$ в пространстве $\mathcal{A}_n$ соответствует в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$ переход от репера репера $\{Q; \mathbf{e}_\alpha\}$ к реперу $\{Q; \mathbf{e}_{\alpha'}\}$, где преобразование базиса $\mathbf{e}_{\alpha'} = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha$ имеет вид ($\mathbf{e}_{(n+1)'} = \overrightarrow{QO'} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OO'} = \mathbf{e}_{n+1} + \overrightarrow{OO'}$):

$$\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{(n+1)'} = \mathbf{e}_{n+1} + b^i\mathbf{e}_i\,. \tag{47}$$



Из уравнений (47) следует, что матрица $\widetilde{P} = (\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'})$ преобразования базиса имеет следующий вид: $\widetilde{p}^i_{i'} = p^i_{i'}$, $\widetilde{p}^{\alpha}_{i'} = 0$, $\widetilde{p}^i_{(n+1)'} = b^i$, $\widetilde{p}^{(n+1)'}_{(n+1)'} = 1$, то есть,

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} & & & b^1 \\ & P & & \vdots \\ & & & b^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $P = (p^i_{i'})$. Этому преобразованию репера соответствует преобразование координат $x^\alpha = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}x^{\alpha'}$ (начало репера не изменяется) в пространстве $\mathcal{A}_{n+1}$, имеющее вид

$$x^i = p^i_{i'}x^{i'} + b^i x^{n+1'}, \quad x^{n+1} = x^{n+1'}\,. \tag{48}$$

Матрицы $\widetilde{A} = (a_{\alpha\beta})$ и $\widetilde{A}' = (a_{\alpha'\beta'})$, составленные соответственно, из коэффициентов уравнений уравнений $F(x^k) = 0$ и $F'(x^{k'}) = 0$, определяющих гиперповерхность Φ в двух различных системах координат, являются одновременно и матрицами составленными из коэффициентов при произведениях $x^\alpha x^\beta$ и $x^{\alpha'} x^{\beta'}$ в уравнениях гиперповерхности $\widetilde{\Phi}$. Однако, поскольку связь между уравнениями гиперповерхностей и самими гиперповерхностями не является однозначной, а также, поскольку конус $\widetilde{\Phi}$ может содержать прямолинейные образующие, параллельные гиперплоскости π_n, мы не можем отсюда сразу заключить, что $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}(w^\alpha w^\beta)$ — квадратичная форма на $\mathbf{V}_{n+1}$, не зависящая от выбора системы координат в $\mathcal{A}_n$.

Координаты вектора $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_{n+1}$ при преобразовании координат (48) преобразуются по такому же закону (48), поскольку начало репера в $\mathcal{A}_{n+1}$ не изменяется, то есть

$$w^i = p^i_{i'} w^{i'} + b^i w^{(n+1)'}, \quad w^{n+1} = w^{(n+1)'}\,. \tag{49}$$

Подставляя в $a_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta$ выражения (44) и (49), получаем:

$$a_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta = a_{ij} w^i w^j + 2a_{i\,n+1} w^i w^{n+1} + a_{n+1\,n+1} w^{n+1} w^{n+1} =$$

$$= a_{ij}(p^i_{i'} w^{i'} + b^i w^{(n+1)'})(p^j_{j'} w^{j'} + b^j w^{(n+1)'}) + 2a_{i\,n+1}(p^i_{i'} w^{i'} + b^i w^{(n+1)'}) w^{(n+1)'} +$$

$$+ a_{n+1\,n+1} w^{(n+1)'} w^{(n+1)'} = (a_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'}) w^{i'} w^{j'} + 2(a_{ij} b^j + a_{i\,n+1}) p^i_{i'} w^{i'} w^{(n+1)'} +$$

$$+ (a_{ij} b^i b^j + 2a_{i\,n+1} b^i + a_{n+1\,n+1}) w^{(n+1)'} w^{(n+1)'} =$$

$$= a_{i'j'} w^{i'} w^{j'} + 2a_{i'\,(n+1)'} w^{i'} w^{(n+1)'} + a_{n+1\,n+1} w^{(n+1)'} w^{(n+1)'} = a_{\alpha'\beta'} w^{\alpha'} w^{\beta'}.$$

Таким образом, $\widetilde{\varphi}(\mathbf{w}) = a_{\alpha\beta}(w^\alpha w^\beta)$ — корректно определенная квадратичная форма.

Аффинные инварианты уравнения гиперповерхности в $\mathcal{A}_n$.

Определение. *Аффинным инвариантом уравнения (42) гиперповерхности второго порядка в пространстве $\mathcal{A}_n$ называется всякая функция $I(a_{11}, \ldots, a_{n+1\,n+1})$ от коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при замене аффинного репера в $\mathcal{A}_n$.*

Как следствие предыдущих рассуждений, получаем:

Предложение. *Инварианты квадратичных форм φ и $\widetilde{\varphi}$, ассоциированных с уравнением (42) гиперповерхности второго порядка, а именно, ран-*

ги, сигнатуры, положительные и отрицательные индексы инерции, являются аффинными инвариантами этого уравнения. Кроме того, инвариантами являются знаки определителей $\det A$ *и* $\det \widetilde{A}$*.*

Пересечение гиперповерхности второго порядка с прямой.

Рассмотрим прямую ℓ в $\mathcal{A}_n$ с направляющим вектором $\mathbf{v}$, проходящую через точку M_0. Эта прямая имеет следующие уравнения: $x^i = x_0^i + tv^i$. Для выяснения ее расположения по отношению к гиперповерхности Φ подставим ее уравнения в уравнение гиперповерхности. Имеем:

$$a_{ij}(x_0^i + tv^i)(x_0^j + tv^j) + 2a_{i\,n+1}(x_0^i + tv^i) + a_{n+1\,n+1} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(a_{ij}v^iv^j)t^2 + 2t(a_{ij}x_0^jv^i + a_{i\,n+1}v^i) + F(x_0^k) = 0 \tag{50}$$

Коэффициент при t в первой степени в уравнении (50) можно представить в виде $F_i(x_0^k)v^i$, где $F_i(x^k) = 2(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1}) = \partial F/\partial x^i$, после чего уравнение (50) принимает вид.

$$\varphi(\mathbf{v})t^2 + F_i(x_0^k)v^it + F(x_0^k) = 0. \tag{51}$$

Определение. *Вектор* $\mathbf{v}$ *называется асимптотическим вектором квадратичной формы* φ*, если* $\varphi(\mathbf{v}) = 0$*. Прямая* ℓ *называется прямой асимптотического направления относительно гиперповерхности второго порядка* Φ*, если ее направляющий вектор* $\mathbf{v}$ *является асимптотическим вектором квадратичной формы* φ*, ассоциированной с уравнением этой гиперповерхности, то есть, если* $a_{ij}v^iv^j = 0$*.*

Первый случай: прямая ℓ имеет неасимптотическое направление.

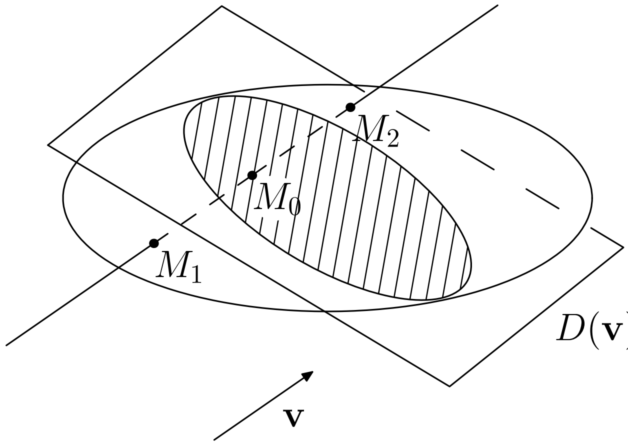
В этом случае уравнение (51) имеет два решения (вообще говоря, комплексные) t_1 и t_2, и, следовательно, ℓ пересекает Φ в двух точках M_1 и M_2 (которые, вообще говоря, принадлежат $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$).

Определение. *Отрезок (а иногда и вся прямая)* M_1M_2 *называется хордой гиперповерхности* Φ*.*

Середине хорды M_1M_2 соответствует значение параметра t, равное $\dfrac{t_1 + t_2}{2}$. Пусть серединой хорды является точка $M_0(x_0^i)$ (это произвольная точка прямой ℓ, на которую не было наложено никаких ограничений!). Тогда

$\dfrac{t_1 + t_2}{2} = t_0 = 0$, и по теореме Виета для квадратного уравнения (51) получаем:

$$F_i(x_0^k)v^i = 0 \qquad \text{или} \qquad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})v^i = 0.$$



Таким образом, если некоторая хорда гиперповерхности Φ имеет неасимптотическое направление, то ее середина удовлетворяет уравнению

$$(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{52}$$

Определение. *Точка C называется центром гиперповерхности Φ, если все хорды, проходящие через эту точку, делятся в ней пополам, то есть, если C — центр симметрии гиперповерхности Φ.*

Всегда можно выбрать n линейно независимых неасимптотических векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Например, если $\mathbf{e}_{\hat{\imath}}$ — базис в $\mathbf{V}_n$, в котором квадратичная форма φ имеет канинический вид $\sum_{\hat{k}=\hat{1}}^{\hat{r}} \pm(x^{\hat{k}})^2$, то можно взять $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_{\hat{k}}$ при $k = 1, \ldots, r$ и $\mathbf{v}_k = \mathbf{e}_{\hat{k}} + \mathbf{e}_{\hat{1}}$ при $k = r+1, \ldots, n$). Подставляя каждый из этих векторов в (52), приходим к тому, что координаты x_C^i центра C, если он существует, удовлетворяют системе уравнений

$$(a_{ij}x_C^j + a_{i\,n+1})v_k^i = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Так как матрица (v_k^i) невырождена, то система уравнений (53) эквивалентна следующей:

$$a_{ij}x^j + a_{i\,n+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{54}$$

которую можно также записать в виде

$$F_i(x^j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Система уравнений (54) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$, то есть когда $\operatorname{rank}\varphi = n$. В этом случае гиперповерхность Φ имеет единственный центр C.

Определение. *Гиперповерхность* Φ *называется центральной, если*

$$\det(a_{ij}) \neq 0.$$

Если гиперповерхность Φ не является центральной, то либо она не имеет ни одного центра (когда система (54) не совместна), либо все центры гиперповерхности образуют m-мерную плоскость, где $m = n - \operatorname{rank}\varphi$.

Второй случай: прямая ℓ имеет асимптотическое направление.

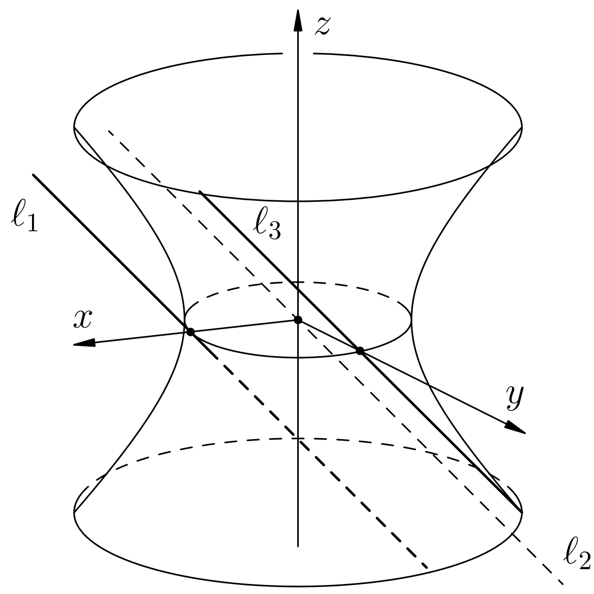
В этом случае уравнение (51) принимает вид

$$F_i(x_0^k)v^i t + F(x_0^k) = 0. \tag{55}$$

Отсюда следует, что прямая ℓ, имеющая асимптотическое направление, либо имеет одну общую точку с гиперповерхностью Φ (этот случай нужно отличать от случая, когда две точки пересечения прямой и гиперповерхности совпадают, и прямая *касается* гиперповерхности), либо $\ell \cap \Phi = \varnothing$ (нет ни одной общей точки в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$, ни вещественной, ни комплексной; этот случай имеет место, когда $F_i(x_0^k)v^i = 0$, а $F(x_0^k) \neq 0$), либо прямая ℓ целиком лежит на гиперповерхности Φ (при $F_i(x_0^k)v^i = F(x_0^k) = 0$).

Приведем примеры рассмотренных трех случаев расположения прямой асимптотического направления по отношению к гиперповерхности второго порядка.

Примеры. Направление $\mathbf{a} = \{1; 0; 1\}$ является асимптотическим для однополостного гиперболоида Φ: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Прямая ℓ_1: $x = z + 1, y = 0$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет одну общую точку $(1; 0; 0)$ с Φ; прямая ℓ_2: $x = z, y = 0$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ не имеет ни одной общей точки с Φ; прямая ℓ_3: $x = z, y = 1$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ целиком лежит на гиперболоиде Φ.



Перенос начала координат в центр гиперповерхности.

Пусть точка $C(x^i_C)$ — некоторый центр гиперповерхности Φ (могут быть и другие центры, то есть единственность центра не предполагается). Выбем новую систему координат с началом в центре C, и пусть $x^i = p^i_{i'}x^{i'} + x^i_C$ — соответствующее преобразование координат. Из формул преобразования коэффициентов уравнения гиперповерхности (44) следует, что в новой системе координат

$$a_{i'\,n+1'} = (a_{ij}x^j_C + a_{i\,n+1})p^i_{i'} = 0.$$

Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение. *Если начало координат находится в центре гиперповерхности второго порядка Φ, то уравнение гиперповерхности не содержит членов первой степени:*

$$a_{ij}x^ix^j + a_{n+1\,n+1} = 0 \tag{56}$$

Вектор $\mathbf{v}$ является асимптотическим для гиперповерхности (56), если $a_{ij}v^iv^j = 0$. Если в уравнении (56) $a_{n+1\,n+1} \neq 0$, то прямая ℓ: $x^i = v^it$ асимптотического направления, проходящая через центр C, не имеет с Φ ни одной общей точки. Множество точек всех таких прямых образует гиперповерхность второго порядка Ψ с уравнением

$$a_{ij}x^ix^j = 0. \tag{57}$$

Определение. *Гиперповерхность* Ψ *с уравнением* (57) *называется асимптотическим конусом гиперповерхности* Φ.

Пример. Конус Ψ: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ является асимптотическим конусом однополостного гиперболоида Φ: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Диаметральные плоскости.

Пусть $\mathbf{v}$ — фиксированный неасимптотический вектор гиперповерхности второго порядка Φ. Середина всякой хорды, имеющей направляющий вектор $\mathbf{v}$, удовлетворяет уравнению (52):

$$(a_{ij}x^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{58}$$

Определение. *Гиперплоскость* $D(\mathbf{v})$, *имеющая уравнение* (58), *называется диаметральной гиперплоскостью, сопряженной неасимптотическому направлению* $\mathbf{v}$.

Напомним, что симметричная билинейная форма ψ, ассоциированная с квадратичной формой φ, имеет вид $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}))$. При этом $\varphi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, и если в координатах $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^iu^j$, то $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b_{ij}u^iv^j$.

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются *сопряженными относительно квадратичной формы* $\varphi(\mathbf{u}) = a_{ij}u^iu^j$, если $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{ij}u^iv^j = 0$.

Замечание. Уравнение (58) диаметральной плоскости сохраняет смысл и в случае асимптотического вектора $\mathbf{v}$, если этот вектор не принадлежит ядру симметричной билинейной формы $a_{ij}u^iw^j$, то есть если $b_j = a_{ij}v^i$ не является нулевой линейной формой (хотя бы одно из чисел $b_1, \dots, b_n$ отлично от нуля.

Определение. *Векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *называются сопряженными относительно гиперповерхности* Φ, *если они сопряжены относительно квадратичной формы* φ, *ассоциированной с уравнением этой гиперповерхности, то есть если* $a_{ij}u^iv^j = 0$.

Свойства диаметральных плоскостей.

1°. Если гиперповерхность Φ имеет центр C, то этот центр лежит на всякой диаметральной плоскости $D(\mathbf{v})$.

2°. Вектор $\mathbf{u}$ принадлежит направляющему подпространству $\mathbf{V}_{n-1}(D(\mathbf{v}))$

диаметральной гиперплоскости $D(\mathbf{v})$ тогда и только тогда, когда он сопряжен вектору $\mathbf{v}$ относительно гиперповерхности Φ.

Действительно, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_{n-1}(D(\mathbf{v}))$ тогда и только тогда, когда набор его координат $\{u^j\}$ является решением однородного уравнения $a_{ij}v^i x^j = 0$, соответствующего неоднородному уравнению (58). $\square$

Касательные гиперплоскости гиперповерхности второго порядка.

Пусть точка $M_0(x_0^i)$ принадлежит гиперповерхности Φ и ℓ: $x^i = x_0^i + v^i t$ — прямая, проходящая через M_0. Поскольку $M_0(x_0^i) \in \Phi$, то $F(x_0^i) = 0$, и уравнение (51) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{v})t^2 + F_i(x_0^k)v^i t = 0. \tag{59}$$

Точку $M_0(x_0^i)$ будем называть *двойной* точкой пересечения ℓ и Φ, если уравнение (59) имеет два совпадающих корня $t_1 = t_2 = 0$. Для того, чтобы точка M_0 была двойной точкой пересечения прямой ℓ неасимптотического направления и гиперповерхности Φ, необходимо и достаточно, чтобы

$$F_i(x_0^k)v^i = 0 \quad \text{или} \quad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})v^i = 0. \tag{60}$$

Определение. *Точка M_0 гиперповерхности Φ называется неособой, если линейная форма $\nabla F(M_0)$ с координатами $\{F_1(x_0^k), \ldots, F_n(x_0^k)\}$ не является нулевой.*

Задача 13. Проверить, что линейная форма $\nabla F(M_0)$ не зависит от выбора репера в $\mathcal{A}_n$, а именно, $F_{i'}(x_0^{k'}) = p_{i'}^i F_i(x_0^k)$.

Определение. *Если точка M_0 неособая, то множество $T_{M_0}\Phi$ векторов $\mathbf{v}$, удовлетворяющих уравнению (60), является подпространством размерности $n-1$ в $\mathbf{V}_n$. Это подпространство называется касательным векторным пространством гиперповерхности Φ в точке M_0.*

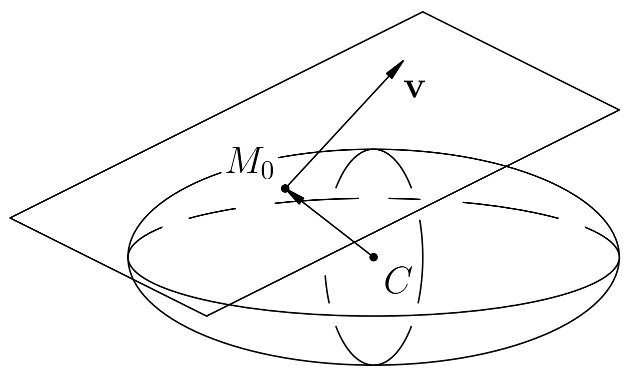
Гиперплоскость $\pi_{M_0}(\Phi)$, проходящая через неособую точку M_0 гиперповерхности Φ и имеющая направляющее подпространство $T_{M_0}\Phi$, называется касательной гиперплоскостью гиперповерхности Φ в точке M_0.

Из (60) следует, что касательная гиперплоскость $\pi_{M_0}(\Phi)$ имеет уравнение

$$F_i(x_0^k)(x^i - x_0^i) = 0 \quad \text{или} \quad (a_{ij}x_0^j + a_{i\,n+1})(x^i - x_0^i) = 0. \tag{61}$$

Свойства касательных гиперплоскостей гиперповерхности второго порядка.

1°. Если гиперповерхность Φ имеет центр $C(x^i_C)$, то $\mathbf{v} \in T_{M_0}\Phi$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\overrightarrow{CM_0}$ сопряжены относительно Φ.



Доказательство. Поскольку $C(x^i_C)$ — центр гиперповерхности Φ, то $a_{ij}x^j_C + a_{i\,n+1} = 0$. Поэтому для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ выполняется соотношение $(a_{ij}x^j_C + a_{i\,n+1})v^i = 0$. Вычитая это соотношение из уравнения (60) касательного векторного пространства гиперповерхности Φ в точке M_0, получим уравнение $a_{ij}(x^j_0 - x^j_C)v^i = 0$, эквивалентное уравнению (60). $\square$

Из этого свойства следует, что касательное пространство и касательная гиперплоскость гиперповерхности, имеющей центр, могут быть заданы, соответственно, следующими уравнениями:

$$a_{ij}(x^j_0 - x^j_C)v^i = 0 \qquad \text{и} \qquad a_{ij}(x^j_0 - x^j_C)(x^i - x^j_0) = 0.$$

В частности, если начало координат является центром гиперповерхности ($C = O$, $x^j_C = 0$), то касательная гиперплоскость имеет уравнение

$$a_{ij}x^j_0x^i + a_{n+1\,n+1} = 0.$$

Пример. Касательные плоскости гиперболоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ имеют уравнения $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - \dfrac{z_0z}{c^2} = 1$.

2°. Если прямая ℓ, имеющая асимптотическое направление, проходит через неособую точку M_0 гиперповерхности Φ и лежит в касательной гиперплоскости $\pi_{M_0}(\Phi)$, то прямая ℓ целиком принадлежит гиперповерхности: $\ell \subset \Phi$.

Доказательство. Из уравнений (59) и (60) следует, что каждая точка прямой ℓ удовлетворяет уравнению гиперповерхности Φ. $\square$

3°. Пересечение $\pi_{M_0}(\Phi) \cap \Phi$ гиперповерхности Φ со своей касательной гиперплоскостью $\pi_{M_0}(\Phi)$ предствляет собой конус в гиперплоскости $\pi_{M_0}(\Phi)$ с вершиной в точке M_0.

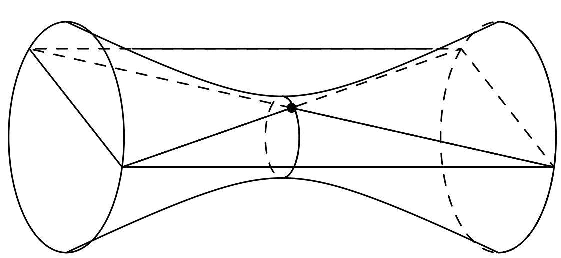
Доказательство. Перенесем начало координат в точку M_0, тогда координаты этой точки будут нулевыми: $x_0^i = 0$. Подставляя $x_0^i = 0$ в уравнение (42) гиперповерхности Φ, получим $a_{n+1\,n+1} = 0$. Поэтому уравнение гиперповерхности примет вид $a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i = 0$. Подставляя $x_0^i = 0$ в уравнение (61) касательной гиперплоскости $\pi_{M_0}(\Phi)$, получим уравнение $a_{i\,n+1}x^i = 0$. Таким образом, пересечение $\pi_{M_0}(\Phi) \cap \Phi$ задается системой уравнений

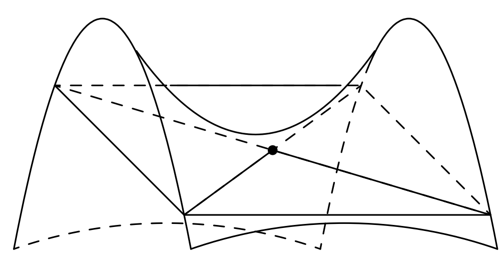
$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i = 0, \quad a_{i\,n+1}x^i = 0,$$

которая эквивалентна следующей системе

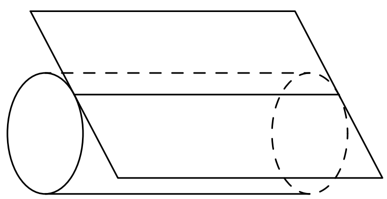
$$a_{ij}x^ix^j = 0, \quad a_{i\,n+1}x^i = 0. \qquad \square$$

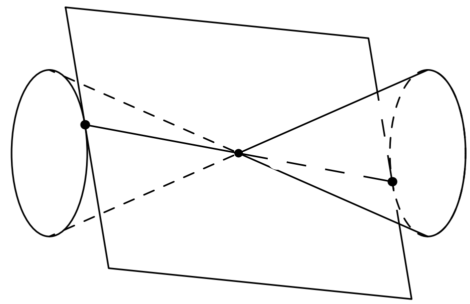
Примеры: Касательные плоскости однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов в $\mathcal{A}_3$ пересекают эти поверхности по прямолинейным образующим.





Касательные плоскости цилиндров и конусов в $\mathcal{A}_3$ касаются этих поверхностей вдоль прямолинейных образующих. Вершины конусов — особые точки этих поверхностей. Касательные плоскости в таких точках не определены.





Определение. *Прямая ℓ, проходящая через неособую точку M_0 гиперповерхности Φ и лежащая в касательной плоскости $\pi_{M_0}(\Phi)$, называется касательной прямой гиперповерхности Φ.*

Если касательная прямая ℓ имеет неасимптотическое направление в точке касания M_0, то точка M_0 является двойной точкой пересечения ℓ и Φ.

Пересечение гиперповерхности второго порядка с m-плоскостью.

Пусть в пространстве $\mathcal{A}_n$ заданы гиперповерхность второго порядка Φ, имеющая уравнение

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0, \tag{62}$$

и m-плоскость π_m с параметрическими уравнениями

$$x^i = b^i_A y^A + b^i, \tag{63}$$

где $\{y^A\}$ — координаты в π_m, определяемые некоторым репером $\{M_0, \mathbf{b}_A\}$, $A, B = 1, \ldots, m$. Подставляя уравнения (63) в уравнение (62), получим уравнение, которому удовлетворяют координаты $\{y^A\}$ общих точек m-плоскости π_m и гиперповерхности Φ. Имеем:

$$a_{ij}(b^i_A y^A + b^i)(b^j_B y^B + b^j) + 2a_{i\,n+1}(b^i_A y^A + b^i) + a_{n+1\,n+1} = 0 \iff$$

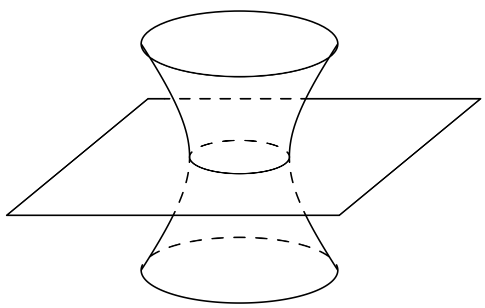
$$(a_{ij}(b^i_A b^j_B)y^A y^B + 2(a_{i\,n+1}b^j + a_{n+1\,n+1})b^i_A y^A +$$

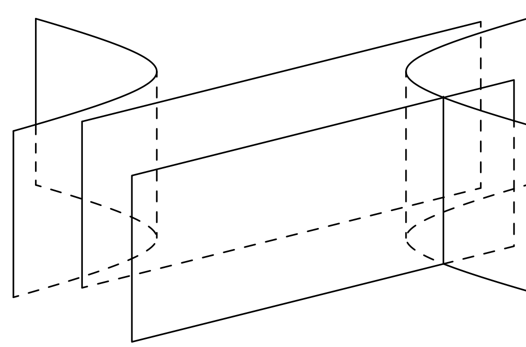
$$+ a_{ij}b^ib^j + 2a_{i\,n+1}b^i + a_{n+1\,n+1} = 0 \iff$$

$$c_{AB}y^Ay^B + 2c_{A\,m+1}y^A + c_{m+1\,m+1} = 0. \tag{64}$$

Если квадратичная форма $c_{AB}u^Au^B$, являющаяся ограничением квадратичной формы φ на направляющее подпространство $\mathbf{V}_m$ m-плоскости π_m, не является нулевой, то уравнение (64) задает гиперплоскость второго порядка в m-мерном аффинном пространстве π_m. Если квадратичная форма $c_{AB}u^Au^B$ нулевая, то уравнение (64) либо задает плоскость размерности $m-1$, либо задает пустое множество (если все $c_{A\,m+1}=0$, а $c_{m+1\,m+1}\neq 0$.

Примеры. Плоскость $z=0$ пересекает гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$ по эллипсу $x^2+y^2=1$; плоскость $x-y=2$ пересекает гиперболический цилиндр $x^2-y^2=1$ по прямой $x=\dfrac{5}{4}$, $y=-\dfrac{3}{4}$; плоскость $x-y=0$ не имеет с гиперболическим цилиндром $x^2-y^2=1$ общих точек ни вещественных ни комплексных.





4 Классификация гиперповерхностей второго порядка в аффинном пространстве.

Под классификацией гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{A}_n$ понимается определение всех таких гиперповерхностей в $\mathcal{A}_n$ с точностью до аффинного движения. Если при аффинном преобразовании α, устанавливающем соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к реперам $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, гиперповерхность Φ переходит в гиперповерхность Φ', то гиперповерхность Φ' в системе координат, определяемой репером $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, будет иметь такое же уравнение, как и гиперповерхность Φ в системе координат, определяемой репером $\{O; \mathbf{e}_i\}$. Поэтому для классификации гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{A}_n$ нужно классифицировать уравнения (42) таких гиперповерхностей, считая два уравнения эквивалентными, если одно из них может быть переведено в другое заменой аффинного репера, и умножением, если необходимо, на вещественное число.

Рассмотрим сначала подробно классификацию кривых второго порядка на аффинной плоскости $\mathcal{A}_2$.

Выбирая канонический базис и умножая, если необходимо, уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0,$$

на (-1), квадратичную форму φ, ассоциированную с этим уравнением, можно привести к одному из следующих трех видов:

$$\text{I. } (v^1)^2 + (v^2)^2; \qquad \text{II. } (v^1)^2 - (v^2)^2; \qquad \text{III. } (v^1)^2.$$

Кривые, для которых форма φ приводится либо к виду I, либо к виду II, являются *центральными*. Рассмотрим последовательно все возникающие варианты.

I. Кривые, для которых квадратичная форма φ приводится к виду I, называются *кривыми эллиптического типа*.

Перенося в этом случае начало координат в центр кривой, получим уравнение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + a'_{33} = 0. \qquad (65)$$

Если $a'_{33} \neq 0$, то осуществим преобразование координат $x^i = \sqrt{|a'_{33}|}x^{i'}$ и затем поделим преобразованное уравнение кривой на a'_{33}. В результате могут получиться следующие три уравнения (штрихи у индексов опускаем; рядом с уравнениями указаны названия кривых, задаваемых этими уравнениями):

1°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ (эллипс).

2°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$ (мнимый эллипс).

3°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых).

Мнимые прямые в случае 3° имеют уравнения $x^1 = \pm\sqrt{-1}x^2$, они пересекаются в вещественной точке $O(0,0)$.

II. Кривые, для которых квадратичная форма φ приводится к виду II, называются *кривыми гиперболического типа.*

Перенося в этом случае начало координат в центр кривой и осуществляя далее преобразования координат, аналогичные случаю I, приведем уравнение кривой к одному из следующих видов:

4°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$ (гипербола).

5°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ (пара вещественных пересекающихся прямых).

Пересекающиеся прямые в случае 5° имеют уравнения $x^1 = \pm x^2$.

III. Кривые, для которых квадратичная форма φ приводится к виду III, называются *кривыми параболического типа.*

После того, как выбран базис, в котором квадратичная форма φ имеет канонический вид $(v^1)^2$, уравнение кривой принимает вид

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0 \iff$$

$$(x^1 + a_{13})^2 + 2(a_{23}x^2 + \frac{1}{2}a_{33} - \frac{1}{2}(a_{13})^2) = 0.$$

a) Если $a_{23} \neq 0$, то осуществим преобразование координат

$$x^{1'} = x^1 + a_{13}, \quad x^{2'} = -(a_{23}x^2 + \frac{1}{2}a_{33} - \frac{1}{2}(a_{13})^2),$$

в результате чего уравнение приводится к виду

6°. $(x^1)^2 = 2x^2$ (парабола).

b) Если $a_{23} = 0$, то осуществим преобразование координат

$$x^{1'} = x^1 + a_{13}, \quad x^{2'} = x^2,$$

в результате чего уравнение приводится к виду

$$(x^1)^2 + a'_{33} = 0.$$

Если $a_{33'} \neq 0$, то, как и выше, осуществим преобразование координат $x^i = \sqrt{|a_{33'}|}x^{i'}$ и затем поделим преобразованное уравнение кривой на a'_{33}. В результате получим одно из следующих трех уравнений:

7°. $(x^1)^2 = 1$ (пара вещественных параллельных прямых).

8°. $(x^1)^2 = -1$ (пара мнимых параллельных прямых).

9°. $(x^1)^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

По паре совпадающих прямых, например, касательная плоскость пересекает цилиндр.

Уравнения 1°–9° называются *каноническими.*

Теорема. *Специальным выбором репера в $\mathcal{A}_2$ и умножением, если необходимо, на вещественное число, всякое уравнение кривой второго порядка можно привести к одному и только одному виду из списка 1°–9°.*

Доказательство. Остается только доказать, что одно и то же уравнение нельзя привести к двум различным видам из списка 1°–9°. Для этого достаточно убедиться, что любые два уравнения из списка 1°–9° отличаются значениями аффинных инвариантов. Уравнения, принадлежащие разным типам I, II, III, отличаются рангами и сигнатурой квадратичной формы φ. Уравнения, принадлежащие к одному типу, отличаются рангами и сигнатурой квадратичной формы $\widetilde{\varphi}$. Например, с уравнениями 1°, 2° и 3° ассоциированы, соответственно, следующие квадратичные формы $\widetilde{\varphi}$: $(u^1)^2 + (u^2)^2 - (u^3)^2$, $(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$ и $(u^1)^2 + (u^2)^2$. □

Предложение. *Два уравнения $a_{ij}x^ix^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0$ и $b_{ij}x^ix^j + 2b_{i\,n+1}x^i + b_{n+1\,n+1} = 0$ задают одно и то же множество точек в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$ тогда и только тогда, когда они пропорциональны.*

Доказательство. Приведем только набросок доказательства. Ясно, что если это утверждение имеет место в одной системе координат, то оно справедливо и для любой другой системы координат. Поэтому будем считать, что начало координат не удовлетворяет ни одному из указанных уравнений, а базис в ассоциированном $\mathbf{V}_n$ выбран так, что он не является асимптотическим для каждого из двух уравнений. Пусть первое уравнение задает гиперповерхность Φ, а второе — гиперповерхность Ψ.

Если уравнения пропорциональны, то, очевидно, $\Phi = \Psi$.

Если $\Phi = \Psi$, то для любой прямой ℓ имеет место равенство $\Phi \cap \ell = \Psi \cap \ell$. Выбирая прямую ℓ с уравнениями $x^1 = t$, $x^i = 0$ при $i = 2, \dots, n$, получим совпадающие множества точек, задаваемые квадратными уравнениями $a_{11}(x^1)^2 + 2a_{1\,n+1}x^1 + a_{n+1\,n+1} = 0$ и $b_{11}(x^1)^2 + 2b_{1\,n+1}x^1 + b_{n+1\,n+1} = 0$. Отсюда следует, что
$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{a_{1\,n+1}}{b_{1\,n+1}} = \frac{a_{n+1\,n+1}}{b_{n+1\,n+1}}.$$
Варьируя уравнения прямой (выбирая, например, на следующем шаге прямую с уравнениями $x^1 = t$, $x^2 = t$, $x^i = 0$ при $i = 3, \dots, n$), получим пропорциональность всех коэффициентов. Полное доказательство этого утверждения можно найти в [1] (см. теорему на с. 470). $\square$

Определение. *Две гиперповерхности второго порядка Φ и Ψ в $\mathcal{A}_n$ называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное движение $\alpha \in GA(\mathcal{A}_n)$, при котором $\alpha(\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{A}_n^{\mathbf{C}}$.*

Теорема. 1) *Всякая кривая второго порядка Φ в $\mathcal{A}_2$ может быть задана одним и только одним уравнением из списка 1°–9°.*

2) *Две кривые второго порядка в $\mathcal{A}_2$ аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых аффинных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка 1°–9°.*

Доказательство. Первое утверждение следует из доказанного выше предложения. Докажем второе.

Если уравнение кривой Φ в репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ совпадает с уравнением кривой Ψ в репере $\{O'; \mathbf{e}'_i\}$, то аффинное преобразование $\alpha : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, определяемое условиями: $\alpha(O) = O'$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$, переводит Φ в Ψ.

Обратно, пусть кривая Φ имеет в репере $\{O; \mathbf{e}_i\}$ некоторое уравнение $F(x^1, x^2) = 0$ из списка 1°–9° и $\alpha(\Phi) = \Psi$ при некотором аффинном преобразовании $\alpha : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$. Тогда кривая Ψ в репере $\{\alpha(O); \widehat{\alpha}(\mathbf{e}_i)\}$ имеет то же самое уравнение $F(x^1, x^2) = 0$. $\square$

Аналогичная теорема имеет место для поверхностей 2-го порядка в $\mathcal{A}_3$.

Теорема. 1) *Всякая поверхность второго порядка Φ в $\mathcal{A}_3$ может быть задана одним и только одним уравнением из следующего ниже списка из*

17-ти уравнений 1°–17°.

2) *Две поверхности второго порядка в* $\mathcal{A}_3$ *аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых аффинных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка* 1°–17°.

I. Центральные поверхности. Ассоциированная квадратичная форма φ приводится к виду $(v^1)^2 + (v^2)^2 \pm (v^3)^2$.

1°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ (эллипсоид).

2°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1$ (мнимый эллипсоид).

3°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ (мнимый конус).

4°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1$ (однополостный гиперболоид).

5°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1$ (двуполостный гиперболоид).

6°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ (вещественный конус).

II. Параболоиды. Ассоциированная квадратичная форма φ приводится к виду $(v^1)^2 \pm (v^2)^2$. Форма $\widetilde{\varphi}$ невырождена ($\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$).

7°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 2x^3$ (эллиптический параболоид).

8°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 2x^3$ (гиперболический параболоид).

III. Ассоциированная квадратичная форма φ приводится к виду $(v^1)^2 \pm (v^2)^2$. Форма $\widetilde{\varphi}$ вырождена ($\det(a_{\alpha\beta}) = 0$).

9°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ (эллиптический цилиндр).

10°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$ (мнимый эллиптический цилиндр).

11°. $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся плоскостей).

12°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$ (гиперболический цилиндр).

13°. $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ (пара вещественных пересекающихся плоскостей).

IV. Ассоциированная квадратичная форма φ приводится к виду $(v^1)^2$.

14°. $(x^1)^2 = 2x^2$ (параболический цилиндр).

15°. $(x^1)^2 = 1$ (пара вещественных параллельных плоскостей).

16°. $(x^1)^2 = -1$ (пара мнимых параллельных плоскостей).

17°. $(x^1)^2 = 0$ (пара вещественных совпадающих плоскостей).

В пространстве $\mathcal{A}_n$, выбирая подходящий репер, уравнение всякой гиперповерхности можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{q}(x^i)^2 - 2ax^{p+q+1} + b = 0,$$

где: если $\operatorname{rank}\varphi = n$, то $a = 0$, а $b = 0, \pm 1$; если $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, а $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m+2$, то $a = 1$, а $b = 0$; если $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, а $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m+1$, то $a = 0$, а $b = \pm 1$; если $\operatorname{rank}\varphi = m$, $m < n$, а $\operatorname{rank}\widetilde{\varphi} = m$, то $a = 0$ и $b = 0$.

Замечание. Аффинный репер, по отношению к которому гиперповерхность второго порядка имеет каноническое уравнение, определяется не однозначно. Например, эллипс $(x^1)^2+(x^2)^2 = 1$ сохраняет каноническое уравнение при замене координат $x^1 = x^{1'}\cos\alpha - x^{2'}\sin\alpha$, $\quad x^2 = x^{1'}\sin\alpha + x^{2'}\cos\alpha$.

Задача 14. Определить вид поверхности

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1x^2 + x^2x^3 + 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 4 = 0 \tag{66}$$

в аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ и найти преобразование аффинного репера, приводящее уравнение этой поверхности к каноническому виду.

Решение. Применяем метод Лагранжа (см., например, [5], Гл. IV, §5) последовательного выделения полных квадратов. Соберем в уравнении (66) все члены, содержащие x^1 и дополним их до полного квадрата. Тогда уравнение примет вид

$$\Big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1x^2 + 2x^1 - 2x^2 + 1\Big) + x^2x^3 + x^2 - 2x^3 - 5 = 0.$$

Осуществим преобразование координат (для удобства новые координаты будем обозначать другими коренными буквами) $y^1 = x^1 - x^2 + 1$, $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3$. В новой системе координат уравнение принимает вид

$$(y^1)^2 + y^2y^3 + y^2 - 2y^3 - 5 = 0.$$

Поскольку в полученном уравнении среди членов второй степени нет квадратов координат, то применяем преобразование координат, при котором они появляются. Стандартное преобразование имеет вид $y^1 = z^1$, $y^2 = z^2 + z^3$, $y^3 = z^2 - z^3$. При этом уравнение принимает вид $(z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2 - z^2 + 3z^3 - 5 = 0$. Собираем теперь все члены, содержащие z^2 и дополняем их до полного квадрата. Затем осуществляем то же самое с членами, содержащими z^3. Получаем

$$(z^1)^2 + \Big((z^2)^2 - z^2 + \frac{1}{4}\Big) - \Big((z^3)^2 - 3z^3 + \frac{9}{4}\Big) - 3 = 0.$$

После преобразования координат $w^1 = z^1$, $w^2 = z^2 - \frac{1}{2}$, $w^3 = z^3 - \frac{3}{2}$ уравнение принимает вид $(w^1)^2 + (w^2)^2 - (w^3)^2 - 3 = 0$. Полагая окончательно $x^{1'} = \sqrt{3}w^1$, $x^{2'} = \sqrt{3}w^2$, $x^{3'} = \sqrt{3}w^3$, после деления на 3 получаем каноническое уранение

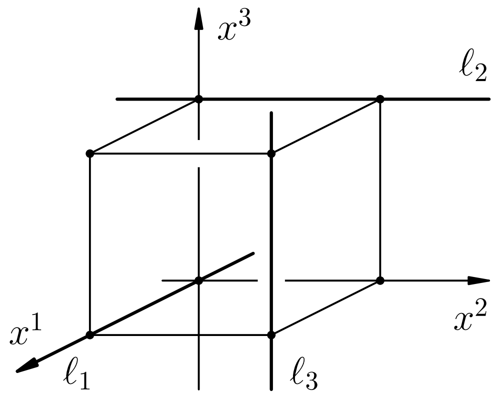
$$(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 = 1. \tag{67}$$

Уравнение (67) является уравнением однополостного гиперболоида. Выражая последовательно $x^{i'}$ через w^i, затем через z^i, y^i и x^i, получим преобразование координат, приводящее уравнение (66) к виду (67):

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \sqrt{3}(x^1 - x^2 + 1), \\ x^{2'} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + x^3 - 1), \\ x^{3'} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - x^3 - 3). \end{aligned}$$

Задача 15. В аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ даны три попарно скрещивающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, направляющие векторы которых линейно независимы. Доказать, что множество Φ точек, принадлежащих прямым ℓ, пересекающим одновременно все три прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, представляет собой однополостный гиперболоид.

Решение. Скрещивающиеся прямые ℓ_1 с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1\mathbf{a}_1$ и ℓ_2 с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t^2\mathbf{a}_2$ лежат в параллельных плоскостях $\ell_1 \subset \pi_1$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2$ и $\ell_2 \subset \pi_2$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda^1\mathbf{a}_1 + \lambda^2\mathbf{a}_2$. Три пары таких плоскостей для данных прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 ограничивают параллелепипед. Принимая одну из вершин этого параллелепипеда за начало координат, а векторы его ребер за базис в $\mathbf{V}_3$, ассоциированном с $\mathcal{A}_3$, получим репер в $\mathcal{A}_3$. В системе координат, определяемой этим репером, данные прямые будут иметь уравнения ℓ_1: $x^2 = x^3 = 0$, ℓ_2: $x^1 = 0$, $x^3 = 1$, а ℓ_3: $x^1 = 1$, $x^2 = 1$.



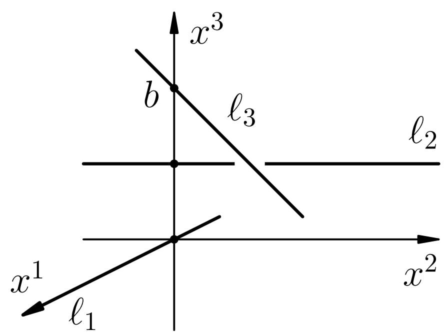
Точка $M(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$ принадлежит множеству Φ тогда и только тогда, когда три плоскости α_1, α_2 и α_3, проходящие через M и одну из прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, принадлежат одному пучку (пересекаются по прямой ℓ, пересекающей все три данные прямые). Эти три плоскости имеют, соответственно, уравнения α_1: $x_0^3 x^2 + x_0^2 x^3 = 0$, α_2: $(1 - x_0^3)x^1 + x_0^1 x^3 - x^0 = 0$ и α_3: $(1 - x_0^2)x^1 + (x_0^1 - 1)x^2 - 1 + x_0^2 - x_0^1$. По построению плоскости α_1, α_2 и α_3 пересекаются (их пересечение содержит точку M), поэтому они будут пересекаться по прямой тогда и только тогда, когда определитель матрицы из коэффициентов при x^1, x^2, x^3 в системе уравнений $x_0^3 x^2 - x_0^2 x^3 = 0$, $(1 - x_0^3)x^1 + x_0^1 x^3 - x^0 = 0$, $(1 - x_0^2)x^1 + (x_0^1 - 1)x^2 - 1 + x_0^2 - x_0^1$ равен нулю, то есть когда

$$\begin{vmatrix} 0 & x_0^3 & -x_0^2 \\ 1 - x_0^3 & 0 & x_0^1 \\ 1 - x_0^2 & x_0^1 - 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим, что $M(x_0^1; x_0^2; x_0^3) \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $x_0^1 x_0^2 - x_0^1 x_0^3 + x_0^2 x_0^3 - x_0^2 = 0$, то есть тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^1 x^2 - x^1 x^3 + x^2 x^3 - x^2 = 0$. Остается только убедиться, что этим уравнением определяется однополостный гиперболоид.

Задача 16. В аффинном пространстве $\mathcal{A}_3$ даны три попарно скрещивающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, направляющие векторы которых линейно зависимы. Доказать, что множество Φ точек, принадлежащих прямым ℓ, пересекающим одновременно все три прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, представляет собой гиперболический параболоид.

Решение. Пусть ℓ_4 — некоторая прямая, пересекающая каждую из прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 соответственно в точках O, A и B. Будем считать, что прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 занумерованы так, что точка A лежит между O и B. В $\mathcal{A}_3$ выберем такой репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$, что $\mathbf{e}_1$ — направляющий вектор прямой ℓ_1, $\mathbf{e}_2$ — направляющий вектор прямой ℓ_2, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ — направляющий вектор прямой ℓ_3. В системе координат, определяемой этим репером, прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 имеют, соответственно, уравнения ℓ_1: $x^2 = x^3 = 0$, ℓ_2: $x^1 = 0$, $x^3 = 1$, а ℓ_3: $x^1 = t$, $x^2 = t$, $x^3 = b$, где $\overrightarrow{OB} = b\mathbf{e}_3$.



Далее решение продолжается как в предыдущей задаче.

5 Гиперповерхности второго порядка в евклидовом аффинном пространстве $\mathcal{E}_n$.

Настоящий параграф посвящен классификации гиперповерхностей второго порядка в евклидовом аффинном пространстве.

Определение. *Ненулевой вектор* $\mathbf{w}$ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *называется вектором главного направления для квадратичной формы* φ*, если всякий вектор* $\mathbf{x}$*, ортогональный вектору* $\mathbf{w}$*, сопряжен вектору* $\mathbf{w}$ *относительно формы* φ*.*

Определение. *Ортонормированный базис* $\{\mathbf{e}_i\}$ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *называется каноническим для квадратичной формы* φ*, если векторы этого базиса сопряжены относительно* φ*. В каноническом базисе квадратичная форма* φ *имеет вид*

$$\varphi(\mathbf{v}) = a_{11}(v^1)^2 + a_{22}(v^2)^2 + \ldots + a_{nn}(v^n)^2, \qquad (68)$$

в котором отсутствуют члены с произведениями $v^i v^j$ *при* $i \neq j$*. Вид* (68) *квадратичной формы* φ *также называется каноническим.*

Теорема. *Для всякой квадратичной формы* φ *в евклидовом векторном пространстве* $\mathbf{E}_n$ *существует канонический базис.*

Коэффициенты a_{11}*,* a_{22}*, …,* a_{nn} *в каноническом виде формы* φ *с точностью до перестановок не зависят от выбора канонического базиса.*

Доказательство. Векторы канонического базиса для квадратичной формы φ являются векторами главных направлений для этой формы, поэтому для нахождения канонического базиса для формы φ нужно найти векторы главных направлений. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — произвольный базис в $\mathbf{E}_n$, и форма φ в этом базисе имеет вид $\varphi(\mathbf{v}) = a_{ij}v^i v^j$. Вектор $\mathbf{w}$ является вектором главного направления, если равенство $g_{ij}w^i x^j = 0$ влечет равенство $a_{ij}w^i x^j = 0$. В этом случае система двух уравнений

$$g_{ij}w^i x^j = 0, \quad a_{ij}w^i x^j = 0$$

относительно x^j имеет ранг 1. Это возможно только тогда, когда эти уравнения пропорциональны, то есть когда найдется такое число λ, что выполняются соотношения $a_{ij}w^i = \lambda g_{ij}w^i$, $j = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что координаты w^i всякого вектора $\mathbf{w}$, имеющего главное направление для квадратичной формы φ, удовлетворяют системе линейных уравнений

$$(a_{ij} - \lambda g_{ij})w^i = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{69}$$

Однородная система линейных уравнений (69) может иметь ненулевое решение только в случае, когда ее матрица $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$ имеет ранг не более $n-1$. Необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль определителя этой матрицы:

$$\det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0. \tag{70}$$

Определение. *Уравнение* (70) *называется характеристическим уравнением квадратичной формы* φ *в базисе* $\{\mathbf{e}_i\}$.

Свойства корней характеристического уравнения.

1°. Корни характеристического уравнения не зависят от выбора базиса $\mathbf{e}_i$.

Действительно, матрица $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$ является матрицей квадратичной формы $\varphi(\mathbf{v}) - \lambda|\mathbf{v}|^2$. При замене базиса $\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i$ эта матрица преобразуется следующим следующим образом:

$$(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = (a_{ij} - \lambda g_{ij})p^i_{i'}p^j_{j'}.$$

При этом

$$\det(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = \det(a_{ij} - \lambda g_{ij})(\det(p^i_{i'}))^2.$$

Поэтому уравнения $\det(a_{i'j'} - \lambda g_{i'j'}) = 0$ и $\det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ эквивалентны.

2°. Корни характеристического уравнения (70) вещественны.

Действительно, пусть $\lambda \in \mathbf{C}$ — некоторый корень уравнения (70) и $w^i = u^i + \sqrt{-1}v^i$ — некоторое ненулевое решение системы уравнений (69). Тогда

$$a_{ij}w^i = \lambda g_{ij}w^i, \quad a_{ij}\overline{w}^{\,i} = \overline{\lambda} g_{ij}\overline{w}^{\,i},$$

где $\overline{w}^{\,i} = u^i - \sqrt{-1}v^i$. Просуммируем первое из этих соотношений с $\overline{w}^{\,j}$, а второе — с w^j, и затем вычтем одно из получившихся соотношений из другого. В результате получим $(\lambda - \overline{\lambda})g_{ij}w^i\overline{w}^{\,j} = 0$ или $(\lambda - \overline{\lambda})(g_{ij}u^iu^j + g_{ij}v^iv^j) = 0$, откуда следует $\lambda - \overline{\lambda} = 0$.

3°. Пусть λ — некоторый корень уравнения (70) и w^i — некоторое ненулевое решение системы уравнений (69). Тогда всякий вектор $\mathbf{x}$, ортогональный вектору $\mathbf{w}$, будет сопряжен этому вектору, то есть равенство $g_{ij}w^ix^j = 0$ влечет равенство $a_{ij}w^ix^j = 0$.

Действительно, из $a_{ij}w^ix^j - \lambda g_{ij}w^ix^j = 0$ и $g_{ij}w^ix^j = 0$ следует, что $a_{ij}w^ix^j = 0$.

Пусть теперь λ_1 — некоторый корень уравнения (70), а $\mathbf{w}_1$ — некоторый единичный вектор, координаты которого удовлетворяют уравнению (69) для $\lambda = \lambda_1$. Выберем новый базис в $\mathbf{E}_n$, полагая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1$ и $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{w}_1$ при $k = 2, \ldots, n$. В новом базисе квадратичная форма φ принимает вид

$$a_{ij}v^iv^j = a_{11}v^1v^1 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}v^iv^j, \quad \text{где} \quad a_{11} = \lambda_1.$$

Здесь $\varphi'(\mathbf{v}) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}v^iv^j$ — квадратичная форма, определенная на ортогональном дополнении $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}^{\perp}$ к одномерному подпространству $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}$. Размерность пространства $\mathcal{L}\{\mathbf{w}_1\}^{\perp}$ равна $n-1$. Применяя вышеприведенные рассуждения к квадратичной форме φ', мы найдем базис, в котором форма φ будет иметь вид

$$a_{ij}v^iv^j = a_{11}v^1v^1 + a_{22}v^2v^2 + \sum_{i,j=3}^{n} a_{ij}v^iv^j.$$

Применяя метод математической индукции, приходим к базису, в котором квадратичная форма φ имеет вид (68).

Характеристическое уравнение (70) в полученном базисе принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть,

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda) = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициенты a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} в каноническом виде формы φ являются корнями характеристического уравнения (с учетом кратностей) и, следовательно, с точностью до перестановок не зависят от выбора канонического базиса. $\square$

Замечание. Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{E}_n$ ортонормированный, то характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0. \tag{71}$$

Определение. *Ортогональным инвариантом уравнения* (42)

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0$$

гиперповерхности 2-го порядка Φ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}_n$ *называется всякая функция* $I(a_{11}, \ldots, a_{n+1\,n+1})$ *от коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при замене одного ортонормированного репера в* $\mathcal{E}_n$ *на другой.*

Ортогональные инварианты уравнения (42).

1°. Все аффинные инварианты уравнения (42) являются также и его ортогональными инвариантами.

2°. $I_{n+1} = \det(a_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n+1,$ — ортогональный инвариант уравнения (42).

Доказательство. $a_{\alpha'\beta'} = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}\widetilde{p}^{\beta}_{\beta'}a_{\alpha\beta} \implies \det(a_{\alpha'\beta'}) = \det(a_{\alpha\beta})(\det(\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}))^2 = \det(a_{\alpha\beta})\det(p^i_j)^2 = \det(a_{\alpha\beta})$, поскольку (p^i_j) — ортогональная матрица и, следовательно, $\det(p^i_j) = \pm 1$. $\square$

3°. Корни λ_1, …, λ_n характеристического уравнения (70) квадратичной формы φ, ассоциированной с уравнением (42) гиперповерхности 2-го порядка, — ортогональные инварианты уравнения этого уравнения.

4°. Раскрывая определитель (71), характеристическое уравнение можно переписать в виде:

$$\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n I_n = 0. \tag{72}$$

Коэффициенты $I_1, I_2, \ldots, I_n$ характеристического уравнения (72) — ортогональные инварианты уравнения (42) гиперповерхности 2-го порядка.

Это следует из однозначности представления характеристического уравнения в виде (72), а также из теоремы Виета для уравнения (72).

Ортогональные инварианты уравнения кривой 2-го порядка.

При $n = 2$ характеристическое уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

Отсюда

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \qquad I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ортогональные инварианты уравнения поверхности 2-го порядка.

При $n = 3$ характеристическое уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

Отсюда

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

6 Классификация кривых второго порядка в $\mathcal{E}_2$.

Выбирая канонический базис и умножая, если необходимо, уравнение кривой на (-1), квадратичную форму φ, ассоциированную с уравнением кривой второго порядка

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0,$$

можно привести к одному из следующих трех видов:

$$\text{I. } A(v^1)^2 + B(v^2)^2. \quad \text{II. } A(v^1)^2 - B(v^2)^2. \quad \text{III. } A(v^1)^2, \text{ где } A, B > 0.$$

Далее, рассуждая как в аффинном случае и умножая, если необходимо, на положительный числовой множитель, получаем следующий список уравнений (координаты в $\mathcal{E}_2$ обозначаем x и y вместо x^1 и x^2).

I. Кривые эллиптического типа.

1°. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b$ (эллипсы).

2°. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b$ (мнимые эллипсы).

3°. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b, \ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ (пары мнимых пересекающихся прямых).

II. Кривые гиперболического типа.

4°. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гиперболы).

5°. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geqslant b, \ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ (пары вещественных пересекающихся прямых).

III. Кривые параболического типа.

6°. $y^2 = 2px$ (параболы).

7°. $x^2 = a^2$ (пары параллельных прямых).

8°. $x^2 = -a^2$ (пары мнимых параллельных прямых).

9°. $x^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Уравнения 1°–9° при различных значениях параметров называются *каноническими.*

Теорема. *Специальным выбором ортонормированного репера в $\mathcal{E}_2$ и умножением, если необходимо, на вещественное число, всякое уравнение кривой второго порядка можно привести к одному и только одному виду из списка* 1°–9°.

Доказательство. Как и в аффинном случае, одно и то же уравнение нельзя привести к двум различным видам из списка 1°–9°, поскольку любые два уравнения из списка 1°–9° отличаются значениями ортогональных инвариантов (с учетом умножения уравнения на вещественное число). □

Определение канонического вида уравнения кривой по инвариантам.

1. Центральные кривые.

Помещая начало координат в центр и выбирая канонический базис для φ, получаем следующее уравнение

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + a_{33} = 0.$$

При этом $I_3 = \lambda_1\lambda_2 a_{33} = I_2 a_{33}$. Поэтому уравнение кривой имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{73}$$

2. Параболы.

Выбирая канонический базис для φ и перенося начало координат так же, как это осуществлялось в аффинном случае, получаем следующее уравнение ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x^1)^2 + 2a_{23}x^2 = 0.$$

Поскольку в этом случае

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{а} \quad I_1 = \lambda_1, \quad \text{то} \quad a_{23} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Поэтому уравнение кривой имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2 + 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x^2 = 0. \tag{74}$$

Определение. *Две гиперповерхности второго порядка Φ и Ψ в $\mathcal{E}_n$ называются евклидово эквивалентными, если существует движение $\alpha \in GO(\mathcal{E}_n)$, при котором $\alpha(\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{E}_n^{\mathbf{C}}$.*

Теорема. 1) *Всякая кривая второго порядка Φ в $\mathcal{E}_2$ может быть задана одним и только одним уравнением из списка 1°–9°.*

2) *Две кривые второго порядка в* $\mathcal{E}_2$ *евклидово эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых прямоугольных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка* 1°–9°.

Аналогичная теорема имеет место для поверхностей 2-го порядка в $\mathcal{E}_3$: *две поверхности евклидово эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых прямоугольных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из списка, состоящего из уравнений 17-ти типов* 1°–17° (см. [1], Гл. IX, §8; [4], Гл. XV).

В пространстве $\mathcal{E}_n$, выбирая подходящий репер, уравнение всякой гиперповерхности можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i (x^i)^2 - 2ax^{p+q+1} + b = 0,$$

где $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, p+q$.

Задача 17. На евклидовой плоскости в прямоугольной системе координат $\{O; x, y\}$ задана кривая второго порядка уравнением

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Найти каноническое уравнение этой кривой и каноническую систему координат.

Решение. Матрицы ассоциированных квадратичных форм имеют вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. Однородная система линейных уравнений (69) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = 0.$$

При $\lambda_1 = 9$ эта система представляет собой уравнение $(5-9)w^1 + 6w^2 = 0$. Поэтому вектор главного направления, соответствующий корню $\lambda_1 = 9$, имеет вид $\mathbf{w}_1 = \{3; 2\}$. Второй главный вектор можно найти аналогичным образом, но можно просто повернуть вектор $\mathbf{w}_1$ на угол $\pi/2$. В результате получаем $\mathbf{w}_2 = \{-2; 3\}$.

Центр кривой находится из системы уравнений (54), матрица которой образована двумя первыми строками матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Итак, центр находится из системы уравнений $5x + 6y - 11 = 0$, $6x - 6 = 0$ и имеет координаты $x_C = 1$, $y_C = 1$. Перенесем начало координат в центр. Для этого подставим в уравнение кривой формулы преобразования координат: $x = \hat{x} + 1$, $y = \hat{y} + 1$. Получаем уравнение $5(x'+1)^2 + 12(x'+1)(y'+1) - 22(x'+1) - 12(y'+1) - 19 = 0$, которое после приведения подобных членов принимает вид

$$5\hat{x}^2 + 12\hat{x}\hat{y} - 36 = 0. \tag{75}$$

Выберем теперь в качестве новых базисных векторов единичные векторы главных направлений $\mathbf{e}_{1'} = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{2'} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{e}_2$. Этой замене базиса соответствует преобразование координат $\hat{x} = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'$, $\hat{y} = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'$. Подставляя эти преобразования в уравнение (75), получим уравнение $\frac{5}{13}(3x' - 2y')^2 - \frac{12}{13}(3x' - 2y')(2x' + 3y') - 36 = 0$, которое после приведения подобных членов принимает вид $9(x')^2 - 4(y')^2 = 36$. Итак, каноническое уравнение кривой имеет вид

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Это же уравнение получается при использовании формулы (73). В данном случае $I_3 = \det(a_{\alpha\beta}) = 36^2$, а $I_2 = \det(a_{ij}) = -36$.

Задача 18. На евклидовой плоскости в прямоугольной системе координат $\{O; x, y\}$ задана кривая второго порядка уравнением

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Найти каноническое уравнение этой кривой и каноническую систему координат.

Решение. Матрицы ассоциированных квадратичных форм имеют вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{pmatrix}.$$

Имеем $I_2 = \det(a_{ij}) = 0$. Поэтому это кривая параболического типа. Так как $I_3 = \det(a_{\alpha\beta}) = -64$, то это — парабола. Характеристическое уравнение имеет вид $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. По формуле (74) находим каноническое уравнение $2x^2 + 2\sqrt{32}y = 0$. Для нахождения канонической системы координат нужно сначала повернуть оси координат. Векторы главных направлений имеют вид $\mathbf{w}_1 = \{-1; 1\}$, $\mathbf{w}_2 = \{1; 1\}$.

Задача 19. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, есть гиперболический параболоид.

Решение. Выберем систему координат, в которой первая прямая — ось Ox^1, общий перпендикуляр прямых — ось Ox^3, а вторая прямая имеет уравнения $x^1 = t\cos\alpha$, $x^2 = t\sin\alpha$, $x^3 = a = \mathrm{const}$. Квадрат расстояния от точки $M(x^1; x^2; x^3)$ до оси Ox^1 равен $(x^2)^2 + (x^3)^2$, а квадрат расстояния от M до второй прямой равен квадрату модуля векторного произведения векторов $\{\cos\alpha; \sin\alpha; 0\}$ и $\{x^1; x^2; x^3 - a\}$. Приравнивая два эти числа, получим уравнение $(x^3-a)^2+(x^1\sin\alpha-x^2\cos\alpha)^2 = (x^2)^2+(x^3)^2$. В аффинной системе координат $2x^{3'} = -2ax^3 + a^2$, $x^{1'} = x^1\sin\alpha - x^2\cos\alpha$, $x^{2'} = x^2$ это уравнение принимает вид $2x^{3'} = (x^{2'})^2 - (x^{1'})^2$.

7 Проективное пространство.

Определение. *Проективным пространством размерности n над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ называется тройка $(\mathcal{P}_n, \mathbf{V}_{n+1}, p)$, состоящая из некоторого множества $\mathcal{P}_n$, векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ размерности $n+1$ над полем $\mathbf{R}$ и сюръективного отображения*

$$p : \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{P}_n \tag{76}$$

такого, что $p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{w}) \iff \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$.

Элементы множества $\mathcal{P}_n$ называются точками проективного пространства. Когда не возникает недоразумений, при обозначении проективного пространства будем использовать один символ $\mathcal{P}_n$. Векторное пространство $\mathbf{V}_{n+1}$ называется ассоциированным с проективным пространством $\mathcal{P}_n$. При этом говорят, что *отображение* (76) *задает на множестве $\mathcal{P}_n$ структуру проективного пространства.*

Определение. *Отображение $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}'_m \to \mathcal{P}_n$ называется морфизмом проективных пространств, если существует линейное отображение $\varphi : \mathbf{V}'_{m+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ ассоциированных векторных пространств такое, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}'_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p'"'] & \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{P}'_m \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & \mathcal{P}_n
\end{tikzcd} \tag{77}$$

Коммутативность диаграммы (77) означает, что $p \circ \varphi = \widetilde{\varphi} \circ p'$.

Из определения морфизма проективных пространств следует, что φ является мономорфизмом ($\ker \varphi = \{\mathbf{0}\}$), поскольку иначе верхняя строка диаграммы будет не определена. Морфизм проективных пространств называется *изоморфизмом*, если он является взаимнооднозначным отображением. При этом, очевидно, и линейное отображение φ будет изоморфизмом векторных пространств (если $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1}$ не принадлежит образу пространства $\mathbf{V}'_{m+1}$, то $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n+1}$ не может принадлежать образу пространства $\mathcal{P}_n$). Отсюда следует, что проективные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

Будем говорить, что линейное отображение φ *порождает* морфизм $\widetilde{\varphi}$.

7.1 Примеры проективных пространств.

1. $\mathcal{P}_n = \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве $\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, определяемое следующим образом: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. Отображение p имеет вид $p : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$, где $[\mathbf{v}]$ — класс векторов, эквивалентных вектору $\mathbf{v}$.

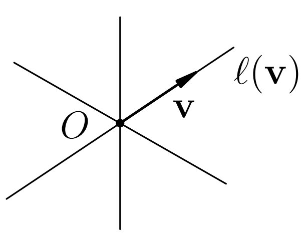
В частности, пространство $\mathbf{R}\mathcal{P}_n = \mathbf{R}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ будем называть *стандартным* проективным пространством размерности n.

2. $\mathcal{P}_n$ — множество одномерных подпространств векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$. Отображение p имеет вид $p : \mathbf{v} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{v})$.

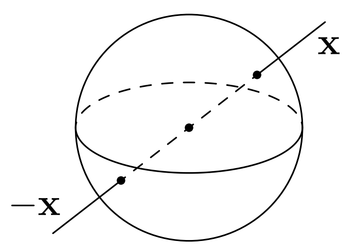
3. $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}(O)$ — множество прямых аффинного пространства $(\mathcal{A}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \psi)$, проходящих через фиксированную точку $O \in \mathcal{A}_{n+1}$. Такое множество прямых называется *связкой*, точка O называется *центром* связки. Отображение p относит вектору $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ прямую с направляющим вектором $\mathbf{v}$, проходящую через O,

$$p : \mathbf{v} \mapsto \ell(\mathbf{v}) = \{M \in \mathcal{A}_{n+1} \,|\, \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_O + t\mathbf{v}\}.$$

4. $\mathcal{P}_n = \mathbf{S}^n/\sim$, где $\mathbf{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \,|\, \mathbf{x}^2 = 1\}$ — сфера радиуса 1 в евклидовом пространстве $\mathbf{E}_n$, а отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$. Отображение p относит вектору $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ пару точек пересечения прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ со сферой $\mathbf{S}^n$.



Связка

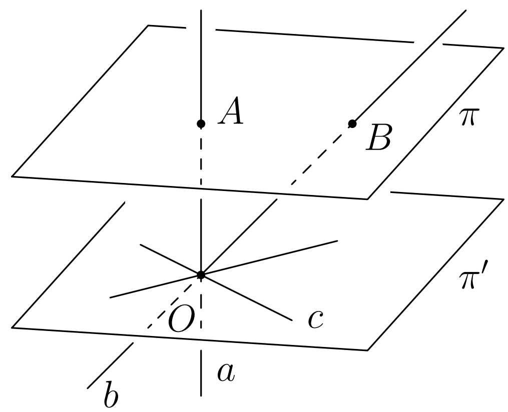


$\mathbf{S}^n/\{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}\}$

Замечание. Поскольку проективные пространства одной размерности изоморфны, то приведенные выше примеры называют также *моделями* проективного пространства размерности n.

7.2 Аффинная модель проективного пространства.

Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}(O)$ — связка прямых аффинного пространства $\mathcal{A}_{n+1}$ с центром в точке O, $\pi = \mathcal{A}_n$ — гиперплоскость в $\mathcal{A}_{n+1}$ с направляющим подпространством $\mathbf{V}_n(\pi)$, не проходяшая через точку O, а $\pi' = \{O, \mathbf{V}_n(\pi)\}$ — гиперплоскость, проходяшая через точку O и параллельная π. Прямые, проходящие через O и лежащие в гиперплоскости π', образуют связку $\mathcal{B}_{\pi'}(O) = \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ — $(n-1)$-мерное проективное пространство.



Если прямая $a \in \mathcal{B}(O)$ не лежит в гиперплоскости π', то она пересекает $\pi = \mathcal{A}_n$ в одной точке A. Относя каждой прямой $a \in \mathcal{B}(O) \backslash \mathcal{B}_{\pi'}(O)$ точку $A = a \cap \pi$, получим взаимнооднозначное соответствие

$$h_\pi : \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}(\pi') \to \mathcal{A}_n, \qquad (78)$$

называемое *аффинной картой.*

Отождествляя $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}(\pi') \equiv \mathcal{A}_n$, получаем представление проективного пространства

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi') \qquad (79)$$

как аффинного пространства $\pi = \mathcal{A}_n$, дополненного множеством $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$. Это множество $\mathcal{P}_{n-1}(\pi')$ является гиперплоскостью в $\mathcal{P}_n$ (определение гиперплоскости в проективном пространстве приведено ниже), называемой *бесконечно удаленной*, а также *несобственной*, гиперплоскостью для данной аффинной карты. Всякая точка $C \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, то есть прямая $c \in \mathcal{B}_{\pi'}(O)$, называется бесконечно удаленной или несобственной точкой аффинного пространства $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$. Точки проективного пространства $\mathcal{P}_n$, принадлежащие $\mathcal{A}_n$ при этом называют собственными точками аффинного пространства $\mathcal{A}_n$.

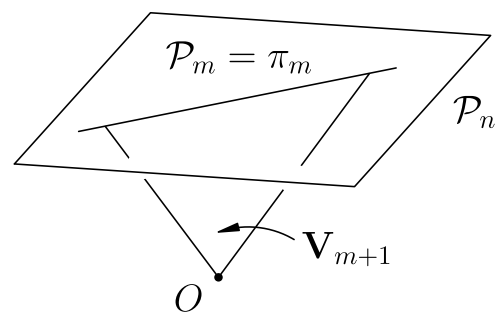
Представляя проективное пространство $\mathcal{P}_{n-1}(\pi)$, а затем и каждую вновь появляющуюся бесконечно удаленную гиперплоскость, в виде (79), получим дизъюнктное объединение

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_{n-1} \cup \mathcal{A}_{n-2} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_0. \qquad (80)$$

7.3 Плоскости в $\mathcal{P}_n$.

Определение. *Плоскостью размерности m (m-плоскостью) в $\mathcal{P}_n$ называется подмножество $\pi_m \subset \mathcal{P}_n$ такое, что $\pi_m = p(\mathbf{V}_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$, где $\mathbf{V}_{m+1} = \mathbf{V}_{m+1}(\pi_m)$ — подпространство в векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированном с $\mathcal{P}_n$.*

Очевидно, отображение p, ограниченное на $\mathbf{V}_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, наделяет подмножество $\pi_m \subset \mathcal{P}_n$ структурой m-мерного проективного пространства $\mathcal{P}_m$. Поэтому плоскости в $\mathcal{P}_n$ называют также *подпространствами* в $\mathcal{P}_n$. Для обозначения плоскости $\pi_m = p(\mathbf{V}_{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ будем использовать также обозначение $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$.



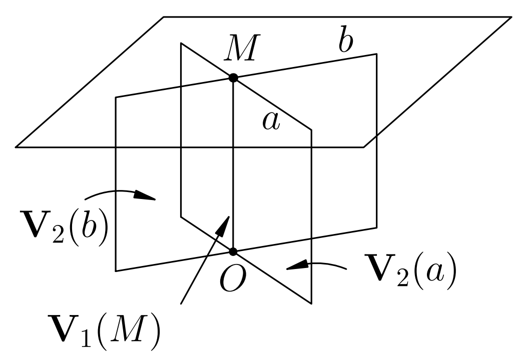
0-плоскости в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ — это точки этого пространства. 1-плоскости пространства $\mathcal{P}_n$ называются *прямыми*, а $(n-1)$-плоскости — *гиперплоскостями*.

Пусть $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$ и $\pi(\mathbf{V}'_{k+1})$ — две плоскости в $\mathcal{P}_n$. Если $\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1} \neq \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно,

$$\pi(\mathbf{V}_{m+1}) \cap \pi(\mathbf{V}'_{k+1}) = \pi(\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1}).$$

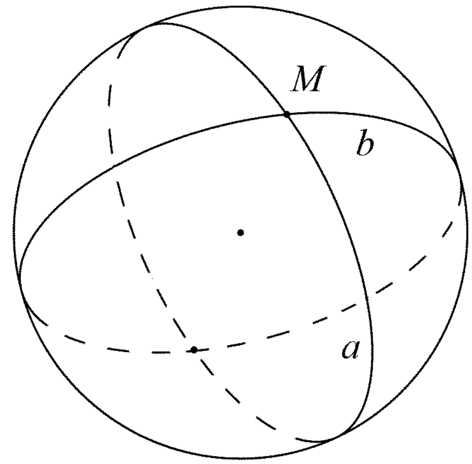
Если $\mathbf{V}_{m+1} \cap \mathbf{V}'_{k+1} = \{\mathbf{0}\}$, то плоскости $\pi(\mathbf{V}_{m+1})$ и $\pi(\mathbf{V}'_{k+1})$ называются *скрещивающимися*. Таким образом, две плоскости в $\mathcal{P}_n$ либо пересекаются по плоскости либо скрещиваются. Плоскости π_m и π_k в $\mathcal{P}_n$ могут скрещиваться только при $(m+1)+(k+1) \leqslant n+1 \quad \Leftrightarrow \quad m+k \leqslant n-1$.

В частности, на проективной плоскости (так называют проективное пространство размерности 2) $\mathcal{P}_2$ любые две несовпадающие прямые a и b пересекаются в одной точке. Эта точка $M = a \cap b$ определяется 1-мерным подпространством



$$\mathbf{V}_1(M) = \mathbf{V}_2(a) \cap \mathbf{V}_2(b).$$

В модели $\mathcal{P}_2 = \mathbf{S}^2/\!\sim$ это свойство прямых проективной плоскости иллюстрируется пересечением двух больших окружностей сферы в двух диаметрально противоположных точках.



Рассмотрим две прямые a и b в $\mathcal{P}_n$, пересечение которых с $\mathcal{A}_n$ из аффинной модели (79) $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi)$ представляет собой параллельные аффинные прямые с направляющим вектором $\mathbf{v}$. Так как $\mathbf{V}_2(a) \cap \mathbf{V}_2(b) = \mathcal{L}(\mathbf{v})$, то эти прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi)$.

Замечание. В проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ над полем вещественных чисел можно ввести такое понятие математического анализа (точнее, топологии) как предел последовательности точек A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Это можно сделать, например, следующим образом: точка A является пределом последовательности A_i, если в некоторой аффинной карте, для которой точка A не является бесконечно удаленной, то есть такой, что $A \in \mathcal{A}_n$, найдется такое натуральное число k, что при $i \geqslant k$ все точки A_i принадлежат $\mathcal{A}_n$ и $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$. При этом всякая прямая проективного пространства оказывается замкнутой кривой (топологически эквивалентной окружности). Пределом стремящейся к бесконечности последовательности точек A_i, $i = 1, 2, \ldots$ прямой ℓ с направляющим вектором $\mathbf{v}$ аффинного пространства $\mathcal{A}_n$ из аффинной модели (79) является точка $p(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{n-1}(\pi)$.

7.4 Однородные координаты в $\mathcal{P}_n$.

Точка $A \in \mathcal{P}_n$ однозначно определяется любым вектором $\mathbf{a}$ из векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированного с $\mathcal{P}_n$, таким, что $p(\mathbf{a}) = A$. Будем использовать следующее обозначение: $A = [\mathbf{a}]$. При этом $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}] \Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Пусть $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, — базис в $\mathbf{V}_{n+1}$ и $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Тогда точка A однозначно определяется набором чисел a^α, $\alpha = 1, \ldots, n+1$. Два набора a^α и b^α задают одну и ту же точку пространства $\mathcal{P}_n$ тогда и только тогда, когда $b^\alpha = \lambda a^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Числа a^α, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, определенные с точностью до одновременного умножения на число, называются *проективными координатами* точки $A = [\mathbf{a}] \in \mathcal{P}_n$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Проективные координаты точки A будем обозначать следующим образом $[a^1 : a^2 : \ldots : a^{n+1}] = [a^\alpha]$.

Возникает естественный вопрос: в каком случае два базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и Пусть $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ определяют одну и ту же систему проективных координат в $\mathcal{P}_n$? Ответом является следующее

Предложение. *Соотношение* $[a^1 : a^2 : \ldots : a^{n+1}] = [a^{1'} : a^{2'} : \ldots : a^{(n+1)'}]$ *выполняется для всех точек* $[\mathbf{a}] \in \mathcal{P}_n$ *тогда и только тогда, когда существует* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{e}_{\alpha'} = \lambda \mathbf{e}_\alpha$ *для всех* $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{e}_{\alpha'} = \lambda \mathbf{e}_\alpha$, то $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a^{\alpha'} \mathbf{e}_{\alpha'} = a^{\alpha'} \lambda \mathbf{e}_\alpha$, откуда $a^\alpha = \lambda a^{\alpha'}$ для всех $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

2) Точка $E_{\beta'} = [\mathbf{e}_{\beta'}]$ в базисе $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ имеет координаты $[\overset{1}{0} : \ldots : \overset{\beta}{1} : \ldots : \overset{n+1}{0}]$, где единица стоит на месте с номером β. Если эта точка имеет такие же координаты в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, то $\mathbf{e}_{\beta'} = \lambda \mathbf{e}_\beta$. В последнем соотношении, однако, коэффициент λ зависит от номера β, то есть векторы базисов связаны соотношениями $\mathbf{e}_{\alpha'} = \lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Чтобы показать, что на самом деле все коэффициенты λ_α совпадают, достаточно рассмотреть точку

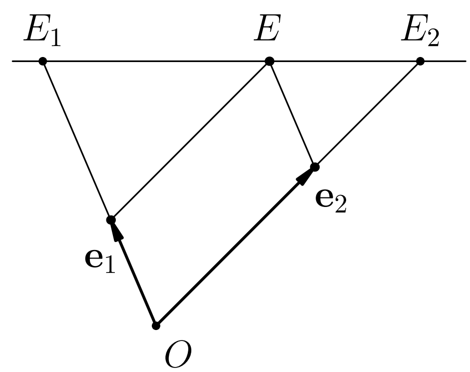
$$E = [\mathbf{e}_{1'} + \mathbf{e}_{2'} + \ldots + \mathbf{e}_{(n+1)'}] = [\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_{2'} + \ldots + \lambda_{n+1} \mathbf{e}_{(n+1)'}].$$

Поскольку ее координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$ и $[\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_{n+1}]$ относительно рассматриваемых базисов совпадают, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1}$. $\square$

Определение. *Два базиса* $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ *и* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ *векторного пространства* $\mathbf{V}_{n+1}$ *ассоциированного с проективным пространством* $\mathcal{P}_n$*, назовем эквивалентными, если существует* $\lambda \in \mathbf{R}$ *такое, что* $\mathbf{e}_{\alpha'} = \lambda \mathbf{e}_\alpha$ *для всех* $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Это отношение эквивалентности разбивает множество $\mathcal{B}(\mathbf{V}_{n+1})$ *всех базисов пространства* $\mathbf{V}_{n+1}$ *на классы эквивалентности. Каждый из классов эквивалентности называется проективным репером. Проективный репер, определяемый базисом* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ *обозначается следующим образом* $[\mathbf{e}_\alpha]$*. Координатами точки* $A \in \mathcal{P}_n$ *относительно репера* $[\mathbf{e}_\alpha]$ *называются ее координаты* $[a^\alpha]$ *относительно базиса* $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

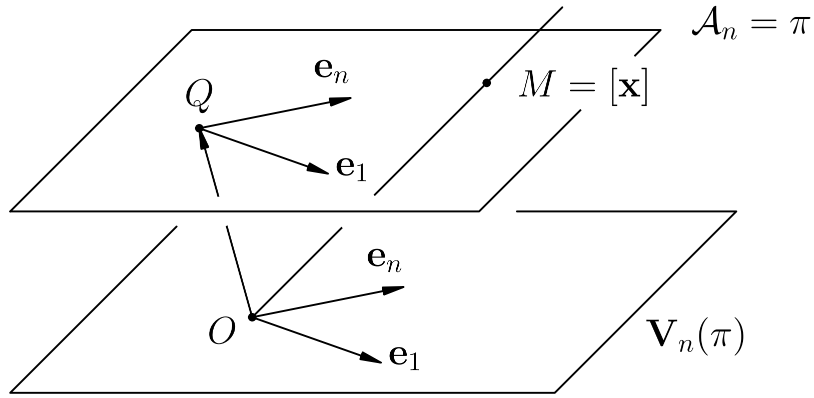
Проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, определяет $n+1$ точку $E_\alpha = p(\mathbf{e}_\alpha)$ в пространстве $\mathcal{P}_n$. Однако обратно по точкам E_α репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ не восстанавливается, поскольку точками E_α каждый из векторов $\mathbf{e}_\alpha$ определяется с точностью до умножения на свой множитель λ_α. Этот недостаток можно устранить, задав еще одну точку $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1}]$, которая в системе координат, определяемой репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, имеет координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$.



Набором точек $\{E_\alpha; E\}$ проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ определяется однозначно (см. доказательство предложения). По этой причине для набора $\{E_\alpha; E\}$ также используется название *проективный репер.* Точки E_α, имеющие координаты $[\overset{1}{0} : \ldots : \overset{\alpha}{1} : \ldots : \overset{n+1}{0}]$, называются *вершинами репера*, а точка E, имеющая координаты $[1 : 1 : \ldots : 1]$, называется *единичной точкой.*

Замечание. Соответствие, относящее точке проективного пространства ее координаты относительно проективного репера, можно рассматривать как изоморфизм $h : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$ пространства $\mathcal{P}_n$ на стандартное проективное пространство $\mathbf{R}\mathcal{P}_n$.

Проективные координаты $[x^1 : x^2 : \ldots : x^{n+1}]$ называются также *однородными координатами.* Для аффинной карты (79), определяемой гиперплоскостью $\pi \subset \mathcal{A}_{n+1}$ с уравнением $x^{n+1} = 1$, у точек из $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$ последняя координата x^{n+1} отлична от нуля, поэтому такие точки однозначно определяются числами $\{X^i = x^i/x^{n+1}\}$, $i = 1, \ldots, n$. При этом, очевидно, $[x^1 : x^2 : \ldots : x^{n+1}] = [X^1 : X^2 : \ldots : X^n : 1]$. Числа $\{X^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, называются *неоднородными координатами* точек из $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}_n$. Неоднородные координаты — это аффинные координаты в $\pi = \mathcal{A}_n$ относительно аффинного репера $\{Q, \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, где $Q \in \pi$ — точка с радиус-вектором $r_Q = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{e}_{n+1}$.



7.5 Уравнения m-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$.

Точка $[\mathbf{x}]$ принадлежит m-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{x}$ принадлежит подпространству $\mathbf{V}_{m+1}$. Поэтому уравнения m-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ в проективных координатах, определяемых репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, имеют тот же вид, что и уравнения подпространства $\mathbf{V}_{m+1}$ в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

1. Если $\mathbf{V}_{m+1} = \mathcal{L}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+1}\}$, где $\{\mathbf{a}_A\}$, $A = 1, \dots, m+1$, — базис в $\mathbf{V}_{m+1}$, то $[\mathbf{x}] \in \pi_m(\mathbf{V}_{m+1}) \iff$

$$\mathbf{x} = t^1\mathbf{a}_1 + \dots t^{m+1}\mathbf{a}_{m+1} = t^A\mathbf{a}_A \iff x^\alpha = t^1 a_1^\alpha + \dots t^{m+1} a_{m+1}^\alpha = t^A a_A^\alpha. \quad (81)$$

Уравнения (81) называются *параметрическими* уравнениями m-плоскости $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$. Числа $[t^1 : \dots : t^{m+1}] = [t^A]$ — проективные координаты в $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ относительно проективного репера $[\mathbf{a}_A]$, $A = 1, \dots, m+1$.

2. Если $\operatorname{Ann}(\mathbf{V}_{m+1}) = \mathcal{L}\{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}^{n-m}\} \subset \mathbf{V}^*_{m+1}$, где $\{\widetilde{\mathbf{b}}^a\}$, $a = 1, \dots, n-m$, — базис в $\operatorname{Ann}(\mathbf{V}_{m+1})$, то $[\mathbf{x}] \in \pi_m(\mathbf{V}_{m+1}) \iff$

$$\widetilde{\mathbf{b}}^a(\mathbf{x}) = 0,\ a = 1, \dots, n-m, \quad \iff \quad b^a_\alpha x^\alpha = 0,\ a = 1, \dots, n-m, \quad (82)$$

где b^a_α — координаты линейной формы $\widetilde{\mathbf{b}}^a$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_\alpha\}$. Таким образом, в проективных координатах $[x^\alpha]$ m-плоскость $\pi_m(\mathbf{V}_{m+1})$ задается системой однородных уравнений (82).

7.6 Преобразования проективных координат в $\mathcal{P}_n$.

Пусть даны два проективных репера $[\mathbf{e}_\alpha]$ и $[\mathbf{e}_{\alpha'}]$. Базисы $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, определяющие эти реперы, связаны соотношением

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = p^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha}. \tag{83}$$

Соответствующее преобразование проективных координат $[x^{\alpha}]$ имеет вид

$$x^{\alpha} = p^{\alpha}_{\alpha'}x^{\alpha'}. \tag{84}$$

Каждый из базисов $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$ и $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\}$ определяется соответствующим проективным репером с точностью до умножения на вещественное число: $\{\mathbf{e}_{\alpha}\} \sim \{\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha} = \lambda\mathbf{e}_{\alpha}\}$, $\{\mathbf{e}_{\alpha'}\} \sim \{\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha'} = \lambda\mathbf{e}_{\alpha'}\}$. Если $\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha'} = \widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}\widetilde{\mathbf{e}}_{\alpha}$, то $\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'} = \nu\widetilde{p}^{\alpha}_{\alpha'}$, где $\nu = \lambda/\mu$. Таким образом, матрица $(p^{\alpha}_{\alpha'})$, осуществляющая преобразование координат (84), определена с точностью до умножения на ненулевое вещественное число.

Матрицу, заданную с точностью до умножения на ненулевое число, называют *псевдоматрицей*. Точнее, псевдоматрица — это класс эквивалентности матриц $[P] = [p^{\alpha}_{\beta}]$ по следующему отношению эквивалентности: $P = (p^{\alpha}_{\beta}) \sim Q = (q^{\alpha}_{\beta}) \iff P = \lambda Q$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$.

7.7 Преобразования (движения) проективного пространства $\mathcal{P}_n$.

Определение. *Движением (проективным преобразованием) проективного пространства $\mathcal{P}_n$ называется изоморфизм этого пространства на себя, то есть, такое взаимнооднозначное отображение $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, для которого существует линейный изоморфизм $\varphi : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ такой, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{P}_n \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & \mathcal{P}_n
\end{tikzcd} \tag{85}$$

Проективное преобразование $\widetilde{\varphi}$, порождаемое линейным преобразованием φ, будем обозначать также следующим образом: $\widetilde{\varphi} = [\varphi]$.

В проективных координатах, определяемых репером $[\mathbf{e}_{\alpha}]$, преобразование $[\varphi] : \mathcal{P}_n \ni [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{y}] \in \mathcal{P}_n$ принимает вид

$$y^{\alpha} = \varphi^{\alpha}_{\beta}x^{\beta}, \tag{86}$$

где (φ^α_β) — матрица линейного преобразования φ в базисе $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

Проективные преобразования $[\varphi]$ и $[\psi]$ совпадают тогда и только тогда, когда $\varphi = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Действительно, если $\varphi = \lambda\psi$, то, очевидно, $[\varphi] = [\psi]$. Пусть теперь $[\varphi] = [\psi]$ и $\psi : \mathbf{e}_\alpha \mapsto \mathbf{e}'_\alpha$, тогда $\varphi : \mathbf{e}_\alpha \mapsto \lambda_\alpha \mathbf{e}'_\alpha$, где λ_α зависит (априори) от $\alpha = 1, \ldots, n+1$. Но, так же, как и в доказательстве предложения на с. 79, поскольку $\varphi : \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1} \mapsto \lambda_1\mathbf{e}'_1 + \lambda_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\mathbf{e}'_{n+1} = \mu(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1})$, получаем $\lambda_\alpha = \mu$ при всех $\alpha = 1, \ldots, n+1$.

Отсюда, в частности, следует, что матрица (φ^α_β) проективного преобразования (86) определена с точностью до умножения на число, а проективный репер $[\mathbf{e}_\alpha]$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между проективными преобразованиями пространства $\mathcal{P}_n$ и псевдоматрицами $[\varphi^\alpha_\beta]$.

Множество проективных преобразований пространства $\mathcal{P}_n$ образует группу $GP(\mathcal{P}_n)$, изоморфную факторгруппе (см. [8], §65) $GL(\mathbf{V}_n)/H$ группы $GL(\mathbf{V}_n)$ линейных (невырожденных) преобразований векторного пространства $\mathbf{V}_n$ по нормальной подгруппе H, состоящей из гомотетий $\lambda\,\mathrm{id} : \mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$. Поскольку в координатах линейные преобразования задаются невырожденными матрицами, группа $GP(\mathcal{P}_n)$ изоморфна факторгруппе $GL(n, \mathbf{R})/H$ полной матричной группы по нормальной подгруппе H, состоящей из скалярных матриц $(\varphi^\alpha_\beta) = (\lambda\,\delta^\alpha_\beta)$.

Преобразование проективных координат (84) представляет собой проективное преобразование стандартного проективного пространства $\mathbf{R}\mathcal{P}_n$.

Поскольку линейное преобразование $\varphi : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, имеющими одинаковые координаты x^α по отношению к базисам $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ и $\{\mathbf{e}'_\alpha\}$, где $\mathbf{e}'_\alpha = \varphi(\mathbf{e}_\alpha)$, соответственно:

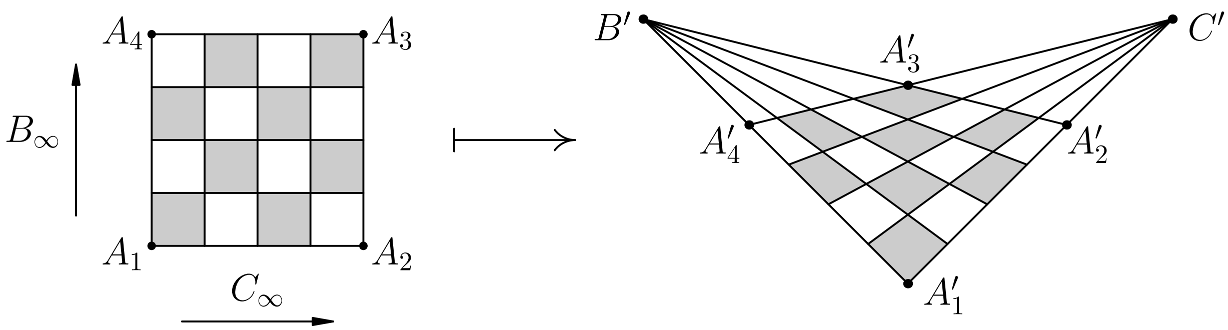
$$\varphi : \mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha \longmapsto \mathbf{x}' = x^\alpha \mathbf{e}'_\alpha,$$

то проективное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками $[\mathbf{x}]$ и $[\mathbf{x}']$, имеющими одинаковые координаты $[x^\alpha]$ по отношению к реперам $[\mathbf{e}_\alpha]$ и $[\mathbf{e}'_\alpha]$ соответственно. Отсюда следует (см. предложение на с. 79, что проективное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ однозначно определяется соответствиями $E_\alpha \mapsto E'_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, $E \mapsto E'$ между точками, задающими проективные реперы $\{E_\alpha; E\}$ и $\{E'_\alpha; E'\}$.

Предложение. *Существует единственное проективное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, которое переводит один упорядоченный набор $\{A_1, \ldots, A_{n+2}\}$ из $n+2$ точек, находящихся в общем положении (никакие $n+1$ из этих точек не принадлежат одной гиперплоскости) в другой упорядоченный набор $\{A'_1, \ldots, A'_{n+2}\}$ из $n+2$ точек, находящихся в общем положении.*

Доказательство. Действительно, $\widetilde{\varphi}$ — это преобразование, переводящие вершины репера $\{E_\alpha = A_\alpha; E = A_{n+2}\}$ в вершины репера $\{E'_\alpha = A'_\alpha; E = A'_{n+2}\}$. $\square$

В частности, из этого предложения следует, что проективным преобразованием плоскости $\mathcal{P}_2$ можно перевести один произвольным образом выбранный четырехугольник A_1, A_2, A_3, A_4 в другой произвольный четырехугольник A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.



7.8 Ангармоническое отношение четырех точек прямой.

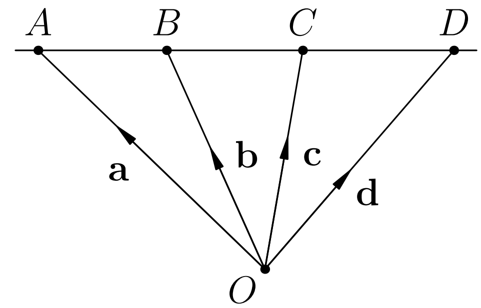
Определение. *Пусть $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $D = [\mathbf{d}]$ — четыре различные точки, принадлежащие одной прямой $\ell \subset \mathcal{P}_n$, и*

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{87}$$

Ангармоническим отношением отношением точек A, B, C и D называется следующее число:

$$(A, B, C, D) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\beta}{\alpha}\,. \tag{88}$$

Легко видеть, что число (A, B, C, D) не зависит от выбора векторов, определяющих точки A, B, C и D. Например, если заменить в разложениях (87) $\mathbf{a}$ на $\nu\mathbf{a}$, то λ и α заменятся, соответственно, на $\lambda' = \lambda/\nu$ и $\alpha' = \alpha/\nu$. При этом число (88) не изменится.



Число (A, B, C, D) называют также *сложным отношением* точек A, B, C, D.

Задача 20. Пусть $\{E_1, E_2; E\}$ — проективный репер на проективной прямой (одномерном проективном пространстве) $\mathcal{P}_1$, а M — точка этой прямой с координатами $[x^1 : x^2]$. Проверить, что $(E_1, E_2, E, M) = x^1/x^2$.

Задача 21. Пусть точки A, B, C, D проективной прямой $\mathcal{P}_1$ заданы своими координатами (соответственно) $[a^1 : a^2]$, $[b^1 : b^2]$, $[c^1 : c^2]$, $[d^1 : d^2]$ относительно некоторого проективного репера $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Доказать, что

$$(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & c^1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^1 & b^1 \\ c^2 & b^2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a^1 & d^1 \\ a^2 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d^1 & b^1 \\ d^2 & b^2 \end{vmatrix}} \tag{89}$$

Решение. Первое из разложений (87) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных λ и μ, а второе — как систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β. Записав решение этих систем по формулам Крамера и подставив полученные выражения в (88), получим формулу (89).

Задача 22. Вывести из формулы (89) следующие соотношения:

$$(A, B, C, D) = (C, D, A, B) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1} = (B, A, D, C). \tag{90}$$

Поскольку при линейных преобразованиях линейные комбинации векторов переходят в линейные комбинации образов этих векторов с теми же коэффициентами, то из определения проективных преобразований (см. диаграмму (85)) следует, что при проективных преобразованиях сохраняется ангармоническое отношение четырех точек прямой. Ангармоническое отношение четырех точек прямой называют *основным инвариантом проективной геометрии.*

7.9 Проективные преобразования в аффинной карте.

Рассмотрим произвольное проективное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ и представление (79) пространства $\mathcal{P}_n$ в виде объединения аффинного пространства и несобственной гиперплоскости $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{P}_{n-1}(\pi')$, соответствующее некоторой аффинной карте (78). Выясним, какими уравнениями задается ограничение $\widetilde{\varphi}|\mathcal{A}_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{P}_n$ преобразования $\widetilde{\varphi}$ в аффинных (неоднородных) координатах в пространстве $\mathcal{A}_n$. Итак, в $\mathcal{P}_n$ рассматриваем репер $[\mathbf{e}_\alpha]$, по отношению к которому $\mathcal{A}_n$ определяется условием $x^{n+1} \neq 0$ ($\mathcal{A}_n$ можно отождествить с гиперплоскостью $\pi \subset \mathbf{V}_{n+1}$, имеющей уравнение $x^{n+1} = 1$). Из (86), переходя к неоднородным координатам $X^i = x^i/x^{n+1}$ и $Y^i = y^i/y^{n+1}$, получаем

$$Y^i = \frac{y^i}{y^{n+1}} = \frac{\varphi^i_\alpha x^\alpha}{\varphi^{n+1}_\beta x^\beta} = \frac{\dfrac{\varphi^i_\alpha x^\alpha}{x^{n+1}}}{\dfrac{\varphi^{n+1}_\beta x^\beta}{x^{n+1}}} = \frac{\varphi^i_j X^j + \varphi^i_{n+1}}{\varphi^{n+1}_k X^k + \varphi^{n+1}_{n+1}}. \tag{91}$$

Таким образом, в аффинных координатах проективные преобразования задаются дробно-линейными функциями вида

$$Y^i = \frac{a^i_1 X^1 + \ldots + a^i_n X^n + a^i_{n+1}}{b_1 X^1 + \ldots + b_n X^n + b_{n+1}}. \tag{92}$$

Уравнениями (92) задается отображение $\widetilde{\varphi}|\mathcal{A}_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{P}_n$. При этом гиперплоскость $\pi \subset \mathcal{A}_n$, имеющая уравнение $b_1 X^1 + \ldots + b_n X^n + b_{n+1} = 0$, отображается в несобственную гиперплоскость. Поэтому проективные преобразования можно рассматривать и в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n$, но область определения этих преобразований может не совпадать со всем пространством $\mathcal{A}_n$.

Выясним теперь, какой вид имеют проективные преобразования $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, при которых несобственная гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ отображается на себя. При этом, очевидно и аффинное пространство $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$ будет отображаться на себя. Несобственная гиперплоскость имеет уравнение

$x^{n+1} = 0$, поэтому в уравнениях (86) из $x^{n+1} = 0$ должно следовать $y^{n+1} = 0$ (при любых $x^1, \dots, x^n$). Поскольку $y^{n+1} = \varphi^{n+1}_1 x^1 + \ldots + \varphi^{n+1}_n x^n + \varphi^{n+1}_{n+1} x^{n+1}$, это возможно только при $\varphi^{n+1}_1 = \varphi^{n+1}_2 = \ldots = \varphi^{n+1}_n = 0$. В этом случае $\varphi^{n+1}_{n+1} \neq 0$ (иначе отображение φ будет вырожденным) и уравнения (91) принимают вид

$$Y^i = a^i_1 X^1 + \ldots + a^i_n X^n + a^i_{n+1}, \quad \text{где} \quad a^i_\alpha = \frac{\varphi^i_\alpha}{\varphi^{n+1}_{n+1}}.$$

Мы доказали следующее предложение.

Предложение. *Если проективное преобразование $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ отображает несобственную гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ на себя, то его ограничение на аффинное пространство $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$ является аффинным преобразованием этого пространства.*

Отсюда следует, что геометрия проективного пространства с группой преобразований, переводящих в себя некоторую фиксированную гиперплоскость, является аффинной геометрией.

7.10 Комплексификация вещественных проективных пространств.

Так же как и в случае векторного и аффинного пространств, в определении проективного пространства (с. 74) поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ можно заменить на любое другое поле $\mathbf{F}$. В частности, в случае $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ имеет место следующее определение.

Определение. *Проективным пространством размерности n над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ называется тройка $(\mathcal{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}), p)$, состоящая из некоторого множества $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$, векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C})$ размерности $n+1$ над полем $\mathbf{C}$ и сюръективного отображения*

$$p : \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}) \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathcal{P}_n(\mathbf{C}) \tag{93}$$

такого, что $p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{w}) \iff \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{C}$.

Для обозначения проективного пространства $(\mathcal{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{V}_{n+1}(\mathbf{C}), p)$ иногда будем использовать один символ $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$.

Задача 23. Проективное пространство $\mathcal{P}_3(\mathbf{F}_2)$ размерности 3 над полем $\mathbf{F}_2$ остатков от деления на 2 состоит из конечного числа точек. Выяснить, сколько точек в этом пространстве и найти все прямые и все плоскости этого пространства.

Определение. *Комплексификацией n-мерного вещественного проективного пространства $\mathcal{P}_n = (\mathcal{P}_n, \mathbf{V}_{n+1}, p)$ называется набор $(\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}, \nu, \widetilde{\nu})$, состоящий из комплексного проективного пространства $(\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}, \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, p^{\mathbf{C}})$, линейного отображения $\nu : \mathbf{V}_{n+1} \to \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}$ и инъективного отображения $\widetilde{\nu} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ таких, что пара $(\mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, \nu)$ является комплексификацией ассоциированного векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ и коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p^{\mathbf{C}}"] \\
\mathcal{P}_n \arrow[r, "\widetilde{\nu}"] & \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}
\end{tikzcd} \tag{94}$$

При этом исходное проективное пространство $\mathcal{P}_n$ отождествляется с его образом $\nu(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$.

Построить комплексификацию проективного пространства $\mathcal{P}_n$ можно, например, следующим образом. Определим $\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$ и $p^{\mathbf{C}}$ как в примере 1 на с. 75, полагая $\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \{\mathbf{0}\}/\sim$, где $(\mathbf{V}_{n+1}^{\mathbf{C}}, \nu)$ — комплексификация векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$, ассоциированного с $\mathcal{P}_n$, $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$, а $p^{\mathbf{C}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$, где $[\mathbf{v}]$ — класс векторов, эквивалентных вектору $\mathbf{v}$. Отображение $\widetilde{\nu}$, замыкающее диаграмму (94), при этом определится соотношением $\widetilde{\nu}(A) = [\nu(\mathbf{a})]$, где $A = p(\mathbf{a})$.

Переход к комплексификации позволяет считать, что координаты точек пространства $\mathcal{P}_n$ могут принимать не только вещественные, но и комплексные значения.

Замечание. Рассматривая аффинные карты, для комплексного проективного пространства $\mathcal{P}_n(\mathbf{C})$ можно получить представления аналогичные (79) и (80). Переходя в соответствующем представлении (80) к овеществлениям комплексных аффинных пространств, получим следующее представление комплексного проективного пространства как (дизъюнктного) объединения вещественных аффинных пространств:

$$\mathcal{P}_n(\mathbf{C}) = \mathcal{A}_{2n} \cup \mathcal{A}_{2(n-1)} \cup \mathcal{A}_{2(n-2)} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_0. \tag{95}$$

В частности, при $n = 1$ представление (95) принимает вид $\mathcal{P}_1(\mathbf{C}) = \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_0$, то есть $\mathcal{P}_1(\mathbf{C})$ получается из $\mathcal{A}_2$ добавлением одной бесконечно удаленной точки $\mathcal{A}_0$ и топологически (как непрерывное множество точек) $\mathcal{P}_1(\mathbf{C})$ эквивалентно сфере $\mathbf{S}^2$.

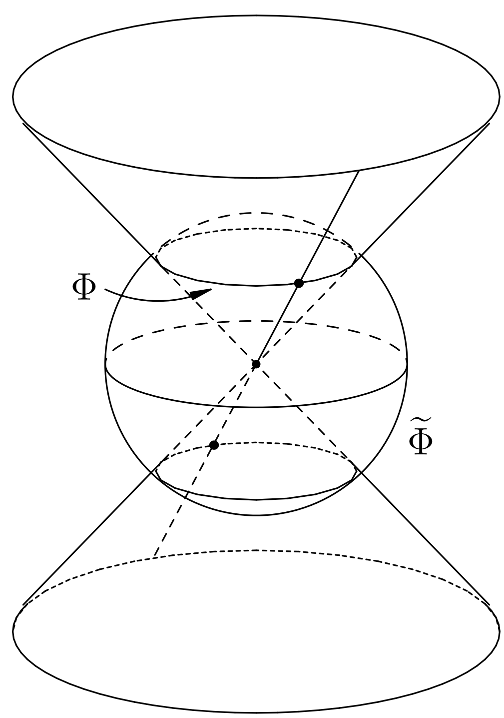
Задача 24. Определите комплексификацию проективных отображений и постройте какой-нибудь функтор комплексификации проективных пространств.

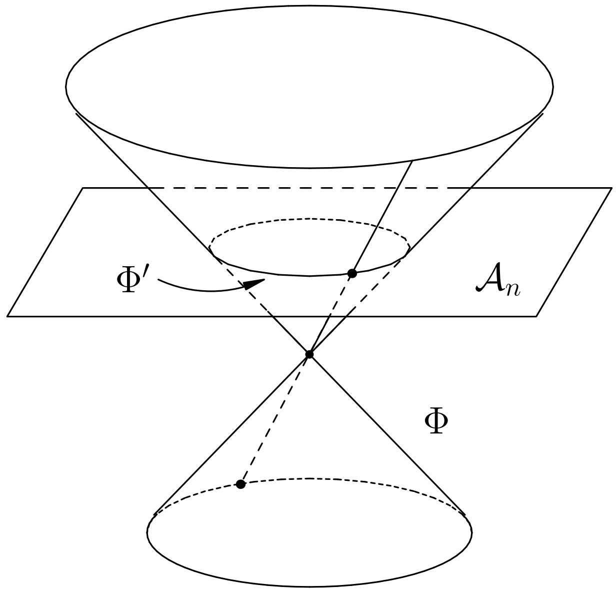
7.11 Гиперповерхности второго порядка в $\mathcal{P}_n$.

Определение. *Гиперповерхностью второго порядка в $\mathcal{P}_n$ называется множество точек $\Phi \subset \mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$, которое в системе координат, определяемой некоторым проективным репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, задается уравнением второй степени*

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0. \tag{96}$$

Из этого определения следует, что гиперповерхность Φ — это множество прямолинейных образующих конуса $\widetilde{\Phi}$, заданного уравнением (96) в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$.





Часть $\Phi' = \Phi \cap \mathcal{A}_n$ гиперповерхности Φ, содержащаяся в аффинном пространстве $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$, представляет собой гиперповерхность второго порядка в $\mathcal{A}_n$. Если относительно некоторого репера в $\mathcal{P}_n$ гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ имеет уравнение $x^{n+1} = 0$, то в соответствующих аффинных координатах в $\mathcal{A}_n$ гиперповерхность Φ' имеет уравнение

$$a_{ij}X^iX^j + 2a_{i\,n+1}X^i + a_{n+1\,n+1} = 0. \qquad (97)$$

Тип этой гиперповерхности зависит от выбора аффинной карты (см. задачи 25 и 26).

Классификация гиперповерхностей второго порядка в $\mathcal{P}_n$.

Определение. *Две гиперповерхности второго порядка Φ и Ψ в $\mathcal{P}_n$ называются проективно эквивалентными, если существует проективное преобразование $[\varphi] \in GP(\mathcal{P}_n)$, при котором $[\varphi](\Phi) = \Psi$ в $\mathcal{P}_n^{\mathbf{C}}$.*

Преобразованию проективного репера в $\mathcal{P}_n$ соответствует преобразование базиса в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$. Преобразуя базис в $\mathbf{V}_{n+1}$, квадратичную форму в левой части уравнения (96) можно привести к одному и только одному каноническому (нормальному) виду (см. [1], глава XIV, §6)

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(x^\alpha)^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{p+q}(x^\alpha)^2, \quad p+q \leqslant n+1.$$

Поскольку $[\varphi](\Phi)=\Psi$ в $\mathcal{P}_n$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\widetilde{\Phi})=\widetilde{\Psi}$ в $\mathbf{V}_{n+1}$, то классификация гиперповерхностей в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ эквивалентна классификации конусов в $\mathcal{A}_{n+1}$ и эквивалентна классификации квадратичных форм в ассоциированном векторном пространстве $\mathbf{V}_{n+1}$. Поэтому всякая гиперповерхность второго порядка в $\mathcal{P}_n$ в проективных координатах может быть задана одним и только одним из уравнений вида

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(x^\alpha)^2-\sum_{\alpha=p+1}^{p+q}(x^\alpha)^2=0,\quad 1\leqslant p+q\leqslant n+1,\;\; p\geqslant q. \tag{98}$$

Классификация кривых второго порядка в $\mathcal{P}_2$.

Теорема. *Две кривые второго порядка в $\mathcal{P}_2$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых проективных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из следующего списка*

1°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$ *(мнимый овал);*

2°. $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2=0$ *(вещественный овал);*

3°. $(x^1)^2+(x^2)^2=0$ *(пара мнимых пересекающихся прямых);*

4°. $(x^1)^2-(x^2)^2=0$ *(пара вещественных пересекающихся прямых);*

5°. $(x^1)^2=0$ *(пара совпадающих прямых).*

Задача 25. Покажите, что ограничения вещественного овала 2° на $\mathcal{A}_2=\mathcal{P}_2\setminus\mathcal{P}_1$ для прямых $\mathcal{P}_1$, имеющих уравнения $x^3=0$, $x^2=0$ и $x^2+x^3=0$, представляют собой эллипс, гиперболу и параболу соответственно.

Решение. В первых двух случаях нужно поделить уравнение 2°, соответственно, на x^3 и x^2, после чего в аффинных координатах $X^1=x^1/x^3, X^2=x^2/x^3$ и $X^1=x^3/x^2, X^2=x^1/x^2$ получаем, соответственно, уравнения $(X^1)^2+(X^2)^2=1$ и $(X^1)^2-(X^2)^2=1$. В третьем случае нужно сначала осуществить преобразование координат $y^1=x^1$, $y^2=x^2-x^3$, $y^3=x^2+x^3$. В новой системе координат овал имеет уравнение $(y^1)^2+y^2y^3=0$, а прямая $\mathcal{P}_1$ — уравнение $y^3=0$. Поделив на y^3, в аффинных координатах $X^1=y^1/y^3, X^2=y^2/y^3$ получаем уравнение параболы $(X^1)^2+X^2=0$.

Классификация поверхностей второго порядка в $\mathcal{P}_3$.

Теорема. *Две кривые второго порядка в $\mathcal{P}_3$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда в некоторых проективных системах координат они задаются одним и тем же уравнением из следующего списка*

1°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0$ (*мнимая овальная поверхность*);

2°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2=0$ (*вещественная овальная поверхность*);

3°. $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2-(x^4)^2=0$ (*линейчатая кольцевидная поверхность*);

4°. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ (*мнимая коническая поверхность*);

5°. $(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2$ (*вещественная коническая поверхность*);

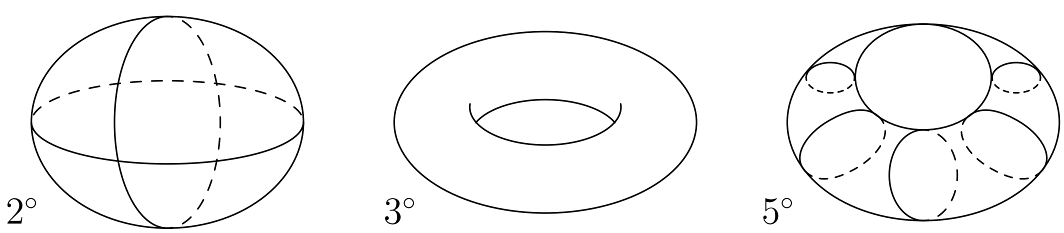
6°. $(x^1)^2+(x^2)^2=0$ (*пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой* $x^1=x^2=0$);

7°. $(x^1)^2-(x^2)^2=0$ (*пара вещественных пересекающихся плоскостей*);

8°. $(x^1)^2=0$ (*пара совпадающих плоскостей*).

Задача 26. Покажите, что для выбранной подходящим образом несобственной плоскости $\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_3$, часть поверхности 2°, принадлежащая $\mathcal{A}_3=\mathcal{P}_3\setminus\mathcal{P}_2$, может оказаться эллипсоидом, двуполостным гиперболоидом или эллиптическим параболоидом; часть поверхности 3° — однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом; а часть поверхности 5° — конусом или цилиндром.

На следующем рисунке показано топологическое строение поверхностей 2°, 3° и 5°.



7.12 Двойственное проективное пространство $\mathcal{P}_n^*$.

Рассмотрим множество гиперплоскостей в пространстве $\mathcal{P}_n$. Обозначим это множество символом $\mathcal{P}_n^*$. Каждая гиперплоскость $\pi\subset\mathcal{P}_n$ представляет собой образ $p(\mathbf{V}_n(\pi))$, где $\mathbf{V}_n(\pi)\subset\mathbf{V}_{n+1}$ — подпространство, ассоциированное с π. Множество n-мерных подпространств в $\mathbf{V}_{n+1}$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством их аннуляторов — 1-мерных подпространств в сопряженном пространстве $\mathbf{V}^*_{n+1}$. Относя линейной форме $\widetilde{\mathbf{w}}$ гиперплоскость $\pi(\mathrm{Ann}(\widetilde{\mathbf{w}}))$, где $\mathrm{Ann}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_{n+1} | \langle \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0\}$ — n-мерное подпространство, аннулирующее форму $\widetilde{\mathbf{w}}$ (аннулируемое формой $\widetilde{\mathbf{w}}$), получим отображение

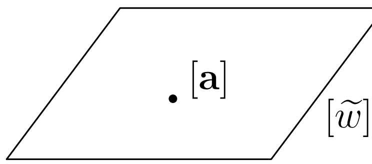
$$p^* : \mathbf{V}^*_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathcal{P}^*_n,$$

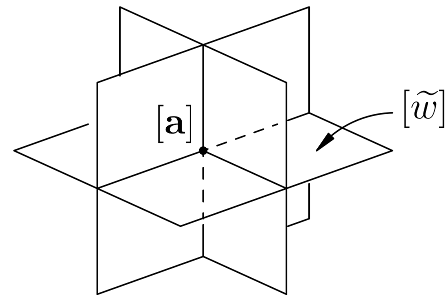
задающее на множестве $\mathcal{P}^*_n$ структуру n-мерного проективного пространства, называемого *двойственным пространством пространства* $\mathcal{P}_n$.

Отношение инцидентности. Точка $[\mathbf{a}]$ принадлежит гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ (гиперплоскость $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ проходит через точку $[\mathbf{a}]$) тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathbf{a}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0 \qquad \text{или} \qquad a^\alpha w_\alpha = 0. \tag{99}$$

Поскольку второе двойственное пространство $(\mathbf{V}^*_{n+1})^*$ векторного пространства $\mathbf{V}_{n+1}$ канонически изоморфно исходному пространству $\mathbf{V}_{n+1}$, то второе двойственное пространство $(\mathcal{P}^*_n)^*$ проективного пространства $\mathcal{P}_n$ канонически изоморфно исходному пространству $\mathcal{P}_n$. Поэтому точка $[\mathbf{a}]$ пространства $\mathcal{P}_n$ определяет гиперплоскость пространства $\mathcal{P}^*_n$, состоящую из всех гиперплоскостей $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ пространства $\mathcal{P}_n$ таких, что $\langle \mathbf{a}, \widetilde{\mathbf{w}} \rangle = 0$, то есть из гиперплоскостей $[\widetilde{\mathbf{w}}]$, проходящих через точку $[\mathbf{a}]$. Условие (99) является при этом одновременно условием того, что точка $[\widetilde{\mathbf{w}}] \in \mathcal{P}^*_n$ принадлежит гиперплоскости $[\mathbf{a}]$ пространства $\mathcal{P}^*_n$.





Отношение принадлежности точки $[\mathbf{a}]$ гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$ называют отношением *инцидентности.* При этом условие (99) является условием инцидентности точки $[\mathbf{a}]$ и гиперплоскости $[\widetilde{\mathbf{w}}]$.

Принцип двойственности. Из рассмотренных выше взаимоотношений между точками и гиперплоскостями проективного пространства вытекает следующий принцип двойственности:

Если имеется какое-либо верное утверждение, сформулированное в терминах точек и гиперплоскостей проективного пространства и отношения инцидентности между ними, то после замены каждого слова «точка» на слово «гиперплоскость», а каждого слова «гиперплоскость» на слово «точка», получится еще одно верное утверждение.

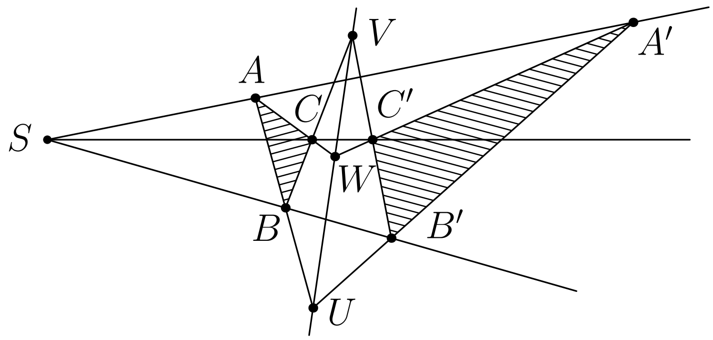
Простейшей иллюстрацией принципа двойственности являются следующие два утверждения:

1) для любых двух различных точек на плоскости $\mathcal{P}_2$ имеется единственная прямая, инцидентная каждой из этих точек;

2) для любых двух различных прямых на плоскости $\mathcal{P}_2$ имеется единственная точка, инцидентная каждой из этих прямых.

Теорема Дезарга. В качестве примера теоремы проективной геометрии докажем следующую теорему Дезарга.

Теорема. *В $\mathcal{P}_n$ заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$ таких, что все точки A, B, C, A', B', C' различны, а прямые AA', BB' и CC' различны и пересекаются в одной точке S. Пусть U — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, V — точка пересечения прямых BC и $B'C'$, а W — точка пересечения прямых AC и $A'C'$. Тогда точки U, V и W лежат на одной прямой.*



Доказательство. Если 2-плоскости π_2 и π_2', в которых расположены, соответственно, треугольники ABC и $A'B'C'$, не совпадают, то точки U, V и W лежат на прямой $\ell = \pi_2 \cap \pi_2'$.

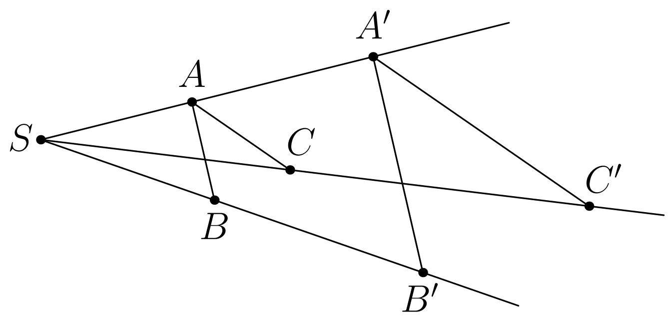
Пусть теперь треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости. Можно считать, что теорему надо доказать для пространства $\mathcal{P}_2$ размерности два. Пусть $A = [\mathbf{a}]$, $B = [\mathbf{b}]$, $C = [\mathbf{c}]$, $A' = [\mathbf{a}']$, $B' = [\mathbf{b}']$, $C' = [\mathbf{c}']$ и $S = [\mathbf{s}]$. Имеют место следующие линейные зависимости векторов

$$\mathbf{s} = \lambda\mathbf{a} + \lambda'\mathbf{a}', \quad \mathbf{s} = \mu\mathbf{b} + \mu'\mathbf{b}', \quad \mathbf{s} = \nu\mathbf{c} + \nu'\mathbf{c}'.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $U = [\mathbf{u}]$, где $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} = \mu'\mathbf{b}' - \lambda'\mathbf{a}'$, поскольку при этом точка $[\mathbf{u}]$ принадлежит каждой из прямых AB и $A'B'$. Аналогично, вычитая из второго равенства третье, а потом из третьего первое, получим $V = [\mathbf{v}]$, где $\mathbf{v} = \mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{c} = \nu'\mathbf{c}' - \mu'\mathbf{b}'$, $W = [\mathbf{w}]$, где $\mathbf{w} = \nu\mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} = \lambda'\mathbf{a}' - \nu'\mathbf{c}'$. Складывая теперь векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, получим $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}) + (\mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{c}) + (\nu\mathbf{c} - \lambda\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Таким образом, векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ линейно зависимы, и поэтому точки U, V и W принадлежат одной прямой. $\square$

Задача 27. Докажите теорему Дезарга, объявляя прямую $\ell = UW$ несобственной прямой аффинного пространства $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}_2 \setminus \ell$.

Решение. При этом получаем в $\mathcal{A}_2$ две пары параллельных прямых $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ и требуется доказать, что $BC \| B'C'$.



Задача 28. Применяя принцип двойственности, докажите обратную теорему Дезарга в $\mathcal{P}_2$: Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ таких, что все точки A, B, C, A', B', C' различны, а точки $U = AB \cap A'B'$, $V = BC \cap B'C'$ и $W = AC \cap A'C'$ лежат на одной прямой. Тогда прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке S.

Решение. Достаточно аккуратно сформулировать теорему Дезарга в терминах точек, прямых и отношения инцидентности, а потом заменить каждое слово «точка» на слово «прямая» и наоборот.

Теорема Дезарга: Точка S инцидентна трем различным прямым a, b и c. Точки A и A' различны и инцидентны прямой a, точки B и B' различны и инцидентны прямой b, точки C и C' различны и инцидентны прямой c. Ни одна из этих точек не совпадает с точкой S. Прямые AB и $A'B'$ инцидентны точке U, прямые BC и $B'C'$ инцидентны точке V, прямые AC и $A'C'$ инцидентны точке W. Тогда существует прямая s, инцидентная точкам U, V и W.

Неевклидовы геометрии.

Как было показано выше (см. с. 87) геометрия проективного пространства с группой проективных преобразований, переводящих в себя некоторую фиксированную гиперплоскость, является аффинной геометрией.

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathcal{P}_n$ некоторую гиперповерхность второго порядка Φ. Проективные преобразования $\widetilde{\varphi} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, переводящие гиперповерхность Φ в себя, то есть такие, что $\widetilde{\varphi}(\Phi) = \Phi$, образуют подгруппу $G(\Phi) \subset GP(\mathcal{P}_n)$. Пусть в системе координат, определяемой некоторым репером $[\mathbf{e}_\alpha]$, гиперповерхность Φ имеет уравнение

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \qquad (100)$$

и пусть $[\mathbf{x}] \in \Phi$. Проективное преобразование $\widetilde{\varphi}$ с уравнениями $y^\sigma = \varphi^\sigma_\alpha x^\alpha$ переводит гиперповерхность Φ в себя, если из $[\mathbf{x}] \in \Phi$ следует $[\mathbf{y}] \in \Phi$, то есть если из $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ следует $a_{\sigma\tau}y^\sigma y^\tau = 0$ или $a_{\sigma\tau}\varphi^\sigma_\alpha x^\alpha \varphi^\tau_\beta x^\beta = 0$. Таким образом, гиперповерхность Φ может быть задана двумя уравнениями второй степени — уравнением (100) и уравнением $a_{\sigma\tau}\varphi^\sigma_\alpha\varphi^\tau_\beta x^\alpha x^\beta = 0$. Отсюда следует (см. предложение на с. 57), что эти уравнения пропорциональны, то есть

$$a_{\sigma\tau}\varphi^\sigma_\alpha\varphi^\tau_\beta = \lambda a_{\alpha\beta}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{101}$$

Таким образом, подгруппа $G(\Phi) \subset GP(\mathcal{P}_n)$ задается уравнениями (101).

Геометрия пространства $\mathcal{P}_n$ с группой движений $G(\Phi)$ называется *неевклидовой геометрией*. Такая геометрия изучает свойства объектов в $\mathcal{P}_n$, которые остаются неизменными при преобразованиях из группы $G(\Phi)$. При этом гиперповерхность Φ называется *абсолютом* соответствующей неевклидовой геометрии, а преобразования, сохраняющие абсолют, называются *движениями* в этой неевклидовой геометрии.

Неевклидова геометрия, соответствующая абсолюту с каноническим уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 0, \tag{102}$$

называется *эллиптической* геометрией или *геометрией Римана*. Абсолют (102) не имеет вещественных точек. Проективное пространство с абсолютом (102) и соответствующей группой движений называется *эллиптическим* пространством.

Уравнение (101) для абсолюта (102) принимает вид

$$\delta_{\sigma\tau}\varphi^\sigma_\alpha\varphi^\tau_\beta = \lambda\delta_{\alpha\beta},$$

где $(\delta_{\sigma\tau})$ — единичная матрица.

Таким образом, движения эллиптического пространства задаются матрицами $A = (\varphi^\alpha_\beta)$, удовлетворяющими уравнению $AA^\top = \lambda E$. Поскольку матрица A определена с точностью до пропорциональности, то движение эллиптического пространства можно задать матрицей, удовлетряющей уравнению $AA^\top = E$, то есть ортогональной матрицей. Если проективное пространство $\mathcal{P}_n$ рассматривать как сферу в $\mathbf{E}_{n+1}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками, то движениями эллиптического пространства оказываются преобразования $\mathcal{P}_n$, индуцированные поворотами (движениями) сферы $\mathbf{S}^n$. Таким образом, эллиптическая геометрия — это обычная геометрия сферы, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.

Неевклидова геометрия, соответствующая абсолюту с каноническим уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = 0,$$

называется *гиперболической* геометрией или *геометрией Лобачевского.*

Собственными точками геометрии Лобачевского называют точки пространства $\mathcal{P}_n$, лежащие внутри абсолюта, то есть точки, удовлетворяющие (в канонической системе координат) неравенству

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 < 0.$$

Множество $\mathcal{H}_n$ собственных точек образует так называемое *гиперболическое* пространство или *пространство Лобачевского.*

Прямыми и плоскостями пространства Лобачевского являются части прямых и плоскостей пространства $\mathcal{P}_n$, лежащие в пространстве $\mathcal{H}_n$, то есть внутри абсолюта. Расстояние между точками A и B пространства $\mathcal{H}_n$ определяется формулой

$$\operatorname{dist}(A, B) = \frac{k}{2}\,|\ln(M, N, A, B)\,|, \tag{103}$$

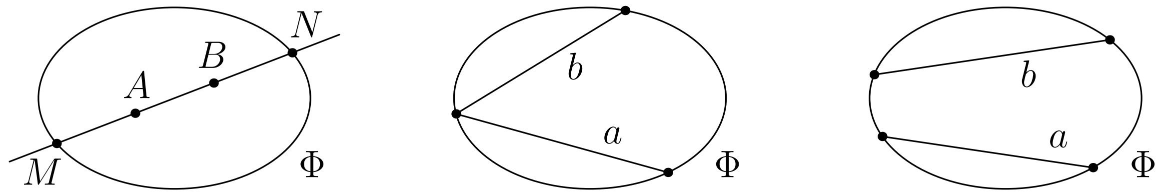
где M и N — точки пересечения прямой AB с абсолютом Φ, а (M, N, A, B) — ангармоническое отношение, определенное формулой (88).

Задача 29. Проверить, используя формулу (88), что если одна из точек A или B будет стремиться к абсолюту, то расстояние между A и B, вычисляемое по формуле (103) будет неограниченно возрастать.

Таким образом, точки абсолюта можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства Лобачевского.

Прямые пространства $\mathcal{H}_n$, пересекающиеся в точке, принадлежащей абсолюту, называются *параллельными* в смысле Лобачевского.

Прямые пространства $\mathcal{H}_n$, пересекающиеся в точке, лежащей во внешней области по отношению к абсолюту, называются *расходящимися.*



Подробнее с геометрией неевклидовых пространств можно ознакомиться по книгам [16], [3], [13].

Список литературы

[1] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М. Наука. 1979. 512 с.

[2] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* М. Просвещение. 1974. 352 с.

[3] Базылев В.Т., Дуничев К.И. *Геометрия II.* М. Просвещение. 1975. 368 с.

[4] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964.

[5] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М. Наука. 1970. 528 с.

[6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* М. Наука. 1981. 232 с.

[7] Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия.* М. Наука. 1986. 304 с.

[8] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* М. Наука. 1971. 432 с.

[9] Малахальцев М.А., Фомин В.Е., Шапуков Б.Н., Шурыгин В.В. *Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии.* Учебное пособие. Изд.–во Казанск. ун-та. 1993. 160 с.

[10] Постников М.М. *Аналитическая геометрия* (*Лекции по геометрии. Семестр I*). М. Наука. 1979. 336 с.

[11] Постников М.М. *Группы и алгебры Ли* (*Лекции по геометрии. Семестр V*). М. Наука. 1982. 448 с.

[12] Постников М.М. *Линейная алгебра* (*Лекции по геометрии. Семестр II*). М. Наука. 1986. 400 с.

[13] Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского.* МЦНМО. 2000. 80 с.

[14] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* М. Наука. 1967. 384 с.

[15] Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* М. Наука. 1966. 648 с.

[16] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* М. Наука. 1969. 548 с.

[17] *Сборник задач по геометрии.* Под ред. Базылева В.Т. М. Просвещение. 1980. 240 с.

[18] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* М. Наука. 1964. 336 с.

[19] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии плоскости.* Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Казанск. ун-т. 2001. 46 с.

[20] Шурыгин В.В. *Векторная алгебра и ее применение в аналитической геометрии пространства.* Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Казанск. ун-т. 2002. 72 с.