<u>РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК</u>
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Новиков, А.В. Цветков

МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Москва – 2000

УДК 007
ББК 32.81
Н 73

Н 73 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: ООО «НИЦ «Апостроф», 2000. – 182 с.

ISBN 5-94155-005-7

Настоящая работа содержит результаты исследований задач стимулирования в двухуровневых организационных (активных) системах, включающих несколько управляемых субъектов (активных элементов): общую формулировку и классификацию задач стимулирования, решения задач синтеза оптимальных функций стимулирования в детерминированных системах и системах с неопределенностью, анализ сравнительной эффективности решений для различных моделей и зависимости свойств этих решений от параметров модели управляемой системы.

Значительное внимание уделяется изучению практически важных частных случаев: унифицированных, компенсаторных, линейных и других систем стимулирования, а также задачам управления организационными системами с технологически связанными элементами и задачам формирования состава системы.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

Рецензент: д.т.н., проф. В.Н. Бурков

УДК 007
ББК 32.81
Н 73

ISBN 5-94155-005-7

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим двухуровневую организационную (активную) систему веерного типа, состоящую из управляющего органа – центра – на верхнем уровне иерархии и управляемых субъектов – активных элементов на нижнем уровне. В работах [21, 42, 44] были предложены следующие основания системы классификаций моделей активных систем (см. рисунок 1): число активных элементов (одноэлементные и многоэлементные системы), число периодов функционирования (статические и динамические системы), тип и вид неопределенности (отсутствие неопределенности – детерминированные системы; в зависимости от информации о неопределенных параметрах – интервальные, вероятностные и нечеткие системы) и др.

Исторически исследования задач стимулирования и в теории активных систем (АС), и в других разделах теории управления социально-экономическими системами (теория иерархических игр [24, 25, 30], теория контрактов [57-60] и др.) начинались с изучения так называемых базовых – детерминированных, одноэлементных статических моделей (сектор I на рисунке 1), в которых помимо управляющего органа – центра, присутствовал единственный управляемый субъект – активный элемент (АЭ) [3, 4, 15].

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является многоэлементная АС с независимыми (невзаимодействующими) АЭ. В этом случае задача стимулирования распадается на ряд одноэлементных задач [12-16]. Если ввести общие для всех или ряда АЭ ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в АС со слабо связанными элементами, в которой решается набор параметрических одноэлементных задач стимулирования, а проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации [20, 44].

Если активные элементы взаимосвязаны, то есть существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий, если результат деятельности одного АЭ зависит, помимо его собственных действий, от действий других элементов, или если стимулирование каждого АЭ зависит также и от результатов всех остальных АЭ, то получается «полноценная» многоэлементная задача стимулирования (сектор VII на Рис. 1), исследуемая в настоящей работе.

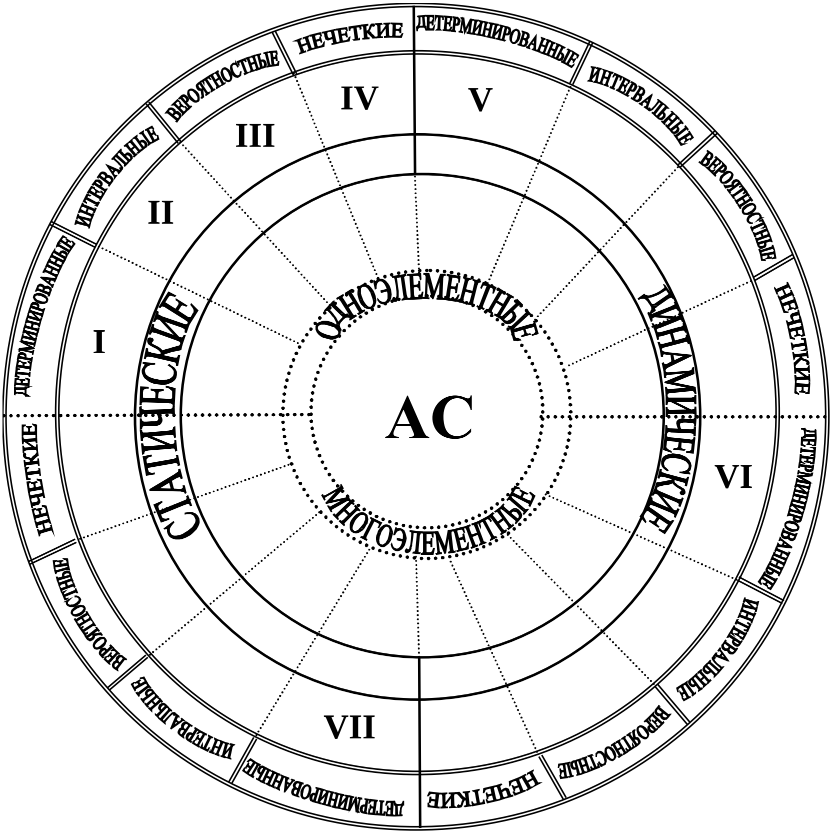

Рис. 1 Классификация задач стимулирования в АС

Общих подходов к аналитическому решению этого класса задач на сегодняшний день, к сожалению, не существует и исследован он гораздо менее детально и систематически, чем базовая модель (достаточно полный обзор современного состояния исследований задач стимулирования в многоэлементных и динамических социально-экономических системах приведен в [34]). В большинстве случаев частные модели многоэлементных АС основываются либо на непосредственном обобщении результатов анализа базовой модели (в этом случае вычислительная сложность катастрофически растет с увеличением числа АЭ), либо на рассмотрении параметрически заданных классов, поиск оптимального решения в которых использует стандартную оптимизационную технику [15, 16, 29, 31, 44].

Также расширениями базовой модели являются одноэлементные статические системы с неопределенностью (сектора II – IV на Рис. 1) и детерминированные одноэлементные или многоэлементные динамические системы (сектор V на Рис. 1). В таблице 1 приведены ссылки на работы, содержащие результаты исследований соответствующих классов моделей I – VII. Отметим, что многоэлементные или динамические системы с неопределенностью (им соответствуют «пустые» сектора на Рис. 1) на сегодняшний день практически не исследованы.

Таблица 1. Основные работы по моделям механизмов стимулирования в активных системах

Модель (см. рис.1.)	**Основные работы**
I	4, 12, 15, 19, 24, 30, 36, 37, 44
II	10, 13-15, 30, 33, 38, 39, 46, 50-54, 67
III	8, 9, 40, 43, 44, 58-65
IV	35, 41, 42, 44
V	4, 15, 30, 34, 55
VI	15, 34, 55
VII	4, 15, 18, 26-29, 31, 34, 36, 54, 61, 63, 65,

Охарактеризуем кратко основные подходы, используемые при решении одноэлементных задач (более подробное обсуждение, снабженное детальными ссылками на соответствующую литературу, приводится ниже при классификации и исследовании многоэлементных АС).

В одноэлементной активной системе стратегией центра, делающего первый ход, является выбор системы стимулирования, то есть зависимости вознаграждения (или штрафов) АЭ за результаты его деятельности. Стратегией активного элемента является выбор (при известной функции стимулирования) действия, определяющего (в детерминированных АС – однозначно, в АС с неопределенностью – влияющего совместно с неопределенными факторами – состоянием природы) результат деятельности.

В теории активных систем обычно предполагается, что интересы участников выражены их целевыми функциями (целевая функция центра – разность между доходом от деятельности АЭ и стимулированием последнего, целевая функция АЭ – разность между стимулированием за выбор тех или иных действий и затратами по выбору этих действий), поэтому в рамках теоретико-игровых моделей рациональным считается поведение игроков, заключающееся в максимизации целевых функции с учетом всей имеющейся на момент принятия решений информации. Задача стимулирования заключается в поиске таких систем стимулирования, которые максимизировали бы целевую функцию центра при условии, что выбираемое активным элементом действие максимизирует целевую функцию элемента при этой системе стимулирования.

Ключевыми понятиями в базовых (детерминированных, одноэлементных, статических) задачах стимулирования являются понятия множества реализуемых действий и минимальных затрат на стимулирование. При заданной системе стимулирования множеством реализуемых действий является множество действий АЭ, выбор которых максимизирует значение его целевой функции. Если выполнена гипотеза благожелательности (ГБ – при прочих равных АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра действие), то, очевидно, максимальную эффективность будут иметь классы систем стимулирования, для которых объединение множеств реализуемых действий максимально [15, 42].

Альтернативным подходом является использование минимальных затрат центра на стимулирование по реализации заданного действия, которые равны значению функции стимулирования на этом действии при условии, что данная система стимулирования реализует это действие. Понятно, что системы стимулирования, реализующие действия с меньшими затратами на стимулирование, имеют более высокую эффективность [42, 44].

Таким образом, решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в одноэлементной АС может быть сведено к анализу соответствующих множеств реализуемых действий и/или минимальных затрат на стимулирование [44]. При этом оказывается, что максимальную эффективность имеют так называемые компенсаторные иди квазикомпенсаторные[1] системы стимулирования (К-типа), которые компенсируют в определенном диапазоне (определяемым ограничениями на размер вознаграждения АЭ) активному элементу изменения затрат (или дохода), делая его целевую функцию постоянной в этом диапазоне [15, 44]. Как будет видно из дальнейшего изложения, идея компенсации затрат оказывается чрезвычайно плодотворной при решении задач стимулирования и в многоэлементных АС[2].

Таким образом, основной вывод из результатов исследования задач стимулирования в одноэлементных АС, который будет обобщен в настоящей работе на случай многоэлементных АС, заключается в том, что минимальные затраты центра на стимулирование по реализации некоторого действия АЭ достигаются при использовании компенсаторной или квазикомпенсаторной системы

---

[1] *«Квази»-система стимулирования некоторого типа (К-типа, С-типа, L-типа и т.д.) отличается от просто системы стимулирования данного типа тем, что она отлична от нуля только при действии АЭ, равном реализуемому действию [42, 44].*

[2] *Отдельного обсуждения заслуживает вопрос об устойчивости оптимального решения по параметрам теоретико-игровой модели [24]. К сожалению, оказывается, что компенсаторные системы стимулирования «неустойчивы» – сколь угодно малая ошибка в описании, например, предпочтений АЭ приводит к конечному (и иногда значительному с содержательной точки зрения) изменению реализуемого данной системой стимулирования действия АЭ. Тем не менее, умея решать задачу стимулирования, можно строить так называемые обобщенные решения, обладающие максимальной гарантированной эффективностью в заданной области возможных значений параметров модели [37]. В упомянутой работе подробно обсуждаются методы построения обобщенных решений одноэлементных задач стимулирования. Можно предположить, что предложенная методология применима и для многоэлементных задач, поэтому в настоящей работе детально исследовать проблему устойчивости решений мы не будем.*

стимулирования. При этом затраты центра на стимулирование в точности равны затратам АЭ по выбору этого действия, поэтому при решении задач планирования, определения минимальных ограничений на систему стимулирования и т.д., достаточно целевую функцию центра рассматривать как разность его функции дохода и функции затрат АЭ [44].

Последовательность решения и одноэлементных, и многоэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное, или допустимое при заданных ограничениях) действие – первый этап – этап анализа согласованности стимулирования. В одноэлементных АС в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции АЭ будет достигаться, в том числе и на реализуемом действии. В многоэлементных АС достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре активных элементов при заданной системе стимулирования. Если равновесий несколько, необходимо ввести и проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе элементов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (АЭ не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий элементов и т.д. (см. ниже более подробно).

Далее следует приравнять стимулирование затратам[1] и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых

---

[1] *Приравнивая стимулирование затратам и предполагая, что минимальные затраты (и минимальное стимулирование) равны нулю, мы считаем, что центр должен обеспечить АЭ как минимум ненулевую полезность – условие индивидуальной рациональности АЭ. Как показано в [44], большинство результатов (по крайней мере, вся методика анализа) остаются в силе в случае, если минимальная гарантированная полезность АЭ строго положительна (содержательна она может интерпретироваться как резервная заработная плата АЭ – полезность, которая может быть им получена вне рассматриваемой активной системы [9]), поэтому*

действий следует реализовывать центру – второй этап – этап согласованного планирования [6-9, 15, 16, 51-54, 58].

Помимо компенсаторных систем стимулирования, как на практике, так и в теоретико-игровых моделях широко распространены другие системы стимулирования, также называемые базовыми системами стимулирования. Среди них: скачкообразная система стимулирования (C-типа), при использовании которой АЭ в зависимости от величины своих действий либо поощряется на фиксированную величину, либо не поощряется вообще; пропорциональная система стимулирования (линейная – L-типа), в которой величина вознаграждения прямо пропорциональна действию АЭ; системы стимулирования D-типа (основанные на участии АЭ в доходе или прибыли от деятельности АС в целом) и др. [21, 36, 42, 44].

Перечисленные системы стимулирования являются базовыми для одноэлементных АС, составляя основу «конструктора», позволяющего моделировать практически любую из используемых на практике систем индивидуального стимулирования. Некоторые из них не являются оптимальными (в смысле максимального значения целевой функции центра, которое достигается в частности при использовании компенсаторных систем стимулирования), поэтому при изучении как одноэлементных, так и многоэлементных моделей приходится исследовать их сравнительную эффективность.

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру. Во втором разделе приводится общая постановка задачи стимулирования в многоэлементной АС, в третьем разделе вводится система классификаций задач такого рода и выделяются «базовые» для многоэлементных АС модели: S1 – S8. Четвертый раздел полностью посвящен исследованию этих восьми моделей и, в частности – изучению сравнительной эффективности базовых систем стимулирования, набор которых подробно описан в [21, 44]. В пятом и шестом разделах рассматриваются практически важные частные случаи механизмов стимулирования: ранговые системы стимулирования, унифицированные системы стимулирования и др. Седьмой раздел посвящен систематическому исследованию задач

используемая в настоящей работе трактовка индивидуальной рациональности представляется вполне обоснованной.

стимулирования с многоэлементных АС, функционирующих в условиях неопределенности (внешней и внутренней, интервальной, вероятностной и нечеткой). В восьмом разделе рассматриваются модели стимулирования с глобальными ограничениями на множества допустимых действий АЭ. Полученные при этом исследовании теоретические результаты применяются в девятом разделе при описании практически важного частного случая взаимозависимости АЭ – производственных цепочек. И, наконец, в десятом разделе результаты решения задач стимулирования используются для решения задач формирования состава многоэлементных АС. Заключение содержит качественное обсуждение основных результатов и перспективных направлений дальнейших исследований.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим многоэлементную детерминированную двухуровневую активную систему, состоящую из центра и n АЭ. Стратегией активных элементов является выбор действий, стратегией центра – выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого АЭ от его действий и, быть может, действий других АЭ.

Обозначим $y_i \in A_i$ - действие i-го АЭ, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество АЭ, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$ - вектор действий АЭ[1]; $z = Q(y)$, где $Q: A' \to A_0$ - результат деятельности АЭ, входящих в систему. Введем следующее обозначение: $(y_i^1; y_{-i}^2) = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_{i-1}^2, y_i^1, y_{i+1}^2, \dots, y_n^2)$, $y_i^1 \in A_i$, $y_{-i}^2 \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$.

Относительно допустимых множеств будем предполагать, что выполнено следующее предположение:

А.1. $\forall i \in I \;\; A_i = [0; A_i^+] \subset \Re_+^1$, $A_0 = [0; A_0^+] \subset \Re_+^1$.

Интересы и предпочтения участников АС – центра и АЭ – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $F(\cdot)$ представляет собой либо доход от деятельности АЭ (в этом случае соответствующая задача управления (см. ниже и [44]) называется задачей стимулирования первого рода), либо разность между доходом и суммарным вознаграждением, выплачиваемым АЭ (в этом случае соответствующая задача управления (см. ниже и [44]) называется задачей стимулирования второго рода). Целевая функция АЭ $f(\cdot)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами.

---

[1] *Пока предполагается, что множества допустимых действий отдельных АЭ независимы (так называемая гипотеза независимого поведения (ГНП)), ниже в восьмом разделе будет рассмотрен случай зависимых множеств допустимых действий АЭ.*

Примем следующий порядок функционирования АС. Центру и АЭ на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно - функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников АС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их АЭ, после чего АЭ при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции (иерархическая игра типа Γ_2 [3, 15, 24]).

Индивидуальные затраты i-го АЭ по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех АЭ, то есть $c_i = c_i(y)$. Относительно функций затрат АЭ будем считать, что они удовлетворяют следующим предположениям:

А.2. $\forall\ y_i \in A_i$ затраты i-го АЭ не убывают по y_i, $i \in I$.

А.3. 1) $\forall\ y \in A'$ $c_i(y) \geq 0$; 2) $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}$ $c_i(0, y_{-i}) = 0$, где $y_{-i} = (y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ – обстановка для i-го АЭ.

Стимулирование i-го АЭ $\sigma_i(\cdot)$, назначаемое центром, в общем случае может зависеть от действий всех АЭ и от результата деятельности системы, то есть σ_i: $A' \times A_0 \to \Re^1$. Относительно функций стимулирования введем следующее предположение:

А.4. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

Таким образом, целевая функция i-го АЭ имеет вид "стимулирование минус затраты"[1]:

(1) $f_i(y, \sigma_i) = \sigma_i(y, z) - c_i(y)$, $i \in I$.

В настоящей работе мы будем в основном рассматривать задачи стимулирования второго рода (возможности переноса результатов исследования задач второго рода на задачи первого рода и наоборот подробно обсуждаются в [44]), поэтому целевая функция центра, представляющая собой в задаче стимулирования второго рода разность между доходом от действий АЭ и результатов деятельности системы $H(y, z)$ и суммарными затратами на стимулирование $J(y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y, Q(y))$, имеет вид:

---

[1] *В настоящей работе принята независимая нумерация формул внутри каждого подраздела.*

(2) $F(y,s) = H(y, Q(y)) - \sum_{i=1}^{n} s_i(y,Q(y))$,

где $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ Î M, M - множество допустимых систем стимулирования.

Относительно множества допустимых функций стимулирования ограничимся пока следующим качественным замечанием (конкретизация ограничений производится ниже при рассмотрении конкретных моделей) - следует различать два типа ограничений. В первом случае могут, **дополнительно к А.4**, быть наложены ограничения на индивидуальное стимулирование: s_i Î M_i, i Î I, а общие ограничения на стимулирование в активной системе отсутствуют, то есть s Î $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$. Во втором случае может добавляться дополнительное общее (глобальное) ограничение $M_{гл}$ на систему индивидуальных стимулирований (совокупность функций стимулирования): s Î $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ Ç $M_{гл}$.

Обозначим $Par(B, \{f_i\})$ – множество недоминируемых по Парето элементов множества B Í A; $E(s)$ – множество равновесных стратегий АЭ.

В многоэлементной активной системе в качестве множества решений игры (множества реализуемых действий) $P(s)$ может рассматриваться множество недоминируемых по Парето равновесий в доминантных стратегиях $E_d(s)$ (если оно существует), равновесий Нэша $E_N(s)$ или каких-либо других некооперативных[1] (и оговариваемых в каждом конкретном случае) теоретико-игровых

---

[1] Данное предположение (о некооперативном характере взаимодействия активных элементов) чрезвычайно важно для всего последующего изложения. Допущение наличия коалиционных эффектов с одной стороны привело бы к необходимости соответствующего определения решения игры, а с другой стороны, несомненно, расширило бы как содержательные интерпретации, так и области возможных приложений рассматриваемых формальных моделей. Тем не менее, в настоящей работе мы ограничимся концепцией равновесия Нэша.

концепций равновесия; то есть $P(s) = Par(E(s), \{f_i\})$. По умолчанию под равновесием (реализуемых векторов действий) ниже мы будем подразумевать равновесие Нэша (то есть $E(s)$ - множество равновесных по Нэшу при заданной системе стимулирования векторов стратегий АЭ). Другими словами, будем считать, во-первых, что на момент принятия решений о выбираемых стратегиях АЭ и центр имеют полную информацию [56, 66] о целевых функциях и допустимых множествах (а также о глобальных ограничениях) всех участников, и, во-вторых, что АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией.

Сделав маленькое отступление, напомним, что доминантной стратегией i-го АЭ $y_i^d \in A_i$ называется такая его стратегия, которая удовлетворяет: $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ \ \forall\ y_i \in A_i\ \ f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i})$. Если для всех АЭ существуют доминантные стратегии, то их вектор $y^d \in A'$ называется равновесием в доминантных (РДС). Равновесием Нэша называется такой вектор $y^N \in A'$ стратегий АЭ, который удовлетворяет: $\forall\ i \in I\ \ \forall\ y_i \in A_i\ \ f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N)$ [45, 46].

Итак, предположим, что при использовании центром системы стимулирования $s \in M$ множество решений игры АЭ (то есть - множество действий, реализуемых системой стимулирования s) есть $P(s) \subseteq A'$.

Как и в одноэлементной активной системе, эффективностью (гарантированной эффективностью) стимулирования является максимальное (минимальное) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(s) = \max\limits_{y \in P(s)} F(y,s)$,

(4) $K_g(s) = \min\limits_{y \in P(s)} F(y,s)$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования $s^* \in M$, имеющей максимальную (максимальную гарантированную) эффективность:

(5) $s^* = arg \max\limits_{s \in M} K(s)$,

(6) $s_g^* = arg \max_{s \in M} K_g(s)$.

Как отмечалось выше и в [44], задача синтеза оптимальной системы стимулирования фактически сводится либо к анализу множеств реализуемых действий, либо (и) к анализу минимальных затрат на стимулирование. В одноэлементной активной системе множеством решений игры (реализуемых действий) является множество действий АЭ, доставляющих максимум его целевой функции. В многоэлементной АС элементы вовлечены в игру - выигрыш каждого АЭ в общем случае зависит как от его собственных действий, так и от действий других АЭ (напомним, что в настоящей работе допускается лишь некооперативное взаимодействие участников системы). Поэтому основное качественное отличие задач стимулирования в многоэлементных системах по сравнению с одноэлементными (помимо увеличения числа участников системы и соответствующего ему "линейному" по их числу росту сложности задачи) заключается в том, что в многоэлементных системах множество решений игры может иметь достаточно сложную структуру. В том числе, например, одной системой стимулирования могут реализовываться несколько Парето эффективных (с точки зрения АЭ) векторов действий и т.д.

Другими словами, отсутствие на сегодняшний день относительно полных (если принять за "идеал" совокупность результатов исследования одноэлементных задач) аналитических методов решения многоэлементных задач стимулирования, помимо высокой их структурной и вычислительной сложности, отчасти объясняется отсутствием единой концепции решения игры в теории игр [22, 56, 66] - в зависимости от информированности игроков (участников АС), гипотез об их поведении и т.д. может изменяться теоретическая оценка эффективности тех или иных управлений.

Еще раз подчеркнем, что при рассмотрении теоретико-игровых моделей задач стимулирования в многоэлементных активных системах мы будем считать выполненными следующие два общих **предположения**.

Первое предположение[1] - *гипотеза независимого поведения* (ГНП) АЭ, заключающаяся в том, что в АС отсутствуют глобаль-

---

[1] *В восьмом разделе настоящей работы рассматривается ряд моделей*

ные ограничения на совместный выбор элементами своих стратегий (формально это предположение отражено в использованном выше определении множества допустимых векторов стратегий АЭ: $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$). Если ГНП не выполнена, то есть существуют глобальные ограничения $A_{гл}$ на выбираемые АЭ действия: $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i \cap A_{гл}$, то возможны следующие подходы. Соответствующая игра может рассматриваться как игра с запрещенными ситуациями (запрещен выбор действий из множества $A' \backslash A_{гл}$) [24]. Альтернативой в некотором смысле является выбор центром таких управлений (в задаче стимулирования – функций стимулирования), которые реализовывали бы действия, удовлетворяющие глобальным ограничениям (при этом центр «берет на себя» проблему удовлетворения этим ограничениям). Например, если в задаче планирования [15] согласованный план принадлежит A', то в рамках гипотезы благожелательного поведения АЭ заведомо выберут допустимые действия.

Второе предположение - *предположение о бескоалиционности поведения АЭ*, которое означает, что АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо, не имея возможности образовывать коалиции.[1] При рассмотрении базовых моделей стимулирования в многоэлементных АС в четвертом разделе мы кратко обсудим возможности учета кооперативных возможностей участников АС.

Для получения целостной картины имеющегося положения дел и выделения перспективных направлений исследований приведем классификацию задач стимулирования в многоэлементных детерминированных активных системах и укажем основные рабо-

---

стимулирования с глобальными ограничениями на множества допустимых действий активных элементов, то есть модели, в которых ГНП не выполнена. Результаты же первых семи разделов существенно используют предположение о возможности независимого выбора состояний элементами.

[1] *В целом, для теории активных систем и большинства других разделов теории управления, изучающих задачи стимулирования, на сегодняшний день характерно исследование именно некооперативных моделей взаимодействия участников АС (исключениями являются [7, 24, 32, 36]).*

ты, содержащие результаты, полученные в соответствующих направлениях отечественными и зарубежными авторами.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Целевая функция i-го АЭ, определяемая разностью стимулирования и затрат, имеет вид: $f_i(y, \sigma_i) = \sigma_i(y, z) - c_i(y)$. Следовательно, классифицируя задачи стимулирования в многоэлементных АС, необходимо учитывать возможные свойства и ограничения на функции стимулирования и затрат. Для описания конкретной теоретико-игровой модели стимулирования предлагается использовать значения признаков классификации по основаниям[1], приводимым в следующем порядке - первичное основание, вторичное и т.д.:

1. <u>Переменные, от которых зависят функции стимулирования</u> (индивидуальные вознаграждения АЭ). По данному основанию возможны следующие значения признаков:

- индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от его собственных действий - $\sigma_i(y,z) = \sigma_i(y_i)$, $y_i \in A_i$, $i \in I$. При этом возможны следующие варианты:

♦ отсутствуют общие ограничения на индивидуальные стимулирования АЭ - $\sigma \in M = \prod_{i=1}^{n} M_i$;

♦ присутствуют общие ограничения $M_{гл}$ на стимулирование: $M = \prod_{i=1}^{n} M_i \cap M_{гл}$.

- индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит от вектора действий всех АЭ: $\sigma_i(y,z) = \sigma_i(y)$, $i \in I$, $y \in A'$.

[1] *Основанием классификации оснований вводимой системы классификаций служит набор параметров, который однозначно описывает большинство моделей многоэлементных АС.*

- индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит от результата деятельности АС в целом: $\sigma_i(y,z) = \sigma_i(z)$, $i \in I$, $z \in A_0$.

- смешанная зависимость, когда индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит и от результата деятельности АС, и от вектора действий всех АЭ (например, аддитивно: $\sigma_i(y,z) = \sigma_i(y) + \tilde{\sigma}_i(z)$, $i \in I$, $y \in A'$, $z \in A_0$ и т.д.).

2. Свойства функций затрат АЭ. Ограничимся пока рассмотрением двух случаев - сепарабельных и несепарабельных затрат.

Функции затрат из набора $\{c_i(y)\}$ называются *сепарабельными*, если изменение индивидуальных затрат каждого АЭ, вызванное любым изменением его собственного действия, при фиксированной обстановке игры (действиях остальных АЭ) не зависит от этой обстановки. Например, пусть $g_i(y_{-i})$, $i \in I$ – произвольные действительнозначные функции. Тогда, очевидно, множества равновесий Нэша (а также РДС) в АС с целевыми функциями АЭ $\{f_i(y)\}$ и в АС с целевыми функциями АЭ $\{f_i(y) + g_i(y_{-i})\}$, $y \in A'$, $y_{-i} \in A_{-i}$, совпадают. В частности сепарабельными являются такие функции индивидуальных затрат АЭ, которые зависят только от собственных действий соответствующего АЭ. В силу отмеченных выше свойств равновесий, частным случаем сепарабельности является аддитивная зависимость индивидуальных затрат i-го АЭ от его действия и действий остальных АЭ: $\forall y_i \in A_i$ $\forall y_{-i} \in A_{-i}$ $c_i(y) = c_i^1(y_i) + c_i^2(y_{-i})$, $c_i^1 : A_i \to \Re_1^+$, $c_i^2 : A_{-i} \to \Re_1^+$, $i \in I$. Для функций затрат, у которых все производные второго порядка существуют и непрерывны, достаточным условием сепарабельности является: $\forall i \in I$ $\forall j \neq i$ $\forall y \in A'$ $\dfrac{\partial^2 c_i(y)}{\partial y_i \partial y_j} = 0$.

3. Унифицированность системы стимулирования. Ограничимся персонифицированными и унифицированными системами стимулирования. В первом случае функции стимулирования АЭ различны (общий случай "обычных" систем стимулирования, оперируя с которыми мы будем опускать прилагательное "персонифицированная"). Во втором случае функция стимулирования одинакова для всех АЭ, но может для тех или иных АЭ зависеть от

их индивидуальных действий и т.д. - см. ниже. Для обозначения унифицированных систем стимулирования ниже используется символ "U".

4. <u>Тип системы стимулирования, используемой для каждого конкретного АЭ.</u> В [3, 12-14, 21, 36, 44] при рассмотрении задач стимулирования одноэлементных АС были введены так называемые базовые системы стимулирования - C, K, L, D и других типов. Следовательно, каждый из этих типов и их комбинаций[1] является потенциальным претендентом на использование в качестве персонифицированной системы стимулирования некоторого (в общем случае - любого) АЭ или унифицированной системы стимулирования для всех АЭ.

Обозначим T - множество всех базовых систем стимулирования в одноэлементных АС: s_C, s_K, s_L, s_D, s_{LL}, $s_{L+C} \in T$, $t = (t_1, t_2, \dots t_n)$, где $t_i \in T$, $i \in I$ - вектор типов систем стимулирования, используемых в рассматриваемой АС. Используя нижний индекс t, мы будем конкретизировать ограничения на вид индивидуальных функций стимулирования в данной АС.

Комбинируя четыре значения признаков по первому основанию классификации и два по второму, получаем следующие восемь[2] основных классов моделей стимулирования в многоэлементных АС.

---

[1] *В работе [21] системы стимулирования, в которых на различных подмножествах множества допустимых действий АЭ используются различные базовые системы стимулирования, было предложено называть составными и обозначать последовательной записью их компонент. Соответственно, системы стимулирования, являющиеся алгебраической суммой базовых, было предложено называть суммарными и обозначать суммой их компонент.*

[2] *Учитывая третье основание классификации, получим шестнадцать классов (с учетом унификации) и т.д., то есть, дополняя систему классификаций новыми основаниями (и следя за выполнением требований полноты и непротиворечивости), можно породить еще большее число более узких классов моделей. Кроме того, следует отметить, что мы считаем, что параметры системы стимулирования и всех АЭ характеризуются одним и тем же значением признака классификации по тому или иному основанию. Например, если затраты сепарабельны, то они сепарабельны у всех АЭ. В общем случае (отказываясь от этого предпо-*

Модель S1.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение каждого АЭ явным образом зависит только от его собственных действий, затраты сепарабельны. Возможны следующие варианты. Первый - общие ограничения на индивидуальные стимулирования АЭ отсутствуют (этот класс моделей обозначим $\underline{S1}_0$) - получаем набор несвязанных одноэлементных задач стимулирования [15, 44]. Второй вариант - присутствуют общие ограничения на систему стимулирования в АС (этот класс моделей обозначим $\underline{S1}_M$) - получаем АС со слабо связанными АЭ [15, 20, 42, 44].

Учет возможности использования центром унифицированных систем стимулирования добавляет еще два класса моделей $US1_0$ и $US1_M$ (напомним, что добавление символа "U" означает переход к соответствующей унифицированной системе стимулирования).

Приведем пример использования введенной системы обозначений (см. также систему обозначений, введенную в [44]). Пусть имеется АС с тремя АЭ, имеющими сепарабельные затраты, и центр использует индивидуальное стимулирование, зависящее только от действия соответствующего АЭ, причем для первых двух АЭ используются скачкообразные системы стимулирования, а для третьего - пропорциональная система стимулирования. Тогда модель стимулирования в данном классе АС описывается следующим образом: $US1_{0\tau}$, где $t = (C, C, L)$, или сокращенно - $US1_{0(C,C,L)}$.

Модель S2[1].

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от его собственных действий, затраты несепарабельны. Данный класс моделей практически не исследован, некоторые результаты теоретико-игрового анализа близких кооперативных моделей приведены в [32].

ложения) можно получить еще большее число комбинаций. Кроме того, выделенные классы неравнозначны (например, модель S4 включает в себя модель S1 как частный случай и т.д.). Оправданием может служить обсуждаемая ниже для случая «смешанных» значений признаков возможность комбинации результатов исследования их компонентов.

[1] *Очевидно, что модель S1 является частным случаем модели S2, модель S3 – частным случаем модели S4 и т.д. Тем не менее, в методических целях все модели рассматриваются одинаково подробно.*

Модель S3.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от вектора действий всех АЭ, затраты сепарабельны. Подклассом S3 являются ранговые системы стимулирования (которые мы обозначим S3R), при использовании которых индивидуальное вознаграждение АЭ зависит либо от принадлежности его действия заранее заданному элементу разбиения множества допустимых действий - так называемые *нормативные ранговые системы стимулирования* (которые мы обозначим S3RN), либо от места, занятого конкретным АЭ в упорядочении действий всех АЭ - так называемые *соревновательные ранговые системы стимулирования* (которые мы обозначим S3RT - от их англоязычного обозначения - rank-order tournament). В теории контрактов исследовались методы решения (являющиеся модификациями двух шагового метода [58]) дискретных многоэлементных вероятностных задач стимулирования [61, 63, 65], соревновательные системы стимулирования изучались как в теории активных систем [42, 47, 55], так и в теории контрактов [57, 62, 64, 65] (см. также обзор [34]).

Модель S4.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от вектора действий всех АЭ, затраты несепарабельны. Данный класс моделей практически не исследован.

Модель S5.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от результата деятельности АС, затраты сепарабельны. Данный класс моделей практически не исследован, исключения – [1, 2, 18, 23].

Модель S6.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит только от результата деятельности АС, затраты несепарабельны. Данный класс моделей практически не исследован.

Модели S5 и S6 иногда называются моделями *коллективного стимулирования*.

Модель S7[1].

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит и от вектора действий всех АЭ, и от результата деятельности АС (смешанная зависимость), затраты сепарабельны.

Модель S8.

Описание модели: индивидуальное вознаграждение конкретного АЭ явным образом зависит и от вектора действий всех АЭ, и от результата деятельности АС (смешанная зависимость), затраты несепарабельны.

Модели со смешанными зависимостями индивидуального стимулирования от действий АЭ и результата деятельности АС в литературе практически не исследовались.

Базовыми системами стимулирования в многоэлементных активных системах назовем совокупность систем стимулирования вида Slτ, где *l Î {1, 2, ..., 8}*, а *t* - вектор базовых одноэлементных систем стимулирования и их комбинаций, а также всех соответствующих им унифицированных систем стимулирования.

Итак, при решении задач стимулирования в первую очередь возникает необходимость ответа на следующие качественные вопросы: от каких параметров должно зависеть стимулирование того или иного АЭ - только лишь от его собственных действий или же еще и от действий других элементов (или, например, от результата деятельности всей АС), то есть должно ли стимулирование быть индивидуальным или коллективным; следует ли использовать для каждого АЭ свою собственную систему стимулирования, учитывающую его специфику - потребности, возможности и т.д., или возможно ограничиться единой для всех АЭ[2] (или определенных их групп) системой стимулирования, то есть должно ли сти-

---

[1] *Для моделей S7 и S8 чрезвычайно важна информированность центра о действиях АЭ и результатах деятельности АС. Так, если все действия АЭ полностью наблюдаются центром, то информация о результате деятельности АС избыточна (получаем модель S3 или S4) и т.д. (см. подробное обсуждение в разделе 4.7).*

[2] *Отметим, что при анализе эффективности персонифицированных и унифицированных систем стимулирования мы не учитываем информационную нагрузку на управляющий орган, в отличие от, например, [36].*

мулирование быть персонифицированным или унифицированным? Естественно, ответы на эти и подобные им вопросы нельзя дать исходя лишь из качественных соображений - необходимо исследовать конкретные модели и количественно сравнивать эффективности тех или иных управлений. Поэтому перейдем к систематическому рассмотрению формальных моделей базовых систем стимулирования в многоэлементных АС.

4. БАЗОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

4.1. МОДЕЛЬ S1: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ ЕГО ДЕЙСТВИЯ, ЗАТРАТЫ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Как отмечалось выше, модель $S1_0$ (в которой отсутствуют общие ограничения на стимулирование) представляет набор несвязанных между собой одноэлементных моделей, причем (что является важным для последующего изложения) каждое индивидуально-рациональное действие каждого АЭ в АС $S1_0$ с несвязанными АЭ является его доминантной стратегией.

В общем случае решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования состоит из двух этапов. Первый этап – этап согласования стимулирования, заключается в поиске для каждого допустимого действия АЭ системы стимулирования, реализующей это действие (то есть побуждающей выбрать АЭ это действие как доставляющее максимум его целевой функции) с минимальными затратами центра на стимулирование (минимальной величиной выплат АЭ за выбор этого действия). Второй этап – этап согласованного планирования, заключается в поиске оптимального с точки зрения центра реализуемого действия, то есть действия, доставляющего максимум целевой функции центра.

В [44] доказано, что в модели S1 в рамках гипотезы благожелательности (ГБ)[1] оптимальной является квазикомпенсаторная система стимулирования

$$(1)\quad s_K(y^*, y) = \begin{cases} c(y^*), & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases},$$

где оптимальное реализуемое действие является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$(2)\quad y^* = arg \max_{y \in A} \{H(y) - c(y)\}.$$

Содержательно центр компенсирует АЭ затраты при выборе действия, совпадающего с действием y^* и не вознаграждает АЭ при выборе любых других действий. Использование системы стимулирования (1) обеспечивает реализуемость действия y^* с минимальными затратами центра на стимулирование.

Если ГБ не выполнена, то при определении эффективности системы стимулирования центр вынужден использовать минимум по множеству реализуемых действий АЭ. Для того чтобы побудить АЭ гарантированно выбрать действие y^*, центр должен использовать систему стимулирования

$$(3)\quad s_K(y^*, y) = \begin{cases} c(y^*) + d, & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases},\ d > 0,$$

где оптимальное действие по-прежнему определяется выражением (2).

Качественно при отказе от ГБ для гарантированной реализуемости некоторого действия центр должен сделать это действие единственной точкой максимума целевой функции АЭ. Для этого (при определенных предположениях о функции затрат АЭ – см. ниже) достаточно доплачивать за выбор этого действия, помимо компенсации затрат, сколь угодно малую, но строго положительную величину (ср. (1) и (3)).

---

[1] *Напомним, что гипотеза благожелательности подразумевает, что из множества решений игры (множества реализуемых действий, то есть действий, доставляющих при заданной системе стимулирования максимум целевой функции АЭ) АЭ выберет действие, наиболее благоприятное для центра.*

Эффективность системы стимулирования (1) равна $K_1 = H(y^*) - c(y^*)$, а гарантированная эффективность системы стимулирования (3): $K_3 = H(y^*) - c(y^*) - d$. Разность эффективностей систем стимулирования (1) и (3) равна d, то есть непрерывна по аддитивному параметру d. Более того, в силу условия индивидуальной рациональности [44] ни одна другая система стимулирования не может реализовать действие АЭ y^* с затратами на стимулирование, строго меньшими $c(y^*)$. Поэтому говорят, что системы стимулирования типа (3) ε-оптимальны[1] (то есть при устремлении d к нулю эффективность системы стимулирования (3) может быть сделана сколь угодно близкой к эффективности оптимальной системы стимулирования (1)).

Таким образом, в модели $S1_0$ оптимальны компенсаторные системы стимулирования, причем использование идеи компенсации затрат позволяет эффективно решать соответствующие задачи стимулирования (задача (2) является стандартной задачей условной оптимизации). Перейдем к рассмотрению задач стимулирования в других АС из класса S1.

Частные модели унифицированных систем стимулирования $US1_0$ рассматривались в [18, 36]; унифицированные скачкообразные UC и унифицированные пропорциональные UL системы стимулирования подробно исследуются ниже в шестом разделе в качестве важных с прикладной точки зрения частных случаев.

Рассмотрим модели с общими ограничениями на стимулирование элементов, то есть класс $S1_M$ механизмов стимулирования в АС со слабо связанными АЭ.

При отсутствии глобальных ограничений вектор действий активных элементов y^* Î A' реализуем с суммарными затратами на стимулирование: $J(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i^*)$. Обозначим $\boldsymbol{c}(y)$ – вектор-функцию затрат, $s(y)$ – вектор-функцию стимулирования.

Пусть имеются глобальные ограничения (выполняющиеся для всех допустимых векторов действий АЭ): s Î $M_{гл}$.

---

[1] *Напомним, что е-оптимальной называется система стимулирования, эффективность $K(s)$ которой удовлетворяет: $K(s)$ ³ $\max\limits_{s \in M} K(s) - e$.*

Воспользуемся результатами анализа задач стимулирования в одноэлементных активных системах, в соответствии с которыми оптимальной (в общем случае – одной из оптимальных) является компенсаторная система стимулирования, при использовании которой величина вознаграждения в точности равна затратам АЭ по выбору соответствующего действия. Определим множество действий, реализуемых при данных ограничениях: $A_M = \{y \in A' \mid c(y) \in M_{гл}\}$. Далее, задача стимулирования сводится к следующей стандартной задаче условной оптимизации: $F(y) \to \max\limits_{y \in A_M}$. Задача первого рода при этом примет вид: $H(y) \to \max\limits_{y \in A_M}$, а задача второго рода: $H(y) - J(y) \to \max\limits_{y \in A_M}$. Например, если имеется ограничение R на суммарные выплаты АЭ (то есть ограничен фонд заработной платы (ФЗП)), то множество A_M примет вид: $\{y \in A' \mid \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y_i) \le R\}$.

При «предельном» переходе от АС со слабо связанными АЭ к АС с независимыми АЭ описанный метод решения и результаты его применения переходят соответственно в метод и результаты решения набора одноэлементных задач стимулирования.

Пример 1[1]. Пусть функция затрат i-го АЭ $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i \in I$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. Тогда при ограниченном ФЗП задача стимулирования первого рода примет вид: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \to \max\limits_{y_i \ge 0} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{2 r_i} \le R \end{cases}$. Применяя метод множителей Лагранжа, находим

[1] *В настоящей работе принята сквозная нумерация примеров.*

оптимальный вектор реализуемых действий: $y_i^* = r_i \sqrt{\frac{2R}{W}}$, $i \in I$, где

$$W = \sum_{i=1}^{n} r_i \ . \bullet$$[1]

Взаимосвязь между индивидуальными вознаграждениями может быть более сложной, что иллюстрируется приводимым ниже примером.

Пример 2. Пусть в АС имеются два АЭ с функциями затрат $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i = 1, 2$, а функция дохода центра равна сумме действий АЭ: $H(y) = y_1 + y_2$. Предположим, что на индивидуальные вознаграждения наложены независимые ограничения (содержательно, существует «вилка» заработной платы): $d_1 \le \sigma_1 \le D_1$, $d_2 \le \sigma_2 \le D_2$, и, кроме этого, существует одно глобальное (общее ограничение): $\sigma_2 \ge b\ \sigma_1$ (содержательно, например, второй АЭ имеет более высокую квалификацию, чем первый – $r_2 \le r_1$, и поэтому за одни и те же действия должен получать большее вознаграждение: $b \ge 1$). Приравнивая стимулирование затратам, получаем, что множество реализуемых действий A_M определяется следующей системой неравенств (см. область, ограниченную на Рис. 2): $\sqrt{2r_1d_1} \le y_1 \le \sqrt{2r_1D_1}$, $\sqrt{2r_2d_2} \le y_2 \le \sqrt{2r_2D_2}$, $y_2 \ge \sqrt{b\,(r_2/r_1)}$. Оптимальным для центра в задаче стимулирования первого рода является реализуемое действие y^*, лежащее в верхней правой вершине треугольника, заштрихованного на рисунке 2. •

Таким образом, основная идея решения задач стимулирования в модели $S1_M$ (АС со слабо связанными АЭ) заключается в следующем: так как минимальное вознаграждение АЭ, реализующее некоторое его действие, определяется его затратами по выбору этого действия, то, приравнивая стимулирование затратам, мы получаем возможность определить множество A_M действий, реализуемых при заданных ограничениях на стимулирование[2]. Перейдем

---

[1] *Символ «·» здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

[2] *Если центр ограничен использованием определенных классов систем стимулирования, то все приведенные рассуждения остаются в силе с учетом того, что индивидуальные минимальные затраты на стимулиро-*

к рассмотрению унифицированных систем стимулирования в АС со слабо связанными АЭ.

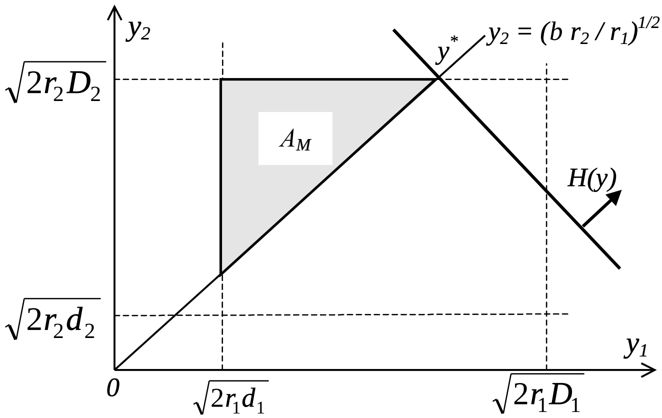

Рис. 2. Множество реализуемых действий в примере 2

Задачи синтеза унифицированных систем стимулирования в АС со слабо связанными АЭ ($US1_M$) решаются полностью аналогично тому, как это делается для персонифицированных систем стимулирования. Предположим, что в многоэлементной АС с ограниченным ФЗП существует упорядочение АЭ, такое, что $A_i = A$, $i \in I$, и выполнено

$$\forall\ x \in A\ \ c_1(x) \geq c_2(x) \geq \ldots \geq c_n(x).$$

Обозначим $k(x,R) = \min \{i \in I \mid \sum_{j=i}^{n} c_j(x) \leq R\}$, тогда $(n - k(x, R))$ – число АЭ, которым выгодно выполнять допустимый с точки зрения глобального ограничения R план x (см. также ниже и [18, 36]). Элементам из множества $Q(x,R) = \{1, 2, \ldots, k(x,R)-1\}$ выполнение плана x невыгодно, и они выберут действия, минимизирующие затраты (в рамках А.3 такими действиями являются действия, равные нулю). Следовательно, действия $\{ y_i^* \}$, реализуе-

---

вание необходимо определять с учетом ограничений, наложенных на механизм стимулирования.

мые унифицированной скачкообразной системой стимулирования с точкой скачка x, определяются следующим образом:

$$y_i^*(x,R) = \begin{cases} x, & i \ge k(x,R) \\ 0, & i < k(x,R) \end{cases}.$$

Зная зависимость реализуемых действий от плана, центр должен решить задачу оптимального согласованного планирования – найти план, максимизирующий целевую функцию центра:

$$x^* = arg \max_{x \ge 0} F(y_1^*(x,R),\ y_2^*(x,R), \ldots,\ y_n^*(x,R)).$$

При отказе от предположения об упорядоченности затрат АЭ зависимость реализуемых действий от плана может иметь более сложную структуру (см. [36]), однако идея решения полностью сохраняется (с учетом увеличения числа рассматриваемых комбинаций). Более подробно унифицированные системы стимулирования C-типа и L-типа рассматриваются в пятом и шестом разделах настоящей работы.

4.2. МОДЕЛЬ S2: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ ЕГО ДЕЙСТВИЯ, ЗАТРАТЫ НЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Запишем определение равновесия Нэша для рассматриваемой модели:

$$E_N(s) = \{y^N \in A \mid \forall\, i \in I\ \forall\, y_i \in A_i\ s_i(y_i^N) - c_i(y^N) \ge s_i(y_i) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\}.$$

Фиксируем произвольный вектор действий АЭ $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$(1a)\quad s_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \ne y_i^* \end{cases},\ d_i \ge 0,\ i \in I.$$

Коллективная[1] система стимулирования (1а) реализует вектор действий $y^* \in A'$ как равновесие в доминантных стратегиях (РДС).

---

[1] *Система стимулирования (1а) является системой коллективного стимулирования, так как размер вознаграждения каждого АЭ зависит как от его собственных действий, так и от действий других АЭ.*

Теорема 4.2.1а. При использовании центром системы стимулирования (1а) y^* – РДС. Более того, если $d_i > 0,\ i \in I$, то y^* – единственное РДС.

Доказательство. Докажем сначала, что вектор $y^* \in A'$ при $d_i \geq 0,\ i \in I$, является равновесием Нэша. Пусть y^* - не равновесие Нэша. Тогда $\exists\ i \in I,\ \exists\ \tilde{y}_i \in A_i$:

$$\sigma_i(y^*, \tilde{y}_i, y_{-i}^*) - c_i(\tilde{y}_i, y_{-i}^*) > \sigma_i(y^*, y^*) - c_i(y^*).$$

Подставляя (1а), получаем, что $c_i(\tilde{y}_i, y_{-i}^*) < -d_i$ – противоречие.

Докажем, что при $d_i > 0$, y^* - единственное равновесие Нэша. Пусть $y' \in A'$ – равновесие Нэша, причем $y' \neq y^*$. Тогда $\forall\ i \in I$, $\forall\ y_i \in A_i$ $\quad \sigma_i(y^*, y_i', y_{-i}') - c_i(y_i', y_{-i}') \geq \sigma_i(y^*, y_i, y_{-i}') - c_i(y_i, y_{-i}')$.

Подставляя $y_i = y_i^*$, получаем: $c_i(y_i', y_{-i}') \leq -d_i$ – противоречие.

Фиксируем произвольный номер $i \in I$ и докажем, что y_i^* - доминантная стратегия i-го АЭ. Запишем определение доминантной стратегии: $\sigma_i(y^*, y_i^*, y_{-i}) - c_i(y_i^*, y_{-i}) \geq \sigma_i(y^*, y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i})$. Подставляя (1а), получаем: $d_i \geq -c_i(y_i, y_{-i})$, что всегда имеет место в силу предположения А.3.

Докажем, что y^* - единственное РДС. Пусть существует РДС $y' \neq y^*$, тогда из определения доминантной стратегии следует, что при использовании центром системы стимулирования (1а) выполнено: $\exists\ i \in I$: $c_i(y') \leq -d_i$, что противоречит предположению А.3. •

Итак, система коллективного стимулирования (1а) реализует заданный вектор действий АЭ как РДС (или при строго положительных константах d_i – как единственное РДС). Однако в модели S2 стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственного действия. Поэтому, фиксировав для каждого АЭ обстановку игры, перейдем от (1а) к следующей системе индивидуального стимулирования. Фиксируем произвольный вектор действий АЭ $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$(1б)\quad \sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ d_i \geq 0,\ i \in I.$$

Отметим, что функция стимулирования (1б) зависит только от действия i-го АЭ, а величина y^* входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (1б), в отличие от (1а), каждый из АЭ имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того, чтобы система стимулирования (1б) реализовывала вектор y^* как РДС необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (1а)) предположений относительно функций затрат активных элементов.

Теорема 4.2.1б[1]. При использовании центром системы стимулирования (1) $y^* \in E_N(s)$. Более того:

а) если выполнено условие[2]:

(2) $\forall\, y^1 \neq y^2 \in A' \;\; \exists\, i \in I: \; y_i^1 \neq y_i^2$ и $c_i(y^1) + c_i(y^2) > c_i(y_i^1,\, y_{-i}^2) - d_i$,

то y^* - единственное равновесие Нэша;

б) если выполнено условие:

(3) $\forall\, i \in I, \; \forall\, y^1 \neq y^2 \in A' \;\; c_i(y^1) + c_i(y^2) \geq c_i(y_i^1,\, y_{-i}^2) - d_i$,

то вектор действий y^* является равновесием в доминантных стратегиях;

в) если выполнено условие (3) и $d_i > 0,\ i \in I$, то вектор действий y^* является единственным равновесием в доминантных стратегиях.

Доказательство. То, что $y^* \in E_N(s)$ при $d_i \geq 0,\ i \in I$, следует из приведенного выше определения равновесия Нэша для модели S2 и выражения (1).

Докажем пункт а). Предположим, что выполнено (2) и существует равновесие Нэша $y' \neq y^*$. Тогда для любого АЭ $i \in I$ (в том числе и для такого, для которого выполнено $y_i' \neq y_i^*$), выбор стратегии y_i' максимизирует его целевую функцию (в том числе и

---

[1] *Нумерация лемм, теорем и т.д. независимая внутри каждого раздела и включает его номер.*

[2] *В условии (2) можно использовать нестрогое неравенство, одновременно требуя строгой положительности d_i. Точно так же в пункте в) можно ослабить требование строгой положительности d_i, но рассматривать (3) как строгое неравенство.*

по сравнению с выбором стратегии y_i^*) при обстановке игры y'_{-i}, значит выполнено: $- c_i(y') \geq c_i(y^*) + d_i - c_i(y_i^*, y'_{-i})$, что противоречит (2).

Докажем пункт б). Запишем определение равновесия в доминантных стратегиях (РДС) для рассматриваемой модели при использовании центром системы стимулирования (1): y^* - РДС тогда и только тогда, когда

(4) $\forall i \in I \ \forall y_i \in A_i, y_i \neq y_i^* \ y_{-i} \in A_{-i} \ c_i(y_i^*, y_{-i}^*) - c_i(y_i^*, y_{-i}) \geq - c_i(y_i, y_{-i}) - d_i$.

Подставляя в (3) $y^1 = y^*$, $y^2 = y$, получаем, что при $d_i \geq 0, i \in I$, выполнено (4).

Докажем пункт в). Предположим, что существует вектор действий $y' \in A'$, $y' \neq y^*$, такой, что $y' \in E_d(s)$. Тогда система неравенств, аналогичная (4), имеет место и для y'. Подставляя в нее $y=y^*$, получим:

$$- d_i \geq c_i(y'_i, y_{-i}^*),$$

что при $d_i > 0$ противоречит А.3. •

При $d_i \geq 0, i \in I$, условие (3) выполнено, в частности, для любых сепарабельных затрат активных элементов; а условие (2) – для сепарабельных строго монотонных функций затрат при $d_i > 0, i \in I$, при этом стратегия (1) переходит в стратегию, оптимальную в модели S1.

Отметим, что в модели S2 индивидуальное стимулирование (1б) каждого АЭ зависит только от его собственных действий (ср. с (1а) и моделью S4, в которой оптимальная функция стимулирования «похожа» на (1б), но зависит от действий всех АЭ, то есть имеет вид (1а), что также позволяет центру реализовывать действия в доминантных стратегиях).

Содержательно, при использовании системы стимулирования (1б) центр говорит i-му активному элементу – выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные АЭ также выбрали соответствующие компоненты - y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю. Используя такую стратегию, центр, фактически, декомпозирует игру элементов (см. модели $S1_0$ и $S1_M$).

Идея декомпозиции игры активных элементов за счет использования соответствующих компенсаторных функций стимулирования типа (1а) и (1б) оказывается ключевой для всего набора рассматриваемых в настоящей работе моделей стимулирования в многоэлементных активных системах.

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{d_i\}$ в выражении (1) (см. также раздел 4.1). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то (как видно из формулировки и доказательства теоремы) эти константы могут быть выбраны равными нулю (см. также системы стимулирования (1) и (3) в разделе 4.1). Если же мы хотим, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы АЭ не выбирали нулевые действия), то элементам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{d_i\}$ в выражении (1) (и других подобных конструкциях, встречающихся ниже при исследовании модели S4 и др.) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования (1) по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го АЭ известна с точностью до D_i £ $d_i / 2$, то система стимулирования (1) все равно реализует действие y^* (см. доказательства и подробное обсуждение в [37]).

Пример 3. Рассмотрим АС, состоящую из двух АЭ с функциями затрат $c_i(y) = \dfrac{(y_i + y_{-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$. Легко проверить, что данные функции затрат удовлетворяют условиям (2) и (3).

Единственность равновесия Нэша можно доказать непосредственно следующим образом. Пусть центр использует систему стимулирования (1) и имеются два различных равновесия Нэша: y^* и y'. Записывая определения равновесий Нэша, получаем, что должна иметь место следующая система неравенств:

$$\begin{cases} (y_1^{'})^2 + (y_2^{*})^2 \le 2\, y_1^{*}\, y_2^{'}\, (1 - \dfrac{y_1^{'}}{y_1^{*}} - \dfrac{y_2^{*}}{y_2^{'}}) \\ (y_1^{'})^2 + (y_2^{*})^2 \le 2\, y_1^{'}\, y_2^{*}\, (1 - \dfrac{y_1^{*}}{y_1^{'}} - \dfrac{y_2^{'}}{y_2^{*}}) \end{cases},$$

которая несовместна, то есть, если выполнено первое неравенство, то не выполнено второе, и наоборот. •

Вектор оптимальных реализуемых действий АЭ y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (1), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования: $y^* = arg \max\limits_{t \in A'} \{H(t) - c(t)\}$, а гарантированная эффективность системы стимулирования (1) равна следующей величине: $K_1 = H(y^*) - \sum\limits_{i=1}^{n} (c_i(y^*) + d_i)$.

<u>Теорема 4.2.2.</u> Класс (с параметром y^*) систем стимулирования (1) является d-оптимальным в модели S2, где $d = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$.

Доказательство. Теоремы 4.2.1а и 4.2.1б утверждают, что при использовании систем стимулирования (1а) и (1б), соответственно, действие y^* является равновесием (Нэша или РДС). При $d_i = 0,\ i\ Î\ I$, эта система стимулирования характеризуется минимально возможными затратами на стимулирование[1], следовательно, по теореме о том, что оптимальным является класс систем стимулирования, реализующих действия с минимальными затратами на стимулирование [42, 44], класс систем стимулирования (1) имеет максимальную эффективность в задачах стимулирования как первого, так и второго рода.

При использовании системы стимулирования (1) затраты центра на стимулирование по реализации действия y^* равны следую-

---

[1] *Напомним, что в силу предположений А.3 и А.4 центр должен обеспечить АЭ неотрицательную полезность (условие индивидуальной рациональности гласит, что АЭ всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, которое даже при нулевом вознаграждении обеспечивает ему нулевую полезность).*

щей величине: $\sum_{i=1}^{n}(c_i(y^*)+d_i)$.

Предположим, что существует другая система стимулирования, которая реализует то же действие y^*, но с меньшими затратами на стимулирование. Из условия индивидуальной рациональности АЭ следует, что затраты на стимулирование по реализации вектора действий y^* не могут быть меньше, чем $\sum_{i=1}^{n} c_i(y^*)$. Так как функция стимулирования входит в целевую функцию центра аддитивно, то потери эффективности при использовании центром системы стимулирования (1) не превышают $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$. •

Отметим, что при доказательстве теоремы 4.2.2 не использовалась сепарабельность затрат АЭ, то есть результат этой теоремы справедлив, не только для модели S2, но и для ряда других моделей АС с несепарабельными затратами (см. ниже).

Так как теорема 4.2.2 гласит, что оптимален класс систем стимулирования (1), то есть оптимальная функция стимулирования принадлежит этому классу, а сам класс задан параметрически (с параметром – y^*), то остается найти оптимальное значение параметра. Другими словами, необходимо определить какое действие следует центру реализовывать системой стимулирования (1).

Если на систему стимулирования, используемую центром, не наложено никаких ограничений, то решение задачи стимулирования второго рода заключается в вычислении на основании (1) минимальных затрат на стимулирование: $J(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*)$ и поиске вектора действий $x^* \in A'$, максимизирующего целевую функцию центра: $x^* = arg \max_{y \in A'} [H(y) - J(y)]$.

Если на функции стимулирования наложено следующее ограничение $s \in M$, то на первом шаге решения задачи стимулирования необходимо найти множество действий АЭ, реализуемых системами стимулирования вида (1), при заданных ограничениях. Делается это следующим образом: ищется множество действий АЭ A_M, затраты от выбора которых после подстановки в (1) не нарушают ограничений на стимулирование: A_M = {y^* Î A’ | " i Î I $s_i(y^*, y_i)$ Î M_i, y^* Î $P(s)$}. Второй шаг решения задачи остается без изменений (необходимо только учесть, что максимизация ведется по множеству A_M):

$$x_M^* = arg \max_{y \in A_M} [H(y) - J(y)].$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование предложенного подхода.

Пример 4. Рассмотрим задачу стимулирования первого рода в АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + a\ y_{-i})^2}{2r_i}$, $i=1, 2$, где a - некоторый параметр. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R (глобальное ограничение). Если центр использует систему стимулирования (1), то задача стимулирования первого рода сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$(5)\quad \begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \geq 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \leq R \end{cases}.$$

Предполагая существование внутреннего решения и применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение задачи (5) имеет вид:

$$(6)\quad y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{a\ r_2 - r_1}{a^2 - 1},\quad y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{a\ r_1 - r_2}{a^2 - 1}.$$

Отметим, что при $a=0$ выражение (6) переходит в оптимальное решение, полученное в примере 1 для модели $S1_M$. •

В заключение настоящего подраздела отметим, что чрезвычайно интересным и перспективным направлением будущих исследований представляется изучение модели S2 в предположении возможности образования коалиций активными элементами. Допущение кооперативного поведения, несомненно, породит новые свойства модели (и, естественно, новые трудности ее анализа), однако, как отмечалось выше, их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

4.3. МОДЕЛЬ S3: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ ДЕЙСТВИЙ ВСЕХ АЭ, ЗАТРАТЫ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Предположим, что индивидуальные затраты i-го АЭ зависят только от его собственных действий: $c_i = c_i(y_i)$ (случай сепарабельных затрат). Тогда при заданной системе коллективного (то есть – зависящего от действий всех АЭ) стимулирования $s = \{s_i(y)\}$ множество решений игры $P(s)$ АЭ является множеством $E_N(s)$ равновесий Нэша, определяемым следующим образом:

(1) $E_N(s) = \{y^* \hat{I}\ A' \mid {}'' i \hat{I} I, {}'' y_i \hat{I} A_i\ s_i(y^*) - c_i(y_i^*)\ ^3\ s_i(y_{-i}^*, y_i,) - c_i(y_i)\}$.

Суммарные затраты центра на стимулирование равны:

(2) $J(y,s) = \sum_{i=1}^{n} s_i(y)$.

Обозначим $J_{min}(y)$, $y\ \hat{I}\ A'$ - значение целевой функции в следующей задаче:

(3) $\begin{cases} J(y,s) \to \min\limits_{s \in M} \\ y \in E_N(s) \end{cases}$.

Если для некоторого $y'\ \hat{I}\ A'$ решения задачи (3) не существует, то положим $J_{min}(y') = +¥$. Содержательно, $J_{min}(y)$ - минимальные затраты на стимулирование по реализации действия $y\ \hat{I}\ A'$. Вычислив минимальные затраты на стимулирование, можно определить действие, реализация которого наиболее выгодна для центра, то есть максимальная эффективность коллективного стимулирования в данной модели в рамках гипотезы благожелательности равна:

(4) $K = \max\limits_{y \in A'} \{H(y) - J_{min}(y)\}$.

Решение задачи (2)-(4) чрезвычайно трудоемко с вычислительной точки зрения, и даже для простых примеров редко удается получить ее аналитическое решение. Поэтому рассмотрим возможности «упрощения» этого класса задач стимулирования, то есть сведения их к более простым с точки зрения, как процесса решения, так и исследования зависимости оптимального решения от параметров модели, задачам.

Перейдем к рассмотрению индивидуального стимулирования. Обозначим $\tilde{s}(y) = (\tilde{s}_1(y_1), \tilde{s}_2(y_2), \ldots, \tilde{s}_n(y_n))$ - систему индивидуального стимулирования. При использовании индивидуального стимулирования множество решений игры есть $P(\tilde{s}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(\tilde{s}_i)$, где

(5) $P_i(\tilde{s}_i) = Arg \max_{y_i \in A_i} \{\tilde{s}_i(y_i) - c_i(y_i)\}$.

Суммарные затраты на индивидуальное стимулирование равны:

(6) $\tilde{J}(\tilde{s}, y) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i(y_i)$.

Обозначим $\tilde{J}_{\min}(y)$, y Î A' - значение целевой функции в следующей задаче:

(7) $\begin{cases} \tilde{J}(\tilde{s}, y) \to \min\limits_{\tilde{s} \in M} \\ \quad y \in P(\tilde{s}) \end{cases}$.

Если для некоторого y' Î A' решения задачи (7) не существует, то положим $\tilde{J}_{\min}(y')$ = +¥. Максимальная эффективность индивидуального стимулирования в модели S3 в рамках гипотезы благожелательности равна:

(8) $\tilde{K} = \max_{y \in A'} \{H(y) - \tilde{J}_{\min}(y)\}$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о сравнительной эффективности использования индивидуального и коллективного стимулирования в рассматриваемой модели.

Теорема 4.3.1. В модели S3 для любой системы коллективного стимулирования найдется система индивидуального стимулирования не меньшей эффективности.

Доказательство теоремы. Так как множество всех допустимых систем коллективного стимулирования включает в себя множество всех допустимых систем индивидуального стимулирования (последние могут рассматриваться как частный случай, так как имеет место $\bigcup_{\tilde{s} \in M} P(\tilde{s}) \subseteq \bigcup_{s \in M} E_N(s)$), то, очевидно, что K ³ $\tilde{K}$. Поэтому докажем, что $K = \tilde{K}$, то есть, что не может иметь места $K > \tilde{K}$.

Выражения (4) и (8) отличаются лишь минимальными затратами на стимулирование. Обозначим $y^* = arg \max\limits_{y \in A'} \{H(y) - J_{min}(y)\}$[1],

$s^*(y)$ - оптимальную систему коллективного стимулирования (для которой выполнено y^* Î $E_N(s^*)$ и для которой величина $J(s,\ y^*)$ минимальна). Фиксируем произвольный номер i Î I. Из y^* Î $E_N(s^*)$ следует, что

(9) " y_i Î A_i $s_i(y^*) - c_i(y_i^*)$ ³ $s_i(y_{-i}^*, y_i) - c_i(y_i)$.

Выберем индивидуальную систему стимулирования $\tilde{s}_i^*(y_i)$ следующим образом (частный случай y^*-трансформации игры элементов в терминологии [22]):

(10) " i Î I $\tilde{s}_i^*(y_i) = s_i^*(y_{-i}^*, y_i)$.

Так как s^* Î M, то $\tilde{s}^*$ Î M. Подставляя (10) в (9), получим, что

(11) " i Î I " y_i Î A_i $\tilde{s}_i^*(y_i^*) - c_i(y_i^*)$ ³ $\tilde{s}_i^*(y_i) - c_i(y_i)$,

то есть y^* Î $P(\tilde{s}^*)$, причем из (2), (6) и (10) следует, что выполнено: $J(y^*,\ s^*) = \tilde{J}(y^*,\ \tilde{s}^*)$, то есть по теореме 2.2, приведенной в работе [42], система стимулирования $\tilde{s}^*$ обладает эффективностью, не меньшей, чем исходная система стимулирования. •

Таким образом, теорема 4.3.1 утверждает, что в случае сепарабельных затрат для любой системы коллективного стимулирования можно построить систему индивидуального стимулирования, которая будет обладать той же эффективностью. Переход от одной системы стимулирования к другой осуществляется достаточно просто - индивидуальное вознаграждение каждого АЭ в случае индивидуального стимулирования равно его же индивидуальному вознаграждению в случае коллективного стимулирования при

---

[1] *Отметим, что множество $Arg \max\limits_{y \in A'} \{H(y) - J_{min}(y)\}$ может содержать более одной точки, однако для каждой из них можно построить систему индивидуального стимулирования, в том числе и для той, по которой определяется эффективность (или гарантированная эффективность) исходной системы коллективного стимулирования.*

условии, что все остальные элементы выбирают равновесные по Нэшу действия.

Итак, в соответствии с теоремой 4.3.1 для любой системы коллективного стимулирования (в том числе и для оптимальной системы коллективного стимулирования) существует система индивидуального стимулирования не меньшей эффективности. Следовательно, при решении задачи синтеза оптимального механизма стимулирования в модели S3 можно ограничиться классом индивидуальных систем стимулирования (то есть классом моделей типа S1).

Следует отметить, что выше мы не акцентировали внимание на том, что множество решений игры может содержать более одной точки - при фиксированной системе стимулирования может существовать несколько равновесий Нэша. Поэтому в случае множественности равновесий отдельного внимания заслуживает вопрос о том, что понимать под гипотезой благожелательности - выбор элементами равновесия, наиболее благоприятного с точки зрения центра (такому предположению в (3) и (7) соответствовала бы дополнительная минимизация по y Î P(x)) из множества всех реализуемых действий, или из множества Парето эффективных реализуемых действий и т.д.

Также необходимо подчеркнуть, что приведенный выше результат об "эквивалентности" систем индивидуального и коллективного стимулирования (с точки зрения их потенциальной эффективности) справедлив лишь для случая сепарабельных затрат. Если индивидуальные затраты АЭ не сепарабельны (см. модель S4 ниже), то есть, если затраты каждого АЭ могут зависеть от действий всех элементов, то замены типа (10) оказывается недостаточно.

Построим оптимальную систему индивидуального стимулирования (которая в силу теоремы 4.3.1 будет оптимальна в модели S3). В теореме 4.3.1 для исходной системы стимулирования построена эквивалентная система индивидуального стимулирования. Использованная идея декомпозиции игры активных элементов позволяет найти систему стимулирования, оптимальную в модели S3. В частности, из индивидуальной рациональности АЭ (напомним, что свойство индивидуальной рациональности гласит, что выбираемое АЭ действие должно приводить к неотрицательным значениями его функции полезности[1]) и свойств минимальных затрат на стимулирование, следует справедливость следующего утверждения.

<u>Теорема 4.3.2.</u> Класс систем стимулирования[2] (с параметром y^*)

$$(12)\ s_i(y) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$$

реализует вектор действий $y^* \in A'$ как РДС и d-оптимален в модели S3. Более того, если $d_i > 0,\ i \in I$, то y^* - единственное РДС.

Единственность соответствующего РДС доказывается по аналогии с доказательством пункта в) теоремы 4.2.1.

Наличие единственного равновесия при использовании центром системы стимулирования (12) чрезвычайно привлекательно, так как при использовании исходной системы коллективного стимулирования в модели S3, множество равновесий может оказаться достаточно «большим», что требует от центра введения дополнительных гипотез о рациональном поведении АЭ.

Отметим, что (12) является не единственной оптимальной системой стимулирования – для оптимальности некоторой системы стимулирования в рассматриваемой модели достаточно, чтобы стимулирование при $y_i \neq y_i^*$ «убывало быстрее», чем затраты АЭ (см. теорему 4.4.2 ниже).

Теорема 4.3.2 определяет параметрический класс оптимальных систем стимулирования. Оптимальное значение параметра ищется, как и ранее, как результат решения задачи оптимального согласованного планирования.

<u>Пример 5.</u> Рассмотрим АС с двумя АЭ, имеющими функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$. Пусть центр использует систему стимулирования $s_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, & y_1 + y_2 \geq x \\ 0, & y_1 + y_2 < x \end{cases}$, $i = 1, 2$.

---

[1] *В противном случае АЭ всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, требующее нулевых затрат.*

[2] *Отметим, что (12) с учетом (10) является системой индивидуального стимулирования, оптимальной в модели S1.*

Содержательно, центр выплачивает каждому АЭ фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение x. Обозначим $y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i$ £ y_i^+, $i = 1, 2$, $y_1 + y_2$ £ $x\}$ – множество индивидуально-рациональных действий АЭ. Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных (см. рисунки 3а – 3г).

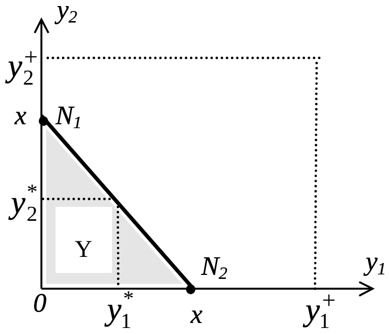

Рис.3 а

В первом случае (см. Рис.3 а) множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(s) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ Î $E_N(s)$. Наличие «большого» равновесия Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования.

Так как все точки отрезка $[N_1 \; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения АЭ, то при определении эффективности системы стимулирования центр вынужден либо использовать гарантированный результат (вычислять минимум по этому отрезку), либо доплачивать АЭ за выбор конкретных действий из этого отрезка.

Построим систему индивидуального стимулирования в соответствии с выражением (10):

$$\tilde{s}_1^*(y_1) = s(y_1, y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \ge y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases}, \quad \tilde{s}_2^*(y_2) = s(y_1^*, y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \ge y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя в соответствии с выражением (10) от системы стимулирования каждого АЭ, зависящей от действий всех АЭ, к системе стимулирования, зависящей только от его собственных действий, центр «декомпозирует» игру элементов, реализуя при этом единственное действие. При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования (см. теорему 4.3.2).

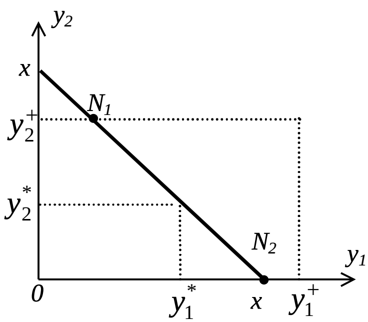

Рис.3 b

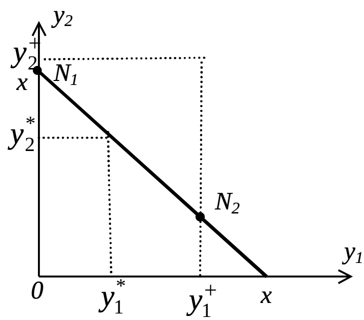

Рис.3 c

Во втором и третьем случаях (см. Рис.3 b и Рис.3 c) равновесием Нэша являются отрезки $[N_1\ N_2]$, изображенные на соответствующих рисунках выше.

И, наконец, в четвертом случае (см. Рис.3 d) множество равновесий Нэша состоит из точки $(0;\ 0)$ и отрезка $[N_1\ N_2]$, то есть $E_N(s) = (0;0)$ È $[N_1\ N_2]$, причем точки интервала $(N_1\ N_2)$ являются недоминируемыми по Парето другими равновесиями, то есть:

$$(N_1;\ N_2) = Par\ (E_N(s),\ \{f_i\}). \bullet$$

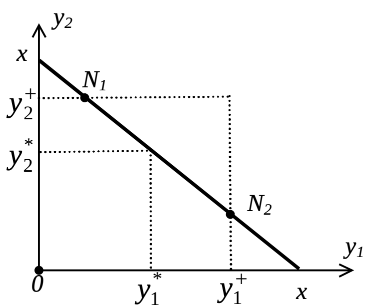

Рис.3 d

Итак, мы доказали, что модель S3 эквивалентна гораздо более простой с точки зрения анализа и хорошо изученной модели S1.

Частными, но широко распространенными на практике, случаями модели S3 являются ранговые системы стимулирования, обозначенные выше S3R, в том числе нормативные и соревновательные. Эти системы стимулирования подробно рассматриваются ниже в пятом разделе настоящей работы.

4.4. МОДЕЛЬ S4: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ ДЕЙСТВИЙ ВСЕХ АЭ, ЗАТРАТЫ НЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Запишем определение равновесия Нэша для рассматриваемой модели:

$$E_N(s) = \{y^N \text{Î} A \mid \text{"}\ i \text{Î} I,\ \text{"}\ y_i \text{Î} A_i\ s_i(y^N) – c_i(y^N)\ {}^3\ s_i(y_{-i}^N, y_i) – c_i(y_{-i}^N, y_i)\}.$$

По аналогии с теоремой 4.3.1 можно доказать, что для любой системы коллективного стимулирования $s(\times)$, реализующей вектор действий y^* Î A' как равновесие Нэша, в модели S4 существует система индивидуального стимулирования $\tilde{s}(\times)$, определяемая следующим образом:

$$(1a)\quad \tilde{s}_i(y^*, y_i) = \begin{cases} s_i(y^*), & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},$$

которая обладает не меньшей эффективностью, чем исходная. Поэтому перейдем сразу к построению оптимальной системы стимулирования.

Фиксируем y^* Î A' и рассмотрим следующий класс систем стимулирования (с параметром y^*):

$$(1б)\quad s_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ i \text{ Î } I.$$

<u>Теорема 4.4.1.</u> При использовании центром системы стимулирования (1б) с d_i ³ 0 y^* Î $E_d(s)$. Если $d_i > 0$, i Î I, то y^* - единственное РДС. Более того, система стимулирования (1б) d-оптимальна.

Доказательство. Теорема 4.4.1 доказывается по аналогии с теоремой 4.2.1а, поэтому ее доказательство приводится здесь, в основном, в методических целях.

То, что y^* Î $E_N(s)$ следует из приведенного выше определения равновесия Нэша для модели S4 и (1б). Поэтому докажем более сильное свойство, а именно, что y^* - равновесие в доминантных стратегиях (РДС).

Запишем определение равновесия y^d Î A' в доминантных стратегиях для рассматриваемой модели: " i Î I " y_i Î A_i " y_{-i} Î A_{-i}

$$(2)\quad s_i(y_i^d, y_{-i}) – c_i(y_i^d, y_{-i})\ {}^3\ s_i(y_i, y_{-i}) – c_i(y_i, y_{-i}).$$

Подставим в (2) систему стимулирования (1б), а вместо стратегии y_i^d - стратегию y_i^*. В силу неотрицательности затрат АЭ получаем, что y^* - РДС.

Предположим, что $\exists\, y' \in A'\ y' \neq y^*: y' \in E_d(s)$. Тогда $\exists\, i \in I$: $y_i' \neq y_i^*$. Так как y_i' - доминантная стратегия i-го АЭ, то $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}$, $\forall\, y_i \in A_i$ $s_i(y_i', y_{-i}) - c_i(y_i', y_{-i}) \geq s_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i})$. Подставляя систему стимулирования (1б) и $y_i = y_i^*$, получим: $c_i(y_i', y_{-i}) \leq - d_i$, что противоречит предположению А.3.

Система стимулирования (1б) в рамках гипотезы благожелательности при $d_i = 0,\ i \in I$, имеет не большие затраты на стимулирование по реализации действия y^*, чем любая другая система стимулирования, реализующая это же действие, следовательно она оптимальна (по теореме о минимальных затратах на стимулирование [42]). Если $d_i > 0$, то система стимулирования (1б) гарантированно d-оптимальна (см. доказательство теоремы 4.2.2 и раздел 4.1), где: $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$. •

Система индивидуального стимулирования (1а), соответствующая системе коллективного стимулирования (1б), имеет вид:

$$\tilde{s}_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ i \in I.$$

Если в модели S4 центр использует систему индивидуального стимулирования $\tilde{s}_i(y^*, y_i)$, то получаем модель S2, поэтому в соответствии с теоремой 4.2.1б, эта система стимулирования будет реализовывать вектор действий $y^* \in A'$ как равновесие Нэша. Для реализации этого вектора действий как единственного равновесия Нэша (РДС, единственного РДС, соответственно) нужно потребовать выполнения дополнительных условий (см. условия (2) и (3) в теореме 4.2.1б).

Алгоритм решения задач стимулирования первого и второго рода для модели S4 совпадает с соответствующими алгоритмами для модели S2 и не приводится.

Во всех рассмотренных до сих пор задачах стимулирования (см. модели S1, S2, S3 и S4) оптимальными оказывались разрывные («квазикомпенсаторные» – см. [15, 16, 44]) функции стимулирования: активному элементу компенсировались затраты при выборе им определенного действия (при тех или иных предположениях об обстановке игры), в остальных случаях вознаграждение равнялось нулю. Рассмотрим, насколько изменятся полученные результаты, если потребовать, чтобы функции стимулирования были непрерывными. Интуитивно понятно, что если стимулирование будет в окрестности реализуемого действия изменяться быстрее, чем затраты, то все результаты останутся в силе. Приведем формальный результат для одного из возможных случаев.

Пусть в модели S4 функции затрат АЭ непрерывны по всем переменным, а множества возможных действий АЭ компактны. Рассмотрим непрерывные функции стимулирования следующего вида

(3) $\sigma_i(y) = c_i(y)\, q_i(y_i^*, y)$,

где $q_i(y_i^*, y)$ – непрерывная функция своих переменных, удовлетворяющая следующему условию:

(4) $\forall\ i \in I\ \ \forall\ y_i \in A_i\ \ \forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ \ q_i(y_i^*, y) \le 1,\ \ q_i(y_i^*, y_i^*, y_{-i}) = 1.$

<u>Теорема 4.4.2.</u> Если выполнена гипотеза благожелательности, то при использовании в модели S4 центром системы стимулирования (3)-(4) $y^* \in E_d(\sigma)$.

Доказательство. Выбирая действие y_i^*, независимо от обстановки игры, i-ый АЭ получает нулевой выигрыш. Выбирая любое другое действие, он при любой обстановке (в силу условия (4) выполнено: $\forall\ y_i \in A_i\ \ \forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ \ (q_i(y_i^*, y) - 1)c(y) \le 0$) получает неположительный выигрыш. •

Отметим, что функция-«индикатор» $q_i(\cdot)$ может зависеть от действий i-го АЭ, например – $q_i(y_i^*, y_i) = e^{(y_i - y_i^*)^2}$ и т.д.

Содержательные интерпретации конструкций типа (3)-(4) очевидны. Аналогичным образом строятся непрерывные оптимальные системы стимулирования и в других моделях.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий результат теоремы 4.4.1.

Пример 6. Пусть в условиях примера 5, рассмотренном в разделе 4.3, функции затрат АЭ несепарабельны и имеют вид: $c_i(y) = \frac{(y_i + a\ y_{-i})^2}{2r_i}$. Определим множество Y индивидуально-рациональных действий: $Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y)$ £ $C_i,\ i = 1, 2\}$. Для того, чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, x\}$ возьмем случай, представленный на рисунке 4.

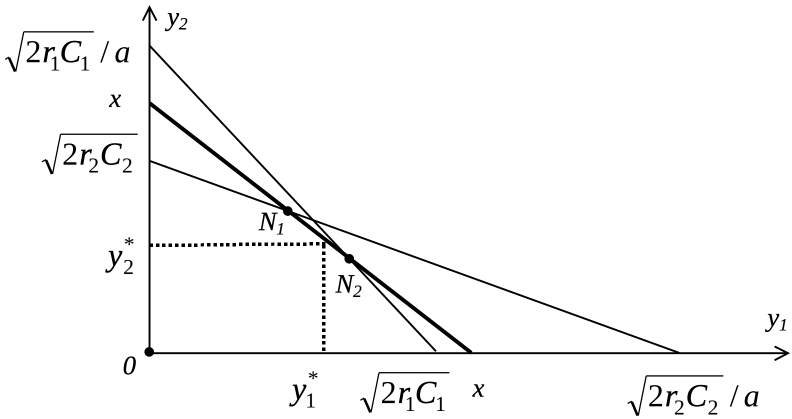

Рис. 4. Множество равновесий Нэша в примере 6.

В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок $[N_1\ N_2]$. Система стимулирования

$$\tilde{s}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2),\ y_1 = y_1^* \\ 0, \qquad\qquad y_1 \neq y_1^* \end{cases} \quad \tilde{s}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*),\ y_2 = y_2^* \\ 0, \qquad\qquad y_2 \neq y_2^* \end{cases}$$

реализует действие y^* Î $[N_1\ N_2]$ как единственное равновесие в доминантных стратегиях.

Система стимулирования $\tilde{s}^*$ имеет эффективность не меньшую, чем исходная система стимулирования с теми же параметрами C_1 и C_2 (см. пример 5). Она в точности компенсирует затраты АЭ, а исходная «переплачивала» следующую величину: $DC = C_1 - c_1(y^*) + C_2 - c_2(y^*)$, которая неотрицательна в силу индивидуальной рациональности активных элементов. •

4.5. МОДЕЛЬ S5: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ РЕЗУЛЬТАТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АС, ЗАТРАТЫ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Пусть результат деятельности[1] $z \in A_0 = A$ активной системы, состоящей из n АЭ, является функцией их действий: $z = Q(y)$. Предположим, что стимулирование i-го АЭ есть $\sigma_i: A_0 \to \Re^1_+$, $i \in I$. Равновесный по Нэшу вектор действий АЭ y^N определяется следующим образом:

$$\forall i \in I \quad \forall y_i \in A_i \quad \sigma_i(Q(y^N)) - c_i(y_i^N) \geq \sigma_i(Q(y_i, y_{-i}^N)) - c_i(y_i).$$

В случае, когда индивидуальные действия АЭ наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий АЭ: $\forall i \in I \;\; \tilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$, то есть получаем модель S3, для которой выше было доказано, что она эквивалентна модели S1 (напомним, что переход от S3 к S1 осуществляется следующим образом: $\forall i \in I \;\; \hat{\sigma}_i(y_i) = \tilde{\sigma}_i(y_{-i}^*, y_i)$), методы исследования которой хорошо известны и описаны выше и в [15, 44]. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности коллектива элементов, от которого зависит его доход, то есть $H: A_0 \to \Re^1$, но не знает и не может восстановить их индивидуальных действий.

Отметим, что в рассмотренных выше моделях S1-S4 декомпозиция игры активных элементов основывалась на возможности центра поощрять АЭ за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия АЭ ненаблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение АЭ

---

[1] *Все результаты настоящего и следующего разделов останутся в силе, если предположить, что $Q: A' \to \Re^m$ – однозначное непрерывное отображение, где $1 \leq m \leq n$ (при $m > n$ смысл агрегирования теряется – см. также обобщения в разделе 4.7).*

зависит от агрегированного[1] результата деятельности АС, следует использовать следующий подход – найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами АЭ (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить - реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Функция дохода центра может зависеть как от действий АЭ, так и от результата деятельности АС. Действия АЭ при этом могут быть наблюдаемы или ненаблюдаемы. Таким образом, получаем следующие четыре возможных варианта (комбинации).

Вариант 1. Действия АЭ наблюдаемы, функция дохода центра зависит от действий АЭ. В этом случае получаем модель S1 или модель S3, причем последняя (как было доказано в разделе 4.3) «эквивалентна» модели S1.

Вариант 2. Действия АЭ наблюдаемы, функция дохода центра зависит только от результата деятельности АС. В этом случае, обозначая $\tilde{H}(y) = H(Q(y))$, получаем модель S1 или модель S3 (в зависимости от переменных, от которых зависит вознаграждение АЭ), где целевая функция центра равна $F(y) = \tilde{H}(y) - J(y)$. Методы решения этого класса задач описаны выше в разделах 4.1 и 4.3.

Вариант 3. Действия активных элементов ненаблюдаемы, а наблюдаем только результат деятельности активной системы в целом, при этом функция дохода центра зависит[2] от действий АЭ. Подробно данный вариант рассматривается ниже в разделе 4.7.

---

[1] *В теории иерархических игр модели агрегирования исследовались в работах [1, 2].*

[2] *Следует признать, что данная модель представляется достаточно экзотической с содержательной точки зрения, однако полностью исключать возможность косвенной зависимости дохода центра от действий АЭ нельзя. Например, доход центра от действий АЭ может быть получен в следующем периоде, когда станут известными значения их действий, а стимулирование должно выплачиваться в текущем периоде на основании наблюдаемого агрегированного результата деятельности.*

Вариант 4. Действия активных элементов ненаблюдаемы, а наблюдаем только результат деятельности активной системы в целом, при этом и функция дохода центра, и вознаграждения АЭ зависят от результата деятельности АС.

Рассмотрим подробно четвертый вариант. Для решения соответствующей задачи стимулирования может быть использован подход, предложенный в [18, 36] и развиваемый ниже.

Определим $Y(z) = \{y$ Î $A' \mid Q(y) = z\}$ Í A', z Î A_0. Содержательно $Y(z)$ – множество тех действий АЭ, выбор которых приводит к реализации заданного результата их деятельности z Î A_0. При компенсации центром затрат активных элементов минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0 равны: $J(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y_i)$, а целевая функция центра равна: $F(z) = H(z) - J(z)$.

На первом шаге решения задачи стимулирования определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности и требующих минимальных затрат на стимулирование по своей реализации: $Y^*(z) = Arg \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y_i)$. Фиксируем произвольный вектор $y^*(x)$ Î $Y^*(x)$ Í $Y(x)$, x Î A_0.

Теорема 4.5.1. При использовании центром системы стимулирования

$$(1)\quad s_i^*(x, z) = \begin{cases} c_i(y_i^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \text{ Î } I,$$

где x Î A_0 – параметр (план), множество равновесий Нэша есть $E_N(s^*) = Y^*(x)$, причем система стимулирования (1) реализует результат деятельности x Î A_0 с минимальными суммарными затратами центра на стимулирование.

Доказательство. Так как $y^*(x)$ Î $Y^*(x)$, то $y^*(x)$ Î $Par(Y(x), \{-c_i(\cdot)\})$. Фиксируем произвольный номер i Î I. При фиксированной обстановке игры выбор действия y_i Î $Proj_i\, Y(x)$: $y_i > y_i^*$ невыгоден для i-го АЭ, так как при этом его затраты не убывают, а стимулирование не изменяется. Выбор действия $y_i < y_i^*$ для него также невыгоден, так как при этом его затраты убывают, но и стимулирование становится равным нулю (если бы существовало действие *i*-го АЭ, приводящее к тому же результату деятельности и характеризуемое строго меньшими его затратами, чем y_i^*, то оно было бы включено центром во множество $Y^*(x)$). Следовательно, $y^*(x)$ – равновесие Нэша. •

Отметим, что при доказательстве теоремы 4.5.1 практически не использовалась сепарабельность затрат активных элементов.

Недостатком системы стимулирования (1) является то, что при ее использовании центром, помимо определяемого теоремой 4.5.1 множества равновесий Нэша, существует РДС – вектор нулевых действий. Для того чтобы точки множества $Y^*(x)$ были единственными равновесными точками, центр должен за их выбор доплачивать АЭ сколь угодно малую, но положительную, величину. Поэтому система стимулирования (1) в общем случае является *e*-оптимальной.

На втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности коллектива АЭ x^* Î A_0 как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x^* = arg \max_{z \in A_0} [H(z) - J(z)]$, то есть эффективность стимулирования K_{S5} равна $K_{S5} = F(x^*)$, где $F(z) = H(z) - J(z)$.

Отметим, что при использовании предложенного подхода для модели S5 существенно предположение о бескоалиционности игры АЭ, так как для некоторой коалиции (но не максимальной коалиции!) могут существовать вектора действий, доминирующие по Парето вычисленное выше равновесие Нэша, но, действуя некооперативно, попасть в точку Парето АЭ не могут. Однако, несмотря на то, что в рассматриваемой модели в общем случае существует несколько равновесий Нэша (доплата за их выбор по сравнению с нулевым действием не всегда выделяет, как это было в моделях S2-S4, единственное равновесие), при определении эффективности стимулирования центру не следует брать гарантированный результат по $Y^*(x)$ множеству, так как все точки этого множества для него эквивалентны – все они требуют для своей реализации одинаковых затрат на стимулирование.

Рассмотрим теперь класс US5 унифицированных систем стимулирования в АС с коллективным стимулированием и сепарабельными затратами. Если индивидуальные действия АЭ наблюдаются или однозначно восстанавливаются центром, то, как отмечалось выше, получаем модель US3, от которой можно перейти к US1. Поэтому предположим, что индивидуальные действия ненаблюдаемы для центра.

Обозначим $c(y) = \max\limits_{i \in I} \{c_i(y_i)\}$, c: $A' \to \Re^1_+$. Вычислим минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$: $J_U(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$ (так как центр использует унифицированную систему стимулирования, то для того, чтобы побудить АЭ выбрать некоторый вектор действий $y \in Y(z)$, он должен компенсировать затраты по выбору соответствующих компонент этого вектора всем АЭ).

Множество векторов действий, на которых достигается минимум затрат на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, определяется как: $Y^*(z) = Arg \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$. Унифицированная система стимулирования:

$$\sigma_i(x, z) = \begin{cases} c(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \ i \in I,$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными затратами на стимулирование[1]. Отметим, что при этом может оказаться, что $E_N(\sigma) \subseteq Y^*(x)$, то есть не всякий элемент $y^*(x)$ множества $Y^*(x)$ есть равновесие Нэша (в отличие от персонифицированного стимулирования – см. теорему 4.5.1). С точки зрения эффективности стимулирования

[1] *Для того чтобы исключить выбор АЭ нулевых действий при использовании унифицированных систем стимулирования в модели S5 следует доплачивать за выбор ненулевых действий строго положительную величину не всем АЭ, а только активным элементам, принадлежащим множеству* $Arg \max\limits_{i \in I} \{c_i(y_i)\}$.

этот факт не имеет значения, так как суммарные затраты центра на стимулирование одинаковы на всем множестве $Y^*(x)$.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы коллективного стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности коллектива АЭ x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x_U^* = arg \max\limits_{z \in A_0} [H(z) - J_U(z)]$, то есть $K_{US5} = F(x_U^*)$.

Потери центра от использования унифицированного стимулирования по сравнению с персонифицированным стимулированием в модели S5 зависят от минимальных затрат на стимулирование:

$$D(S5,US5) = K_{S5} - K_{US5} = \max_{z \in A_0} [H(z) - J(z)] - \max_{z \in A_0} [H(z) - J_U(z)].$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование предложенного подхода к решению задач стимулирования в моделях типа S5.

<u>Пример 7.</u> Пусть $z = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $H(z) = z$, $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i \in I$. При этом $Y(z) = \{y \in A' \mid \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = z\}$. Решение задачи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'}$$

при условии $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = x$ имеет вид: $y_i^*(x) = \frac{r_i}{W} x$, где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, $i \in I$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны $J(x) = x^2/2W$. Вычисляя максимум целевой функции центра: $\max\limits_{x \geq 0} [H(x) - J(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$s_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \dfrac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in I.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна $K_{S5} = W/2$.

Пусть теперь в рамках рассматриваемого примера центр должен использовать унифицированную систему стимулирования. Определим $c(y) = y_j^2/2r_j$, где $j = arg \min_{i \in I} \{r_i\}$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны $J_U(z) = z^2 / 2nr_j$. Оптимальный план $x_U^* = n\, r_j$ дает значение эффективности $K_{US5} = n\, r_j / 2$. Видно, что $K_{US5} \le K_{S5}$, причем равенство имеет место в случае одинаковых активных элементов. •

4.6. МОДЕЛЬ S6: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ РЕЗУЛЬТАТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АС, ЗАТРАТЫ НЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫ

Модель S6, в которой при несепарабельных затратах активных элементов их индивидуальные вознаграждения зависят только от результата их деятельности, чрезвычайно близка (с точки зрения подходов и результатов решения задачи стимулирования) к модели S5, отличающейся лишь сепарабельностью затрат.

Действительно, если действия активных элементов наблюдаются или могут быть однозначно восстановлены центром, то модель S6 переходит в модель S4, рассмотренную выше в разделе 4.4. Если действия АЭ ненаблюдаемы, то используем подход, предложенный в разделе 4.5, то есть определим для каждого результата деятельности множество действий, приводящих к его реализации, вычислим минимальные затраты и т.д. Опишем эту последовательность формально.

Равновесный по Нэшу вектор действий АЭ y^N определяется следующим образом:

$$\forall\, i \in I \quad \forall\, y_i \in A_i \quad \sigma_i(Q(y^N)) - c_i(y^N) \ge \sigma_i(Q(y_i, y_{-i}^N)) - c_i(y_i, y_{-i}^N).$$

Определим $Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A'$, $z \in A_0$. При компенсации центром затрат активных элементов минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$ равны: $J(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$.

На первом шаге решения задачи стимулирования определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности и требующих минимальных затрат на стимулирование по своей реализации: $Y^*(z)$ = $Arg \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y)$. Фиксируем произвольный вектор $y^*(z)$ Î $Y^*(z)$ Í $Y(z)$.

<u>Теорема 4.6.1.</u> Если "x Î A_0 "y_i Î $Proj_i\ Y(x)$ "j ¹ i "y_{-i} Î $Proj_{-i}\ Y(x)$ $c_j(y_i, y_{-i})$ не возрастает по y_i, то при использовании центром системы стимулирования

$$(2)\quad s_i^*(x, z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \text{ Î } I,$$

где x Î A_0 – параметр (план), результат деятельности x Î A_0 реализуется с минимальными затратами центра на стимулирование.

Доказательство теоремы 4.6.1 повторяет доказательство теоремы 4.5.1 и не приводится.

На втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности коллектива АЭ x^* Î A_0 как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x^* = arg \max\limits_{z \in A_0} [H(z) - J(z)]$.

Рассмотрим теперь класс US6 унифицированных систем стимулирования в АС с коллективным стимулированием и несепарабельными затратами. Если индивидуальные действия АЭ наблюдаются или однозначно восстанавливаются центром, то, как отмечалось выше, получаем модель US4, от которой можно перейти к US1 (см. раздел 4.4). Поэтому предположим, что индивидуальные действия ненаблюдаемы для центра.

Обозначим c: A' ® $\Re^1_+$

$$(2)\ c(y) = \max_{i \in I} \{c_i(y)\}.$$

Вычислим минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0: $J_U(z) = n \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$. Вектор действий, минимизирующий затраты на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0, определяется следующим выражением: $Y^*(z) = Arg \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$. Унифицированная система стимулирования:

$$(3)\ s_i(x, z) = \begin{cases} c(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i\ \hat{I}\ I,$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности x Î A_0 с минимальными затратами на стимулирование (как и в разделе 4.5, для того чтобы исключить выбор АЭ нулевых действий при использовании унифицированных систем стимулирования центру следует доплачивать за выбор ненулевых действий строго положительную величину АЭ из множества $Arg \max\limits_{i \in I} \{c_i(y)\}$).

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной коллективной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности коллектива АЭ x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x_U^* = arg \max\limits_{z \in A_0} [H(z) - J_U(z)]$.

Теорема 4.6.2. В модели S6 эффективность унифицированного стимулирования не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования.

Доказательство. Фиксируем произвольный результат деятельности. Реализующая его унифицированная система стимулирования (3) в силу (2) характеризуется не меньшими суммарными затратами на стимулирование со стороны центра, чем система персонифицированная стимулирования (1). По теореме о минимальных затратах на стимулирование получаем, что K_{S6} ³ K_{US6}. •

Потери центра от использования унифицированного стимулирования по сравнению с персонифицированным стимулированием в модели S6 зависят от минимальных затрат на стимулирование:

$$D(S6,US6) = K_{S6} - K_{US6} = \max_{z \in A_0} [H(z) - J(z)] - \max_{z \in A_0} [H(z) - J_U(z)].$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование предложенного подхода к решению задач стимулирования в моделях типа S6.

Пример 8. Пусть в АС, состоящей из $n = 2$ АЭ функции затрат АЭ несепарабельны и имеют вид: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + a\ y_{-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$.

Если $z = Q(y) = y_1 + y_2$, то $Y(z) = \{y$ Î $A' \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = z\}$. Решение задачи $\sum_{i=1}^{n} c_i(y)$ ® $\min\limits_{y \in A'}$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i = x$ имеет вид:

$$y_i^*(x) = \frac{(r_i - a\ r_{-i})}{(1-a)W}\ x,$$

где $W = r_1 + r_2$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности x Î A_0 равны $J(x) = x^2(1+a^2)/2W$. Вычисляя максимум целевой функции центра: $\max\limits_{x \ge 0}\ [H(x) - J(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W / (1+a^2)$ и оптимальную систему стимулирования:

$$s_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \frac{x^2}{2W}(1+\alpha)^2, & z = x^* \\ 0, & z \ne x^* \end{cases}, \ i = 1, 2.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна $K_{S6} = W/2(1+a)^2$. •

4.7. МОДЕЛИ S7 И S8: СТИМУЛИРОВАНИЕ АЭ ЗАВИСИТ ОТ ДЕЙСТВИЙ АЭ И РЕЗУЛЬТАТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АС, ЗАТРАТЫ СЕПАРАБЕЛЬНЫ ИЛИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫ

Стимулирование конкретного активного элемента может основываться непосредственно на его действии и/или действиях других АЭ только в том случае, если эти действия наблюдаются центром. Если действия наблюдаемы, то, как показано в разделах 4.5 и 4.6, стимулирование на основании результата деятельности не повышает эффективности управления[1].

---

[1] *См. четыре варианта в разделе 4.5.*

Если же действия ненаблюдаемы, но наблюдаем агрегированный результат деятельности, то стимулирование активного элемента непосредственно на основании его индивидуальных действий или действий остальных АЭ невозможно. Поэтому модели S7 и S8 в некотором смысле внутренне противоречивы. Если действия всех АЭ наблюдаемы, то модель S7 переходит в модель S3 (а модель S8 - в модель S4). Если действия ненаблюдаемы, то модель S7 переходит в модель S5 (а модель S8 – в модель S6).

Здесь же (при обсуждении моделей S7 и S8) уместно сравнить оценки эффективности индивидуального и коллективного стимулирования. Представим себе следующую ситуацию. Пусть центр должен стимулировать АЭ на основании скалярного (агрегированного) результата деятельности коллектива АЭ.

Если выбор процедуры агрегирования, то есть отображения Q: A' ® A_0, является прерогативой центра, то задача заключается в определении оптимальной (в рамках имеющейся у центра информации) процедуры агрегирования, то есть процедуры, при использовании которой потери в эффективности были бы минимальны по сравнению со случаем полностью наблюдаемых действий АЭ и использования центром индивидуального стимулирования.

Рассмотрим следующую модель. Пусть выполнено предположение

А5. A' и A_0 Í $Â^m$ – компактные множества; Q: A' ® A_0 – непрерывное однозначное отображение, такое что: " z Î A_0 $ y Î A': $Q(y) = z$ и " y Î A' $Q(y)$ Î A_0.

Пусть функция дохода центра – $H(z)$, то есть зависит от результата деятельности АС. Рассмотрим два случая. Первый случай - когда действия АЭ наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях АЭ, так и на результате деятельности. Второй случай, когда действия АЭ ненаблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

В первом случае минимальные затраты на стимулирование равны (в общем случае будем считать, что затраты несепарабельны

– ср. модели S2 и S4): $J_1(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$, а эффективность стимулирования равна: $K_1 = \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - J_1(y)\}$.

Во втором случае минимальные затраты центра на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0 определяются следующим образом: $J_2(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$, а эффективность стимулирования равна $K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - J_2(z)\}$.

<u>Теорема 4.7.1.</u> Если выполнено предположение А.5, то $K_2 = K_1$.

Доказательство. Пусть $K_1 < K_2$, тогда " y Î A' выполнено:

$$(1)\ H(Q(y)) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y) < H(x) - \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y),$$

где $x = arg \max_{z \in A_0} \{H(z) - J_2(z)\}$. Выбирая в левой части выражения (1) $y = y^*(x)$ Î $Y^*(x)$, получим: $\sum_{i=1}^{n} c_i(y^*(x)) > \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$ - противоречие в силу определений множеств $Y(x)$ и $Y^*(x)$.

Пусть $K_1 > K_2$, тогда " z Î A_0 выполнено:

$$(2)\ \{H(Q(y^*)) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*)\} > H(z) - \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y),$$

где $y^* = arg \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - J_1(y)\}$. Выбирая в правой части выражения (2) результат деятельности z равным $x = Q(y^*)$, получим: $\sum_{i=1}^{n} c_i(y^*) < \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$ - противоречие в силу того, что y^* Î $Y(x)$. •

Теорема 4.7.1 (которую условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях S5 - S8»), помимо оценок сравнительной эффективности имеет чрезвычайно важное методологическое значение. Она утверждает, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата деятельности АС, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования АЭ за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий в силу предположения А.5 меньшую информацию, чем вектор действий АЭ.

Другими словами, наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы. Это достаточно парадоксально, так как в [36] доказано, что наличие агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует идеальное агрегирование (см. определение и подробное обсуждение проблем агрегирования в управлении активными системами в [36]), возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру неважно какие действия предпринимают АЭ, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. Условия А.5 (которое трудно назвать обременительным) оказывается достаточно для того, чтобы центр мог переложить все «проблемы» по определению равновесия на активные элементы. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из результата теоремы 4.7.1 следующий: если в условиях полной информированности доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности активных элементов, то целесообразно основывать стимулирование АЭ на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия АЭ наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях АЭ, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Сложнее дело обстоит, когда функция дохода центра зависит от действий АЭ, которые не наблюдаемы – см. третий вариант в разделе 4.5 (в противном случае мы получили бы модель S4).

Фиксируем вектор $y^*(x)$ Î $Y^*(x)$ и предположим, что центр использует систему стимулирования

(3) $$s_i^*(x, z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \text{ Î } I.$$

Эта система стимулирования реализует результат деятельности $x \hat{I} A_0$. При этом, однако, может оказаться, что выбранные АЭ действия, которые обязательно принадлежат множеству $Y^*(x)$, не равны $y^*(x)$. Центр не вправе рассчитывать на выполнение «гипотезы благожелательности[1]», в рамках которой выполнено: $K_3 = \max\limits_{z \in A_0} \max\limits_{y \in Y(z)} \{H(y) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y)\}$, а вынужден определять максимальную эффективность стимулирования как[2]:

$$(4)\ K_4 = \max_{z \in A_0} \{ \min_{y \in Y^*(z)} H(y) - J_2(z)\}.$$

Напомним, что при классификации задач стимулирования в многоэлементных активных системах мы ограничились случаем, когда для всех АЭ используется система стимулирования одного типа. В том числе это предположение означает, что, если действия наблюдаемы, то они наблюдаемы центром у всех АЭ, а если ненаблюдаемы, то, опять же, у всех АЭ.

На практике часто встречаются ситуации, когда, например, в рамках модели S7 или S8 действия одних элементов наблюдаемы, а других – нет[3]. В подобных случаях центру следует использовать комбинацию моделей S1-S6: тех АЭ, действия которых наблюдаемы стимулировать на основании их действий, а остальных – на основании агрегированного результата деятельности. Рассмотрим формальную модель.

---

[1] *Напомним, что в теоремах 4.5.1 и 4.6.1 фигурировал произвольный вектор $y^*(z)$ из множества $Y^*(z)$.*

[2] *Отметим, что если функция дохода центра зависит только от агрегированного результата деятельности, то K_4 переходит в K_2. Более того, если функции затрат сепарабельны, то в (4) можно вместо $\min\limits_{y \in Y^*(z)} H(y)$ использовать $H(y^*)$, где $y^* = \arg \max\limits_{y \in Y^*(z)} H(y)$.*

[3] *Такая ситуация может рассматриваться как частный случай стимулирования, зависящего от результата деятельности АС в целом – оператор $Q(\cdot)$ может быть взаимно однозначен по наблюдаемым действиям АЭ.*

Пусть в активной системе, состоящей из n активных элементов, действия АЭ из множества $J \subseteq I$ наблюдаются центром, а действия АЭ из множества $I \setminus J$ ненаблюдаемы для центра. Обозначим: $A_J = \prod_{i \in J} A_i$, y_J - вектор действий АЭ из множества J, $A_{I \setminus J} = \prod_{i \in I \setminus J} A_i$, $y_{I \setminus J}$ - вектор действий АЭ из множества $I \setminus J$, $y = (y_J, y_{I \setminus J}) \in A'$. Предположим, что:

1) результат деятельности АС зависит от действий всех АЭ;
2) доход центра зависит от наблюдаемых действий АЭ и результата деятельности АС, то есть $H = H(y_J, z)$;
3) целевая функция центра равна: $F(y_J, z) = H(y_J, z) - J(y_J, z)$, где $J(y_J, z)$ определяется ниже, $y \in E_N(\sigma)$, $\sigma \in M$;
4) затраты несепарабельны, то есть затраты каждого АЭ зависят от действий всех АЭ: $c_i = c_i(y)$, $i \in I$;
5) стимулирование АЭ, действия которых наблюдаемы, зависит от их действий, то есть $\sigma_i = \sigma_i(y_J)$, $i \in J$ (делать их стимулирование зависящим от действий $y_{I \setminus J}$ и/или результата деятельности АС бессмысленно – см. результаты выше);
6) стимулирование АЭ, действия которых ненаблюдаемы, зависит от результата деятельности АС, то есть $\sigma_i = \sigma_i(z)$, $i \in I \setminus J$.

Обозначим: $A_0(y_J) = \{z \in A_0 \mid z = Q(y_J, y_{I \setminus J}),\ y_{I \setminus J} \in A_{I \setminus J}\} \subseteq A_0$ – множество результатов деятельности, которые могут быть получены при условии, что АЭ из множества J выбрали действия $y_J \in A_J$; $Y(z, y_J) = \{y_{I \setminus J} \in A_{I \setminus J} \mid Q(y_J, y_{I \setminus J}) = z\} \subseteq A_{I \setminus J}$, $z \in A_0(y_J)$, $y_J \in A_J$ – множество тех действий АЭ из множества $I \setminus J$, выбор которых при условии, что остальные АЭ выбрали действия y_J, приводит к реализации заданного результата деятельности $z \in A_0$.

Пусть АЭ из множества J выбрали вектор действий y_J. При компенсации центром затрат активных элементов его минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0(y_J)$ равны: $J(y_J, z) = \min_{y_{I \setminus J} \in Y(z, y_J)} \sum_{i \in I} c_i(y_{I \setminus J}, y_J)$.

На первом шаге решения задачи стимулирования определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности и требующих минимальных затрат на стимулирование по своей реализации:

$$Y^*(z, y_J) = Arg \min_{y_{I\setminus J} \in Y(z, y_J)} \sum_{i \in I} c_i(y_{I\setminus J}, y_J) \subseteq Y(z, y_J).$$

Фиксируем произвольный вектор $y^*_{I\setminus J}(z) \in Y^*(z, y_J) \subseteq Y(z, y_J)$.

Теорема 4.7.2. Система стимулирования[1]

$$(5)\quad \sigma_i^*(x, z) = \begin{cases} c_i(y_J^*, y^*_{I\setminus J}(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in I\setminus J,$$

$$(6)\quad \sigma_i^*(y_J^*, y_J) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{J\setminus\{i\}}, y^*_{I\setminus J}(x)), & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \; i \in J,$$

реализует как равновесие Нэша: действие $y_J^* \in A_J$ и результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными затратами на стимулирование.

Доказательство теоремы 4.7.2 является комбинацией доказательств теорем 4.4.1 и 4.5.1 и не приводится.

Пример 9. Пусть в АС, состоящей из $n = 3$ АЭ, функции затрат АЭ сепарабельны и имеют вид: $c_i(y) = y_i^2 / 2r_i$, $i \in I$; $J = \{1\}$, $I\setminus J = \{1;2\}$; $z = y_1 + y_2 + y_3$; $H(z) = z$. $Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = z\}$. Решение задачи $\sum_{i \in I\setminus J} c_i(y_i) \to \min_{y \in A_{I\setminus J}}$ при условии $\sum_{i \in I\setminus J} y_i = x - \sum_{i \in J} y_i$ дает множество $Y^*_{I\setminus J}(y_J, z) = \{ y_i^* = \frac{r_i}{\sum_{j \in I\setminus J} r_j}(z - \sum_{i \in J} y_i), i \in I\setminus J\}$.

Минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y_1^* и результата деятельности $x \in A_0$ равны:

$$J(y_1^*, x) = \frac{(x - y_1^*)^2}{2(r_2 + r_3)} + \frac{(y_1^*)^2}{2r_1}.$$

Целевая функция центра равна: $F(y_1^*, x) = x - J(y_1^*, x)$. Опти-

---

[1] *Отметим, что система стимулирования (5) аналогична системе стимулирования, оптимальной в модели S5, а (6) – системе стимулирования, оптимальной в модели S4.*

мальные значения параметров равны: $x = W = r_1 + r_2 + r_3$ (ср. с оптимальными решениями в примерах 2, 4, 7 и 8). •

На втором этапе решения задачи стимулирования определяются значения параметров y_J Î A_J, x Î A_0 систем стимулирования (5)-(6), которые максимизируют эффективность:

$$K^* = \max_{y_J \in A_J,\, x \in A_0} \{H(y_J, x) - J(y_J, x)\}.$$

Итак, мы рассмотрели один из возможных случаев наблюдаемости действий АЭ и результатов деятельности АС (см. шесть предположений в настоящем разделе выше). Другие комбинации рассматриваются по аналогии. Ключевой идеей при этом является адаптированное использование результатов исследования моделей S1-S6, то есть на первом этапе - декомпозиция игры активных элементов и компенсация их затрат по выбору фиксированных действий, затем на втором этапе - выбор оптимального с точки зрения центра реализуемого действия.

Таким образом, основной методологический **вывод** из результатов исследования задач стимулирования в детерминированных многоэлементных АС, рассмотренных в настоящем разделе, заключается в следующем: решение задачи стимулирования в многоэлементных АС опирается на две ключевых идеи – *декомпозиции игры активных элементов и компенсации их затрат*.

Отметим, что первая идея является специфической для многоэлементных АС, а вторая справедлива как для одноэлементных, так и для многоэлементных активных систем (см. выше). Возможность декомпозиции игры АЭ основана на использовании центром систем стимулирования, при которых у каждого АЭ существует единственная доминантная стратегия. Более того, оказывается, что системы стимулирования, декомпозирующие игру АЭ, характеризуются минимальными затратами центра на стимулирование, то есть оптимальны или e-оптимальны. Описанная в настоящем разделе для детерминированных моделей многоэлементных АС методология и методика решения задач стимулирования в седьмом разделе настоящей работы обобщается на случай многоэлементных АС с неопределенностью, а в пятом, шестом, восьмом, девятом и десятом разделах используется при рассмотрении практически важных прикладных задач стимулирования.

5. РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ[1]

В большинстве рассмотренных выше моделей вознаграждение АЭ зависело от абсолютных значений их действий и/или результата деятельности. В то же время на практике достаточно распространены ранговые системы стимулирования (РСС), в которых величина вознаграждения АЭ определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству - так называемые нормативные РСС, либо местом, занимаемым АЭ в упорядочении показателей деятельности всех элементов - так называемые соревновательные РСС. Преимущества ранговых систем стимулирования достаточно очевидны - при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных элементами; при использовании соревновательных РСС в АС, функционирующих в условиях неопределенности, в ряде случаев оказывается возможным снижение неопределенности за счет параллельного функционирования элементов и т.д. [7, 44].

Подробный обзор результатов отечественных и зарубежных авторов по исследованию РСС (турниров - rank-order tournaments - в терминологии теории контрактов) приведен в [34]. В настоящей работе нас будет интересовать следующий аспект: так как РСС являются подклассом систем стимулирования, то возникает вопрос - какова их эффективность в сравнении с другими системами стимулирования. Другими словами, в каких случаях использование РСС не приводит к потерям эффективности управления (стимулирования), а если приводит, то какова величина этих потерь?

5.1. НОРМАТИВНЫЕ РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Нормативные РСС характеризуются наличием процедур присвоения рангов АЭ в зависимости от показателей их деятельности

[1] *Материал данного раздела в основном основывается на развернутой версии работы [6].*

(выбираемых действий и т.д.). Введем следующие предположения, которые будем считать выполненными на протяжении настоящего раздела.

А.5.1. Множества возможных действий АЭ одинаковы: $A_i = A = \Re^1_+$, i Î I.

А.5.2. Функции затрат АЭ монотонны.

А.5.3. Затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $Á=\{1,2,...m\}$ - множество возможных рангов, где m - размерность НРСС, $\{q_j\}$, $j=\overline{1,m}$ - совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за "попадание" в различные ранги; d_i: A_i®$Á$, $i=\overline{1,n}$ - процедуры классификации. Нормативной ранговой системой стимулирования (НРСС) называется кортеж $\{m, Á, \{d_i\}, \{q_j\}\}$.

В работе [55] доказано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Идея доказательства этого факта заключается в следующем. Пусть имеется произвольная допустимая система стимулирования, которая реализует некоторый вектор действий АЭ с некоторыми суммарными затратами на стимулирование. Легко показать, что, можно подобрать вектор вознаграждений $q=(q_1, q_2, ..., q_m)$ и совокупность процедур классификации $\{d_i\}$ - в общем случае различных для различных АЭ, таких, что соответствующая НРСС будет реализовывать тот же вектор действий с теми же затратами на стимулирование, что и исходная система стимулирования (см. детали в [55]). Ключевым при этом является то, что процедуры $d_i(\cdot)$ классификаций показателей деятельности АЭ могут быть различны.

То, что центр использует различные процедуры присвоения рангов, может показаться не "справедливым" с точки зрения АЭ. Действительно, например, выбирая одинаковые действия, два АЭ могут иметь различные ранги и, следовательно, получать различные вознаграждения. Более "справедливой" представляется НРСС, в которой процедура классификации одинакова для всех АЭ, то есть так называемая универсальная НРСС, при использовании которой элементы, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$, такой, что $0 £ Y_1 £ Y_2 £ ... £ Y_m < +¥$, который определяет некоторое разбиение множества A. Универсальная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го активного элемента s_i определяется следующим образом: $s_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j \; I(y_i\,Î\,[Y_j, Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ - функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Универсальная НРСС называется прогрессивной, если $q_0 £ q_1 £ q_2 £ ... £ q_m$. Пример прогрессивной универсальной НРСС приведен на рисунке 5.

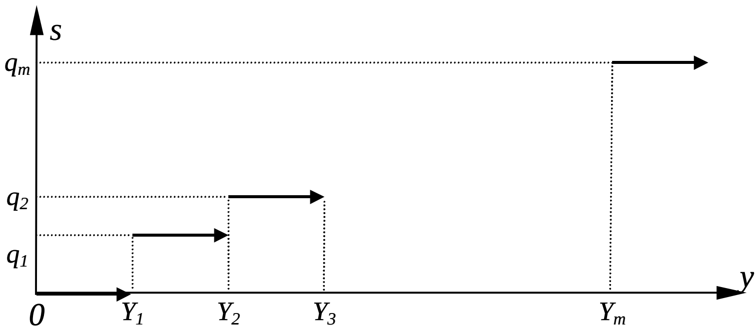

Рис. 5. Пример прогрессивной универсальной НРСС.

Универсальная нормативная ранговая система стимулирования (УНРСС) принадлежит к классу унифицированных кусочно-постоянных систем стимулирования (см. классификацию выше). Исследуем ее эффективность.

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что АЭ будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, причем, так как $c_i(0) = 0$, то следует положить $q_0 = 0$. Действие, выбираемое i-ым АЭ, определяется парой (Y,q), то есть имеет место $y_i^*(Y,q) = Y_{k_i}$, где

(1) $k_i = arg \max_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\}, i\ Î\ I.$

Обозначим $y^*(Y,q) = (y_1^*(Y,q),\ y_2^*(Y,q),\ \dots,\ y_n^*(Y,q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов q и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$(2)\ F(y^*(Y,q)) \to \max_{Y,q}.$$

Фиксируем некоторый вектор действий $y^* \in A'$, который мы хотели бы реализовать универсальной нормативной системой стимулирования. Известно, что минимально возможные (среди всех систем стимулирования) затраты на стимулирование по реализации этого вектора соответствуют использованию квазикомпенсаторной системы стимулирования (см. выше и [44]) и равны:

$$(3)\ J_{QK}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i^*).$$

Из того, что при использовании УНРСС АЭ выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу АЭ, то есть положим $m = n$.

Для фиксированного $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in I$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i,j \in I$. Из определения реализуемого действия (1) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$ необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

$$(4)\ q_i - c_{ii} \ge q_j - c_{ij},\ i \in I,\ j = \overline{0,n}.$$

Запишем (4) в виде

$$(5)\ q_j - q_i \le a_{ij},\ i \in I,\ j = \overline{0,n},$$

где $a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}$. Обозначим суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС

$$(6)\ J_{УНРСС}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y^*),$$

где $q(y^*)$ удовлетворяет (4).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (6) при условии (5).

Из того, что $q_i \geq c_{ii}$, $i \in I$, немедленно следует, что $\forall\, y^* \in A'$ выполнено: $J_{УНРСС}(y^*) \geq J_{QK}(y^*)$, то есть минимальные затраты на стимулирование по реализации любого вектора действий АЭ при использовании универсальных нормативных систем стимулирования не ниже, чем при использовании квазикомпенсаторных систем стимулирования. Следовательно, для эффективностей стимулирования справедлива следующая достаточно "грубая" оценка: $K_{УНРСС} \leq K_{QK}$. Потери от использования УНРСС обозначим[1] $\Delta(УНРСС, QK) = J_{УНРСС}(y^*) - J_{QK}(y^*) \geq 0$.

Таким образом, исследование УНРСС свелось к необходимости ответа на следующие вопросы - какие векторы действий АЭ могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (5) имеет решение) и в каких случаях УНРСС являются оптимальными во всем классе допустимых систем стимулирования (иначе говоря, при каких условиях $\Delta(УНРСС, QK) = 0$).

Введем в рассмотрение n-вершинный граф $G_a(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|a_{ij}(y^*)\|$. Задача минимизации (6) при условии (5) является задачей о минимальных неотрицательных потенциалах вершин графа G_a , для существования решения которой необходимо и достаточно отсутствия контуров отрицательной длины [5]. Таким образом, справедлива следующая

<u>Лемма 5.1.1.</u> Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Рассмотрим следующую задачу о назначении:

$$(7)\quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min_{\{x_{ij}\}}$$

---

[1] *Напомним, что компенсаторная (К-типа) и квазикомпенсаторная (QK-типа) системы стимулирования оптимальны, то есть имеют максимальную эффективность. Поэтому имеет смысл сравнивать эффективность исследуемой системы стимулирования с эффективностью именно этих систем стимулирования.*

$$(8)\ x_{ij} \in \{0;1\},\ i, j \in I;\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in I;\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in I.$$

<u>Лемма 5.1.2.</u> Для того чтобы в решении задачи (7)-(8) выполнялось $x_{ii} = 1,\ i \in I,\ x_{ij} = 0,\ j \neq i$, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Доказательство. Пусть $(i_1, i_2, ..., i_n)$ - решение задачи (7)-(8), то есть назначение

$$(9)\ y_{i_1} = y_1^*,\ y_{i_2} = y_2^*, ...,\ y_{i_n} = y_n^*$$

минимизирует (7).

Предположим, что $\forall\ j \in I\ \ i_j = j$ и в графе $G_a(y^*)$ имеется контур отрицательной длины. Тогда существует такое переназначение (перестановка вершин графа, входящих в этот контур), которое уменьшит суммарные затраты (7), следовательно, исходное назначение не является решением задачи (7)-(8) - противоречие.

Пусть граф $G_a(y^*)$ не имеет контуров отрицательной длины. Предположим, что решение $(i_1, i_2, ..., i_n)$ не является оптимальным решением задачи (7)-(8). Пусть $(j_1, j_2, ..., j_n)$ – оптимальное решение. Тогда решение $(j_1, j_2, ..., j_n)$ можно получить из решения $(i_1, i_2, ..., i_n)$ путем переназначений, которым в графе $G_a(y^*)$ соответствуют один или несколько контуров отрицательной длины. Однако, при этом суммарные затраты могут только увеличиться. Таким образом, $(i_1, i_2, ..., i_n)$ – оптимальное решение. •

Следствием лемм 5.1.1 и 5.1.2 является следующая теорема, характеризующая множество всех действий, реализуемых универсальными нормативными ранговыми системами стимулирования.

<u>Теорема 5.1.1.</u> Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением задачи о назначении (7)-(8).

Из теории графов известно [5], что в оптимальном решении задачи (5)-(6) минимальна не только сумма потенциалов вершин графа G_a (суммарные затраты на стимулирование), но и минимальны все потенциалы вершин (индивидуальные вознаграждения). То есть решение задачи о назначении (7)-(8) и двойственной к ней задачи (5)-(6) минимизирует не только суммарные выплаты АЭ со стороны центра, но обеспечивает минимальные значения всем индивидуальным вознаграждениям.

Приведенные выше результаты характеризуют множество действий, реализуемых УНРСС. Исследуем теперь эффективность этого класса систем стимулирования.

Имея результат теоремы 5.1.1, мы имеем возможность предложить алгоритм вычисления минимальных потенциалов, и, следовательно, количественно оценить потери в эффективности.

Рассмотрим задачу (7)-(8). Перенумеруем АЭ таким образом, чтобы оптимальным было диагональное назначение " j Î I $i_j = j$ ($x_{ii} = 1$). Поставим в соответствие ограничению (7) двойственную переменную u_j, j Î I, а ограничению (8) - двойственную переменную v_i, i Î I. Ограничения двойственной к (7)-(8) задачи имеют вид:

(*10*) $u_j - v_i$ £ a_{ij}, $i, j,$ Î I.

Заметим, что так как $x_{ii} = 1$, i Î I, то $u_i - n_i = a_{ii} = 0$, а значит $u_i - n_i = q_i$. Используя этот факт, определим следующий алгоритм:

Шаг 0. $u_j = c_{jj}$, j Î I.

Шаг 1. $v_i := \max\limits_{j \in I} \{u_j - a_{ij}\}$, i Î I.

Шаг 2. $u_j := \min\limits_{i \in I} \{v_i + a_{ij}\}$, j Î I.

Последовательное повторение шагов 1 и 2 алгоритма конечное число (очевидно, не превышающее n) раз даст оптимальное решение задачи (5)-(6):

(*11*) $q_i = u_i = v_i$, i Î I.

Приведенный выше алгоритм позволяет решать задачу поиска минимальных потенциалов графа G_a, удовлетворяющих условию (5), то есть реализующих заданный вектор действий АЭ. С одной стороны доказанный выше критерий реализуемости заданных действий и алгоритм синтеза оптимальной УНРСС применимы в широком классе активных систем, так как при их доказательстве не вводилось практически никаких предположений о свойствах элементов АС. С другой стороны, для ряда более узких классов АС, рассматриваемых ниже, существуют более простые алгоритмы синтеза оптимальных УНРСС.

Обозначим

$$(12)\quad c_i'(y_i) = \frac{dc_i(y_i)}{dy_i},\ i \in I.$$

и введем следующее предположение:

А.5.4. Существует упорядочение АЭ элементов, такое, что

$$(13)\quad \forall\, y \in A \quad c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \ldots \geq c_n'(y).$$

Фиксируем некоторый вектор $y^* \in A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$(14)\quad y_1^* \leq y_2^* \leq \ldots \leq y_n^*.$$

Предположениям А.5.2-А.5.4 удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат АЭ, как: $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i/k_i)$ где $c(\cdot)$ - монотонная дифференцируемая функция, а коэффициенты упорядочены: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

Лемма 5.1.3. Если выполнены предположения А.5.1, А.5.2 и А.5.4, то в задаче (7)-(8) оптимально диагональное назначение.

Справедливость утверждения леммы следует из того, что любая перестановка диагонального назначения в силу предположения А.4 увеличивает суммарные затраты (отметим, что при этом предположения А3 не требуется).

Таким образом, лемма 5.1.3 дает простое решение задачи о назначении (7)-(8): в случае, когда выполнено предположение А.4. АЭ, имеющим большие удельные затраты, должны назначаться меньшие действия. Необходимые и достаточные условия реализуемости действий УНРСС и лемма 5.1.3 позволяют охарактеризовать множество действий, реализуемых УНРСС в рамках предположения А.4.

Следствие. Если выполнены предположения А.5.1, А.5.2 и А.5.4, то универсальными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (14).

В активных системах, удовлетворяющих предположениям А.5.1-А.5.4 (включая А.5.3!), для определения оптимальных потенциалов может быть использована следующая рекуррентная процедура, являющаяся частным случаем (соответствующим А.5.3-А.5.4) общего приведенного выше алгоритма:

$$q_1 = c_{11},\ \ q_i = c_{ii} + \max_{j<i} \{q_j - c_{ij}\},\ i = \overline{2,n}\,.$$

<u>Лемма 5.1.4.</u> Если выполнены предположения А.5.1-А.5.4, то имеет место: $\forall\ i = \overline{2,n}\ \ \max\limits_{j<i} \{q_j - c_{ij}\} = q_{i-1} - c_{ii-1}$.

Доказательство. Из предположений А.5.3-А.5.4 следует, что $\forall\ y \in A\ \ c_1(y) \geq c_2(y) \geq \dots \geq c_n(y)$. Из (13) следует, что максимум по $j<i$ в выражении для q_i достигается при $j = i - 1$. •

Следствием леммы 5.1.4 является следующее простое выражение для индивидуальных вознаграждений в УНРСС, реализующей вектор $y^* \in A'$ в активной системе, удовлетворяющей А.5.3-А.5.4:

$$(15)\ q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)).$$

Подставляя (15) в (6), получаем, что потери от использования универсальных нормативных ранговых систем стимулирования (по сравнению с квазикомпенсаторными) равны:

$$(16)\ \Delta(УНРСС, QK) = J_{УНРСС}(y^*) - J_{QK}(y^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{\{\sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*))\} - c_i(y_{i-1}^*)\}.$$

Совокупность полученных выше результатов сформулируем в виде следующей теоремы.

<u>Теорема 5.1.2.</u> Если выполнены предположения А.5.1 - А.5.4, то:

а) в классе универсальных нормативных ранговых систем стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют условию (14);

б) оптимальное решение задачи стимулирования при этом определяется выражением (15);

в) превышение затратами на стимулирование минимально необходимых определяется выражением (16);

г) оптимальная УНРСС является прогрессивной.

Утверждение пункта г) теоремы обосновывается следующим образом: из (15) следует, что $q_{i+1} \geq c_{i+1,i+1} + (q_i - c_{i+1,i})$. В силу монотонности затрат и (14): $c_{i+1,i+1}$ - $c_{i+1,i}$ ³ 0, следовательно " $i = \overline{1, n-1}$ q_{i+1} ³ q_i, то есть система стимулирования также монотонна (прогрессивна).

Отметим, что выше исследовались УНРСС размерности n. Частым случаем УНРСС являются унифицированные системы стимулирования С-типа (УНРСС размерности 1) [55]. Поэтому рассмотрим задачу (первого рода) синтеза унифицированной системы стимулирования, в которой центр назначает общий для всех АЭ план и использует унифицированную систему стимулирования С-типа или QK-типа.

Пусть выполнено предположение А.5.1 и центр должен назначить унифицированную систему стимулирования С-типа с одним "скачком":

$$(17)\quad s(x, y_i) = \begin{cases} C, & y_i \geq x \\ 0, & y_i < x \end{cases},$$

где C - некоторая неотрицательная величина, x - общий для всех АЭ план.

Введем следующее предположение:

А.5.5. Существует упорядочение АЭ, такое, что

(18) " y Î A $c_1(y)$ ³ $c_2(y)$ ³ ... ³ $c_n(y)$.

Отметим, что, если выполнены А.5.1-А.5.4, то, очевидно, выполнено и А.5.5 (см. доказательство леммы 5.1.4). Под совместным выполнением А.5.4. и А.5.5 будем подразумевать, что существует упорядочение элементов, удовлетворяющее одновременно (13) и (18).

Обозначим $P(x,C)$ - множество тех АЭ, у которых затраты в точке x не превышают C, то есть таких элементов, которым выгодно выполнение плана x:

(19) $P(x,C)$ = {i Î I | $c_i(x)$ £ C}.

Другими словами, из А.5.5 следует, что $P(x,C)$={$k(x,C)$,...n}, где

(20) $k(x,C)$ = min {i Î I | $c_i(x)$ £ C}.

АЭ из множества $Q(x,C)$ = {$1, 2, ..., k(x,C)-1$} выполнение плана x при вознаграждении C невыгодно (естественно, " x Î A, " C ³ 0 $P(x,C)$ Ç $Q(x,C)$ = Æ, $P(x,C)$ È $Q(x,C)$ = I), и они выберут действия, минимизирующие затраты (в рамках А.5.3 - действия, равные нулю).

Тогда действия $\{ y_i^* \}$, реализуемые системой стимулирования (17), удовлетворяют:

$$(21)\ \ y_i^*(x,C) = \begin{cases} x, & i \ge k(x,C) \\ 0, & i < k(x,C) \end{cases}.$$

Суммарные затраты на стимулирование при использовании центром системы стимулирования (17), в силу (21), равны

$$(22)\ \ J(x,C) = C\,(N-k(x,C)+1).$$

Как показано в [18, 36] зависимость $y_i^*(x,C)$ не является непрерывной. Поэтому для каждого x Î A существует конечное число минимальных затрат на стимулирование, при которых изменяется число АЭ, выполняющих план x: $\{c_1(x), c_2(x), ..., c_N(x)\}$. Аналогично, для фиксированного C при непрерывных и строго монотонных функциях затрат АЭ существует конечное число планов $\{ c_i^{-1}(C)\}$, где "$^{-1}$" обозначает обратную функцию, при которых изменяется число АЭ, которые их выполняют.

Общий (для случая, соответствующего А.5) алгоритм решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования приведен в [18]. Ниже мы сравним минимальные затраты на стимулирование.

Фиксируем произвольный план x Î A. Для того чтобы все АЭ выбрали действия, совпадающие с планом, необходимо, чтобы $k(x,C) = 1$, то есть $C = c_1(x)$. Тогда из (21)-(22) получаем, что минимальные затраты на стимулирование равны (напомним, что индекс "U" соответствует унифицированным системами стимулирования) $J_{UQK}(x) = N\ c_1(x)$. Следовательно, потери в эффективности (по сравнению с системами стимулирования QK-типа) составляют:

$$(23)\ \ D(x) = J_{UQK}(x) - J_{QK}(x) = (N-1)\,c_1(x) - \sum_{i=2}^{n} c_i(x).$$

5.2. СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫЕ РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

В нормативных РСС центр фиксировал процедуру классификации, определяя множества действий или результатов деятельности, при попадании в которые АЭ получал заданное вознаграждение. В отличие от НРСС, в соревновательных ранговых системах стимулирования (СРСС) центр фиксирует процедуру сравнительной оценки деятельности АЭ, задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений АЭ, попавших в тот или иной класс. Таким образом, в СРСС индивидуальное поощрение АЭ не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех АЭ.

Соревновательные системы стимулирования исследовались как в теории активных систем (см. обзор [34], а также монографии [4, 55]), так и в теории контрактов [59]. Зарубежные исследователи акцентировали внимание в основном на активных системах, функционирующих в условиях внешней интервальной неопределенности и симметричной информированности (см. классификацию в [21, 44]), ограничиваясь в большинстве случаев либо двухэлементными системами [65], либо случаем идентичных АЭ [57, 64]. В работах российских авторов построены оптимальные СРСС для ряда практически важных частных случаев, в том числе - рассматриваемых ниже линейных функциях затрат АЭ и функциях затрат вида $c_i(y_i) = k_i\ c(y_i)$ [4, 55]. Там же показано, что в случае интервальной неопределенности (незнании центром истинных значений параметров $\{k_i\}$) СРСС могут быть более эффективны, чем системы стимулирования следующего вида: $s_i(y) = y_i / \sum_{j=1}^{n} y_j$. Сравнительная эффективность СРСС и других систем стимулирования практически не исследовалась.

Следует отметить, что теоретико-игровой анализ СРСС (или соревновательных механизмов стимулирования, как их иногда называют [15]), гораздо более сложен и трудоемок, нежели, чем "обычных" или нормативных систем стимулирования. Основная сложность заключается в том, что при использовании СРСС у АЭ не существует равновесных по Нэшу стратегий, следовательно, возникает необходимость введения гипотез о поведении элементов [47] и искусственного построения множества решений игры.

Как отмечалось выше, в настоящей работе нас в основном интересует сравнительная эффективность тех или иных систем стимулирования в многоэлементных активных системах. Поэтому, не вдаваясь в подробности теоретико-игрового анализа, оценим эффективность соревновательных РСС в сравнении с "абсолютно оптимальными" квазикомпенсаторными системами стимулирования.

Предположим, что в активной системе, состоящей из n АЭ, выполнены предположения А.5.1-А.5.3 и А.5.5, а центр использует следующую систему стимулирования: действия, выбранные АЭ, упорядочиваются в порядке возрастания, после чего каждый из АЭ получает вознаграждение q_i, соответствующее его номеру i в упорядочении действий.

Пусть выполнены предположения А.5.1-А.5.3 и А.5.4. Понятно, что первый АЭ (имеющий максимальные затраты при любом допустимом действии) будет всегда выбирать нулевое действие, поэтому положим вознаграждение q_1 за первое место в упорядочении действий равным нулю: $q_1 = 0$.

Будем рассматривать серию моделей АС, последовательно усложняя их. При этом каждая последующая модель будет включать предыдущую в качестве частного случая.

Начнем с рассмотрения активной системы, в которой АЭ имеют линейные функции затрат [4, 55]: $c_i(y_i) = k_i\, y_i,\ k_i > 0$, причем:

(1) $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

Линейные функции затрат при условии (1) удовлетворяют предположениям А.5.2-А.5.5. Предположим, что упорядочение действий, выбираемых АЭ, совпадает с упорядочением значений их функций затрат:

(2) $y_0^* = 0 \leq y_1^* \leq y_2^* \leq \ldots \leq y_n^*$.

Отметим, что упорядочение (2) совпадает с оптимальным назначением АЭ в соответствующей задаче о назначении (см. формальные результаты выше в разделе 5.1).

Рассматривая последовательно АЭ в порядке возрастания их номеров, из условия того, что предыдущий АЭ может угрожать последующему АЭ увеличением действия и занятием более высокого места до тех пор, пока его полезность неотрицательна, получаем, что при заданной соревновательной системе стимулирования $\{q_i\}$ действия, выбираемые АЭ, определяются следующим образом:

$$(3)\ \ y_0^* = 0,\ y_i^* = \sum_{j=2}^{i} \frac{q_j - q_{j-1}}{k_{j-1}},\ i = \overline{2,n}.$$

В другую сторону, если задан вектор $y^* \in A'$, то из условия "угроз" получаем, что вознаграждения должны удовлетворять:

$$(4)\ q_1 = 0,\ q_i = q_{i-1} + k_{i-1}(y_i^* - y_{i-1}^*) = \sum_{j=2}^{i} k_{j-1}(y_j^* -),\ i = \overline{2,n}.$$

Выражение (4) для индивидуальных вознаграждений можно записать следующим образом: $q_i = \sum_{j=2}^{i-1} (k_{j-1} - k_j)\ y_j^* + k_{i-1}\ y_i^*$. Из (3)-(4) следует, что рассматриваемая соревновательная система стимулирования является прогрессивной, то есть вознаграждение АЭ возрастает с ростом занимаемого места. При этом превышение суммарными затратами на стимулирование минимально необходимых равно:

$$(5)\ D(CPCC, QK) = \sum_{i=2}^{n} \{ \sum_{j=2}^{i} k_{j-1}(y_j^* - y_{j-1}^*) - k_i y_i^* \} \geq 0.$$

Условия (3)-(4) по своему построению обеспечивают невыгодность для каждого АЭ выбора действия с номером, превышающим его номер в упорядочении затрат. Однако условие реализуемости некоторого действия подразумевает, что выбор этого действия выгоден АЭ по сравнению с выбором любого другого допустимого действия. Невыгодность выбора элементом действий, номер которых строго меньше его номера в упорядочении затрат, обосновывается в доказательстве следующей леммы.

<u>Лемма 5.2.1.</u> Соревновательная система стимулирования (4) реализует вектор действий (2).

Доказательство. Фиксируем произвольное $i \in I$. Предположим, i-му АЭ выгодно занять l-ое место, то есть, что существует действие $y_l^* < y_i^*$, такое, что имеет место: $f_i(y_l^*) > f_i(y_i^*)$. Тогда

$$(6)\quad \sum_{j=2}^{l} k_{j-1}(y_j^* - y_{j-1}^*) - k_i\, y_l^* > \sum_{j=2}^{i} k_{j-1}(y_j^* - y_{j-1}^*) - k_i\, y_i^* .$$

Преобразовывая (6) и пользуясь упорядочением коэффициентов функций затрат АЭ, получаем $y_l^* > y_l^*$ - противоречие. •

Следствием доказательства результата леммы 5.2.1 является утверждение о том, что в классе соревновательных систем стимулирования реализуемы такие и только такие вектора действий, компоненты которых удовлетворяют упорядочению (2).

Сравним эффективности соревновательных и нормативных ранговых систем стимулирования. Из предшествующего анализа свойств УНРСС получаем, что вектор действий $y^* \in A'$ реализуем следующей УНРСС $\{\tilde{q}_i(y^*)\}$: $\tilde{q}_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} k_j\ (y_j^* - y_{j-1}^*)$. Следовательно:

$$(7)\quad \forall\ i = \overline{1,n}\quad q_i(y^*) - \tilde{q}_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j)(y_j^* - y_{j-1}^*) \geq 0.$$

Сравнивая (5) и (7), получаем, что

$$(8)\quad \forall\ y^* \in A'\ J_{СРСС}(y^*) - J_{УНРСС}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j)(y_j^* - y_{j-1}^*) \geq 0.$$

Из (8) следует, что минимальные суммарные затраты на стимулирование по реализации произвольного вектора действий выше при использовании соревновательных ранговых систем стимулирования (по сравнению с универсальными нормативными). Следовательно, СРСС менее эффективны, чем УНРСС. Потери в эффективности могут быть количественно оценены из выражений (4), (7) и (8).

Усложним модель, предположив, что функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, где коэффициенты k_i удовлетворяют (1). Относительно функции $c(\cdot)$ предположим, что она непрерывна, монотонно возрастает и $c(0) = 0$ (при этом выполнены предположения А.5.2-А.5.5). Отметим, что при $c(y_i) = y_i$ получаем рассмотренный выше частный случай линейных функций затрат АЭ.

Предположим, что действия АЭ, реализуемые СРСС, удовлетворяют (2). По аналогии с тем, как это делалось для линейных затрат, принимая соглашение, что, если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то вся сумма равна нулю, получаем (ср. с (3) и (4)):

$$(9)\ y_0^* = 0,\ y_i^* = c^{-1}\{ \sum_{j=2}^{i} \frac{q_j - q_{j-1}}{k_{j-1}} \},\ i = \overline{2,n},$$

$$(10)\ q_1 = 0,\ q_i = \sum_{j=2}^{i} k_{j-1}\,(c(y_j^*) - c(y_{j-1}^*)),\ i = \overline{2,n}.$$

Имея выражения (9) и (10), можно решать задачи синтеза СРСС, удовлетворяющих тем или иным свойствам. Например, в [55] решалась задача синтеза СРСС, удовлетворяющей ограничению фонда заработной платы R: $\sum_{i=1}^{n} q_i \le R$.

Из (9)-(10) видно, что рассматриваемая соревновательная система стимулирования является прогрессивной. Результат леммы, характеризующей множество действий, реализуемых СРСС, также остается в силе (доказательство проводится аналогичным образом, изменяются лишь используемые при оценках неравенств преобразования).

Превышение суммарными затратами на стимулирование минимально необходимых равно:

$$(12)\ \Delta(CPCC, QK) = \sum_{i=2}^{n} \{ \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j)\, c(y_j^*) \} \ge 0.$$

Как и ранее, сравним эффективности соревновательных и нормативных ранговых систем стимулирования. Из предшествующего анализа свойств УНРСС получаем, что вектор действий $y^* \in A'$ реализуем следующей УНРСС $\{\tilde{q}_i\}$:

$$\tilde{q}_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} k_j\,(c(y_j^*) - c(y_{j-1}^*)).$$

Тогда имеет место следующее соотношение между индивидуальными вознаграждениями:

$$\forall\ i = \overline{1,n}\quad q_i(y^*) - \tilde{q}_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j)\,(c(y_j^*) - c(y_{j-1}^*)) \geq 0,$$

следовательно, справедливо следующее соотношение между минимальными затратами на стимулирование:

(13) $\forall\ y^* \in A'\ J_{СРСС}(y^*) - J_{УНРСС}(y^*) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j)\,(c(y_j^*) - c(y_{j-1}^*)) \geq 0.$$

И соотношения (13) следует, что для рассматриваемой модели также имеет место (8), то есть минимальные суммарные затраты на стимулирование по реализации произвольного вектора действий по-прежнему выше при использовании соревновательных ранговых систем стимулирования (по сравнению с универсальными нормативными). Следовательно, и в случае $c_i(y_i) = k_i\ c(y_i)$ СРСС менее эффективны, чем УНРСС.

Усложним рассматриваемую модель. Предположим, что АЭ имеют произвольные функции затрат, удовлетворяющие А.5.3-А.5.4.

Теорема 5.2.1. Если выполнены предположения А.5.3-А.5.4, то необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий АЭ $y^* \in A$ в классе СРСС является выполнение (2), причем данный вектор реализуем следующей системой стимулирования:

(14) $q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1,n}$.

Доказательство теоремы 5.2.1 проведем по аналогии с доказательствами для частных случаев выше. Последовательно рассматривая АЭ (начиная с первого в упорядочении затрат по убыванию), получаем, что (14) в силу лемм 5.1.1 – 5.1.4 обеспечивает невыгодность угроз со стороны любого АЭ элементам с большим номером. Проверим выполнение "обычных" условий реализуемости.

Фиксируем произвольный номер $i \in I$ и предположим, что i-му АЭ выгодно занять l-ое место, то есть, что существует действие y_l^* < y_i^*, такое, что имеет место: $f_i(y_l^*) > f_i(y_i^*)$. Тогда

$$(15)\quad \sum_{j=2}^{l} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_l^*) >$$

$$> \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_i^*).$$

Преобразовывая (15) к виду:

$$\sum_{j=l+1}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} < c_i(y_i^*) - c_i(y_l^*)$$

и пользуясь упорядочением и свойствами функций затрат АЭ, отражаемыми предположениями А.5.3-А.5.4, приходим к противоречию. •

Гораздо более важную методологическую роль, чем ее доказательство, играют содержательные интерпретации утверждения теоремы 5.2.1. Из лемм 5.1.1-5.1.4 и 5.2.1 следует, что унифицированными РСС реализуемы только такие действия, которые являются решением соответствующей задачи о назначении, кроме того, в рамках предположений А.5.2-А.5.4 оптимально диагональное назначение. Следовательно, условие (2) является необходимым условием реализуемости.

Для того чтобы доказать, что СРСС (14) реализует вектор действий (2) необходимо и достаточно показать, что выполнены два условия. Первое условие - условие реализуемости "обычной" системой стимулирование, то есть условие того, что каждому АЭ невыгодно изменять свою стратегию при фиксированной обстановке игры (условия равновесия Нэша). Второе условие характерно для соревновательных систем стимулирования, так как для них условий "обычной" реализуемости недостаточно - следует проверить условия "угроз" (см. выше).

Утверждение "некоторый АЭ не может быть спокоен до тех пор, пока другой АЭ может угрожать ему изменением своей стратегии", выражающее условие "угроз", отражает, фактически, предположения АЭ о поведении других АЭ. Следовательно, при использовании СРСС необходимо, но недостаточно накладывать условия реализуемости (в смысле Нэша), а следует использовать доопределение равновесия (в данном случае - аналог равновесия

Штакельберга) [47, 57, 66].

Используя (14), легко получить оценки сравнительной эффективности СРСС и УНРСС, а также СРСС и компенсаторных систем стимулирования (неравенства выполнены в силу предположений А.3. и А.4):

$$(16)\quad \forall\, y^* \in A'\; J_{СРСС}(y^*) - J_{УНРСС}(y^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{i} [c_{j-1}(y_j^*) - c_j(y_j^*) + c_j(y_{j-1}^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)] \geq 0.$$

$$(17)\quad \Delta(СРСС, QK) = \sum_{i=2}^{n} \{ \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_i^*)\} \geq 0.$$

Рассмотренные выше линейные и другие функции затрат удовлетворяют предположениям А.5.3-А.5.4 - легко видеть, что, соответственно, выражение (14) включает выражения (4) и (10) и т.д. как частные случаи. Разность (16) может также интерпретироваться как доплата за условие "угроз" по сравнению с равновесием Нэша.

В заключение настоящего раздела отметим, что выше было получено общее решение задачи синтеза оптимальной унифицированной нормативной ранговой системы стимулирования (см. леммы раздела 5.1 и соответствующий алгоритм). Для соревновательных систем стимулирования решение и оценки сравнительной эффективности получены лишь в рамках дополнительных предположений А.5.3-А.5.4 о свойствах функций затрат АЭ. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является получение решения задачи синтеза оптимальной соревновательной системы стимулирования в общем случае. Для последнего можно утверждать, что необходимые условия реализуемости, приведенные выше (см. теорему 5.2.1) останутся в силе, изменятся лишь достаточные условия, обеспечивающие невыгодность "угроз".

6. УНИФИЦИРОВАННЫЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Как было показано выше и в [18,36,42], в некоторых АЭ использование унифицированных систем стимулирования может приводить к снижению эффективности управления. В то же время, в некоторых АЭ, в том числе - в рассматриваемых ниже, оптимальными являются именно унифицированные системы стимулирования.

Введем следующее предположение относительно функций затрат АЭ (ниже это предположение будет ослаблено):

(1) $c_i(y_i, r_i) = r_i\, \varphi(y_i / r_i),\ i \in I$,

где $\varphi(\cdot)$ - гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0)=0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = 1/\alpha\ t^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ - некоторый параметр.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \gamma_i\, y_i$, то целевая функция АЭ имеет вид: $f_i(y_i) = \gamma_i\, y_i - c_i(y_i)$. Вычислим действие, выбираемое АЭ при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

(2) $y_i^*(\gamma_i) = r_i\, \varphi'^{-1}(\gamma_i)$,

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$. Минимальные суммарные затраты на стимулирование равны:

(3) $J_L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, r_i\, \varphi'^{-1}(\gamma_i)$,

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$. Суммарные затраты элементов равны:

(4) $c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(\varphi'^{-1}(\gamma_i))$.

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении элементами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами АЭ (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат элементов и суммарных затрат (центра) на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{g_i\}$ в результате решения следующей задачи:

$$(5)\quad \begin{cases} c(g) \to \min\limits_{g} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(g_i) = R \end{cases},$$

решение которой имеет вид:

$$(6)\ g_i^* = j\,'(R/W);\ \ y_i^* = r_i\,(R/W);\ i\,\hat{I}\,I,\ c^* = W j\,(R/W);\ \ J_L^* = R\ j\,'(R/W).$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех АЭ, то оптимальна именно унифицированная (!) система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты АЭ:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(g_i) \to \max\limits_{g} \\ c(g) \le R \end{cases}.$$

Решение задачи 2 имеет вид:

$$(8)\ g_i^* = j\,'(j^{-1}(R/W));\ \ y_i^* = r_i\ j^{-1}(R/W);\ i\ \hat{I}\ I,$$

$$c^* = R;\ J_L^* = j^{-1}(R/W)W j\,'(j^{-1}(R/W)),$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат элементов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении АЭ плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$(9)\ \begin{cases} J_L(g) \to \min\limits_{g} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} y_i^*(g_i) = R \end{cases},$$

решение которой совпадает с (6)!

<u>Задача 4</u> заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$(10)\ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} y_i^*(g_i) \to \max\limits_{g} \\ J_L(g) \le R \end{cases}.$$

Из метода множителей Лагранжа получаем условие оптимальности (l - множитель Лагранжа): $l\ j'^{\,-1}(g_i)\ j''(g_i) + g_i = 1,\ i\ \hat{I}\ I$, из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению $g\ j'^{\,-1}(g) = R/W$.

Следует подчеркнуть, что во всех четырех задачах оптимальными оказались именно унифицированные системы стимулирования, причем решения задач 1 и 2 совпали, что представляется достаточно уникальным фактом, так как суммарные затраты АЭ отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование - интересы управляющего органа. Кроме того, возможность использования общих для всех АЭ управляющих параметров оказывается важной в механизмах планирования (см. [10, 15, 21]). Таким образом, мы доказали следующий результат.

<u>Теорема 6.1.</u> В организационных системах со слабо связанными АЭ, функции затрат которых имеют вид (1), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Возникает закономерный вопрос - насколько жесткими являются требования к функциям затрат АЭ. Оказывается, эти требования можно ослабить - в задачах типа задачи 1 и задачи 2 оптимальность унифицированных систем стимулирования является следствием свойств задач условной оптимизации и практически не зависит от конкретного вида функций затрат.

Рассмотрим организационную систему со слабо связанными элементами, в которой функции затрат АЭ $c_i(y_i)$ - гладкие, возрастающие и выпуклые (содержательно, выпуклость "нужна" для единственности точки максимума разности между линейным стимулированием и затратами). Вектор действий, реализуемый пропорциональной системой стимулирования со ставками $\{g_i\}$, суммарные затраты АЭ и суммарные затраты на стимулирование определяются, соответственно:

$$(11)\quad y_i^*(g_i)=c_i'^{-1}(g_i),\ i \in I;\ c(g)=\sum_{i=1}^{n} c_i(c_i'^{-1}(g_i));\ J_L(g)=\sum_{i=1}^{n} g_i\, c_i'^{-1}(g_i).$$

Для задач типа 1 и 2, применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что при ослаблении требований к функциям затрат оптимальными остаются унифицированные системы стимулирования (например, в задаче 1 оптимальное значение g удовлетворяет уравнению: $\sum_{i=1}^{n} c_i'^{-1}(g) = R$). Для задач типа 3 и 4, к сожалению, в общем случае унифицированные системы стимулирования не оптимальны. Применяя к ним, опять же, метод множителей Лагранжа, легко показать, что достаточным условием для оптимальности систем стимулирования UL-типа является существование функции $\xi(\cdot)$, такой, что $\forall\ i \in I\ \ c_i'^{-1}(g_i)\, c_i''(g_i) = \xi(g_i)$.

Отметим, что в приведенной выше теореме утверждается, что системы стимулирования UL-типа оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в АЭ со слабо связанными АЭ, имеющими функции затрат вида (1). Поэтому в заключение настоящего раздела исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано выше для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных квазикомпенсаторных систем стимулирования (которые равны $J_{QK}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(y_i/r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $J_{QK}(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = R$, получаем, что $J_{QK}^* = W\, \varphi(R/W)$. Подставляя из выражения (6) $J_{UL}^* = R\, \varphi'(R/W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

(12) $J_{UL}^{*} / J_{QK}^{*} = R/W \ \varphi'(R/W)/\varphi(R/W)$.

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $J_{UL}^{*} / J_{QK}^{*} \geq 1$. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании систем стимулирования UL-типа выше, чем при использовании "абсолютно оптимальных" систем стимулирования QK-типа, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Более того, можно показать, что при $R/W > 0$ и строго выпуклых функциях затрат отношение (12) строго больше единицы. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован с выводом [36, 42] о том, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем квазикомпенсаторного.

7. СТИМУЛИРОВАНИЕ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В предыдущих разделах настоящей работы построены оптимальные системы стимулирования в детерминированных многоэлементных АС, то есть в АС, в которых центр и активные элементы обладают полной (и, следовательно, симметричной) информацией обо всех существенных внешних и внутренних параметрах. Напомним, что при этом оптимальна та или иная модификация компенсаторной системы стимулирования, причем ключевыми (на этапе согласования) являются две идеи: идея декомпозиции игры активных элементов (специфичная для многоэлементных АС) и идея компенсации затрат (которая оказалась эффективной как в одноэлементных, так и в многоэлементных АС). Имея результаты исследования задач стимулирования в детерминированных многоэлементных АС, можно переходить к исследованию этих задач в АС с неопределенностью.

Задачи стимулирования в одноэлементных АС с неопределенностью подробно описаны в монографии [44]. Перечислим кратко основные используемые в упомянутой работе подходы и полученные результаты.

Одним из оснований классификации АС с неопределенностью является информированность участников. Можно выделить АС с *симметричной* (одинаковой) и *асимметричной информированностью* участников (в первую очередь важно определить различия в информированностях АЭ и центра), а также на *детерминированные АС* и *АС с неопределенностью*. В свою очередь АС с неопределенностью могут классифицироваться по следующим основаниям.

1. Тип неопределенности: *внутренняя неопределенность* (относительно параметров самой АС), для внутренней неопределенности - относительно целевых функций, допустимых множеств или и того и другого; *внешняя неопределенность* (относительно параметров окружающей среды, то есть внешних по отношению к АС) и *смешанная неопределенность* (для части участников АС - внутренняя, для других - внешняя; или обоих типов);

2. Вид неопределенности: *интервальная* (когда участнику АС известно множество возможных значений неопределенного параметра), *вероятностная* (известно вероятностное распределение - *вероятностные АС*) и *нечеткая* (известна функция принадлежности - *нечеткие АС*) *неопределенность*, а также *смешанная неопределенность* (все возможные комбинации перечисленных видов неопределенности для различных участников).

Таким образом, АС, функционирующие в условиях неопределенности, могут быть классифицированы по: информированности участников (симметричная - С, асимметричная - А), типу неопределенности (внутренняя и внешняя) и виду неопределенности (интервальная, вероятностная и нечеткая). Перечисляя все возможные комбинации значений признаков классификации по этим основаниям, получаем двенадцать[1] базовых моделей АС с неопре-

---

[1] *Если попытаться перенести описанную систему классификаций на многоэлементные АС с неопределенностью, то следует помнить, что в общем случае каждый их участников АС может обладать различной информированностью, то есть в многоэлементных АС в общем случае*

деленностью, которые, совместно с базовой детерминированной моделью в [44] условно обозначены М1 - М13.

Приведенные в [44] результаты систематического исследования базовых задач стимулирования в одноэлементных АС с неопределенностью свидетельствуют, что в рамках базовых моделей (одноэлементных, статических) стимулирования возможен единый методологический подход к решению задач анализа и синтеза систем стимулирования. Несмотря на многообразие изучаемых моделей, используемый подход заключается в единообразии их описания, общности технологии и техники исследования, причем последняя основывается, как и детерминированная теория активных систем, на изучении множеств реализуемых действий и минимальных затрат на стимулирование. Поясним последнее утверждение, приведя описание, технологию и технику построения и исследования моделей механизмов стимулирования как в детерминированных одноэлементных и многоэлементных активных системах, так и в одноэлементных АС с различными типами и видами неопределенности.

После описания модели, то есть задания в соответствии с введенными параметрами модели и системой классификаций задач управления в АС [42, 44] класса исследуемых активных систем, определяется рациональное поведение АЭ: на основании известных предпочтений АЭ на множестве результатов деятельности и/или действий (эти предпочтения зависят от используемого центром механизма управления) и имеющейся информации о неопределенных факторах (взаимосвязи между действиями АЭ и результатами его деятельности) определяются предпочтения АЭ на множестве его стратегий (действий и/или сообщаемых оценок).

В случае интервальной неопределенности этот переход осуществляется с использованием принципа максимального гарантированного результата (МГР), в случае вероятностной (нечеткой) неопределенности целевая функция АЭ на множестве результатов его деятельности совместно с распределением вероятностей (нечеткой информационной функцией) индуцирует на множестве допустимых стратегий целевую функцию - ожидаемую полезность

имеет место смешанная неопределенность.

(индуцированное нечеткое отношение предпочтения (НОП) и т.д.). Множество выбора (решений игры) при заданном множестве стратегий и предпочтениях АЭ, выражаемых, например, его целевой функцией, НОП и т.д., определяется следующим стандартным образом.

В одноэлементных АС считается, что АЭ выбирает одно из действий, максимизирующих его целевую функцию (ожидаемую полезность), или максимально недоминируемое по индуцированному нечеткому отношению предпочтения допустимое действие. В многоэлементных АС считается, что вектор стратегий, выбираемых АЭ, принадлежит множеству равновесий (равновесий Нэша, равновесий в доминантных, гарантирующих или других стратегиях – в зависимости от используемых гипотез и принятой в рассматриваемой модели концепции равновесия).

В случае если множество выбора состоит более чем из одного элемента, необходимо доопределить однозначно (используя гипотезу благожелательности (ГБ) или МГР) выбор АЭ. Этот выбор будет зависеть от механизма управления, эффективность которого задается значением целевой функции центра на множестве выбора АЭ (если предпочтения центра зависят от неопределенных параметров, то необходимо найти его детерминированную систему предпочтений).

Имея критерий сравнения эффективностей различных систем стимулирования на их допустимом множестве, задача синтеза в АС с неопределенностью (и в детерминированных АС – см. выше) формулируется следующим образом: найти допустимую систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность.

Техника доказательства большинства формальных результатов использует анализ множества реализуемых действий - тех действий АЭ, которые он выбирает (гарантированно или по ГБ) при заданной функции стимулирования. Критерий сравнения различных систем стимулирования по эффективности может быть сформулирован в терминах множеств реализуемых действий: чем "шире" множество действий, реализуемых системой стимулирования, тем в рамках ГБ выше ее эффективность (двойственным подходом является сравнение минимальных затрат на стимулирование по реализации фиксированного действия) [44]. Поэтому оптимальная система стимулирования (точнее - их класс) имеет максимальное множество реализуемых действий. Следовательно, для того, чтобы доказать оптимальность некоторого класса систем стимулирования достаточно показать, что не существует другой допустимой системы стимулирования, имеющей большее множество реализуемых действий. Этот подход оказывается плодотворным не только при доказательстве оптимальности тех или иных систем стимулирования, но и при исследовании свойств решения, влияния неопределенности и т.д.

Помимо метода анализа множеств реализуемых действий существует альтернативный подход – метод анализа минимальных затрат центра на стимулирование [42, 44], заключающийся в определении для каждого допустимого вектора действий АЭ системы стимулирования, реализующей этот вектор как решение (желательно, единственное!) игры АЭ и требующей от центра минимальных затрат по вознаграждению АЭ. Оптимальной при этом является класс систем стимулирования, реализующих любой вектор действий с минимальными затратами центра. Метод анализа минимальных затрат на стимулирование «проще» метода анализа множеств реализуемых действий в том смысле, что при его использовании на втором этапе решения задачи стимулирования центр определяет оптимальное с его точки зрения реализуемое действие, то есть производит выбор элемента множества A', на котором достигается максимум его скалярной функции (разности между функцией дохода и суммарными затратами на стимулирование), а не выбирает из множества M (являющегося подмножеством пространства кусочно-непрерывных функций) функцию, доставляющую максимум критерию эффективности стимулирования.

В многоэлементных АС для «сведения» задачи стимулирования к набору хорошо известных одноэлементных задач используется описанная в четвертом разделе настоящей работы идея декомпозиции игры активных элементов.

В качестве иллюстрации использования единства предложенного подхода сформулируем, следуя идеологии, развиваемой в [44], общую для всех моделей АС с неопределенностью (одноэлементных и многоэлементных) последовательность их исследования, включающую следующие этапы:

1. Описание модели: определение целевых функций и допустимых множеств, их свойств, а также порядка функционирования и информированности участников АС;

2. Определение рационального поведения АЭ в рамках рассматриваемой модели: задание процедуры (метода) устранения неопределенности и рационального выбора АЭ (определение множества решений игры - множества реализуемых действий);

3. Определение эффективности механизма стимулирования и формулировка, собственно, задачи синтеза оптимального механизма стимулирования;

4. Решение задачи синтеза: поиск аналитического решения и/или разработка алгоритмов численного решения задачи и исследование их свойств: сходимости, сложности и т.д.;

5. Нахождение необходимых и достаточных условий оптимальности;

6. Анализ оптимального решения:

а) свойства оптимального решения, множеств реализуемых действий и минимальных затрат на стимулирование, содержательные интерпретации;

б) влияние неопределенности на эффективность и свойства оптимального механизма стимулирования;

в) влияние параметров модели и определения рационального поведения на эффективность и свойства оптимального механизма стимулирования, в том числе - анализ устойчивости оптимального решения;

7. Исследование частных случаев (при усилении предположений и допущений о параметрах и свойствах модели АС) и возможностей обобщения (соответственно, при ослаблении);

8. Исследование устойчивости решений и адекватности модели моделируемой системе.

9. Внедрение результатов моделирования: идентификация АС, корректировка модели, разработка рекомендаций по практическому использованию, создание вычислительных средств, автоматизированных систем поддержки принятия решений и имитационных моделей.

Сводка результатов теоретического исследования задач стимулирования в одноэлементных АС с неопределенностью, а также конкретные вводимые при этом предположения приведены в [44].

Отдельного обсуждения заслуживает влияние неопределенности на эффективность управления АС, так как возможность использования единого подхода к анализу базовых моделей механизмов управления (стимулирования) в АС с различными типами и видами неопределенности позволяет сделать ряд общих выводов о роли неопределенности в управлении АС. Все задачи стимулирования в одноэлементных АС с неопределенностью, рассматриваемые в ТАС, удовлетворяют *принципу соответствия*[1]: при предельном переходе ("стремлении" неопределенности к "нулю") они переходят в детерминированные АС, а их оптимальные решения - в оптимальные решения соответствующих детерминированных задач стимулирования.

Принципу соответствия удовлетворяют также большинство выводов о влиянии неопределенности на эффективность стимулирования в одноэлементных АС, причем, что представляется крайне важным, опять же, общей является следующая технология анализа роли неопределенности в АС с неопределенностью. Для двух АС, отличающихся либо множеством значений неопределенного фактора, либо той информацией, которую имеют о нем участники АС, вводится критерий сравнения "величин" неопределенности, с одной стороны учитывающий специфику задачи, а с другой - согласованный с известными мерами неопределенности (например - энтропией и т.д.) [44]. Далее показывается, что в АС с большей неопределенностью множество действий АЭ, реализуемых любой допустимой системой стимулирования, не шире (шире), чем в АС с

---

[1] *Принцип соответствия может быть сформулирован и для задач стимулирования в многоэлементных АС. Например, если в модели S4 предположить, что затраты сепарабельны, то все результаты должны перейти в соответствующие результаты, полученные для модели S3. Далее, если в модели S3 предположить, что стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственных действий, то все результаты должны перейти в соответствующие результаты, полученные для модели S1. Отметим, что для моделей S1-S8, описанных в четвертом разделе настоящей работы, принцип соответствия имеет место.*

меньшей неопределенностью, что позволяет сделать вывод о сравнительной эффективности оптимальных систем стимулирования в этих АС. Альтернативный способ – сравнение минимальных затрат центра на стимулирование: если для любого вектора действий АЭ в АС с большей неопределенностью затраты центра по его реализации выше, чем в АС с меньшей неопределенностью то эффективность стимулирования в первом случае не ниже, чем во втором.

Для всех одноэлементных моделей, независимо от типа и вида неопределенности, справедливы следующие выводы: гарантированная эффективность стимулирования в АС с неопределенностью не выше, чем в детерминированной АС, причем с ростом неопределенности эффективность стимулирования уменьшается, а с уменьшением неопределенности – возрастает и стремится к аналогичному показателю для соответствующей детерминированной активной системы.

В одноэлементных моделях величина неопределенности связана с информированностью участников: чем большей информацией обладает центр и/или АЭ, тем меньше неопределенность. В большинстве известных моделей считается, что участники АС, обладая на момент принятия решения некоторой информацией, могут использовать эту информацию и только ее. Возможность получения дополнительной информации отсутствует (использование механизмов с сообщением информации от АЭ центру не является исключением: несмотря на то, что центр получает новую информацию, он получает ее после выбора процедуры планирования, причем сам факт обмена информацией изначально заложен в механизме функционирования). Такой порядок функционирования достаточно распространен на практике. Однако встречаются ситуации, в которых участники АС имеют возможность до принятия решения целенаправленно получать информацию от «окружающей среды» или от других участников системы, причем, в большинстве случаев, для получения этой информации необходимы некоторые финансовые или какие-либо другие затраты.

Механизмы управления, в которых участники АС имеют возможность за плату приобрести информацию, получили название *механизмов с платой за информацию* [44]. При использовании механизмов с платой за информацию имеют место две противоположные тенденции. С одной стороны, получение дополнительной информации может повысить эффективность управления. С другой стороны, часть средств, потраченная на приобретение информации, уменьшает доход участника АС или его возможности по управлению, что может привести к снижению эффективности управления. Если точность и количество поступающей информации монотонно связаны с затратами по ее получению, то, очевидно, существует некоторый оптимум - компромисс между снижением эффективности, вызванным уменьшением управляющих возможностей, и ее ростом, обусловленным большей информированностью. При этом не исключается, что возможны ситуации, в которых приобретать дополнительную информацию вообще не имеет смысла (плата слишком высока), или наоборот, оказывается целесообразным полное устранение неопределенности.

Существенной чертой механизмов с платой за информацию является добровольность ее приобретения: каждый из участников АС вправе самостоятельно решать приобретать ли ему дополнительную информацию и в каком объеме. Понятно, что, в принципе, приобретать информацию могут как центр, так и активные элементы. Важно также различать, у кого приобретается информация - у третьих лиц, не входящих в состав АС, или у участников самой активной системы. Так, например, возможны механизмы с сообщением информации в АС, в которых центр может, заплатив АЭ определенную сумму, например, уменьшить диапазон возможных (неизвестных для него) значений неопределенного параметра, а затем использовать механизм планирования уже в условиях меньшей неопределенности. Задача манипулирования [42] при этом все равно возникает, однако, следует учитывать, что плата за информацию может изменить значение целевой функции АЭ.

Для получения ответа на вопрос целесообразно ли использование механизмов с платой за информацию и определения оптимальной величины этой платы, необходимо в каждом конкретном случае: определить зависимость информированности участников АС от величины платы за информацию; найти соотношение между эффективностью управления и информированностью участников (величина платы за информацию выступает при этом как параметр); вычислить величину платы за информацию, максимизирующую эффективность управления.

Аналогичные рассуждения справедливы, видимо, и для многоэлементных АС с неопределенностью и могут рассматриваться как «программа» их исследования. Ниже описывается ряд моделей многоэлементных АС с неопределенностью, которые исследуются в соответствии с приведенной выше методикой.

Таким образом, на сегодняшний день имеются единые методологические подходы (и полученные в рамках этих подходов конструктивные результаты) к исследованию как многоэлементных детерминированных АС, так и одноэлементных АС с неопределенностью. Полное и систематическое исследование всех моделей многоэлементных АС с неопределенностью представляется задачей, не актуальной на сегодняшний день по следующим причинам. Во-первых, многообразие этих моделей слишком велико (см. сноску выше). Во-вторых, отличаются эти модели не столь сильно: из предшествующего изложения материала настоящей работы видно, что все восемь базовых моделей многоэлементных детерминированных АС имеют много общего, если не в описании, то в методах их исследования; кроме того сформулирован единый подход к анализу задач стимулирования в условиях неопределенности. Следовательно, можно предположить, что в первом приближении при исследовании той или иной конкретной модели многоэлементной АС с неопределенностью можно ограничиться адаптированным применением упомянутых подходов (некоторые примеры приведены ниже). Поэтому в настоящей главе основной акцент делается на выявление специфики многоэлементных АС с неопределенностью как по сравнению с детерминированными многоэлементными АС, так и по сравнению с одноэлементными АС с неопределенностью. Кроме того, как следует из материала предыдущих шести разделов, одни базовые модели стимулирования в многоэлементных АС являются частными случаями других, поэтому ниже мы ограничимся изучением факторов неопределенности в двух наиболее сложных моделях с несепарабельными затратами: S4 (стимулирование каждого АЭ зависит от действий всех АЭ) и S6 (стимулирование каждого АЭ зависит от результата деятельности АС в целом).

7.1. ВНУТРЕННЯЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Под внутренней неопределенностью понимают неполную информированность части участников АС о параметрах самой АС. Рассмотрим случай асимметричной информированности без сообщения информации[1]. Так как исследователь операций стоит на позициях оперирующей стороны – центра, то обычно предполагается, что он менее информирован, чем активные элементы.

Пусть внутренними параметрами, неизвестными центру, являются параметры $\{r_i\}$ функций затрат АЭ: $c_i(y, r_i)$, $i \in I$. То есть будем считать, что на момент принятия решений (выбора действия при известной функции стимулирования) i-ый АЭ знает истинное значение параметра r_i, а центр как на момент принятия решений (то есть на момент выбора функции стимулирования), так и в дальнейшем[2], не знает его, а имеет некоторую информацию.

В зависимости от той информации, которой обладает центр, различают интервальную неопределенность (когда центру известно множество $[d_i; D_i]$ возможных значений параметра r_i, $i \in I$), вероятностную неопределенность (когда центру дополнительно известно вероятностное распределение $p_i(r_i)$, $i \in I$) и нечеткую неопределенность (когда центр имеет нечеткую информацию – знает функцию принадлежности параметра: $\tilde{P}_i : [d_i; D_i] \to [0; 1]$, $i \in I$).

Рассмотрим последовательно три случая: интервальной, вероятностной и нечеткой внутренней неопределенности участников при асимметричной информированности.

---

[1] *Как отмечается в [16], в АС с асимметричной информированностью одним из эффективных способов снижения неопределенности является сообщение информации от более информированных участников менее информированным (то есть от АЭ – центру). При этом возникают задачи построения неманипулируемых механизмов (в которых АЭ выгодно сообщать достоверную информацию) и др., заслуживающие отдельного исследования и выходящие за рамки настоящей работы.*

[2] *Если после выбора АЭ действия центру становится известным истинное значение параметра функции затрат АЭ, то возможно использование механизмов гибкого планирования [4, 33], в которых вознаграждение АЭ параметрически зависит от r.*

7.1.1. ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Пусть в n-элементной АС типа S4 функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y, r_i)$, i Î I, а относительно параметров r_i центру известны множества $W_i = [d_i; D_i]$ их допустимых значений. Равновесие Нэша $E_N(s, r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, естественно, зависит от истинных значений параметров функций затрат и используемой центром системы стимулирования:

(1) $E_N(s, r) = \{y^N$ Î A' | " i Î I, " y_i Î A_i

$$s_i(y^N) - c_i(y^N, r_i) \ ³ \ s_i(y_{-i}^N, y_i) - c_i(y_{-i}^N, y_i, r_i)\}.$$

Обозначим $W = \prod_{i \in I} \Omega_i$. Определим эффективность системы стимулирования s Î M. Если при использовании центром системы стимулирования s и при векторе r параметров функций затрат АЭ множество равновесий Нэша есть $E_N(s, r)$, то в рамках гипотезы благожелательности эффективность стимулирования $K(s)$ равна максимальному (по множеству равновесий Нэша) значению целевой функции центра. Это значение зависит от неопределенного параметра r Î W. Используя для устранения этой неопределенности МГР, получаем:

(2) $K(s) = \min\limits_{r \in \Omega} \ \max\limits_{y \in E_N(s, r)} \ \{H(y) - \sum\limits_{i \in I} c_i(y, r_i)\}$.

Решение задачи $K(s)$ ® $\max\limits_{s \in M}$, где $K(s)$ определяется выражением (2), является достаточно сложной задачей. Поэтому воспользуемся методом анализа минимальных затрат на стимулирование совместно с идеей декомпозиции игры АЭ.

Фиксируем некоторый вектор действий y^* Î A'. Из результата теоремы 4.4.1 следует, что, если бы вектор r был известен, то минимальные затраты на стимулирование по реализации вектора действий y^* Î A' равнялись бы следующей величине:

(3) $J(y^*, r) = \sum\limits_{i \in I} c_i(y^*, r_i)$.

Оптимальное решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования в условиях интервальной неопределенности дается следующей теоремой.

Теорема 7.1.1. Система стимулирования (с параметром y^*):

$$(4)\ \ s_i\,(y^*, y) = \begin{cases} \max\limits_{r_i \in \Omega_i}\ c_i(y_i^*, y_{-i}, r_i) + d_i,\ y_i = y_i^* \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_i \neq y_i^* \end{cases},\ i\ Î\ I,$$

где оптимальное значение y_Γ^* параметра y^* является решением задачи:

$$(5)\ \ y_\Gamma^* = arg \max_{y \in A}\ \{H(y) - u_\Gamma(y)\}, \text{ где}$$

$$(6)\ \ J_\Gamma(y) = \sum_{i \in I} \max_{r_i \in \Omega_i} c_i(y, r_i),$$

d-оптимальна.

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.4.1 следует, что для того, чтобы действие y_i^* было доминантной стратегией i-го АЭ, следует использовать компенсаторную систему стимулирования (см. выражение (1б) в разделе 4.4 выше). Кроме этого, для того, чтобы побудить i-го АЭ выбрать действие y_i^* необходимо, как минимум, компенсировать ему затраты (условие индивидуальной рациональности). Максимально возможные (в рамках существующей информированности центра) затраты АЭ при выборе этого действия (и при обстановке игры y_{-i}) равны $\max\limits_{r_i \in \Omega_i} c_i(y_i^*, y_{-i}, r_i)$, i Î I.

Следовательно система стимулирования (4) гарантированно реализует вектор действий y^* Î A' с минимальными затратами центра на стимулирование, определяемыми выражением (6).

Имея минимальные затраты по гарантированной реализации произвольного вектора действий АЭ, можно решить задачу оптимального согласованного планирования, то есть найти допустимый вектор действий y_Γ^*, который доставляет максимум разности между функцией дохода центра и его затратами на стимулирование по гарантированной реализации этого вектора действий (см. выражение (5)). •

Отметим, что сравнение выражений (3) и (6) позволяет предложить следующий «качественный» метод решения задач стимулирования в многоэлементных АС с внутренней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью: следует в качестве затрат АЭ рассматривать максимально возможные его (в рамках имеющейся информированности центра) затраты, после чего задача сводится к детерминированной задаче стимулирования в модели S4, методы решения которой подробно описаны в разделе 4.4.

Исследуем роль неопределенности, то есть ее влияние на гарантированную эффективность стимулирования. Понятно, что, если неопределенность отсутствует, то есть $W_i = r_i$, i Î I, то результат теоремы 7.1.1 переходит в результат теоремы 4.4.1.

Напомним, что в случае интервальной неопределенности критерием сравнения информированностей центра служит вложенность множеств возможных значений неопределенных параметров [44].

<u>Следствие 7.1.2.</u> С ростом неопределенности гарантированная эффективность стимулирования (в многоэлементной АС с внутренней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью) не возрастает. С уменьшением неопределенности гарантированная эффективность стимулирования возрастает и стремится к гарантированной эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной модели.

Справедливость утверждения следствия следует из сравнения выражений (3) и (6) и теоремы о минимальных затратах на стимулирование [42].

<u>Пример 10.</u> Пусть в АС имеются два АЭ со следующими функциями затрат: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + a\ y_{-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где $a < 1$ - некоторый параметр (см. также для сравнения примеры 4 и 8). Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$. Предполагая существование внутреннего решения, получим следующую зависимость оптимальных с точки зрения центра действий АЭ от параметров их функций затрат:

$$(7)\quad y_i^* = \frac{r_i - a\ r_{-i}}{1 - a^2},\ i=1, 2.$$

Максимальное значение целевой функции центра F^* зависит от вектора r неопределенных параметров следующим образом:

(8) $F^*(r) = (r_1 + r_2)\,\frac{1-a}{1+a}$.

Из выражения (8) следует, что максимальное значение целевой функции центра монотонно по r. В то же время, функции затрат АЭ убывают с ростом r, поэтому при вычислении МГР целевая функция центра минимизируется на множестве возможных значений r Î W. Снижение неопределенности соответствует уменьшению множества W. С уменьшением множества, по которому вычисляется минимум, значение самого минимума не уменьшается. Следовательно, с увеличением информированности центра гарантированная эффективность стимулирования не убывает. •

7.1.2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Пусть в n-элементной АС типа S4 функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y, r_i)$, i Î I, а относительно параметров r_i центру известны множества $W_i = [d_i; D_i]$ их допустимых значений и распределения вероятностей $p_i(r_i)$, с носителем W_i. Обозначим $p(r)$, r Î W, – распределение вектора параметров функций затрат АЭ, и для определенности предположим, что " y Î A' функции $c_i(y, r_i)$ непрерывны и убывают по r_i, i Î I.

Рассмотрим возможные подходы к определению эффективности системы стимулирования s Î M. Так как, помимо диапазона возможных значений параметра функции затрат АЭ, центру известно его вероятностное распределение, то в соответствии с принципами устранения неопределенности, приведенными в [44], рациональность поведения центра будет заключаться в вычислении и максимизации математического ожидания своей целевой функции, то есть в использовании оценки ожидаемой полезности. Вся проблема заключается в согласовании определения ожидаемой полезности с определением решения игры АЭ (в одноэлементных АС такая проблема, естественно, не возникала).

Предположим, что центр использует в рамках ГБ следующую оценку эффективности системы стимулирования s Î M:

$$(1)\ K(s) = \int\limits_{\Omega} \max_{y \in E_N(s,r)} \{H(y) - s(y)\}\, p(r)\, dr.$$

Однако, использование усреднения по множеству равновесий Нэша (максимум $\max\limits_{y \in E_N(s,r)}$ в выражении (1) стоит под интегралом) неправомочно по следующей причине. Пусть мы определили систему стимулирования, максимизирующую (1). При ее использовании центром в общем случае может оказаться, что параметры функций затрат АЭ таковы, что действие, на котором достигается максимум подынтегрального выражения не будет являться равновесием Нэша[1] при данных функциях затрат и данной функции стимулирования. Примером может служить случай, когда центр компенсирует АЭ затраты, то есть использует систему стимулирования с параметром r, оптимальную при каждом фиксированном значении этого параметра (см. выражение (1б) в разделе 4.4.1 и выражения (3)-(6) в разделе 7.1.1). Следовательно, необходимо другое (отличное от (1)) определение эффективности системы стимулирования.

Можно рассмотреть случай, когда центр определяет эффективность системы стимулирования следующим образом. Обозначим $F_i(r_i)$ – соответствующую плотности $p_i(r_i)$ интегральную функцию распределения, $i \in I$. Пусть центр использует следующую «компенсаторную» систему стимулирования:

$$(2)\ s_i\,(y^*, y, t) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}, t_i) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ i \in I.$$

Тогда, в рамках введенного выше предположения о монотонном убывании функций затрат с ростом значения неопределенного параметра и предположений А.1 - А.3, введенных в разделе 2, i-ый АЭ с вероятностью $(1 - F_i(t_i))$ выбирает действие, совпадающее с

---

[1] *Отметим, что при определении равновесия Нэша в случае внутренней интервальной неопределенности (см. выражение (1) в разделе 7.1.1) знание каждым АЭ истинных значений параметров функций затрат других АЭ было «не очень» существенно, так как использованием системы стимулирования (4) центр декомпозировал игру АЭ. В случае вероятностной неопределенности предположения о знании или незнании i-ым АЭ вектора r_{-i} становится существенным.*

y_i^* (так как в этом случае его затраты не больше, чем $c_i(y^*, t_i)$), и с вероятностью $F_i(t_i)$ – нулевое действие. Следовательно, для фиксированного вектора действий y^* $Î$ A' можно определить оптимальное (с точки зрения эффективности и риска) значение t_i^*, i $Î$ I, а затем уже решать задачу выбора оптимального вектора действий АЭ.

Описанная схема принятия решений (центром) в условиях неопределенности кажется несколько неестественной, поэтому можно рекомендовать использовать для устранения неопределенности принцип МГР (фактически, отказываясь от части информации[1], то есть заменять вероятностную неопределенность интервальной) или использовать механизмы с сообщением информации (см. замечание выше).

7.1.3. НЕЧЕТКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Пусть в n-элементной АС типа S4 функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y, r_i)$, i $Î$ I, а относительно параметров r_i центру известны множества $W_i = [d_i; D_i]$ их допустимых значений и функции принадлежности $\tilde{p}_i(r_i)$, с носителем W_i, $\tilde{p}_i$: W_i ® $[0; 1]$, i $Î$ I.

Если определять эффективность стимулирования непосредственно с использованием нечетких информационных функций, то возникнут проблемы, аналогичные описанным выше для случая вероятностной неопределенности в разделе 7.1.2, что приведет к необходимости использования пессимистичных оценок, то есть принципа МГР. Поэтому рассмотрим альтернативный подход.

Имея информацию о четкой функции затрат АЭ $c_i(y, r_i)$ (с точностью до значения параметра r_i), можно, в соответствии с принципом обобщения [35, 44], определить нечеткую функцию затрат АЭ: $\tilde{c}_i(y,u)$, $\tilde{c}_i$: A' ´ $Â^1$ ® $[0; 1]$, i $Î$ I.

---

[1] *Качественное этот эффект можно объяснить следующим образом: имеющаяся у центра информация о вероятностном распределении не позволяет «разумно» согласовать его информированность с информированностью АЭ (равновесием Нэша).*

Введем следующее определение (по аналогии с тем как это делалось в [34] для нечеткой функции дохода): нечеткая функция затрат $\tilde{c}_i(y,u)$ *согласована*[1] с четкой функцией затрат $c_i(y)$, если $\forall\ y \in A',\ i \in I$ выполнено:

1) $\tilde{c}_i(y, c(y)) = 1$;

2) $\forall\ u_1, u_2$: $u_1 \le u_2 \le c(y)$ $\tilde{c}_i(y,u_1) \le \tilde{c}_i(y,u_2)$;

3) $\forall\ u_1, u_2$: $c(y) \le u_1 \le u_2$ $\tilde{c}_i(y,u_1) \ge \tilde{c}_i(y,u_2)$.

Предположим, что всем АЭ известны четкие функции дохода $\{c_i(y)\}$, удовлетворяющие предположениям А.1-А.3 (см. раздел 2), а центру известны нечеткие функции затрат АЭ $\{\tilde{c}_i(y,u)\}$, согласованные с соответствующими четкими функциями затрат.

Если нечеткие функции затрат $\tilde{c}_i(y,u)$, $i \in I$, таковы, что $\forall\ y \in A'$ равенство $\tilde{c}_i(y,u) = 1$ выполнено тогда и только тогда, когда $u = c(y)$ и функции $\{\tilde{c}_i(y,u)\}$ согласованы с соответствующими четкими функциями затрат, то, очевидно, получается четкая (детерминированная) задача, для которой может быть использован результат теоремы 4.4.1.

Введем рассмотрение следующие четкие «функции затрат»[2]:

$$(1)\quad c_i^{\max}(y) = \max \{u \in \Re^1 \mid \tilde{c}_i(y,u) = 1\},\ i \in I.$$

Обозначим

$$(2)\quad J_I(y) = \sum_{i \in I} c_i^{\max}(y).$$

---

[1] *Введенное определение согласованности представляется вполне естественным и легко интерпретируемым: имеющаяся у центра нечеткая информация не должна противоречить реальным значениям параметров функций затрат АЭ.*

[2] *Несколько забегая вперед, сделаем следующее качественное замечание: к «функциям затрат» (1) ниже будет применена теорема 4.4.1, что совместно с условиями согласованности соответствующих четких и нечетких функций затрат АЭ позволит доказать δ-оптимальность системы стимулирования, компенсирующей затраты (1) (см. для сравнения выражения (4)-(6) в разделе 7.1.1). Другими словами, конструкция, типа выражения (1), является результатом совместного применения определения согласованности и принципа МГР.*

Теорема 7.1.3. Система стимулирования (с параметром y^*):

$$(3)\ \ s_i\,(y^*, y) = \begin{cases} c_i^{\max}(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases},\ i\ Î\ I,$$

где оптимальное значение y_Γ^* параметра y^* является решением задачи:

$$(4)\ \ y_\Gamma^* = arg \max_{y \in A} \{H(y) - u_\Gamma(y)\},$$

d-оптимальна.

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.4.1 (см. также доказательство теоремы 7.1.1) следует, что для того, чтобы действие y_i^* было доминантной стратегией i-го АЭ, следует использовать компенсаторную систему стимулирования (см. выражения (1б) в разделе 4.4 и выражение (4) в разделе 7.1).

Кроме этого, для того, чтобы побудить i-ый АЭ выбрать действие y_i^* необходимо, как минимум, компенсировать ему затраты (условие индивидуальной рациональности). Из предположения о том, что нечеткие функции затрат АЭ, известные центру, согласованы с их четкими функциями затрат, и выражения (1) следует, что оценка сверху возможных (в рамках существующей информированности центра) затрат АЭ при выборе этого действия (и при обстановке игры y_{-i}) равны $c_i^{\max}(y_i^*, y_{-i})$, i Î I.

Следовательно система стимулирования (3) гарантированно реализует вектор действий y^* Î A' с минимальными затратами центра на стимулирование, определяемыми выражением (2).

Имея минимальные затраты по гарантированной реализации произвольного вектора действий АЭ, можно решить задачу оптимального согласованного планирования, то есть найти допустимый вектор действий y_Γ^*, который доставляет максимум разности между функцией дохода центра и его затратами на стимулирование по гарантированной реализации этого вектора действий (см. выражение (4)). •

Исследуем роль неопределенности. Понятно, что, если неопределенность отсутствует, то есть $\tilde{p}_i(t_i) = \begin{cases} 1, t_i = r_i \\ 0, t_i \neq r_i \end{cases}$, i Î I, (при

этом $\tilde{c}_i(y,u) = \begin{cases} 1, u = c_i(y) \\ 0, u \neq c_i(y) \end{cases}$, i Î I), то результат теоремы 7.1.3

переходит в результат теоремы 4.4.1.

Напомним, что в случае нечеткой неопределенности критерием сравнения информированностей центра служит вложенность нечетких множеств неопределенных параметров [44]. Другими словами, при нечеткой функции затрат АЭ $\tilde{c}^1{}_i(y,u)$ информированность центра меньше, чем при нечеткой функции затрат АЭ $\tilde{c}^2{}_i(y,u)$, если выполнено:

(5) " y Î A', " u Î $Â^1$ $\tilde{c}^1{}_i(y,u)$ ³ $\tilde{c}^2{}_i(y,u)$.

<u>Следствие 7.1.4.</u> С ростом неопределенности гарантированная эффективность стимулирования (в многоэлементной АС с внутренней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью) не возрастает. С уменьшением неопределенности гарантированная эффективность стимулирования возрастает и стремится к гарантированной эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной модели.

Справедливость утверждения следствия следует из теоремы о минимальных затратах на стимулирование [42] с учетом того, что, если выполнено (5), то, очевидно, имеет место следующее соотношение: $c_i^{1\max}(y)$ ³ $c_i^{2\max}(y)$, i Î I.

<u>Пример 11.</u> Пусть в АС имеются два АЭ со следующими функциями затрат: $c_i(y, r_i) = \dfrac{(y_i + a\ y_{-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где $a < 1$ - некоторый параметр (см. также для сравнения примеры 4, 8 и 10). Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а нечеткая функция затрат имеет вид:

(6) $\tilde{c}_i(y,u) = \begin{cases} 1, u \in [c_i(y,D_i); c_i(y,d_i)] \\ 0, u \notin [c_i(y,D_i); c_i(y,d_i)] \end{cases}$, i Î I,

где d_i £ D_i, i Î I, - некоторые константы.

В соответствии с выражением (1) вычисляем:

$$c_i^{\max}(y) = c_i(y, d_i),\ i\ Î\ I.$$

Замечая, что мы оказались в условиях примера 10, воспользуемся выражением (8) из раздела 7.1.1 и вычислим: $F^* = (d_1 + d_2)\,\frac{1-a}{1+a}$.

Таким образом, результаты, полученные для интервальной и для нечеткой внутренней неопределенности, согласованы. •

7.2. ВНЕШНЯЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Под внешней неопределенностью понимают неполную информированность части участников АС о параметрах окружающей среды (состоянии природы), то есть параметрах, внешних по отношению к рассматриваемой АС. Рассмотрим случай симметричной информированности участников АС относительно неопределенных факторов, при которой и центр, и АЭ имеют одинаковую информацию о состоянии природы, но, быть может, асимметрично информированы относительно других показателей функционирования АС.

Пусть затраты АЭ $c_i(y)$, i Î I, несепарабельны, зависят от действий АЭ и достоверно известны центру[1].

Неопределенность (неполная информированность) участников АС относительно состояния природы учитывается в модели следующим образом.

Будем считать, что действия АЭ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Î A' совместно с состоянием природы $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ Î W приводят к тому, что реализуется некоторый результат деятельности АС $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ Î A_0, причем каждая компонента результата деятельности z_i Î A_{0_i}, i Î I, $A_0 = \prod_{i \in I} A_{0_i}$, зависит от действий всех АЭ

[1] *То есть будем считать, что на момент принятия решений (выбора действия при известной функции стимулирования) i-ый АЭ знает истинное значение параметра r_i, и центр также на момент принятия решений (то есть на момент выбора функции стимулирования) знает его, то есть имеет достоверную информацию.*

и соответствующей компоненты состояния природы, то есть имеет место:

(1) $z_i = z_i(y, q_i)$, i Î I,

где функции («технологические» зависимости [9, 59]) $\{z_i(\times,\times)\}$, наряду с допустимыми множествами q_i Î W_i, $W = \prod_{i \in I} \Omega_i$, известны центру и всем АЭ.

Относительно целевых функций и допустимых множеств, дополнительно к предположениям А.1-А.4, примем следующее предположение:

А.7.1. ″ i Î I $A_{0_i} = A_i$; зависимости $z_i(y, q_i)$ непрерывны по всем переменным и однозначны.

Содержательно, предполагается, что множества возможных действий и результатов деятельности каждого АЭ совпадают. Наиболее распространенной (см. [44]) интерпретацией такого предположения является представление состояния природы как, например, аддитивной «помехи», накладываемой на действие АЭ.

Порядок функционирования и информированность участников АС следующие: центр сообщает АЭ систему стимулирования $\{s_i(z)\}$, то есть совокупность зависимостей индивидуальных вознаграждений АЭ от результата деятельности АС, после чего АЭ выбирают свои действия, ненаблюдаемые для центра[1]. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни АЭ, на момент выбора стратегий не знают значения состояния природы, которое реализуется после выбора ими стратегий и приведет к некоторому (единственному в силу предположения А.7.1) результату деятельности. Наблюдаемый и центром, и АЭ результат деятельности определяет вознаграждение АЭ и доход центра.[2]

[1] *Ненаблюдаемость для центра действий АЭ объясняет то, что их вознаграждение зависит от наблюдаемого результат деятельности. Если бы действия АЭ были наблюдаемы, то центр мог бы основывать стимулирование на выбираемых АЭ действиях и «забыть» о неопределенности», то есть задача свелась бы к детерминированной задаче стимулирования, которая подробно описана выше.*

[2] *Следует отметить, что рассматриваемая модель является обобщением известной одноэлементной модели стимулирования в условиях неопределенности, подробно описанной в работах [8,20, 35-44, 54] (см. также*

Опишем целевые функции участников АС. Целевая функция центра представляет собой разность между доходом, зависящим от действий АЭ[1], и суммарными затратами на стимулирование:

$$(2)\ F(z, y) = H(y) - \sum_{i \in I} s_i(z).$$

Целевая функция АЭ есть разность между его вознаграждением и затратами, зависящими в силу несепарабельности от действий всех АЭ:

$$(3)\ f_i(z, y) = s_i(z) – c_i(y),\ i\ Î\ I.$$

Отметим, что целевые функции участников АС зависят как от выбираемых ими стратегий (функций стимулирования и действий), так и от неопределенных факторов (результатов деятельности, которые действительно являются неопределенными, так как зависят от состояния природы). Поэтому необходимо конкретизировать принципы рационального поведения участников АС, то есть принципы выбора ими стратегий в условиях имеющейся неопределенности. Для этого необходимо четко определить, какой информацией о состоянии природы они обладают.

В зависимости от той информации, которой обладает участник АС (центр и АЭ), различают интервальную неопределенность (когда известно множество W_i возможных значений параметра q_i, $i\ Î\ I$), вероятностную неопределенность (когда дополнительно известно вероятностное распределение $p_i(q_i)$, $i\ Î\ I$) и нечеткую неопределенность (когда имеется нечеткая информация – функция принадлежности состояния природы параметра: $\tilde{P}_i: W_i$ ® $[0; 1]$, $i\ Î\ I$) (ниже последовательно рассматриваются три случая: интервальной, вероятностной и нечеткой внешней неопределенности

обзоры [9, 10, 34]).

[1] *Если функция дохода центра (и/или функции затрат АЭ) зависит от результатов деятельности, то, устраняя неопределенность, можно перейти к соответствующим функциям, зависящим от действий АЭ (см. подробности в [9, 42, 44]). При этом если функции затрат АЭ зависят от результатов деятельности других АЭ, которые в свою очередь зависят от действий всех АЭ, то при определении равновесия Нэша (см. выражение (4) ниже) существенным становится наблюдаемость каждым активным элементом действий всех АЭ.*

участников АС при симметричной их информированности).

Вернемся к обсуждению рационального поведения. В соответствии с общей методологией принятия решений в условиях неопределенности [42, 44, 66] игроки устраняют неопределенность с использованием всей имеющейся у них информации, сводя тем самым задачу принятия решений к детерминированной. Интервальная неопределенность устраняется, как правило, применением принципа МГР, вероятностная неопределенность – переходом к ожидаемой полезности (вычислением математического ожидания полезности (целевой функции) по известному распределению вероятности), нечеткая неопределенность – переходом к НОП, индуцированному на множестве допустимых действий целевой функцией АЭ (3) и нечеткой информационной функцией $\tilde{P}_i$ [44].

Прежде чем переходить к изучению многоэлементных АС с внешней неопределенностью, рассмотрим детерминированный аналог предложенной модели, который в дальнейшем будет являться той «точкой отсчета», для которой будет проверяться выполнение принципа соответствия, относительно которой будет изучаться роль неопределенности и т.д. (см. введение к настоящему разделу).

Итак, предположим, что участники АС на момент принятия решений имеют достоверную информацию о состоянии природы. Запишем определение равновесия Нэша (решения игры АЭ), которое зависит от используемой центром системы стимулирования и состояния природы:

$$(4)\ E_N(\sigma, \theta) = \{y^N \in A' \mid \forall\ i \in I,\ \forall\ y_i \in A_i$$
$$\sigma_i(z_1(y^N, \theta_1), z_2(y^N, \theta_2), \ldots, z_n(y^N, \theta_n)) - c_i(y^N) \geq$$
$$\geq \sigma_i(z_1(y_{-i}^N, y_i, \theta_1), z_2(y_{-i}^N, y_i, \theta_2), \ldots, z_n(y_{-i}^N, y_i, \theta_n)) - c_i(y_{-i}^N, y_i)\}.$$

В условиях полной информированности представляют интерес следующие варианты:

<u>Вариант 1.</u> Функция дохода центра и функции затрат АЭ зависят от действий АЭ, которые наблюдаются всеми участниками АС;

<u>Вариант 2.</u> Функция дохода центра зависит от наблюдаемого им результата деятельности АС, а функции затрат АЭ – от их действий, которые ненаблюдаемы для центра;

Вариант 3. Функция дохода центра и функции затрат АЭ зависят от действий АЭ, которые ненаблюдаемы для центра.

Первый вариант, как отмечалось выше, тривиален – центр может основывать стимулирование на наблюдаемых действиях, то есть получаем в точности детерминированную модель S4.

Рассмотрим второй вариант. Фиксируем произвольный вектор y^* Î A' действий АЭ. Тогда рассматриваемая модель (при фиксированном r Î W) принадлежит классу S6 моделей многоэлементных детерминированных АС, в которых стимулирование каждого АЭ зависит от результата деятельности АС, определяемого (в условиях отсутствия неопределенности) действиями АЭ при несепарабельных затратах. Специфика рассматриваемой модели заключается в том, что оператор $Q(\cdot)$ в ней имеет следующий «векторный» вид: Q: A' ´ W ® A_0, или в «поэлементном» представлении: Q_i: A' ´ W_i ® A_{0_i}, i Î I, причем значение (в каждом конкретном случае) состояния природы является параметром.

Определим $Y(z, q)$ = {y Î A' | $z(y, q) = z$} Í A', z Î A_0 – множество тех действий АЭ, выбор которых при данном состоянии природы приводит к реализации заданного результата их деятельности z Î A_0. При компенсации центром затрат активных элементов минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности z Î A_0 равны: $J(z, q) = \min_{y \in Y(z,q)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)$, а целевая функция центра равна: $F(z, q) = H(z) - J(z, q)$.

В соответствии с результатами раздела 4.6 на первом шаге решения задачи стимулирования определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности и требующих минимальных затрат на стимулирование по своей реализации: $Y^*(z, q) = Arg \min_{y \in Y(z,q)} \sum_{i=1}^{n} c_i(y)$. Фиксируем произвольный вектор $y^*(z, q)$ Î $Y^*(z, q)$ Í $Y(z, q)$. Тогда при использовании центром системы стимулирования

(5) $s_i^*(x(q), z) = \begin{cases} c_i(y^*(x(q)), & z = x(q) \\ 0, & z \neq x(q) \end{cases}$, i Î I,

где $x(q)$ Î A_0 – параметр (план), результат деятельности $x(q)$ Î A_0 реализуется с минимальными затратами центра на стимулирование (см. теорему 4.6.1).

Возможно использование более простых, чем (5) конструкций, учитывающих специфику рассматриваемой модели. Например, система стимулирования

$$(6)\quad s_i^*(x(q), z) = \begin{cases} \max\limits_{y \in Y(z,q)} c_i(y) + d_i, & z = z(y,q) \\ 0, & z \neq z(y,q) \end{cases}, \ i \text{ Î } I,$$

где $x(q)$ Î A_0 – параметр (план), реализует результат деятельности $x(q)$ Î A_0 как равновесие Нэша[1] (естественно, система стимулирования (6) имеет не более высокую эффективность, чем оптимальная система стимулирования (5)). Очевидно, что эффективности совпадают в случае, когда по наблюдаемому результату деятельности и состоянию природы центр в состоянии восстановить действия АЭ, то есть, например, когда выполнено: " i Î I " y_1, y_2 Î A', y_1 ¹ y_2, " q Î W $z_i(y_1, q)$ ¹ $z_i(y_2, q)$ и " i Î I " y Î A', " q_1, q_2 Î W, q_1 ¹ q_2, $z_i(y, q_1)$ ¹ $z_i(y, q_2)$.

Наиболее выгодный для центра результат деятельности АС $x^*(q)$ Î A_0, который может рассматриваться как гибкий (зависящий от состояния природы – см. выше) план, определяется как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^*(q) = arg \max_{z \in A_0} [H(z) - J(z, q)].$$

Таким образом, второй вариант может рассматриваться как частный случай модели S6. Аналогичным образом можно показать, что третий вариант совпадает с моделью, описанной в разделе 4.7.

Итак, для рассматриваемой модели в условиях полной информированности решение задачи стимулирование дается теоремами 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1, 4.5.1, 4.6.1. Отметим, что системы стимулирования (5) и (6) реализуют соответствующие вектора действий АЭ как равновесия Нэша. Гораздо сложнее обстоит дело с реализацией

---

[1] *По аналогии с результатами, полученными для модели S2, можно потребовать строгой положительности констант d_i, тем самым обеспечить единственность равновесия Нэша, перейти к индивидуальному стимулированию и т.д. (см. разделы 4.2 и 4.4).*

определенных действий АЭ как равновесий в доминантных стратегиях. Для этого (опять же в соответствии с теоремами, приведенными в четвертом разделе) необходимо, чтобы центр мог компенсировать каждому АЭ затраты независимо от обстановки игры при условии, что данный АЭ выбрал требуемое действие. Для этого, как минимум, необходимо, чтобы центр был в состоянии наблюдать или однозначно восстанавливать действие каждого АЭ. В рассматриваемой (детерминированной!) модели это возможно далеко не всегда (в общем случае – невозможно). Тем более затруднительна идентификация индивидуальных действий в условиях, когда присутствует неопределенность относительно состояния природы[1]. Поясним последнее утверждение.

Единственным достаточно подробно исследованным классом задач стимулирования в многоэлементных АС с неопределенностью являются задачи теории контрактов [63, 65], то есть задачи с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью (см. классификацию в [44] и обзоры [9, 34]). Для этого класса задач в рамках обобщения двушагового метода [58-60] для конечных допустимых множеств задача стимулирования сводится к набору задач выпуклого программирования, обладающих чрезвычайно высокой вычислительной сложностью.

Таким образом, общих подходов к аналитическому[2] решению многоэлементной задачи стимулирования в условиях неопределенности, описанной выше, на сегодняшний день, к сожалению, не существует. Следовательно, необходимо упрощать модель, стре-

---

[1] *Решение широкого класса задач теории контрактов, использующее идею определения множеств действий АЭ, которые в условиях вероятностной неопределенности могут приводить к наблюдаемым результатам деятельности, приведено в находящейся в печати статье А.Д. Халезова "Общее решение дискретной задачи центр-агент с симметричной информацией в условиях риска".*

[2] *Для теории активных систем характерно стремление к поиску именно аналитических решений, позволяющих исследовать зависимость оптимального решения от параметров модели АС (общие результаты о структуре оптимального решения, конечно, также представляют теоретический интерес, однако их использование на практике затруднительно хотя бы в силу высокой вычислительной сложности соответствующих алгоритмов) [21, 44].*

мясь получать конструктивные и содержательно интерпретируемые теоретические результаты, которые могли бы в дальнейшем найти применение на практике.

Поэтому упростим модель, введя предположение о том, что результат деятельности каждого АЭ зависит только от его собственного действия и соответствующей компоненты состояния природы, то есть будем считать[1], что $z_i = z_i(y_i, q_i)$, i Î I.

В этом случае возможно комбинированное применение идеи декомпозиции игры АЭ и результатов исследования моделей стимулирования в одноэлементных АС, функционирующих в условиях неопределенности. Проиллюстрирует это утверждение, рассмотрев ряд моделей многоэлементных АС с интервальной, вероятностной и нечеткой внешней неопределенностью при симметричной информированности участников.

7.2.1. ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Предположим, что всем участникам АС на момент принятия решений известны множества $\{W_i\}$ возможных значений неопределенного параметра, а также «технологические» зависимости $\{z_i(\cdot,\cdot)\}$. Пусть: затраты АЭ несепарабельны и зависят от действий АЭ, а центр использует стимулирование каждого АЭ, зависящее от результатов деятельности всех АЭ. Тогда целевые функции центра и АЭ имеют, соответственно, вид:

(1) $F(z, y) = H(y) - \sum_{i \in I} s_i(z)$,

(2) $f(z, y) = s_i(z) - c_i(y)$.

Фиксируем некоторое значение параметра q Î W и запишем определение равновесия Нэша:

(3) $E_N(s, q) = \{y^N$ Î A' | " i Î I, " y_i Î A_i

---

[1] *Данное предположение частично декомпозирует игру АЭ – результат деятельности каждого из них зависит уже только от его собственных действий и состояния природы (но не зависит от действий других АЭ), в то время как другие переменные – стимулирование и затраты – по-прежнему зависят, соответственно, от результатов деятельности и действий всех АЭ.*

$\sigma_i(z_i(y_i^N, q_i), z_{-i}(y_{-i}^N, q_{-i}))-c_i(y^N) \geq \sigma_i(z_i(y_i, q_i), z_{-i}(y_{-i}^N, q_{-i}))-c_i(y_i, y_{-i}^N)\}$.

Предположим, что и центр, и АЭ при устранении неопределенности используют принцип МГР. Однако одного этого предположения оказывается недостаточно для корректного определения равновесия Нэша в рамках рассматриваемой модели. Действительно, в выражении (3) можно брать $\min\limits_{q_i \in \Omega_i} f_i(y, q)$ или решать систему неравенств (для $i \in I$) и т.д.

Другими словами, поиск решения игры в условиях неопределенности сталкивается с множеством как методологических, так и «технических», трудностей, происхождение которых качественно можно объяснить тем, что, фиксируя $\sigma \in M$ и записывая определение множества решений игры при данной системе стимулирования, мы обрекаем себя на поиск системы стимулирования, оптимальной в соответствующем подмножестве M функционального пространства, что само по себе является нетривиальной задачей.

Вспомним, что помимо метода анализа множеств реализуемых действий для решения задачи стимулирования может использоваться не менее эффективный метод анализа минимальных затрат на стимулирование [44], который заключается в том, что для каждого вектора действий АЭ ищется минимальная система стимулирования, его реализующая, а затем на этапе согласованного планирования определяется оптимальный вектор реализуемых действий. То есть при использовании метода анализа минимальных затрат на стимулирование оптимизация производится в более простом пространстве ($\Re^n$), чем пространство кусочно-непрерывных положительнозначных функций, которое приходится использовать при применении метода множеств реализуемых действий.

Введем следующее предположение.

А.7.2. $z_i(\cdot,\cdot)$ – непрерывные однозначные строго монотонные функции своих переменных, $i \in I$.

Обозначим $Z_i(y_i, \Omega_i) = \{z_i \in A_{0_i} \mid z_i = z_i(y_i, q_i), q_i \in \Omega_i\}$ – множество тех результатов деятельности i-го АЭ, которые могут реализоваться при выборе им действия $y_i \in A_i$ и всевозможных состояниях природы.

Теорема 7.2.1. Если выполнено предположение А.7.2, то система стимулирования

$$(4)\ \sigma_i(y^*, z_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*), & z_i \in Z_i(y_i^*, \Omega_i) \\ 0, & z_i \notin Z_i(y_i^*, \Omega_i) \end{cases}, \ i \in I,$$

реализует (как равновесие Нэша) вектор действий $y^* \in A'$, который оптимален при условии

$$(5)\ y^* \in Arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in I} c_i(y)\}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор $y^* \in A'$ действий АЭ и запишем условия его гарантированной реализуемости как равновесия Нэша системой стимулирования $\{\sigma_i\}$:

$$(6)\ \forall\ \theta \in \Omega,\ \forall\ i \in I,\ \forall\ y_i \in A_i\ \ \sigma_i(y^*, z_i(y_i^*, \theta_i), z_{-i}(y_{-i}^*, \theta_{-i})) - c_i(y^*) \geq$$

$$\geq \sigma_i(y^*, z_i(y_i, \theta_i), z_{-i}(y_{-i}^*, \theta_{-i})) - c_i(y_i, y_{-i}^*)\}.$$

Из условий индивидуальной рациональности АЭ (напомним, что условие индивидуальной рациональности АЭ гласит, что в равновесии значение его целевой функции должно быть неотрицательно) следует, что должно быть выполнено:

$$(7)\ \forall\ \theta \in \Omega,\ \forall\ i \in I\ \sigma_i(y^*, z_i(y_i^*, \theta_i), z_{-i}(y_{-i}^*, \theta_{-i})) \geq c_i(y^*),$$

то есть левая часть неравенств (6) неотрицательна.

Так как системы неравенств (6) и (7) должны иметь место при любом значении неопределенного параметра, то, если использовать систему стимулирования $\{\sigma_i(z)\}$ (в которой вознаграждение каждого АЭ зависит от результатов деятельности всех АЭ), то придется брать минимум в левых частях выражений (6) и (7) по всему множеству Ω. Поэтому лучше (с точки зрения гарантированной эффективности стимулирования) использовать систему индивидуального стимулирования $\{\sigma_i(z_i)\}$. При ее использовании условие (7) примет вид:

$$(8)\ \forall\ i \in I,\ \forall\ \theta_i \in \Omega_i\ \sigma_i(y^*, z_i(y_i^*, \theta_i)) \geq c_i(y^*).$$

Система стимулирования (4) удовлетворяет ограничениям (8) как равенствам. Докажем, что при ее использовании y^* - точка Нэша.

Из предположения А.7.2 следует, что $\forall\ i \in I\ \forall\ y_1 \neq y_2 \in A_i$ симметрическая разность множеств $Z_i(y_1, \Omega_i)$ и $Z_i(y_2, \Omega_i)$ непуста:

$Z_i(y_1, W_i)$ D $Z_i(y_2, W_i)$ ¹ Æ, то есть при использовании центром системы стимулирования (4) и выборе i-ым АЭ действия y_i ¹ y_i^* всегда найдется такое состояние природы q_i Î W_i, при котором вознаграждение АЭ будет равно нулю. Следовательно, система стимулирования (4) гарантированно реализует вектор y^* Î A' как равновесие Нэша[1].

Выражение (5) означает, что центр побуждает АЭ выбрать наиболее выгодное для себя (то есть максимизирующее разность между доходом и затратами на стимулирование) гарантированно реализуемое действие. •

Исследуем роль неопределенности. Сравнивая выражения (4) и (1) (из раздела 4.2), замечаем, что затраты центра на стимулирование одинаковы в детерминированной модели и в рассматриваемой модели АС с внешней интервальной неопределенностью. Содержательно это можно объяснить симметричной информированностью центра и АЭ и «осторожностью» АЭ (использованием ими МГР)[2]. Например, если бы сепарабельные затраты i-го АЭ зависели от результата его деятельности, то центр был бы вынужден компенсировать ему $\max\limits_{z_i \in Z_i(y_i^*, \Omega_i)} c_i(z_i)$.

В предельном случае (при переходе к соответствующей детерминированной АС) теорема 7.2.1 переходит в теорему 4.2.1.

7.2.2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Пусть затраты всех АЭ несепарабельны и зависят от результатов деятельности, то есть $c_i = c_i(z)$, i Î I. Предположим, что на

---

[1] *По аналогии с тем, как это делалось в теореме 4.2.1, можно в выражение (4) добавить константы {d_i}, обеспечивающие единственность равновесия Нэша, или наложить дополнительные ограничения (см. пункты а)-в) в теореме 4.2.1), обеспечивающие существование РДС (при условии, что АЭ использует МГР) и т.д.*

[2] *Если предположение центра, что АЭ используют МГР не оправдывается, то результат теоремы 7.2.1 не имеет места (см. для сравнения анализ влияния неопределенности в разделе 7.1.1).*

момент принятия решений участники АС обладают одинаковой информацией о распределениях вероятностей $\{p_i(z_i, y_i)\}$ результатов деятельности АЭ в зависимости от его действия, и «технологических» зависимостях $\{z_i(\cdot,\cdot)\}$.

К сожалению, на сегодняшний день даже для одноэлементных АС, функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности, не получены общие аналитические решения задач стимулирования второго рода. Поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим модель, для которой решения одноэлементных задач известны, проиллюстрировав эффективность использования идеи декомпозиции игры АЭ в многоэлементной вероятностной АС.

Предположим, что распределения вероятностей (интегральные функции распределения) имеют следующий вид (так называемая модель простого АЭ):

$$(1)\quad F_i(z_i, y_i) = \begin{cases} F_i(z_i), & z_i < y_i \\ 1, & z_i \geq y_i \end{cases}, \; i \in I.$$

Для одноэлементной модели простого АЭ доказана оптимальность компенсаторных систем стимулирования [16, 44].

<u>Теорема 7.2.2.</u> В рамках ГБ система стимулирования

$$(2)\quad \sigma_i(y^*, z_i) = \begin{cases} c_i(z_i, z_{-i}^*), & z_i \leq y_i^* \\ 0, & z_i > y_i^* \end{cases}, \; i \in I,$$

реализует (как равновесие Нэша) вектор действий $y^* \in A'$, который оптимален при условии[1]

$$(3)\quad y^* \in Arg \max_{y \in A'} \{H(y) - E \sum_{i \in I} c_i(z)\}.$$

Доказательство. В работах [16, 44] доказано, что в модели простого АЭ стационарные точки полезности АЭ и его ожидаемой полезности совпадают. По аналогии можно показать, что в многоэлементной АС при фиксированной обстановке игры совпадают стационарные (по стратегии данного АЭ) точки полезности АЭ и его ожидаемой полезности.

В соответствии с результатом теоремы 4.2.1 при использова-

---

[1] *Напомним, что “E” обозначает оператор вычисления математического ожидания.*

нии центром системы стимулирования (2) вектор $z^* \in A_0$, $z^* = y^*$, является «равновесием Нэша», то есть доставляет максимум целевой функции АЭ при фиксированных результатах деятельности остальных АЭ. Следовательно, при фиксированной обстановке игры он доставляет максимум и ожидаемой полезности АЭ, то есть y^* - равновесие Нэша. При этом компенсаторная система стимулирования (2) является минимальной, то есть характеризуется минимальными затратами центра на стимулирование.

Ожидаемые затраты центра на стимулирование равны:

$$(4)\ E\sum_{i\in I} c_i(z) = \sum_{i\in I}\int_{A_{0-i}} \{ \int_0^{y_i^*} c_i(z_i, z_{-i})\, p_i(z_i)\, dz_i +$$

$$[1 - F_i(y_i^*)]\, c_i(y_i^*)\}\, p_{-i}(z_{-i}, y_{-i}^*)\, dz_{-i}.$$

Подставляя (4) в целевую функцию центра, получаем условие оптимальности (3). •

В предельном случае (при переходе к соответствующей детерминированной АС) теорема 7.2.1 переходит в теорему 4.2.1, а выражение (4) в $\sum_{i\in I} c_i(y^*)$.

7.2.3. НЕЧЕТКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Рассмотрим следующую модель многоэлементной АС с нечеткой внешней неопределенностью и симметричной информированностью участников. Пусть: вектор результатов деятельности АЭ z принадлежит компакту A_0 в $\mathbb{R}^n$; затраты АЭ зависят от результатов деятельности и несепарабельны, а функция дохода центра зависит от действий АЭ.

Информированность участников АС следующая: на момент принятия решений и центр, и АЭ имеют нечеткую информацию о состоянии природы и «технологических» зависимостях $\{z_i(\cdot,\cdot)\}$. В соответствии с принципом обобщения [35] этого достаточно, чтобы определить нечеткую информационную функцию $\tilde{P}(z, y)$, $\tilde{P}: A_0 \times A' \to [0; 1]$, ставящей в соответствие вектору действий АЭ нечеткое подмножество множества результатов деятельности.

Обозначим

(1) $Q(z) = \{y \in A' \mid \tilde{P}(z, y) = 1\}$.

(2) $Z(y) = \{z \in A_0 \mid \tilde{P}(z, y) = 1\}$.

Введем следующие предположения.

А.7.3. Нечеткие функции $\tilde{P}(z, y)$ 1-нормальны [35, 41, 44], то есть $\forall\, y \in A'\ \exists\, z \in A_0$: $\tilde{P}(z, y) = 1$ и $\forall\, z \in A_0\ \exists\, y \in A'$: $\tilde{P}(z, y) = 1$.

Если выполнено предположение А.7.3, то $\forall\ y \in A'\ \forall\, z \in A_0$ $Q(z) \neq \varnothing$, $Z(y) \neq \varnothing$.

Более сильным, чем А.7.3 является следующее предположение:

А.7.4. А.7.3 и $\bigcup\limits_{z \in A_0} Q(z) = A'$, $\bigcup\limits_{y \in A'} Z(y) = A_0$.

А.7.5. Целевые функции АЭ и нечеткая информационная функция $\tilde{P}(z, y)$ полунепрерывны сверху[1].

Обозначим $E_N^z(\sigma)$ - множество равновесных по Нэшу результатов деятельности АЭ:

(3) $E_N^z(\sigma) = \{z^N \in A_0 \mid \forall\, i \in I,\ \forall\, z_i \in A_{0_i}$

$$\sigma_i(z^N) - c_i(z^N) \geq \sigma_i(z_i, z_{-i}^N) - c_i(z_i, z_{-i}^N)\}.$$

Обозначим $E_N(\sigma)$ – множество равновесных по Нэшу при использовании центром системы стимулирования σ векторов действий АЭ.

<u>Лемма 7.2.1.</u> Если выполнены предположения А.7.3–А.7.5, то

(4) $E_N(\sigma) = \bigcup\limits_{z \in E_N^z(\sigma)} Q(z)$.

Доказательство. Фиксируем $i \in I$. Целевая функция i-го АЭ и нечеткая информационная функция $\tilde{P}(z, y)$ индуцируют на множестве A' нечеткое отношение предпочтения (НОП) i-го АЭ. В теории принятия решений при нечеткой исходной информации рациональным считается выбор АЭ максимально недоминируемых по его НОП альтернатив (действий).

---

[1] *Очевидно, что, если затраты АЭ непрерывны, и центр использует компенсаторную систему стимулирования, то целевая функция АЭ полунепрерывна сверху.*

Определение индуцированного НОП и максимально недоминируемых альтернатив для задач стимулирования приведено в работах [35, 41, 44]. Однако, непосредственное использование максимально недоминируемых альтернатив в задачах стимулирования затруднительно в силу громоздкости их определения. В одноэлементных АС с нечеткой внешней неопределенностью на основании подхода, предложенного С.А. Орловским, использовался следующий метод решения задач стимулирования: формулировалась задача четкого математического программирования (ЧМП) и доказывалось, что максимально недоминируемыми альтернативами являются решения этой задачи и только они. Поступим аналогичным образом и в рассматриваемой многоэлементной модели.

Для фиксированной обстановки игры можно, по аналогии с результатами, приведенными в [42, 44], доказать, что в рамках предположений А.7.4 и А.7.5 четко недоминируемыми альтернативами являются те и только те действия АЭ, функция принадлежности нечеткого результат деятельности от которых равна единице в точке максимума целевой функции АЭ. Следовательно, если некоторый результат деятельности z_i i-го АЭ принадлежит при обстановке z_{-i} множеству $E_N^z(s)$ (см. выражение (3)), то множество четко недоминируемых действий этого АЭ есть $Q(z)$. Вычисляя объединение по всем точкам Нэша, в силу предположения А.7.4, получаем выражение (4). •

<u>Теорема 7.2.3.</u> Если выполнены предположения А.7.4–А.7.5, то система стимулирования

$$(5)\ s_i(z^*, z_i) = \begin{cases} c_i(z_i^*, z_{-i}) + d_i, & z_i = z_i^* \\ 0, & z_i \neq z_i^* \end{cases},\ i \in I,$$

где

$$(6)\ z^* = arg \max_{z \in A_0} \{ \min_{y \in Q(z)} H(y) - \sum_{i \in I} c_i(z) \},$$

гарантированно d-оптимальна.

Доказательство. В силу теоремы 4.4.1 система стимулирования (5) при $d_i > 0,\ i \in I$, обеспечивает максимизацию целевой функции каждого АЭ при (единственном!) результате деятельности z_i^* при любой обстановке игры (и минимальных затратах центра на стимулирование). Из леммы 7.2.1 следует, что множество равновесий Нэша при этом есть $Q(z^*)$. Предположение А.7.5 гарантирует, что изменением $z^* \in A_0$ любой допустимый вектор действий АЭ может быть сделан точкой Нэша.

При определении гарантированной эффективности системы стимулирования (5) следует вычислить гарантированный доход центра: $\min_{y \in Q(z)} H(y)$, то есть взять минимум функции дохода центра по множеству равновесий Нэша. Оптимальной окажется (результат решения задачи оптимального согласованного планирования) система стимулирования, максимизирующая целевую функцию центра – см. выражение (6). •

Исследуем влияние неопределенности. Сравнивая выражение (6) с эффективностью $\max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in I} c_i(y)\}$ стимулирования в детерминированном случае (см. раздел 4.4), можно сделать вывод, что гарантированная эффективность стимулирования в АС с нечеткой внешней неопределенностью не выше, чем соответствующих детерминированных АС (например, за счет вычисления $\min_{y \in Q(z)} H(y)$ – см. выражение (6)). Очевидно, что с ростом нечеткой неопределенности (в смысле, определенном в [44]) множество $Q(z)$, по которому вычисляется минимум, не сужается, следовательно, не возрастает и гарантированная эффективность стимулирования.

В предельном случае (при переходе к соответствующей детерминированной АС) теорема 7.2.3 переходит в теорему 4.4.1. В том числе, например, когда в рамках предположений А.7.3–А.7.5 нечеткие информационные функции сепарабельны и однопиковые с точками максимума в действиях АЭ, множества равновесий Нэша и эффективности в четком и нечетком случаях, очевидно, совпадают.

В заключение настоящей главы отметим, что перспективными представляются следующие направления исследований многоэлементных АС с неопределенностью. Во-первых, это класс АС, в которых результат деятельности каждого АЭ зависит от действий всех АЭ. Во-вторых, исследование условий на информированность игроков (например, свойства плотности совместного распределения состояний природы), при которых можно без потери эффективности использовать индивидуальные системы стимулирования и т.д. В третьих, представляет интерес рассмотрение механизмов с платой за информацию в многоэлементных АС с неопределенностью и асимметричной информированностью.

В целом, из проведенного в настоящей главе анализа многоэлементных АС с неопределенностью можно сделать вывод, что в тех случаях, когда соответствующие одноэлементные модели исследованы достаточно полно, и для них получены аналитические решения, то идея декомпозиции игры АЭ в многоэлементной АС позволяет достаточно просто получить оптимальное решение задачи стимулирования. В случае, когда соответствующие одноэлементные модели исследованы недостаточно подробно (когда, например, для них не получены даже достаточные условия оптимальности простых систем стимулирования), существенно продвинуться в изучении их многоэлементных расширений не удается.

8. МОДЕЛИ СТИМУЛИРОВАНИЯ С ГЛОБАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ДЕЙСТВИЙ АЭ

Рассмотрим АС, состоящую из n АЭ с целевыми функциями $f_i(y)$, $i \in I$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Предположим, что, помимо индивидуальных ограничений на множества допустимых стратегий: $y_i \in A_i$, $i \in I$, существуют глобальные ограничения $A_{гл}$ на выбор состояний АЭ, то есть $y \in A' \cap A_{гл}$, где $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Можно выделить несколько методов учета глобальных ограничений, то есть методов сведения теоретико-игровых моделей с глобальными ограничениями на множества допустимых стратегий игроков к моделям, для которых имеет место гипотеза независимого поведения.

«Метод штрафов». Данный метод заключается в том, что в случае, когда вектор действий АЭ оказывается вне множества $A_{гл}$ (то есть $y \notin A_{гл}$), целевые функции игроков считаются равными

минус бесконечности – игроки штрафуются за нарушение ограничений [15, 24, 66]. Далее можно рассматривать игру с «новыми» целевыми функциями, в которой отсутствуют глобальные ограничения. В зависимости от информированности игроков и того, кто из игроков нарушает глобальные ограничения, строятся гарантирующие стратегии [24].

«Метод расширения стратегий». В исходной игре все АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо, не обмениваясь информацией с другими игроками[1]. Можно рассмотреть игру, в которой каждый из игроков делает предположения о выборе других игроков или реакции других игроков на выбор им той или иной стратегии. В подобных играх используют концепцию *П-решения* [15] (см. также Байесовское равновесие, равновесие Штакельберга и др. [56, 66]), которая включает в себя максиминные равновесия, равновесия Нэша и ряд других как частные случаи, и заключается в следующем.

Пусть все активные элементы, за исключением i-го, выбрали свои стратегии $y_{-i} \in A_{-i}$. Введем множества: $A_i(y_{-i}) = \{y_i \in A_i \mid y \in A' \cap A_{гл}\}$, $i \in I$, $A_i(y_{-i})$ – множество стратегий i-го АЭ, при которых вектор действий удовлетворяет глобальным ограничениям[2]. Предположим, что i-ый АЭ делает предположение $\Pi_i(y_i) \subseteq A_{-i}$ о множестве возможных «реакций» остальных АЭ на выбор им стратегии $y_i \in A_i$, $i \in I$. Тогда, например, рациональным можно считать поведение игроков, заключающееся в стремлении к максимизации выбором собственной стратегии из множества $\bigcap_{y_{-i} \in \Pi_i(y_i)} A_i(y_{-i})$ гарантированного по множеству $\Pi_i(y_i)$ значения своей целевой функции, то есть

$$y_i^{\Pi} = arg \max_{y_i \in \bigcap_{y_{-i} \in \Pi_i(y_i)} A_i(y_{-i})} \; \min_{y_{-i} \in \Pi_i(y_i)} f_i(y), \; i \in I.$$

Возможны и другие определения рациональности поведения

---

[1] *Возможность и целесообразность обмена информацией (информационное расширение игры) в играх с запрещенными ситуациями рассматривалась в работе [24].*

[2] *В общем случае нельзя исключать из рассмотрения следующие ситуации: $\exists\, i \in I$, $\exists\, y_{-i} \in A_{-i}$: $A_i(y_{-i}) = \varnothing$.*

игроков, например: введем множества $Y^{\text{г}}_{-i}(y_i) = Arg \min\limits_{y_{-i} \in \Pi_i(y_i)} f_i(y)$, $\tilde{A}_i = \bigcap\limits_{y_{-i} \in Y^{\text{г}}_{-i}(y_i)} A_i(y_{-i})$, $y_i^{\text{п}} = arg \max\limits_{y_i \in \tilde{A}_i} \min\limits_{y_{-i} \in \Pi_i(y_i)} f_i(y)$, $i \in I$, и т.д.

Если предположения всех АЭ оправдываются, то есть $\forall\, i \in I$ $y^{\text{п}}_{-i} \in P_i(y_i^{\text{п}})$, то ситуацию игры $y^P \in A' \cap A_{гл}$ называют *П-равновесием*.

Существует несколько частных случаев, в которых учет глобальных ограничений производится «автоматически». Если у каждого из игроков имеется доминантная стратегия (или в игре существует единственное равновесие Нэша) и игра характеризуется полной информированностью, то каждый из игроков может вычислить доминантные стратегии всех остальных игроков (соответственно – точку Нэша). Если при этом вектор доминантных стратегий (или точка Нэша) удовлетворяют глобальным ограничениям, то проблем их учета не возникает.

Отметим, что метод расширения стратегий, во-первых, требует от исследователя операций введения трудно обосновываемых предположений о принципах поведения игроков, а, во-вторых, не всегда П-решение оказывается П-равновесием, или, вообще, существует.

Если в методе штрафов и в методе расширения стратегий никак не оговаривалось наличие управления со стороны центра, то следующие два метода учета глобальных ограничений существенно используют управляющие возможности центра.

«Метод согласования». Основная идея метода согласования заключается в следующем (см. также двухшаговый метод решения вероятностных [58] и др. задач стимулирования и метод согласованного планирования [15]). На первом шаге решения задачи управления (стимулирования) центр для каждого вектора действий, принадлежащего множеству A' (без учета глобальных ограничений) ищет допустимое управление, при котором данный вектор действий принадлежит множеству решений игры активных элементов. Результатом первого шага, например, в задаче стимулирования, является множество A_M действий АЭ, реализуемых при данных ограничениях M на систему стимулирования, $A_M \subseteq A'$.

Затем на втором шаге центр ищет множество A^* действий АЭ, которые, во-первых, реализуемы, во-вторых, удовлетворяют заданным глобальным ограничениям $A_{гл}$, и на которых достигается максимум его целевой функции. Итак, на втором шаге центр решает следующую задачу:

$$(1)\ A^* = Arg \max_{y \in A_M \cap A_{\text{гл}}} F(y).$$

Максимальная эффективность управления при этом равна $F(y^*)$, где y^* - произвольный элемент множества A^*.

«Метод изменения порядка функционирования». Выше предполагалось, что АЭ выбирают, при известной стратегии центра, свои действия одновременно и независимо. Если центр как метаигрок может изменить порядок функционирования, то есть последовательность получения информации и выбора стратегий активными элементами, то, варьируя последовательность выбора стратегий АЭ, можно существенно упростить задачу учета глобальных ограничений. Если существует нумерация АЭ, такая что $A_i = A_i(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1})$, то каждый АЭ должен при выборе своей стратегии учитывать ограничения, наложенные совместно глобальным ограничением и уже выбранными к настоящему моменту стратегиями АЭ с меньшими номерами.

Например, допустимой с рассматриваемой точки зрения является последовательность функционирования АС, имеющая вид сетевого графика (без контуров). Частным случаем является последовательный выбор стратегий активными элементами – так называемые производственные цепочки (см. также раздел 9) [15, 26].

Еще раз подчеркнем, что возможность использования метода изменения порядка функционирования должна быть предусмотрена «правилами игры», то есть, учтена в модели активной системы.

Закончив перечисление методов учета глобальных ограничений, перейдем к систематическому описанию различных вариантов взаимозависимости и взаимосвязи игроков в многоэлементных АС.

В работе [15] активными системами с зависимыми АЭ были названы системы, в которых либо существуют глобальные ограничения на множество возможных действий, либо/и целевая функция каждого АЭ зависит от, помимо его собственных действий, действий других АЭ. Для того чтобы различать эти два случая, мы будем придерживаться следующей терминологии: если АЭ производят свой выбор независимо (отсутствуют глобальные ограничения на вектор действий АЭ), и целевая функция каждого АЭ зависит только от его собственной стратегии, и отсутствуют общие ограничения на управляющие переменные (допустимые функции стимулирования и т.д.), то такую АС будем называть *АС с независимыми и несвязанными АЭ*[1]. Если добавляются общие ограничения на управления, то такие АС будем называть *АС со слабо связанными АЭ* (АЭ оказываются связаны косвенно – через ограничения на стратегии центра) [16, 20, 42, 44]. Если добавляется зависимость целевой функции АЭ от обстановки игры, то такую АС будем называть *АС с сильно связанными* (но *независимыми*!) АЭ. Если добавляются только общие ограничения на множество стратегий АЭ системы, то такую АС будем называть *АС с зависимыми АЭ* (см. таблицу 2 ниже).

Выше в настоящей работе исследовались задачи стимулирования в АС с сильно связанными и независимыми АЭ. Таким образом, остается открытым вопрос о методах решения задачи стимулировании в АС с зависимыми АЭ (несвязанными, сильно и слабо связанными). Так как АС с сильно связанными АЭ включают в себя АС с несвязанными и слабо связанными АЭ как частный случай, перейдем к рассмотрению задач стимулирования в АС с сильно связанными и зависимыми АЭ.

Метод штрафов в задачах стимулирования в многоэлементных АС имеет следующий вид. В общем случае считаем, что затраты АЭ несепарабельны и приравниваем их минус бесконечности при недопустимых (с точки зрения глобальных ограничений) действиях АЭ, после чего применяем технику анализа, описанную в четвертом разделе настоящей работы.

Метод согласования может использоваться в приведенном выше виде без каких-либо изменений.

Напомним, что при решении задач стимулирования в многоэлементных АС выше (в четвертом разделе) реализуемый опти-

---

[1] *Таким образом, «независимость» АЭ отражает свойства множеств их допустимых стратегий, а «связанность» – зависимость целевой функции АЭ от действий других игроков или наличие общих ограничений на управление.*

мальной квазикомпенсаторной системой стимулирования вектор действий АЭ входил в эту систему стимулирования как параметр. Поэтому, в более общем случае, охватывающем и метод штрафов, и метод согласования, можно считать, что на АЭ (или центр, что то же самое в силу оптимальности компенсаторных систем стимулирования) наложены штрафы следующего вида:

$$c_i(y) = \begin{cases} \tilde{c}_i(y), & y \notin A' \cap A_{\text{гл}} \\ 0, & y \in A' \cap A_{\text{гл}} \end{cases},$$

где $\tilde{c}_i(y)$ - некоторые неотрицательные функции, i Î I. Тогда, если A_M – множество реализуемых действий, определяемых без учета глобальных ограничений на действия АЭ, то целевая функция центра в задаче стимулирования второго рода (с учетом глобальных ограничений) имеет вид:

$$(2)\ F(y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \{c_i(y) + c_i(y)\}.$$

Задача планирования запишется в виде:

$$(3)\ x^* = arg \max_{x \in A_M} [H(y) - \sum_{i=1}^{n} \{c_i(y) + c_i(y)\}],$$

а максимальная эффективность стимулирования (эффективность оптимальной системы стимулирования) равна $K^* = F(x^*)$[1].

В таблице 2 представлены возможные комбинации глобальных ограничений («+» – наличие глобальных ограничений, «-» - отсутствие глобальных ограничений) на множества допустимых стратегий АЭ, их целевые функции и управления.

---

[1] *Мы не будем останавливаться подробно на таких простых утверждениях, следующих из анализа выражений (1)-(3), как то, что с расширением множеств A_M (то есть с ростом возможностей центра по управлению) и $A_{гл}$ (ослаблением внешних – глобальных – ограничений) эффективность стимулирования не уменьшается и т.д.*

№	Множества допустимых стратегий АЭ	Целевые функции АЭ	Управления (допустимые стратегии центра)	Тип АС
1.	-	-	-	АС с независимыми и несвязанными АЭ
2.	+	-	-	АС с зависимыми и несвязанными АЭ
3.	+	+	-	АС с зависимыми и сильно связанными АЭ
4.	+	-	+	АС с зависимыми и слабо связанными АЭ
5.	-	+	-	АС с независимыми и сильно связанными АЭ
6.	-	-	+	АС с независимыми и слабо связанными АЭ
7.	-	+	+	АС с независимыми и сильно связанными АЭ
8.	+	+	+	АС с зависимыми и сильно связанными АЭ

Таблица 2. Классификация взаимосвязанности и взаимозависимости АЭ.

Рассмотрим кратко все восемь случаев (см. таблицу 2) и покажем для них, что <u>при решении задач стимулирования в многоэлементных АС с зависимыми АЭ учет глобальных ограничений на множества допустимых действий АЭ возможно осуществлять, применяя как метод штрафов, так и метод согласования, причем их использование не изменяет результатов, описанных в четвертом разделе настоящей работы.</u>

Качественное обоснование справедливости последнего утверждения таково – взаимосвязь АЭ (в смысле целевых функций) была учтена при решении задач стимулирования в четвертом разделе настоящей работы, а, используя выражения (2) и (3), удается декомпозировать и учесть «независимо» факторы, связанные с ограничениями на множества допустимых стратегий АЭ и центра.

Другими словами, в общем случае алгоритм действий при учете глобальных ограничений таков: для каждой из моделей S1-S8 на втором этапе решения задачи стимулирования (этапе поиска оптимального для центра реализуемого действия) максимизация целевой функции центра ведется не по всему множеству A' допустимых действий АЭ, а по множеству: $A' \cap A_{гл} \cap A_M$. При этом «автоматически» обеспечивается учет глобальных ограничений как на действия АЭ, так и на стимулирование.

Случай 1. *АС с независимыми и несвязанными АЭ*. Очевидно, что многоэлементная АС с независимыми и несвязанными АЭ может быть представлена в виде набора невзаимодействующих одноэлементных активных систем (ни согласование с глобальными ограничениями, ни штрафы в данном случае не требуются). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется независимо по множествам A_i, $i \in I$.

Случай 2. *АС с зависимыми*[1] *и несвязанными АЭ*. В данном случае центр имеет возможность использовать индивидуальное стимулирование для каждого АЭ, рассматривая в качестве реализуемых только вектора действий, принадлежащие множеству допустимых с точки зрения глобальных ограничений (метод согласования), то есть на втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется по множеству $A' \cap A_{гл}$.

Случай 3. *АС с зависимыми и сильно связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление отсутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра также ведется по множеству $A' \cap A_{гл}$.

---

[1] *Отметим, что в работе [24] при описании игр с запрещенными ситуациями взаимозависимость АЭ отражалась следующим образом: целевая функция i-го АЭ определялась как:* $f_i(y) = \begin{cases} w_i(y), & y \in A_i^{гл} \\ -\infty, & y \notin A_i^{гл} \end{cases}$, *где* $A_i^{гл} \subseteq A'$, $i \in I$. *Если* $\forall i \in I$ $A_i^{гл} = A_{гл}$, *то имеет место случай одинаковых ограничений. В дальнейшем мы по умолчанию ограничимся случаем одинаковых ограничений.*

Случай 4. *АС с зависимыми и слабо связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление присутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется по множеству $A' \text{Ç} A_{гл} \text{Ç} A_M$.

Случай 5. *АС с независимыми и сильно связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление отсутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется по множеству A'.

Случай 6. *АС с независимыми и слабо связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление присутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется по множеству $A' \text{Ç} A_M$. Как отмечалось выше, задача управления АС с независимыми и слабо связанными АЭ может быть сведена к параметрической задаче управления набором одноэлементных АС и задаче выбора оптимального значения параметра.

Случай 7. *АС с независимыми и сильно связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление присутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра также ведется по множеству $A' \text{Ç} A_M$.

Случай 8. *АС с зависимыми и сильно связанными АЭ* (глобальные ограничения на управление присутствуют). На втором этапе решения задачи стимулирования максимизация целевой функции центра ведется по множеству $A'\text{Ç} A_M \text{Ç} A_{гл}$.

Таким образом, учет глобальных ограничений на стратегии участников АС (активных элементов и центра) производится методами штрафов или согласования в рамках предложенной в четвертом разделе методики решения задач стимулирования в многоэлементных АС.

До сих пор при рассмотрении задач стимулирования мы предполагали, что единственным управляющим воздействием на АЭ со стороны центра является изменение системы стимулирования. В то же время, одним из параметров модели АС (и, как показал проведенный выше анализ - параметров, существенно влияющих на эффективность стимулирования) являются множества допустимых действий АЭ. Поэтому исследуем задачу управления АС, в которой центр, помимо выбора системы стимулирования, имеет возможность влиять и на множества допустимых действий АЭ[1].

Рассмотрим многоэлементную АС, отличающуюся от исследуемой в четвертом разделе настоящей работы следующим. Пусть центр имеет возможность выбирать, помимо функций стимулирования, управляющие параметры $u_i \in U_i$, $i \in I$, определяющие множества допустимых действий АЭ, то есть $A_i = A_i(u_i)$. Тогда вектор действий активных элементов y принадлежит допустимому множеству $A(u) = \prod_{i=1}^{n} A_i(u_i)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U' = \prod_{i=1}^{n} U_i$.

Предположим, что $\forall\ y \in A'\ \exists\ u \in U': y \in A(u)$. Содержательно данное предположение означает, что множество допустимых управлений центра достаточно «велико» для того, чтобы сделать допустимым любой вектор действий АЭ.

Назначая определенные значения управляющих параметров $u \in U'$, центр несет издержки $c(u)$, $c: U' \to \mathbb{R}^1$, измеряемые в денежном выражении. Тогда целевая функция центра имеет вид (в общем случае будем считать, что затраты АЭ несепарабельны, а индивидуальное стимулирование каждого АЭ зависит от действий всех АЭ):

(4) $F(y, \sigma, u) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y) - c(u)$.

Действия y^*, выбираемые АЭ, являются равновесием Нэша при данных управлениях, то есть $y^* \in E_N(\sigma, u)$. Задача управления в рамках гипотезы благожелательности заключается выборе управляющих параметров, максимизирующих целевую функцию центра на множестве решений игры:

(5) $\max\limits_{y \in E_N(\sigma, u)} F(y, \sigma, u) \to \max\limits_{\sigma \in M,\, u \in U'}$.

Для решения задачи (5) воспользуемся комбинацией результатов, полученных в четвертом разделе, и выражениями (1)-(3),

[1] *Задачи управления АС с переменными множествами допустимых действий рассматривались как в теории активных систем [4, 15, 55], так и в теории иерархических игр [24, 25, 30], причем, в основном, для динамических моделей.*

позволяющими учитывать глобальные ограничения.

Фиксируем произвольный вектор действий АЭ x Î A'. Для того чтобы этот вектор действий был реализуем, необходимо и достаточно, чтобы он был равновесием Нэша (для этого достаточно использовать соответствующую компенсаторную систему стимулирования – см. раздел 4), и был допустимым действием (с точки зрения ограничений на множества действий АЭ). Для удовлетворения последнему условию центр должен выбрать такие значения управляющего параметра u Î U', чтобы ″ i Î I x_i Î $A_i(u_i)$.

Обозначим $U_i(x_i) = \{u_i$ Î $U_i \mid x_i$ Î $A_i(u_i)\}$, i Î I – множество таких управлений, при которых действие x_i является допустимым для i-го АЭ; $U(x) = \prod_{i=1}^{n} U_i(x_i)$. Минимальные затраты центра на обеспечение допустимости вектора действий x Î A' равны:

(6) $\tilde{c}(x) = \min\limits_{u \in U(x)} c(u)$.

Из результатов четвертого раздела настоящей работы следует, что в рассматриваемой модели суммарные затраты центра по реализации действия x Î A' равны $J(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) + \tilde{c}(x)$. Оптимальным для центра действием АЭ является действие y^*, максимизирующее разность между доходом центра и его затратами на стимулирование:

(7) $y^* = arg \max\limits_{x \in A'} \{H(x) - J(x)\} = arg \max\limits_{x \in A'} \{H(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x) - \tilde{c}(x)\}$.

Итак, выражение (7) дает оптимальное решение задачи управления в многоэлементной АС в условиях, когда центр имеет возможность управлять множествами допустимых действий АЭ.

Исследуем теперь задачу синтеза унифицированных управлений, то есть предположим, что центр имеет возможность назначать персонифицированное стимулирование каждому из АЭ, но должен выбрать одно значение управляющего параметра, единое для всех АЭ, то есть $u_i = u$, $U_i = U_U$, i Î I.

Обозначим $U_U(x) = \{u$ Î $U_U \mid$ ″ i Î I x_i Î $A(u)\}$ – множество таких управлений, при которых действие x_i является допустимым для i-го АЭ, $i \in I$. Минимальные затраты центра на обеспечение допустимости вектора действий $x \in A'$ равны: $\tilde{c}_U(x) = \min\limits_{u \in U_U(x)} c_U(u)$, где $c_U: U_U \to \Re^1$ – функция затрат центра.

Оптимальным для центра действием АЭ является следующее действие:

$$(8)\quad y_U^* = arg \max_{x \in A'} \{H(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x) - \tilde{c}_U(x)\}.$$

Выражение (8) дает оптимальное решение задачи синтеза унифицированного управления в многоэлементной АС в условиях, когда центр имеет возможность управлять множествами допустимых действий АЭ.

Обозначим эффективности оптимальных управлений (соответственно, «обычного» и унифицированного):

$$(9)\quad K^* = H(y^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*) - \tilde{c}(y^*),$$

$$(10)\quad K_U^* = H(y_U^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_U^*) - \tilde{c}_U(y_U^*),$$

и сравним величины K^* и K_U^*, то есть оценим качественно потери в эффективности управления, вызванные необходимостью использовать единые для всех АЭ значения управляющего параметра, определяющего множества допустимых действий. Введем следующее предположение о монотонности множеств допустимых действий АЭ по управляющему параметру:

А.8.1. $\forall\ i \in I,\ \forall\ u_i^1, u_i^2 \in U_i = \Re^1:\ u_i^1 \le u_i^2 \to A_i(u_i^1) \subseteq A_i(u_i^2);$
$\forall\ u^1, u^2 \in U_U = \Re^1: u^1 \le u^2 \to \forall\ i \in I\ \ A_i(u^1) \subseteq A_i(u^2).$

Введем также предположение об аддитивности и монотонности функций затрат центра:

А.8.2. $c(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i(u_i)$, $c_U(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i(u)$.

Теорема 8.1. Если выполнены предположения А.8.1 и А.8.2, то $K^* \geq K_U^*$. Если при этом $c_i(\cdot)$ – монотонно возрастающие функции, $i \in I$, то $y_U^* \leq y^*$.

Справедливость утверждения теоремы 8.1 следует из выражений (6)-(10), а также того, что в рамках предположений А.8.1 и А.8.2 выполнено следующее соотношение: $\forall\, y \in A'$ $\tilde{c}\,(y) \leq \tilde{c}_U\,(y)$. •

Пример 12. Пусть $n = 2$, $H(y) = a_1\, y_1 + a_2\, y_2$, $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, $c_i(u_i) = b_i\, u_i$, $A_i(u_i) = [0;\, u_i]$, $i \in I$.

Обозначим $a = \min\limits_{i=1,n} a_i$, $b = \max\limits_{i=1,n} b_i$ и предположим, что $a \geq b$. Тогда оптимальны действия АЭ: $y_i^* = (a_i - b_i) r_i$, $y_{i_U}^* = (a_i - b) r_i$, $i \in I$, а эффективности равны: $K^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b_i)^2}{2r_i}$, $K_U^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i - b)^2}{2r_i}$.

Видно, что $y_i^* \geq y_{i_U}^*$, $i \in I$, $K^* \geq K_U^*$. •

Итак, выше в настоящем разделе мы рассмотрели общие вопросы учета глобальных ограничений на множества допустимых действий АЭ при решении задач стимулирования в многоэлементных АС, а также задачи управления многоэлементными АС, в которых центр, помимо выбора системы стимулирования, имеет возможность управлять множествами допустимых стратегий активных элементов. Перейдем к рассмотрению нескольких практически важных частных случаев, в которых используются полученные теоретические результаты.

9. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ

Производственной цепочкой называется АС, в которой АЭ упорядочены таким образом, что ограничения деятельности (ограничения на выбор стратегией) каждого АЭ определяются действием, выбранным АЭ с меньшим номером, а действие, выбранное данным АЭ, определяет ограничения деятельности АЭ с большим номером, причем АЭ выбирают действия последовательно в порядке, соответствующем их упорядочению. Производственные цепочки[1] адекватно отражают широко распространенные на практике условия взаимодействия экономических объектов, для которых результат деятельности (в детерминированных моделях совпадающий с действием – см. седьмой раздел настоящей работы) одного объекта (продукция) является, например, сырьем, используемым другим объектом и т.д. В рассматриваемой ниже модели считается, что действие, выбранное определенным АЭ, задает множество возможных действий следующего АЭ и т.д. Содержательные интерпретации такой зависимости очевидны.

Пусть в многоэлементной АС активные элементы упорядочены так, что множество возможных действий i-го АЭ определяется действием $i-1$-го АЭ: $A_i = A_i(y_{i-1})$, $i = \overline{2, n}$. Примем, что множество допустимых действий первого АЭ зависит от выбранного центром значения управляющего параметра $u \in U$, то есть $A_1 = A_1(u)$.

Порядок функционирования следующий: центр выбирает систему стимулирования $\{\sigma_i(\cdot)\} \in M$ и управление $u \in U$. Затем АЭ последовательно выбирают свои действия, причем на момент выбора действия каждый АЭ знает: целевые функции и допустимые множества (с точностью до конкретного значения параметра) всех участников АС, выбор центра и действия, выбранные АЭ с меньшими номерами.

Целевая функция АЭ имеет вид:

(1) $f_i(y_i, \sigma_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i)$,

то есть будем считать, что затраты АЭ сепарабельны. Для обоснования этого предположения можно привести следующее рассуждение. Если затраты i-го АЭ зависят от действий АЭ с меньшими номерами, то эту зависимость можно исключить из рассмотрения, так как на момент выбора им своей стратегии действия АЭ с меньшими номерами будут ему известны. Будем считать, что зависеть от действий АЭ с большими номерами затраты i-го АЭ также не могут, так как их действия выбираются позже и зависят (иногда

---

[1] *В теории активных систем производственные цепочки с линейными технологическими связями АЭ рассматривались в работах [15, 17,26, 48].*

однозначно – в рамках принятой гипотезы рационального поведения) от действия i-го АЭ.

Структура взаимодействия участников производственной цепочки изображена на рисунке 6.

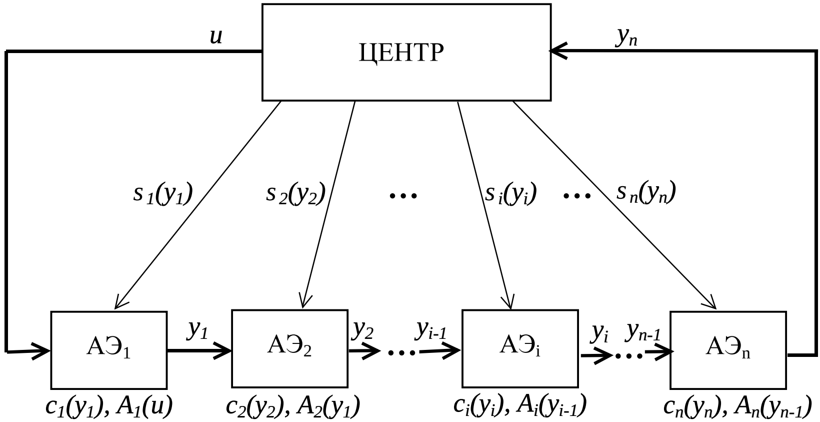

Рис.6 . Производственная цепочка

Введем следующее предположение:

А.9.1. $A_i(y_{i-1}) = [0;\ A_i^+(y_{i-1})] \in \Re_1^+$, где $A_i^+ : \Re_1^+ \to \Re_1^+$ - непрерывная строго монотонно возрастающая функция, такая, что $A_i^+(0) = 0,\ i \in I,\ y_0 = u \in U = [0;\ u_{max}]$.

Если выполнено предположение А.9.1, то существуют n непрерывных строго монотонно возрастающих функций $x_i(y_i)$, обратных к функциям A_i^+, которые позволяют «перевернуть» производственную цепочку, то есть по заданному значению действия n-го АЭ восстановить минимальные действия всех предшествующих АЭ и управление центра, делающих это действие допустимым.

Пусть $x_n \geq 0$ – фиксированное действие n-го АЭ. Для того чтобы оно было допустимым должно выполняться $x_n \leq A_n^+(x_{n-1})$, то есть $x_{n-1} \geq x_n(x_n)$. Выберем $x_{n-1} = x_n(x_n)$. Для допустимости действия x_{n-1} должно выполняться следующее соотношение: $x_{n-2} \geq x_{n-1}(x_{n-1})$.

Выберем $x_{n-2} = x_{n-1}(x_{n-1}) = x_{n-1}(x_n(x_n))$ и т.д.

Таким образом, допустимые планы (действия АЭ) определяются следующим образом:

(2) $x_i(x_n) = x_{i+1}(x_{i+2}(\dots x_{n-1}(x_n(x_n)))), \; i = \overline{1, n-1}$.

Управление со стороны центра должно удовлетворять:

(3) $u(x_n) = x_1(x_2(\dots x_n(x_n)))$.

С другой стороны, по известным зависимостям $A_i^+(\cdot)$, $i \in I$, и значению $u \le u_{max}$ можно восстановить ограничения $A_i^{\max}(u)$ на максимальные допустимые действия каждого АЭ:

(4) $A_i^{\max}(u) = A_i^+(A_{i-1}^+(\dots A_1^+(u)))$, $i \in I$.

Обозначим $c(u)$ – затраты центра на управление и сформулируем полученный (очевидный, но необходимый для решения задачи управления) результат в виде леммы.

<u>Лемма 9.1.</u> Если выполнено предположение А.9.1, то в производственной цепочке реализуемы такие и только такие действия $y \in A'$, которые удовлетворяют:

$$y \in A^* = \{y \in A' \mid y_i \ge x_{i+1}(y_{i+1}), \; i = \overline{1, n-1}, \; u_{max} \ge x_1(y_1)\},$$

или, что то же самое:

$$y \in A^* = \{y \in A' \mid y_1 \le A_1^+(u_{max}), \; y_i \le A_i^+(y_{i-1}), \; i = \overline{2, n}\}.$$

Минимальные затраты центра на реализацию вектора действий $y \in A'$, удовлетворяющего приведенной системе неравенств, равны

(5) $J(y) = c(x_1(y_1)) + \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)$.

Докажем справедливость выражения (5). Минимальное значение управления $u \le u_{max}$, делающее допустимым действие y_1 первого АЭ равно $x_1(y_1)$. Значит, для этого центр должен потратить $c(x_1(y_1))$. Кроме того, действия АЭ y_i, $i \in I$, должны быть реализуемы, то есть на них должны достигаться максимумы целевых функций АЭ. Для этого достаточно использовать квазикомпенсаторную систему стимулирования, требующую (как известно из результатов четвертого раздела настоящей работы) минимальных затрат на стимулирование[1] $\sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)$. •

Воспользуемся результатом леммы 9.1 для решения задачи синтеза оптимальных управлений. Если $H(y)$ – функция дохода центра, то оптимальным реализуемым вектором действий будет вектор

(6) $y^* = arg \max_{y \in A^*} \{H(y) - c(x_1(y_1)) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)\}$.

При решении оптимизационной задачи (6) могут возникнуть как вычислительные трудности, обусловленные сложной структурой задания множества A^*, так и трудности с анализом зависимости оптимального решения от параметров модели. Напомним, что задача (6) формулировалась следующим образом: фиксировалось действие последнего АЭ, после чего по выражению (2) определялось множество допустимых действий предшествующего АЭ и так далее, вплоть до определения по множеству действий первого АЭ множества управлений центра. Построенное таким образом множество A^* допустимых (для всех допустимых управлений) действий как раз и является тем множеством, на котором максимизируется целевая функция центра (см. (6)).

В частном случае (см. конкретизацию ниже) возможен альтернативный подход. Для фиксированного управления $u \in U$ определим множество действий АЭ, допустимых при данных управлениях: $A_i(u) = [0;\ A_i^{\max}(u)]$, где $A_i^{\max}(u)$ вычисляется в соответствии с (4). Найдем вектор действий $y^*(u)$, максимизирующий разность между доходом центра и его затратами на стимулирование на множестве $A(u) = \prod_{i=1}^{n} A_i(u)$:

$$y^*(u) = arg \max_{y \in A(u)} \{H(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)\}.$$

---

[1] *Если производственные возможности АЭ ограничены (см., например, модель производственной цепочки в [48]), то эти ограничения могут быть учтены соответствующей модификацией функций затрат АЭ.*

Обозначим $J(u) = H(y^*(u)) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i^*(u))$. Если $\forall\ i \in I\ \forall\ u \in U$ $y_i^*(u) = A_i^{\max}(u)$, то оптимально следующее значение управления: $u^* = arg \max_{u \in U} \{J(u) - c(u)\}$.

При использовании предложенного подхода наибольшую трудность (в первую очередь – вычислительную) представляет задача определения зависимости $y^*(u)$, второй же этап – этап поиска оптимального значения управления является скалярной задачей оптимизации.

Рассмотрим задачу стимулирования первого рода[1], в которой целевая функция центра не убывает по действиям всех АЭ. Если воспользоваться монотонностью и непрерывностью функций $A_i^+(\cdot)$, обеспечиваемой предположением А.9.1, то можно предложить более простой (нежели чем использовался для задачи второго рода) метод решения задачи стимулирования, в котором по сравнению с выражением (6) существенно упрощается вид допустимого множества.

<u>Теорема 9.1.</u> Если выполнено предположение А.9.1, то оптимальное решение задачи стимулирования первого рода, в которой целевая функция центра не убывает по действиям всех АЭ, для рассматриваемой производственной цепочки имеет вид:

$$(7)\ u = u^*,\ s_i(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i), & y_i = y_i^*(u^*) \\ 0, & y_i \neq y_i^*(u^*) \end{cases},$$

где $y^*(u) = (y_1^*(u),\ y_2^*(u),\ \ldots,\ y_n^*(u))$, $y_1^*(u) = A_1^+(u)$, $y_i^*(u) = A_i^+(y_{i-}^*(u))$, $i = \overline{2, n}$,

$$u^* = arg \max_{u \in U} \{H(y^*(u)) - c(u)\}.$$

Применим полученные результаты для частного, но чрезвы-

---

[1] *Напомним, что в задаче стимулирования первого рода целевая функция центра не зависит явным образом от стимулирования (затраты центра на стимулирование не вычитаются из дохода центра) и совпадает с его функцией дохода.*

чайно часто встречающегося на практике, случая, когда доход центра $H = H(x_n)$ зависит только от действия последнего АЭ в производственной цепочке. Содержательно, при этом последний АЭ производит конечную продукцию, а центр поставляет на вход производственной цепочки исходное сырье в объеме $u \in [0; u_{max}]$. Ограничение на максимальный объем исходного сырья порождает ограничение на множество X возможных действий последнего АЭ:

$$(8)\ x_n \in X = [0; x_{max}],\ x_{max} = A_n^+(A_{n-1}^+(\ldots A_1^+(u_{max}))).$$

Для реализации действия x_n n-го АЭ центр должен поставить исходное сырье в объеме $u(x_n) = x_1(x_2(\ldots x_n(x_n)))$ (см. выражение (3)). Суммарные затраты на управление при этом равны (см. выражение (2)):

$$(9)\ J(x_n) = c(x_1(x_2(\ldots x_n(x_n)))) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1}(x_{i+2}(\ldots x_{n-1}(x_n(x_n))))) + c_n(x_n).$$

Оптимальное решение задачи управления (оптимальное реализуемое действие n-го АЭ) является решением следующей скалярной задачи оптимизации:

$$(10)\ x_n^* = arg \max_{x_n \in X} \{H(x_n) - J(x_n)\},$$

где множество X определяется выражением (8), а суммарные затраты на управление – выражением (9).

Выражения (8)-(10) свидетельствуют о том, что в рассматриваемой модели производственная цепочка может быть заменена одним активным элементом, имеющим зависимость правой границы множества допустимых действий от управления, отражаемую выражением (8), и функцию затрат:

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1}(x_{i+2}(\ldots x_{n-1}(x_n(x))))) + c_n(x).$$

Затраты центра на управление (без учета затрат на стимулирование) при этом определяются: $\tilde{c}(x) = c(x_1(x_2(\ldots x_n(x))))$. Решение задачи стимулирования в АС с таким (одним!) АЭ (см. также выше теорему 8.1 и модель, для которой она была сформулирована) совпадает с решением (10) задачи управления производственной цепочкой из n АЭ.

Двойственным подходом является рассмотрение в рамках предположения А.9.1 явной зависимости реализуемого действия n-го АЭ от управления $u \in U$ центра. При этом максимальное реализуемое действие n-го АЭ связано с управлением следующим образом:

$$x_n \le x_{max}(u) = A_n^+(A_{n-1}^+(\dots A_1^+(u))).$$

Затраты центра на управление (с учетом затрат на стимулирование), зависящие только от управления, равны:

$$J(u) = c(u) + \sum_{i=1}^{n} c_i(A_i^+(A_{i-1}^+(\dots A_1^+(u)))).$$

Реализуемым оказывается следующий вектор действий АЭ: $y_i^*(u) = A_i^+(A_{i-1}^+(\dots A_1^+(u)))$, $i \in I$, следовательно, решение задачи управления имеет вид:

$$u^* = arg \max_{u \in U} \{H(y_n^*(u)) - J(u)\}.$$

Пример 13. Пусть $A_i^+(y_{i-1}) = g_i\, y_{i-1}$, $g_i > 0$, $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $A_1^+ = g_1\, u$, $c(u) = b\, u$, $H(y_n) = a\, y_n$. Обозначим $l_i = \prod_{j=1}^{i} g_j$ и допустим, что $a\, l_n \ge b$, тогда $x_{max} = l_n\, u_{max}$, а целевая функция центра имеет вид: $F(x) = (a - b / l_n)\, x - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i^2}{r_i}\right] \frac{x^2}{2\, l_n^2}$.

Если ограничения на максимальный объем исходного сырья отсутствуют, то оптимальным оказывается следующее реализуемое действие n-го АЭ: $x_n^* = (a\, l_n^2 - b\, l_n) / \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i^2}{r_i}\right]$.

Двойственный подход заключается в выражении целевой функции центра через управляющий параметр u.

Имеем: $y_i = l_i\, u$, $i \in I$, тогда $F(u) = (a\, l_n - b)\, u - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i^2}{r_i}\right] \frac{u^2}{2}$.

Вычисляем $u^* = arg \max\limits_{u \geq 0} F(u) = (a\, l_n - b) \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i^2}{r_i} \right]$. При этом, естественно, выполнено $x^* = l_n\, u^*$. Если рассматривать b как цену за сырье, a - как цену за готовую продукцию, а $1/l_n$ – как “коэффициент усиления” производственной цепочки, то неравенство $a\, l_n \geq b$ можно интерпретировать как условие того, что отношение «выходной» и «входной» цен должно быть не меньше «коэффициента усиления» рассматриваемой системы. •

В проводимом выше рассмотрении производственных цепочек считалось, что каждый АЭ выбирает свою стратегию сразу после того, как выбрал свою стратегию предшествующий АЭ, то есть никак не учитывался фактор времени. Рассмотрим некоторые способы учета времени[1] в моделях производственных цепочек.

Пусть в результате решения задачи стимулирования для производственной цепочки получены значения оптимальных планов. Предположим, что i-му АЭ для выполнения плана (без дополнительного стимулирования за сокращение времени) требуется время t_i, $i \in I$. Сокращение времени выполнения заданного (фиксированного) плана на время Δt_i требует от i-го АЭ дополнительных затрат $c_i(\Delta t_i)$, где $c_i(\cdot)$ – монотонная выпуклая функция, $c_i(0) = 0$, $i \in I$. Тогда продолжительность всего производственного цикла равна $T = T_0 - \Delta T$, где $T_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i$, $\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$.

Сокращая время выполнения плана на ΔT, центр получает доход $H(\Delta T)$ и несет затраты $c(\Delta T) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\Delta t_i)$.

---

[1] *В общем случае учет времени и технологических связей между АЭ производится в рамках сетевого планирования и управления (СПУ) [5, 11], широко используемого в управлении проектами [16, 23]. Задачи стимулирования в моделях СПУ практически не исследовались (исключения - [11, 16, 48]). Приводимое ниже рассмотрение влияние стимулирования на временные характеристики производственных цепочек является обобщением результатов, полученных в [48], и ни в коей мере не претендует на полноту исследования задач стимулирования в СПУ.*

Пример 14. Пусть центр может вкладывать и привлекать средства по ставке *d%*. Предположим, что выполнение одного производственного цикла требует от центра вложений (затраты на сырье, стимулирование АЭ и т.д.) C_0 собственных средств и дает доход (независимо от времени завершения цикла) доход H_0.

Тогда, сокращая продолжительность цикла на время DT, центр к моменту T получает дополнительный доход $H(DT) = H_0\,(e^{d\,\Delta T} - 1)$.

Другая интерпретация зависимости дохода от времени заключается в следующем. Пусть центр привлек внешние средства в объеме C_0. Тогда сокращение продолжительности производственного цикла приведет к сокращению платежей по процентам. Условие выгодности выполнения производственного цикла на привлекаемые средства за время T_0 имеет вид: $C_0\, e^{d\,T_0}$ £ H_0. Выигрыш от сокращения времени равен: $H(DT) = C_0\, e^{d\,T_0}\,(1 - e^{-d\,\Delta T})$.

Возможны также варианты линейного дохода: $H(DT) = d\, DT$. Содержательно последний случай соответствует тому, что центр выплачивает постоянную сумму за единицу времени аренды оборудования (или хранение промежуточной и конечной продукции), или постоянные (в единицу времени) штрафы за загрязнение окружающей среды в процессе производства и т.д. •

Решение задачи управления разбивается на два этапа. Первый этап – поиск таких величин сокращения времени каждым АЭ: Dt_i^*, i Î I, которые минимизируют затраты при условии $DT = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\Delta t_i) \ ® \min_{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \Delta T} .$$

Результатом первого этапа является зависимость минимальных затрат от времени сокращения продолжительности всего цикла: $c^*(DT) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\Delta t_i^*)$. Второй этап заключается в поиске такого времени сокращения DT, которое минимизировало бы разность между доходом и минимальными затратами:

$$\Delta T^* = arg \max_{\Delta T \geq 0} \{H(\Delta T) - c^*(\Delta T)\}.$$

Пример 15. Пусть АЭ имеют следующие функции затрат: $c_i(\Delta\tau_i) = r_i\ \varphi(\Delta\tau_i/r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – монотонная выпуклая функция, $\varphi(0)=0$. Тогда $c^*(\Delta T) = W\ \varphi(\varphi'(\Delta T/W))$, где $W = \sum_{i=1}^{n} r_i$ (см. подробности в [7, 36].

Пусть имеет место случай линейного дохода, то есть $H(\Delta T) = d\Delta T$, тогда ΔT^* определяется как решение уравнения:

$$\varphi'(\varphi'(\Delta T/W))\ \varphi''(\Delta T/W) = d.$$

Например, если АЭ имеют квадратичные затраты, то есть выполнено: $\varphi(z) = z^2/2$, то $\Delta\tau_i^* = r_i\, d$, $i \in I$, $\Delta T^* = d\ W$. •

Итак, мы описали алгоритм поиска оптимальной продолжительности производственного цикла для фиксированного плана. Варьируя все допустимые планы (см. выше), можно получить множество значений целевой функции центра при различных комбинациях планов и продолжительностей, а затем выбрать ту их комбинацию, которой соответствует максимальная эффективность управления, то есть максимальное значение целевой функции центра.

Таким образом, мы решили задачу управления (с учетом времени) для производственной цепочки, в которой для каждого плана каждого АЭ известны затраты на сокращение времени по выполнению этого плана. В более общем случае могут быть заданы зависимости затрат АЭ одновременно от планов и времени: $c_i(y_i, \tau_i)$, $i \in I$. Относительно зависимостей $c_i(\cdot, \cdot)$ обычно предполагается, что это гладкие функции своих переменных, обладающие следующими свойствами: $\frac{\partial c_i}{\partial y_i} \geq 0$, $\frac{\partial c_i}{\partial \tau_i} \leq 0$, $\frac{\partial^2 c_i}{\partial y_i^2} \geq 0$, $\frac{\partial^2 c_i}{\partial \tau_i^2} \geq 0$, $\frac{\partial^2 c_i}{\partial y_i\, \partial \tau_i} \leq 0$, $i \in I$. Примером могут служить функции: $c_i(y_i, \tau_i) = (y_i/\tau_i)^2/2r_i$ (содержательные интерпретации очевидны).

Выражения (2)-(3) и (8)-(9) позволяют однозначно выразить план i-го АЭ через план n-го АЭ: $y_i = y_i(y_n)$. Пусть $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$ - продолжительность производственного цикла при временах $\{t_i\}$, $c(u(y_n), t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – штрафы (или доход) центра. Обозначим $J(y_n, T)$ – минимальные затраты центра на реализацию плана y_n за время T. Таким образом, $J(y_n, T)$ – результат решения следующей задачи:

$$J(y_n, T) = c(u(y_n), t_1, t_2, \ldots, t_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i(y_n),\ t_i) \to \min_{\sum_{i=1}^{n} t_i = T} .$$

Имея зависимость $J(y_n, T)$ можно найти оптимальный план n-го АЭ и оптимальную продолжительность производственного цикла:

$$H(x_n) - J(y_n, T) \to \max_{y_n \in X,\, T \geq 0} .$$

Завершив краткое обсуждение проблем учета фактора времени в управлении производственными цепочками, вернемся к анализу задач стимулирования.

Выше мы рассматривали производственную цепочку, в которой центр использовал оптимальную – квазикомпенсаторную – систему стимулирования. На практике распространены ситуации, когда результаты деятельности экономических объектов продаются и покупаются по фиксированной цене за единицу продукции, сырья и т.д. Этот случай соответствует использованию пропорциональных систем стимулирования.

Рассмотрим i-ый АЭ производственной цепочки, который имеет возможность приобретать сырье (результат деятельности i-1-го АЭ) у предшествующего АЭ, центра или вне рассматриваемой АС (например, на рынке) по цене a_i и продавать свою продукцию (i+1-му АЭ, центру или вне АС) по цене b_i. Закупка сырья в объеме $x_i(y_i)$, минимально необходимом для производства продукции в объеме y_i, требует затрат $a_i\ x_i(y_i)$. Собственные затраты i-го АЭ равны $c_i(y_i)$, а получаемый им от продажи продукции доход равен $b_i\, y_i$. Таким образом, целевая функция i-го АЭ имеет вид:

(11) $f_i(a_i, b_i, y_i) = b_i\, y_i - c_i(y_i) - a_i\, x_i(y_i),\ i \in I.$

Обозначим $y_i^*(a_i, b_i) = arg \max\limits_{y \geq 0} f_i(a_i, b_i, y), i\ \hat{I}\ I$.

Если АЭ составляют производственную цепочку, то есть продают сырье и продукцию друг другу в последовательности, определяемой используемой технологией, то должно выполняться:

(12) $a_i = b_{i-1}, i\ \hat{I}\ I$,

где $a_1 = b_0$ – цена продажи сырья центром, а $b_n = a_0$ – цена, по которой центр покупает готовую продукцию.

Условие баланса (ненакопления продукции и сырья) имеет вид:

(13) $y_{i-1}^*(a_{i-1}, b_{i-1}) = x_i(y_i^*(a_i, b_i)), i\ \hat{I}\ I$.

Необходимым условием успешного функционирования производственной цепочки является существование таких цен и объемов выпуска, при которых существует вектор действий, такой, что значения целевых функций (11) всех АЭ неотрицательны[1]:

(14) $f_i(a_i, b_i, y_i^*(a_i, b_i))\ ^3\ 0, i\ \hat{I}\ I$.

Кроме этого, необходимо, чтобы значение целевой функции центра было неотрицательно:

(15) $H((y_1^*(a_1, b_1), y_n^*(a_n, b_n))) + a_1\, x_1(y_1^*(a_1, b_1))\ -$

$$- b_n\, y_n^*(a_n, b_n))\ ^3\ 0,$$

где $H(y_1, y_n)$- доход центра от функционирования производственной цепочки. Например, если центр закупает сырье на рынке по цене a_r и продает готовую продукцию на рынке по цене b_r, то:

(16) $H(y_1, y_n) = b_r\, y_n - a_r\, x_1(y_1)$.

Следует отметить, что в рассматриваемой модели центр играет роль «спекулянта» (то есть "играет" на разнице цен $(a_1 - a_r)$, $(b_r - b_n)$) и, если это позволяют содержательные интерпретации модели, может быть исключен из рассмотрения приравниванием его собственных цен рыночным[2]: $a_1 = a_r$, $b_n = b_r$.

---

[1] *В общем случае в правых частях неравенств (14) могут фигурировать неотрицательные уровни полезности, которые требуется гарантировать соответствующим АЭ для участия в рассматриваемой АС.*

[2] *Если допустить возможность закупки сырья и продажи продукции i-ым АЭ либо только на рынке по ценам a_{ir} и b_{ir}, либо в АС, то условие участие*

Роль центра может быть иной - предположим, что он сам покупает у элементов продукцию и продает им сырье по фиксированным ценам (так называемые внутренние цены). В этом случае условия (12) и (15) уже не имеют места. Содержательно, центр может поддерживать одних АЭ, снижая для них цену на сырье за счет собственных ресурсов, например – за счет занижения цен покупки продукции у других АЭ, кратковременного привлечения беспроцентных (в рассматриваемой модели) внешних средств и т.д. В этом случае для него должно выполняться условие неотрицательности финансового баланса за весь производственный цикл:

$$(17)\ \sum_{i=1}^{n} \{a_i\, x_i(y_i^*(a_i, b_i)) - b_i\, y_i^*(a_i, b_i)\} +$$

$$+ b_r\, y_n^*(a_n, b_n) - a_r\, x_1(y_1^*(a_1, b_1)) \geq 0.$$

Обозначим: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,

$L = \{(a,b) \mid \forall\ i \in I\ (a_i,b_i)$ удовлетворяют (12)-(16)$\}$,

$L^* = \{(a,b) \mid \forall\ i \in I\ (a_i,b_i)$ удовлетворяют (13), (14) и (17)$\}$.

Области L и L^* задают для соответствующих моделей множества допустимых цен. Если оказывается, что $L = \varnothing$ ($L^* = \varnothing$), то это означает, что не существует цен, при которых данная производственная цепочка может функционировать. Другими словами, условие $L \neq \varnothing$ ($L^* \neq \varnothing$) является условием реализуемости (устойчивости) соответствующей производственной цепочки.

Лемма 9.2. $L \subseteq L^*$.

Покажем, что, если для некоторого набора цен (a, b) выполнены условия (12)-(16), то для него же выполнены и условия (13), (14) и (17). Подставляя (15)-(16) в (17), замечаем, что достаточно показать, что выполнено

$$(18)\ \sum_{i=2}^{n-1} \{a_i\, x_i(y_i^*) - b_i\, y_i^*\} + a_n\, x_n(y_n^*) - b_1\, y_1^* \geq 0.$$

данного АЭ в производственной цепочке примет вид: $a_i \leq a_{ir}$, $b_i \geq b_{ir}$. Рассмотрение моделей, в которых возможна закупка части сырья (и/или продажа части продукции) на рынке, выходит за рамки настоящей работы.

Воспользовавшись (13), из (18) получим:

$$\sum_{i=2}^{n-1} \{a_i\ y_{i-1}^{*} - b_i\ y_i^{*}\} + a_n\ y_{n-1}^{*} - b_1\ y_1^{*} \geq 0.$$

Воспользовавшись (12), получим: $\sum_{i=2}^{n} b_{i-1}\ y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\ y_i \geq 0.$

Левая часть последнего неравенства тождественно равна нулю. •

Содержательно лемма 9.2 означает, что, если центр сам осуществляет координацию покупки и продажи в управляемой АС, то множество равновесных цен, а, следовательно, и множество допустимых состояний системы шире[1], чем в случае, когда центр осуществляет только закупку исходного сырья и реализацию готовой продукции. Другими словами, лемма 9.2 дает объяснение системообразующего фактора – объединение АЭ в систему и наличие управляющего органа – центра – приводит к расширению множества допустимых состояний системы, что может рассматриваться как теоретическое обоснование выгодности для ряда случаев существования объединений экономических объектов, связанных единым технологическим циклом, по сравнению с независимой деятельностью каждого из них как субъекта рынка.

<u>Пример 16.</u> Пусть $n = 2$, $A_i^{+}(y_{i-1}) = g_i\, y_{i-1}$, $g_i > 0$, $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $A_1^{+} = g_1\, u$. Кроме того, предположим, что центр продает АЭ сырье и покупает готовую продукцию по рыночным ценам, то есть $a_1 = a_r$, $b_2 = b_r$. Вычисляем $y_i^{*} = (b_i - a_i/g_i)\, r_i$, $i = 1, 2$. Выписывая систему неравенств (12)-(16) и преобразовывая ее, получаем, что производственная цепочка осуществима, если выполнено следующее условие:

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{b_2}{a_1} \geq max \left\{\frac{1}{g_1 g_2}; \frac{r_1 (g_2)^2 + (r_2)^2}{g_1 g_2\, r_2}\right\}.$$

Отметим, что в левой части неравенства фигурируют цены (в том числе – рыночные), то есть внешние по отношению к АС

[1] *С расширением множества допустимых состояний АС, очевидно, не уменьшается эффективность управления и значения других целевых функционалов, максимизируемых на этом множестве.*

параметры, а в правой части – параметры самой производственной цепочки. Поэтому последнее неравенство содержательно может интерпретироваться как ограничение на множество рыночных цен, при которых данная производственная цепочка может успешно функционировать, или как ограничение на множество значений параметров производственной цепочки, при которых она может успешно функционировать при данных рыночных ценах на сырье и готовую продукцию. •

Выше в настоящем разделе рассматривались производственные цепочки, в которых АЭ по одному последовательно выбирали свои стратегии. Обобщим полученные результаты на случай произвольной технологической сети – «обобщенной» производственной цепочки.

Пусть множество I активных элементов разбито на T непересекающихся подмножеств $\{I_t\}$, $t = \overline{1, T}$, $I_i \cap I_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, T}$, $\bigcup_{t=\overline{1,T}} I_t = I$, кроме того, пусть выполнено: $\forall\ k \in I_t$, $\forall\ l \in I_{t+1}$ $k < l$, $t = \overline{1, T-1}$. Предположим, что АЭ из множества I_t выбирают свои стратегии одновременно и независимо в момент времени t, а множество допустимых действий любого АЭ из множества I_t зависит от действий, выбранных АЭ из множества I_{t-1} (в предыдущем периоде): $A_i(Y_{t-1}) = [0;\ A_i^+(Y_{t-1})]$, $i \in I_t$, где Y_t – вектор действий АЭ из множества I_t, $t = \overline{1, T}$, $A_i = [0;\ u_i]$, $i \in I_1$. Управление $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{|I_1|}) \in U' = \prod_{i \in I_1} U_i$ выбирается центром.

Содержательно, технологический цикл в рассматриваемой модели состоит из T этапов, в течение каждого из которых выполняются независимые операции, причем для начала работ по каждому из этапов требуется завершение работ предыдущего этапа, и результаты предыдущего этапа определяют множество результатов, которые могут быть достигнуты на данном этапе. Множество результатов, которые могут быть достигнуты на первом этапе, зависят от управлений со стороны центра (например, поставок исходного сырья для всего производственного цикла).

Относительно функций затрат АЭ сделаем следующее предположение: функции затрат несепарабельны, но затраты каждого АЭ зависят только от действий АЭ, выбирающих свои действия в том же периоде, то есть $c_i = c_i(Y_t)$, $i \in I_t$, $t = \overline{1, T}$ (см. содержательное обоснование этого предположения выше).

Итак, центр имеет возможность выбирать управляющие параметры $u \in U'$, неся при этом затраты $c(u)$, и назначать систему стимулирования $\{\sigma_i(\cdot)\}$. Будем считать, что в общем случае стимулирование АЭ зависит только от действий АЭ, выбирающих свои действия в том же периоде, то есть $\sigma_i = \sigma_i(Y_t)$, $i \in I_t$, $t = \overline{1, T}$.

Относительно функции дохода центра предположим, что она зависит от действий всех АЭ.

В силу причинно-следственных связей (технологических зависимостей) игра АЭ распадается на T последовательно разыгрываемых игр, множество допустимых стратегий АЭ в каждой из которых (за исключением первой) определяется решением предыдущей игры, а множество допустимых стратегий АЭ в первой игре определяется управлением со стороны центра. Для каждой из этих игр могут быть независимо использованы результаты синтеза оптимальных функций стимулирования в многоэлементных АС с несепарабельными затратами[1] (см. модель S4 выше). Значит, остается «связать» эти игры между собой.

Одним из возможных способов учета последовательной взаимозависимости результатов различных периодов является использованный выше при рассмотрении «обычных» производственных цепочек метод, заключающийся в последовательном установлении зависимости максимальных допустимых действий АЭ и управлений центра. Введем следующее предположение

А.9.2. $c(\cdot)$, $A_i^+(\cdot)$ и $c_i(\cdot)$, $i \in I$ – непрерывные, строго монотонные функции своих переменных.

---

[1] *В частности, для того, чтобы в t-ой игре вектор Y_t^* был равновесием в доминантных стратегиях требуются (минимальные!) затраты на стимулирование, равные:* $\sum_{j \in I_t} c_j(Y_t^*)$.

Фиксируем вектор $Y_T = (y_{n-|I_T|}, \ldots, y_n) \in A_T = \prod_{i \in I_T} A_i$. Вычислим такое множество $\tilde{A}_{T-1}(Y_T) \in A_{T-1} = \prod_{i \in I_{T-1}} A_i$ векторов действий АЭ, принадлежащих множеству I_{T-1}, выбор которых обеспечивает допустимость вектора Y_T, то есть $\tilde{A}(Y_T) = \{Y_{T-1} \in A_{T-1} \mid Y_T \in A_T(Y_{T-1})\}$. Продолжая аналогичным образом, получим совокупность множеств:

$$\tilde{A}_j(Y_{j+1}) = \{Y_j \in A_j \mid Y_{j+1} \in A_{j+1}(Y_j)\},\ j = \overline{1, T-1}.$$

Вычислим множество векторов управлений, обеспечивающих допустимость вектора Y_1: $\tilde{U}(Y_1) = \{u \in U \mid Y_1 \in A_1(u)\}$.

Таким образом, реализуемыми оказываются такие и только такие вектора действий АЭ, которые удовлетворяют одному из следующих условий:

(*19*) $u \in U,\ Y_1 \in A_1(u),\ Y_j \in A_j(Y_{j-1}),\ j = \overline{2, T}$;

(*20*) $Y_T \in A_T,\ Y_j \in \tilde{A}_j(Y_{j+1}),\ j = \overline{1, T-1},\ u \in \tilde{U}(Y_1)$.

Условия (19) и (20) отражают технологические ограничения, наложенные на «одновременный» выбор действий АЭ-участниками производственной цепочки.

Обозначим A^* - множество всех векторов действий АЭ и управлений центра, которые удовлетворяют условиям (19) или (20). Тогда задача синтеза оптимального управления заключается в выборе реализуемого (из множества A^*) вектора действий АЭ и вектора управлений, максимизирующих целевую функцию центра:

(*21*) $$(u^*, y^*) = \arg \max_{(u, y) \in A^*} \{H(y) - c(u) - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I_t} c_i(Y_t)\}.$$

Задача чрезвычайно трудоемка с вычислительной точки зрения. Кроме того, без детального анализа трудно предложить какое-либо ее простое (оптимальное или «почти»-оптимальное) решение[1].

---

[1] *Интересно отметить, что в большинстве исследованных задач стимулирования основную проблему составляло нахождение системы стимули-*

Допущение о том, что функция дохода центра зависит только от действий АЭ, выбираемых в последнем периоде, в обобщенных производственных цепочках, в отличие от «простых» производственных цепочек (см. (8)-(10)), в общем случае не упрощает задачи (21). Качественно это объясняется тем, что для действия некоторого АЭ в общем случае существует несколько действий АЭ с меньшими номерами, делающих это действие допустимым с минимальными затратами.

Если предположить, что $A_i^+(\cdot)$, $i \in I$, - взаимно однозначные отображения[1], то по аналогии с «обычной» производственной цепочкой для заданного вектора действий АЭ из множества I_T однозначно (!) вычисляются соответствующие вектора действий АЭ из множества I_{T-1} и т.д. (см. (8)-(10)).

При $H = H(Y_T)$ для задачи (21) может быть использован следующий эвристический алгоритм[2] последовательной минимизации затрат, достаточно часто применяемый на практике. Для АЭ из множества I_T решается задача синтеза оптимальной системы стимулирования – ищется действие $x_T = arg \max\limits_{y_T \in A_T} \{H(y_T) - \sum\limits_{i \in I_T} c_i(Y_T)\}$. Далее для АЭ из множества I_{T-1} решается задача стимулирования: $x_{T-1} = arg \min\limits_{y_T \in A_{T-1}(x_T)} \sum\limits_{i \in I_{T-1}} c_i(Y_{T-1})$ и т.д., то есть на каждом шаге от T-1-го до первого минимизируются затраты по реализации действий, обеспечивающих допустимость действий, вычисленных на предыдущем шаге. Если включить в рассматриваемую модель фактор времени, то такой эвристический подход

рования, реализующей заданное действие, а этап планирования, то есть выбора оптимального реализуемого действия, как правило, не вызывал значительных трудностей. Поэтому (21) является одним из немногих случаев, когда основную трудность составляет именно решение задачи оптимального согласованного планирования.

[1] *Содержательно подобное предположение может отражать требование комплектности, то есть невозможности взаимозамены компонентов, используемых при данной технологии.*

[2] *В общем случае данный алгоритм не гарантирует нахождения оптимального решения.*

вполне согласован с используемыми в сетевом планировании и управлении методами оптимизации сетей по времени и стоимости (см., например, [5, 11, 23]).

10. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ И ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВА АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ

В предыдущих разделах настоящей работы рассматривались задачи стимулирования в многоэлементных активных системах с фиксированным составом участников, то есть набор активных элементов, подчиненных центру, был фиксирован. Коль скоро мы умеем решать задачу стимулирования для фиксированного состава АС, появляется возможность рассмотрения задачи формирования состава активной системы, то есть задачи определения оптимального (в оговариваемом ниже смысле) набора АЭ, которых следует включить в систему, и тех их действий, выбор которых наиболее выгоден для центра. Приведем формальную постановку задачи.

Пусть имеются N АЭ – потенциальных участников (претендентов на участие) активной системы. Обозначим: $\mathcal{A}$ – множество всех подмножеств множества[1] $N = \{1, 2, \dots, N\} \cup \{\emptyset\}$, $I \in \mathcal{A}$ – некоторый элемент этого множества – *состав АС*, включающий n активных элементов $|I| = n \le N$.

Из предшествующего изложения известно, что в отсутствии ограничений на стимулирование минимальные затраты центра по побуждению АЭ из множества I к выбору вектора действий $y_I \in A_I = \prod_{i \in I} A_i$ равны[2]

(1) $J(y_I) = \sum_{i \in I} c_i(y_I)$.

Если функция дохода центра $H(\cdot, I)$ в АС с составом I определена на множестве A_I действий АЭ, входящих в АС, и равна нулю

[1] *Мы надеемся, что использование одного и того же символа для обозначения множества потенциальных участников АС и их числа не приведет к путанице.*

[2] *Затраты АЭ в общем случае несепарабельны.*

при I = Æ, то есть

(2) H(ᵡ, I) = $H(y_I)$,

то эффективность оптимального управления составом I равна

(3) $F(I) = \max\limits_{y_I \in A_I} \{H(y_I) - J(y_I)\}$.

Тогда *задача определения оптимального состава АС* может быть формально записана как задача определения допустимого состава I^*, $|I^*| = n^*$, максимизирующего эффективность (3):

(4) $I^* = arg \max\limits_{I \in \aleph} F(I)$

при условии, что $F(I)$ ³ 0.

Последнее условие означает, что выигрыш центра должен быть неотрицателен (условие индивидуальной рациональности центра), так как центр всегда имеет возможность получить нулевой выигрыш, не включая в состав АС ни одного АЭ.

Формулировка и решение задачи (4) в общем случае сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, если затраты на стимулирование (1) определяются для произвольного состава АС тривиально (переход от одного состава АС к другому составу производится так, что сумма затрат АЭ вычисляется по АЭ, включенным в АС), то способы определения функции дохода центра (2) и индивидуальных затрат АЭ $c_i(y_I)$ (в общем случае зависящих от действий всех АЭ, входящих в АС) не столь очевидны. Действительно, нужно четко представлять для любого состава I Î À как с содержательной, так и с формальной точки зрения, к каким изменениям дохода центра и затрат каждого из АЭ приводит замена произвольного АЭ i Î I на произвольный АЭ j Î $N \setminus I$.

Вторая трудность заключается в высокой вычислительной сложности задачи (4). Число элементов множества À равно 2^N, то есть велико и быстро растет с ростом N.

Для определения оптимального состава АС необходимо для каждого набора АЭ I Î À решить задачу стимулирования, то есть при N потенциальных претендентах на участие в АС необходимо решать 2^N задач стимулирования, а затем в соответствии с (4) искать состав, максимизирующий целевую функцию центра. Другими словами, вторая трудность является традиционной «проблемой» дискретной оптимизации[1]. Следовательно, необходимо предлагать эвристические алгоритмы решения, оценивать их сложность, эффективность и т.д.

Частным случаем задачи определения оптимального состава АС, является *задача оптимизации заданного состава АС*, формулируемая следующим образом. Имеется АС, включающая множество АЭ I_0. Известно также множество J потенциальных участников, I_0 È $J = N$ и задан критерий эффективности $K(I)$ состава I Î À. Требуется найти оптимальный состав, то есть

$$I^* = arg \max_{I \in \aleph} K(I).$$

Частным случаем задачи оптимизации заданного состава АС, является задача определения максимальных подмножеств A Î 2^{I_0} и B Î 2^J таких, что A Í I^*, B Í I^*. Еще более частной является (случай, когда $|A| = 1$ или $|B| = 1$) задача принятия решения об увольнении или найме одного АЭ – так называемая *задача о приеме на работу*.

Прежде чем переходить к изложению оригинальных результатов по задачам синтеза состава АС, приведем краткий обзор подходов и результатов решения этого класса задач, полученных в теории управления социально-экономическими системами.

Впервые в теории активных систем задачи формирования состава АС рассматривались в работе [5] для случая назначения проектов. Вообще, задача о назначении с неизвестными центру и сообщаемыми ему активными элементами параметрами эффективности их деятельности на различных должностях неоднократно привлекала внимание исследователей, особенно в области управления проектами – так называемые сложные конкурсы исполнителей и др. [21].

---

[1] *Несмотря на внешнюю схожесть, задача (4) не является канонической задачей о назначении [5]. Напомним, что в задаче о назначении известен эффект деятельности каждого претендента на каждой должности. В нашем случае распределение должностей соответствовало бы фиксированному вектору действий (или конечному множеству возможных действий АЭ), но, фактически, при фиксированном составе АС производится выбор оптимальных векторов действий АЭ, вошедших в АС (см. выражение (3)).*

В работе [8] рассмотрена модель динамики трудовых ресурсов между несколькими предприятиями в зависимости от условий оплаты труда и неденежных факторов вознаграждения работников.

Обширный класс задач определения оптимального числа нанимаемых работников в зависимости от внешних условий рассматривался в работах по теории контрактов [57-65]. Обзор основных результатов прикладных задач теории контрактов (так называемых «трудовых контрактов») приведен в [9]. Обычно в работах зарубежных авторов по теории контрактов считается, что на момент заключения контракта будущее значение состояния природы (внешнего неопределенного фактора, определяющего условия функционирования АС) неизвестно ни центру, ни потенциальным работникам, но они имеют о нем информацию в виде вероятностного распределения. Задача центра заключается в определении зависимости вознаграждения работников от результатов их деятельности или действий (причем работники, как правило, считаются однородными) и числа работников, нанимаемых в зависимости от состояния природы, которые максимизировали бы математическое ожидание целевой функции центра при условии, что всем принятым на работу гарантируется уровень полезности не меньший резервной заработной платы (при этом может добавляться условие обеспечения центром определенных гарантий для безработных). Отметим, что сформулированная задача существенно проще (так как не учитывается активность работников), чем базовая модель теории контрактов, в которой фигурирует дополнительное условие выбора АЭ действия, максимизирующего его ожидаемую полезность при заданной системе стимулирования [44]. В настоящей работе нас будут интересовать постановки задач формирования состава АС, учитывающие активность всех ее участников.

Несколько моделей, в которых определялось оптимальное с точки зрения информационной нагрузки на центр число АЭ, которых следует включать в АС, рассматривались в работе [36] при изучении факторов, определяющих эффективность управления многоуровневыми организационными системами. Интересным для настоящего исследования представляется приведенный в упомянутой работе пример.

Пример 17. Предположим, что задача стимулирования заключается в распределении между n однородными АЭ фонда заработной платы (ФЗП) R. Если функция затрат каждого АЭ есть $c(y) = y^2 / 2\, b$, а доход центра пропорционален сумме действий АЭ, то при постоянном фонде заработной платы зависимость эффективности стимулирования от числа АЭ имеет вид:

$$F^*(n) = \sqrt{2bRn} - R.$$

Содержательно, если выполнено предположение А.3. (в частности, существенно, что $c'(0) = 0$, а $H'(y) > 0$), то центру выгодно задействовать как можно большее число АЭ, стимулируя их за выполнение сколь угодно малых действий потому, что в окрестности действия, минимизирующего затраты ($y = 0$), предельные затраты каждого АЭ минимальны. Следовательно, при фиксированном фонде заработной платы (максимум $F^*(n)$ по R достигается при ФЗП, пропорциональном числу АЭ в АС: $R^* = b\, n / 2$) центр заинтересован в неограниченном увеличении числа АЭ (напомним, что рассматривается случай, в котором центр не обязан гарантировать АЭ даже сколь угодно малую положительную полезность – см. также ниже).

Ситуация меняется, если управляющие возможности (возможности по переработке информации) центра ограничены. В большинстве работ (см. ссылки в [36]) используется следующая оценка числа связей между n подчиненными АЭ, контролируемыми одним центром: $\approx 2^n$. Содержательно, эта оценка соответствует числу возможных коалиций, и, следовательно, связей между n АЭ.

Учтем информационные ограничения, умножив $F^*(n)$ на показатель 2^{-xn}, где $x \geq 0$, то есть: $F(n) = (\sqrt{2bRn} - R)\, 2^{-xn}$.

Максимум выражения $F(n)$ по n достигается при $n = n_{max}$, где

$$n_{max} = \frac{R}{8b}\left(1+\sqrt{1+\frac{2b}{xR\ln 2}}\right)^2.$$

Предположим теперь, что центр обязан гарантировать каждому АЭ, включенному в АС, некоторый минимальный уровень полезности $\overline{U} \leq b / 2$ (ограничение резервной заработной платы или ограничение пособия по безработице [9]). Тогда, решая задачу определения оптимального размера вознаграждений АЭ при ограниченном ФЗП, получаем, что при постоянном фонде заработной платы зависимость эффективности стимулирования от числа АЭ имеет вид:

$$F^*(n) = \sqrt{2b\,(R - n\overline{U})n} \ - R.$$

Максимум этого выражения достигается при $n = n^* = \frac{R}{2\overline{U}}$, то есть ограничение резервной заработной платы определяет оптимальный состав (в случае однородных АЭ – оптимальный размер) активной системы. •

Отметим, что, несмотря на то, что в [36] рассматривались многоэлементные (и многоуровневые) АС, взаимозависимость АЭ отсутствовала (как максимум, рассматривались АС со слабо связанными АЭ). В настоящей работе ниже рассматриваются задачи формирования состава АС при условии, что в общем случае АЭ сильно связаны (см. определения выше).

В экономике организаций принят следующий общий подход к определению оптимального размера организации (см. ссылки в [36]). С одной стороны, существует рынок - как система обмена прав собственности. С другой стороны, экономические агенты объединяются в организации, взаимодействующие на рынке. Объяснением существования экономических организаций служит необходимость компромисса между транзакционными издержками и организационными издержками.

К *транзакционным* издержкам относят:

- издержки вычленения, связанные с невозможностью точного определения индивидуального вклада элементов большой системы, то есть организация осуществляет агрегирование информации;

- информационные издержки: организация сокращает этот вид издержек путем сокращения объема перерабатываемой информации;

<u>- издержки масштаба: в случае рынка институциональные ограничения требуют настолько высокого уровня детализации регламентирования деятельности, что последний неизбежно приводит к специализации в рамках организаций;</u>

- издержки поведения: согласование интересов, наказание за отклонения и т.д. связаны с определенными затратами;

- издержки стабилизации, связанные с необходимостью координации в условиях невозможности эффективного прогнозирования будущего поведения системы, внешней среды и их взаимодействия.

Организационные издержки определяются "затратами на координацию" внутри организации, которые растут с увеличением ее размеров.

Транзакционные издержки препятствуют рынку заместить собой организацию, а организационные издержки препятствуют организации заместить собой рынок. Так как и первые, и последние зависят от размера организации и ее структуры, то, теоретически, должны существовать оптимальные параметры организации, при которых достигается уравновешивание упомянутых тенденций замещения.

Обширный класс исследований, детализирующих общий подход экономики организаций и посвященных определению оптимального (с точки зрения прибыли организации) числа работников, составляют работы по экономике труда (точнее – спросу на труд). Основная идея относительно определения оптимального числа нанимаемых работников, используемая в экономике труда и частично в настоящей работе ниже, заключается в следующем.

Количество дополнительной продукции (дохода) $DH(n)$, которое получает фирма, нанимая одного дополнительного (сверх n уже работающих) работника (единицу труда), называется предельным продуктом труда[1]. Обычно считается («закон уменьшения предельной отдачи» или «предельного дохода»), что предельный продукт труда убывает с ростом числа нанятых работников (то есть функция дохода центра вогнута). Содержательные интерпретации подобных предположений очевидны.

Предельные издержки $Ds(n)$ есть затраты центра на стимулирование при приеме на работу $n+1$-го работника. Обычно считается («закон возрастания предельных издержек»), что предельные издержки возрастают с ростом числа нанятых работников (то есть

---

[1] *Следует отметить, что предельный продукт любого индивида не является результатом только лишь его качеств, а зависит от числа уже нанятых работников, общего капитала фирмы, используемой технологии и т.д.*

функция затрат центра на стимулирование выпукла). Содержательные интерпретации этого предположения также очевидны.

Условие максимизации прибыли (разности между доходом центра и его затратами на стимулирование) требует, чтобы прибыль была максимальна. Для этого следует[1] изменять число занятых (увеличивать, если предельный доход превышает предельные издержки, и уменьшать в противном случае) до тех пор, пока предельный доход не будет равен предельным издержкам.

Закончив краткий обзор современного состояния исследований моделей формирования состава организационных систем, перейдем к анализу взаимосвязи задач стимулирования и задач формирования состава АС.

Введем следующие предположения, которые мы будем считать выполненным, если не будет оговорено особо, в ходе всего последующего изложения материала настоящего раздела.

А.10.1. Целевая функция центра $H(y_I) = \sum_{i \in I} y_i$.

А.10.2. А.3, $'' \; y_{-i} \; \hat{I} \; A_{-i}$ функция $c_i(y)$ выпукла по $y_i \; \hat{I} \; A_i$, $i \; \hat{I} \; I$.

В рамках предположения А.10.1 считается, что доход центра определяется суммой действий АЭ. В качестве обоснования можно привести следующее рассуждение.

Пусть функция дохода центра аддитивна, то есть $H(y_I) = \sum_{i \in I} H_i(y_i)$, где $H_i(y_i)$ – вогнутые функции. Тогда, делая замену переменных, то есть переходя к $H(y_I) = \sum_{i \in I} y_i$, получим, что изменятся (оставаясь выпуклыми) функции затрат АЭ, что достаточно для условий существования (и единственности, если она обеспечивалась первоначально) максимума целевой функции

[1] *Если отказаться от экономической терминологии, то все станет несколько проще. В рамках введенных предположений целевая функция центра имеет единственный максимум по числу АЭ (как разность между вогнутой функцией дохода и выпуклой функцией затрат на стимулирование). Следовательно, для ее максимизации необходимо и достаточно обращения в ноль производной, что и соответствует равенству абсолютных значений производных слагаемых, то есть равенству предельного дохода и предельных издержек.*

центра. Другими словами, технологические связи между АЭ при «линеаризации» функции дохода центра учитываются в несепарабельных функциях затрат АЭ.

Перейдем к рассмотрению задач формирования состава АС, последовательно усложняя рассматриваемые модели – от АС с сепарабельными затратами АЭ к АС с несепарабельными затратами АЭ.

Предположим, что затраты АЭ сепарабельны, то есть $c_i = c_i(y_i)$, i Î I. Тогда эффективность оптимального управления составом I равна

(1) $F(I) = \max\limits_{y_I \in A_I} \sum\limits_{i \in I} \{y_i - c_i(y_i)\}$.

Задача поиска оптимального состава АС при этом заключается в поиске I Î À, максимизирующего выражение (1) на множестве неотрицательных его значений.

Теорема 10.1. Если выполнены предположения А.10.1 и А.10.2, то оптимальным является максимальный состав АС, то есть $I^* = N$.

Доказательство. Вычислим для каждого i Î N оптимальное для центра действие i-го АЭ: $y_i^* = arg \max\limits_{y_i \in A_i} \{y_i - c_i(y_i)\}$. В силу предположений А.10.1 и А.10.2 для каждого АЭ такое действие единственно. Кроме того, очевидно, что $y_i^* - c_i(y_i^*)$ ³ 0, i Î N.

Следовательно, каждое слагаемое в (1) неотрицательно. Так как дополнительных ограничений нет[1], то максимум выражения (1) достигается при максимальном числе слагаемых. •

Содержательно результат теоремы 10.1 обусловлен тремя факторами, то есть тем, что: во-первых, в окрестности нулевого действия доход центра растет быстрее, чем затраты АЭ; во-вторых, центр имеет постоянный доход на масштаб производства (его функция дохода линейна, то есть не существует никаких технологических ограничений на число АЭ, осуществляющих совместную деятельность в рамках данной АС); и, наконец, в-третьих, АЭ

[1] *В ряде случаев максимальный состав АС оптимален, даже если существуют ограничения на ФЗП (см. пример 17).*

получают в равновесии нулевую полезность (то есть они безразличны с точки зрения значения своей целевой функции между участием и неучастием в данной АС и входят в состав АС только в силу благожелательно отношения к центру – см. ГБ выше).

Для того чтобы исследовать класс моделей, в которых оптимален состав АС, отличный от максимального состава, рассмотрим последовательно модели, в которых присутствуют перечисленные выше три фактора.

Предположим, что центр должен гарантировать i-му АЭ, если он включен в АС, в равновесии минимальный уровень полезности[1] $\overline{U}_{i_{\max}}$, и минимальный уровень полезности $\overline{U}_{i_{\min}}$, если он не включен в АС, $\overline{U}_{i_{\max}} \geq \overline{U}_{i_{\min}}$, i Î N. При сепарабельных затратах АЭ минимальной системой стимулирования, реализующей действие y^*, является следующая квазикомпенсаторная система стимулирования:

(2) $s_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i) + \overline{U}_{i_{\max}}, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$, i Î N.

Определим следующие величины:

(3) $\Phi_i^* = \max\limits_{y_i \in A_i} \{y_i - c_i(y_i) - \overline{U}_{i_{\max}}\}$, i Î N.

При этом целевая функция центра имеет вид:

$$F(I) = \sum_{i \in I} \Phi_i^* - \sum_{i \in N \setminus I} \overline{U}_{i_{\min}} .$$

<u>Следствие 10.1.</u> Оптимален состав I^* = {i Î N | Φ_i^* ³ -$\overline{U}_{i_{\min}}$ }. Если $F^* = F(I^*) = \sum_{i \in I^*} \Phi_i^* - \sum_{i \in N \setminus I^*} \overline{U}_{i_{\min}} < 0$, то ни один из составов не является допустимым.

Справедливость следствия 10.1 очевидна – в состав АС следует включать только те АЭ, доход от деятельности которых с учетом

---

[1] *«Условие участия» или «условие индивидуальной рациональности АЭ» гласит, что он согласится участвовать в данной АС, если ему в равновесии будет гарантированно обеспечен уровень полезности (или вознаграждение) не ниже заданного.*

затрат на их стимулирование превышает затраты на выплату им компенсаций в случае исключения из состава АС. Если значение целевой функции центра F^* на этом составе строго отрицательно, то это значит, что значения резервных заработных плат АЭ из набора N слишком велики по сравнению с тем эффектом, который приносит центру их участие в рассматриваемой АС[1].

<u>Пример 18. </u>Пусть функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$. Тогда $F(I) = \sum_{i \in I} \{\frac{r_i}{2} - \overline{U}_{i_{\max}}\} - \sum_{i \in N \setminus I} \overline{U}_{i_{\min}}$.

Рассмотрим сначала случай однородных АЭ: $r_i = r$, $\overline{U}_{i_{\max}} = \overline{U}_{\max}$, $\overline{U}_{i_{\min}} = \overline{U}_{\min}$, $i \in N$, $\overline{U}_{\min} \le \overline{U}_{\max}$. При этом

$$F(n) = n\,(r/2 - \overline{U}_{\max} + \overline{U}_{\min}),\ n = \overline{0,N}\ .$$

Решение задачи $F(n) \to \max\limits_{0 \le n \le N}$ имеет вид:

$$n^* = \begin{cases} N, & r \ge 2\overline{U}_{\max} \\ 0, & r < 2\overline{U}_{\max} \end{cases}.$$

Рассмотрим теперь случай шести неоднородных АЭ, параметры которых приведены в таблице.

Параметр\ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\overline{U}_{i_{\max}}$	4	4	3	1	2	2
$\overline{U}_{i_{\min}}$	1	1	1	1	1	1
Φ_i^*	2	1	1	2	0	-1

Рассчитаем значения целевых функций центра при различных составах АС (понятно, что при одинаковых $\overline{U}_{i_{\min}}$ включать АЭ в

[1] *Следует напомнить, что в рассматриваемой модели центр в любом случае обязан выплатить АЭ из набора N как минимум следующую сумму:* $\sum_{i \in N} \overline{U}_{i_{\min}}$.

АС следует в порядке убывания Φ_i^*):

$$F^{*}(\{1\}) = -3,\ F^{*}(\{1\}\grave{E}\{4\}) = 0,\ F^{*}(\{1\}\grave{E}\{2\}\grave{E}\{4\}) = 2,$$

$$F^{*}(\{1\}\grave{E}\{2\}\grave{E}\{3\}\grave{E}\{4\}) = 4,\ F^{*}(\{1\}\grave{E}\{2\}\grave{E}\{3\}\grave{E}\{4\}\grave{E}\{5\}) = 5,$$

$$F^{*}(\{1\}\grave{E}\{2\}\grave{E}\{3\}\grave{E}\{4\}\grave{E}\{5\}\grave{E}\{6\}) = 5.$$

Таким образом, оптимальным является либо максимальный состав АС, либо включение первых пяти АЭ (в таблице шестой АЭ помечен серым цветом). При этом центр безразличен по отношению к включению или не включению в состав АС[1] шестого АЭ так как для него имеет место $\Phi_6^* = -\bar{U}_{6_{\min}}$ - потери от его участия в АС в точности равны той компенсации, которую центру пришлось бы выплачивать ему не включая в состав АС. Если бы $\bar{U}_{\min}$, то центр был бы безразличен между включением и не включением в состав АС пятого АЭ и точно не включил бы шестой АЭ.

Предположим теперь, что «плата за участие в АС» $\{\bar{U}_{i_{\max}}\}$ понизилась и стала равна нулю, а величины $\{\bar{U}_{i_{\min}}\}$ стали равны трем единицам – см. таблицу.

Параметр\ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\bar{U}_{i_{\max}}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{U}_{i_{\min}}$	3	3	3	3	3	3
Φ_i^*	6	5	4	3	2	1

[1] *В подобных случаях, наверное, целесообразно принять гипотезу благожелательного отношения центра к АЭ – включение АЭ в состав АС (трудоустройство), даже при обеспечении ему нулевого уровня полезности, является важным мотивирующим фактором.*

Итак, F^*({1}È{2}) = -9, F^*({1}È{2}) = -1, F^*({1}È{2}È{3}) = 6, F^*({1}È{2}È{3}È{4}) = 12, F^*({1}È{2}È{3}È{4}È{5}) = 17, F^*({1}È{2}È{3}È{4}È{5}È{6}) = 21. Теперь центру выгодно включать в состав АС все шесть АЭ. •

В рассмотренной выше модели учитывалась необходимость обеспечения участникам АС и АЭ, не входящим в ее состав, некоторого гарантированного уровня полезности. Перейдем к изучению моделей, в которых АЭ гарантируется нулевой уровень полезности (как и в моделях, описанных в первых девяти частях настоящей работы), но доход центра от привлечения дополнительных АЭ убывает (или растет медленнее, то есть предельный продукт труда убывает – см. выше) с ростом числа АЭ, уже вошедших в состав АС. Более конкретно, будем считать, что в n-элементной АС ($n = |I|$) функция дохода центра имеет вид

(4) $H(y_I) = g(n) \sum_{i \in I} y_i$,

где $g(n)$ – убывающая функция числа АЭ в АС[1].

Тогда, в рамках предположений А.10.1 и А.10.2, очевидно, существует оптимальный размер n^* АС, который может быть определен методами, описываемыми ниже.

Содержательно, наличие в выражении (4) убывающей по n функции может объясняться необходимостью создания новых рабочих мест, ростом постоянных издержек и т.д. (см. закон убывающей предельной отдачи или убывающего предельного дохода выше).

Пусть АЭ однородны. Запишем целевую функцию центра в виде:

$$F(y, n) = n\, g(n)\, y - n\, c(y).$$

Вычислим оптимальное для центра реализуемое действие АЭ: $y^* = x(g(n))$, где $x(\cdot) = c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной

---

[1] *См. также модели многоуровневых АС в [36], для которых образом, подобным (4), учитывались ограниченные возможности управляющих органов по переработке информации. Для того чтобы имел место закон убывания предельного дохода, относительно функции $g(\cdot)$ обычно предполагают, что она убывает, причем скорость убывания такова, чтобы при не очень больших значениях n функция $n\,g(n)$ возрастала (и была, естественно, вогнутой).*

функции затрат. Подставляя в выражение для $F(y, n)$ значение $y = y^* = x(g(n))$, получим:

(5) $F(n) = n\, g(n)\, x(g(n)) – n\, c(x(g(n)))$.

Вычислим производную выражения (5):

(6) $\frac{d\Phi(n)}{dn} = x(g(n))\,[g(n) + n\,\frac{dg(n)}{dn}] – c(x(g(n)))$.

Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то есть $c(y) = \frac{1}{a}\, y^a\, r^{1-a}$, то приравнивая (6) нулю и проверяя знак второй производной, получаем, что максимизирующая целевую функцию центра зависимость $g^*(n)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

(7) $g^{1/(a-1)}(n)\,[\frac{a-1}{a}\, g(n) + n\,\frac{dg(n)}{dn}] = 0$.

Решение уравнения (7) при условии $g(1) = 1$ есть

(8) $g^*(n) = n^{(1-a)/a}$.

Таким образом, мы доказали справедливость следующего результата.

<u>Теорема 10.2.</u> Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то при функциях $g(n)$, всюду убывающих быстрее функции $g^*(n)$, определяемой (8), оптимальным является минимальный состав АС ($n^* = 1$), при $g(n)$, всюду убывающих медленнее $g^*(n)$, оптимальным является максимальный состав АС ($n^* = N$), в остальных случаях может существовать промежуточный оптимальный размер АС.

<u>Пример 19.</u> Пусть функции затрат однородных АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r$, то АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа с $a = 2$. Тогда $F(y, n) = g(n)\, n\, y – n\, y^2/2r$. Вычисляя при фиксированном n максимум $F(y, n)$ по y, получим:

$$F^*(n) = \max_{y \in A} \{g(n)\, n\, y – n\, y^2/2r\} = n\, g^2(n)\, r / 2.$$

Вычисляя максимум $F^*(n)$ по n, получаем дифференциальное уравнение для функции $g(n)$: $g(n) + 2\, n\,\frac{dg(n)}{dn} = 0$. Легко видеть, что оптимальная зависимость дохода центра от «масштабов производства» получается при $g(n)$ » $1/n^{1/2}$ (см. теорему 10.2). Если функция $g(n)$ всюду убывает медленнее, чем $1/n^{1/2}$, то оптимальным является максимальный состав АС, если всюду убывает быстрее, чем $1/n^{1/2}$, то оптимальным является минимальный состав АС, а в остальных случаях может существовать промежуточный оптимальный размер АС.

Подставляя в выражение для $F^*(n)$ конкретную зависимость $g(n) = a / n$, получаем, что максимум целевой функции центра достигается при $n = n^* = 1$.

Если $g(n) = 1 / n^{1/4}$, то $n^* = N$, если $g(n) = e^{-g\,n}$, то $n^* = 1 / 2\,g$, если $g(n) = \frac{1}{1+gn^2}$, то $n^* = \sqrt{\frac{1}{3g}}$ и т.д. •

Рассмотрим теперь задачу формирования состава АС в случае, когда центр использует унифицированную пропорциональную систему стимулирования (см. оценки сравнительной эффективности и другие свойства пропорциональных систем стимулирования в шестом раздел выше) со ставкой оплаты $l < 1$[1]. Тогда в рамках предположений А.10.1 и А.10.2 действия, выбираемые АЭ, есть $y_i^* = x_i(l)$, где $x_i(\cdot) = c_i'^{-1}(\cdot)$, i Î I.

Целевая функция центра, представляющая собой разность между линейным доходом (см. предположение А.10.1) и затратами на стимулирование, имеет при этом вид:

(9) $F(y_I) = (1 - l) \sum_{i \in I} x_i(l)$.

Легко видеть, что в рамках предположения А.10.2, $x_i(\cdot)$ – непрерывные возрастающие вогнутые функции, поэтому (9) также вогнутая функция. Следовательно, для каждого фиксированного состава АС I Î À существует единственная оптимальная с точки зрения центра ставка оплаты $l^*(I)$. Другими словами, оптимальной будет следующая стратегия центра – либо включать в состав АС все АЭ, либо никого.

---

[1] *Так как функция дохода центра прямо пропорциональна действиям АЭ, то использование ставок оплаты, больших единицы, приведет к отрицательным значениям целевой функции центра и ее убыванию по любым допустимым действиям АЭ.*

Для того, чтобы уйти от полученного тривиального решения предположим, что у каждого АЭ существует свой резервный уровень заработной платы $\overline{U}_i$ (отметим, что речь идет о резервной заработной плате, а не соответствующей ей резервной полезности), то есть АЭ соглашается участвовать в АС, только если его вознаграждение превышает резервную полезность. Таким образом, условие участия *i*-го АЭ имеет вид:

(*10*) $l\, x_i(l)$ ³ $\overline{U}_i$, i Î N.

Обозначим l_i – решение уравнения $l\, x_i(l) = \overline{U}_i$, i Î N, относительно l, и упорядочим АЭ в порядке возрастания l_i. Значение целевой функции центра при включении в АС первых *k* АЭ равно:

(*11*) $F(k) = (1 - l_k) \sum_{i=1}^{k} x_i(l_k)$, $k = \overline{1,N}$.

Решение задачи синтеза оптимального состава АС имеет вид: $I^* = \{1, 2, \ldots, k^*\}$, где

(*12*) $k^* = arg \max\limits_{k=\overline{1,N}} F(k)$.

Пример 20. Пусть функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, тогда $x_i(l) = l\, r_i$, $F(y_I) = (1 - l)\, l \sum_{i \in I} r_i$. Минимальные ставки оплаты, за которые соответствующие АЭ согласятся участвовать в АС, равны: $l_i = \sqrt{\frac{\overline{U}_i}{2r_i}}$. Если имеется всего пять АЭ – претендентов на участие в АС – с параметрами, приведенными в таблице, то $k^* = 4$, то есть оптимальным является состав АС, включающий первые (в упорядочении l_i) четыре АЭ. •

Параметр\ *i*	1	2	3	4	5
r_i	1	1	1	1	1
$\overline{U}_i$	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
l_i	0.77	0.84	0.87	0.89	0.95
$F(i)$	0.1746	0.2733	0.3481	0.3777	0.2434

Проведенный анализ задач формирования состава многоэлементных АС с сепарабельными затратами АЭ позволяет сделать вывод, что в этом классе моделей удается на основании имеющейся информации упорядочить АЭ, и решать задачу определения оптимальной комбинации АЭ на множестве N комбинаций, а не на множестве всех возможных 2^N комбинаций.

Откажемся от предположения о сепарабельности затрат, введенного в разделе 10.1, оставив в силе предположения А.10.1 и А.10.2. Задача синтеза оптимального состава АС примет вид:

$$(13)\quad I^* = arg \max_{I \in \aleph} F(I),$$

где

$$(14)\quad F(I) = \max_{y_I \in A_I} \sum_{i \in I} \{y_i - c_i(y_I)\},$$

при условии, что $F(I^*) \geq 0$[1].

Как отмечалось выше, при решении задачи (13) возникают две основные проблемы: высокая вычислительная сложность (большое число составов АС, для которых необходимо вычислять максимальные эффективности управления и сравнивать их между собой) и необходимость конструктивного определения затрат АЭ в зависимости от состава АС и действий всех АЭ, входящих в этот состав (напомним, что соответствующая зависимость для функции дохода центра вводится в предположении А.10.1).

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий специфику сформулированной задачи (см. также примеры 4, 8 и др., приведенные выше).

Пример 21. Пусть АЭ однородны и имеют функции затрат ($|a| \leq 1/n$):

$$(15)\quad c_i(y_I) = \frac{\left(y_i + a \sum_{j \in I \setminus i} y_j\right)^2}{2r},\ i \in N.$$

Если центр должен гарантировать каждому АЭ уровень полезности $\overline{U}$, то оптимальной является квазикомпенсаторная система

[1] *Данное ограничение может не рассматриваться, если* $F(\emptyset) = 0$ *и* $\emptyset \subseteq \aleph$.

стимулирования (см. раздел 4), при использовании которой значение целевой функции центра равно:

(*16*) $F(y_I) = g(n) \sum_{i \in I} y_i - \sum_{i \in I} c_i(y_I) - n\,\overline{U}$,

где $g(n)$ – множитель, отвечающий за убывание дохода центра с ростом числа АЭ, включенных в состав АС. Определим действия АЭ, наиболее выгодные для центра: $y^* = \dfrac{rng(n)}{(1+a(n-1))^2}$. Тогда зависимость целевой функции центра от числа n АЭ, входящих в АС, имеет вид:

(*17*) $F(n) = \dfrac{n^2 g^2(n) r}{2(1+a(n-1))^2} - n\,\overline{U}$.

Обсудим роль параметра a, входящего в функцию затрат АЭ и отвечающего за влияние действий других АЭ на затраты данного АЭ (см. также модели АС с несепарабельными функциями затрат АЭ – примеры 4, 8 и др.).

Во-первых, при $a \geq 0$ затраты каждого АЭ возрастают с ростом действий других АЭ, а при $a \leq 0$ – убывают. Содержательно этот факт может интерпретироваться следующим образом: в первом случае АЭ «мешают» друг другу (например, при ограниченных технологией возможностях производства), а во втором – «помогают» (например, происходит разделение труда и т.д.).

Во-вторых, функция (17) убывает по параметру a, то есть с его ростом при любом фиксированном составе доход центра убывает.

Будем считать, что $a < 0$, тогда при $g(n) = n^{-1/2}$ (см. теорему 10.2) получаем, что $F(n) = \dfrac{r}{2(1+a(n-1))^2} - n\,\overline{U}$.

Предполагая существование ненулевого внутреннего решения, получим, что оптимальный размер АС равен:

$$n^* = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{ar}{\overline{U}}\right)^{1/3}.$$

С уменьшением значения параметра[1] a растет оптимальный

---

[1] *Отметим, что в рассматриваемом примере при $a > 0$ оптимальный*

размер АС, с увеличением гарантированного уровня полезности $\overline{U}$ он убывает. •

В более общем случае можно рассмотреть два типа взаимовлияния АЭ[1]:

- с увеличением состава АС затраты каждого АЭ не возрастают: $\forall\ i \in N,\ \forall\ I \in \aleph,\ \forall\ j \in N \backslash I,\ \forall\ y \in \prod_{i \in N} A_i\ \ c_i(y_I) \geq c_i(y_{I \cup \{j\}})$;

- с увеличением состава АС затраты каждого АЭ не убывают:

$$\forall\ i \in N,\ \forall\ I \in \aleph,\ \forall\ j \in N \backslash I,\ \forall\ y \in \prod_{i \in N} A_i\ \ c_i(y_I) \leq c_i(y_{I \cup \{j\}}).$$

Содержательные интерпретации обоих случаев очевидны.

Таким образом, можно выделить три общих подхода к решению задач формирования состава АС на основании рассмотрения задач стимулирования. Первый подход заключается в «лобовом» рассмотрении всех возможных комбинаций потенциальных участников АС. Его достоинство – нахождение оптимального решения, недостаток – высокая вычислительная сложность. Второй подход основывается на методах локальной оптимизации [5] (перебора составов АС из некоторой окрестности определенного состава – см. постановки задач об оптимизации состава АС и приеме на работу выше). Используемые при этом эвристические методы в общем случае не дают оптимального решения и поэтому требуют оценивания их гарантированной эффективности. И, наконец, третий подход заключается в исключении заведомо неэффективных комбинаций АЭ на основании анализа специфики задачи стимулирования (см. упорядочение АЭ, имеющих сепарабельные затраты, в задачах формирования состава АС). При этом вычислительная сложность резко сокращается и удается получить точное (оптимальное) решение, но, к сожалению, данный подход применим далеко не всегда, и в каждом конкретном случае возможность его использования требует соответствующего обоснования.

размер АС не превышает единицы.

[1] *В данном случае учет взаимозависимости АЭ позволяет не использовать множитель $g(n)$ для отражения убывающего и возрастающего дохода на масштаб.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе в рамках единой постановки задачи управления (см. второй и третий разделы) представлены результаты систематического рассмотрения теоретико-игровых моделей механизмов функционирования многоэлементных организационных систем в предположении некооперативного поведения управляемых субъектов (активных элементов).

При исследовании этого класса моделей ключевую роль играют два принципа – *принцип декомпозиции игры АЭ* и *принцип компенсации затрат*.

Принцип компенсации затрат, заключающийся в том, что минимальная система стимулирования, реализующая в рамках гипотезы благожелательности любое действие АЭ, должна компенсировать его затраты, справедлив и для многоэлементных, и для одноэлементных АС, и использует метод анализа минимальных затрат на стимулирование.

Принцип декомпозиции игры АЭ специфичен для многоэлементных систем и заключается в использовании управления (системы стимулирования), которое делает доминантной стратегией, то есть стратегией, абсолютно оптимальной при любой обстановке игры (независимо от действий других АЭ), выбор каждым активным элементом наиболее выгодных для центра действий – см. формальные результаты о структуре оптимального решения задачи синтеза оптимальной системы стимулирования в четвертом разделе выше.

Предложенный подход и полученные в его рамках общие результаты позволяют исследовать специфические классы систем стимулирования (см. пятый и шестой разделы), обобщить результаты исследования детерминированных многоэлементных АС на случай систем с неопределенностью (седьмой раздел настоящей работы) и систем с глобальными ограничениями на множества допустимых состояний элементов (восьмой и девятый разделы), сформулировать и решить ряд задач формирования состава системы (десятый раздел).

Конечно, на сегодняшний день рано говорить о получении полной и завершенной картины всего многообразия механизмов управления многоэлементными организационными системами. Тем не менее, приведенные результаты позволяют как выделить перспективные направления дальнейших исследований (в первую очередь – изучение механизмов управления организационными системами с кооперативным поведением участников, а также более полное исследование многоэлементных АС с неопределенностью и глобальными ограничениями на множества допустимых действий АЭ и получение простых алгоритмов решения задач формирования состава АС), так и обоснованно предположить, что обобщение существующих методов изучения сложных организационных систем окажется эффективным и адекватным новым задачам инструментом.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить признательность рецензенту настоящей работы – д.т.н., проф. В.Н. Буркову и участникам постоянно действующего семинара по управлению активными системами – М.В. Губко, А.Б. Гурееву, Е.В. Колосовой, Н.В. Константиновой, Н.А. Коргину, Т.Б. Кочиевой, С.Н. Петракову, С.А. Чижову, Т.Е. Шохиной и др., чья критика и ценные замечания способствовали пониманию специфики управления многоэлементными организационными системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев В.С., Кононенко А.Ф. Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1991. - 28 с.

2. Алиев В.С., Кононенко А.Ф. Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ АН СССР, 1990. - 26 с.

3. Андреев С.П., Бурков В.Н., Динова Н.И., Кондратьев В.В., Константинова Н.В., Цветков А.В., Черкашин А.М. Механизмы функционирования организационных систем (обследование, описание и моделирование). Препринт. М.: Институт проблем управления, 1983.- 52 с.

4. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.

5. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974. - 234 с.

6. Бурков В.Н., Гуреев А.Б., Новиков Д.А. Эффективность ранговых систем стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2000. № 8.

7. Бурков В.Н., Перфильева Л.Г., Тихонов А.А. Модель динамики трудовых ресурсов / Механизмы функционирования организационных систем: теория и приложения. М.: ИПУ, 1982. С. 120 – 124.

8. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Вероятностная задача стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 1993. N 12. С. 125 - 130.

9. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 - 30.

10. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.

11. Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е., Тейман А.И., Чернышев В.Н. Сетевые модели и задачи управления. М.: Советское радио, 1967. – 144 с.

12. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. I. Необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования в случае полной информированности центра // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 139 - 143.

13. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. II. Синтез оптимальных правильных механизмов в случае полной информированности центра // Автоматика и телемеханика. 1984. № 11. С. 86 - 92.

14. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. III. Некоторые задачи оптимального согласованного планирования в случае неполной информированности центра // Автоматика и телемеханика. 1984. № 12. С.. 94 - 100.
15. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.
16. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.
17. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.
18. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Механизмы критериального управления активными системами в задачах стимулирования / Сборник трудов ИПУ РАН. Том 10, 2000.
19. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Модели и механизмы теории активных систем в управлении качеством подготовки специалистов. М.: ИЦ, 1998. - 158 с.
20. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. Часть 2. // Автоматика и Телемеханика. 1995. № 10. С. 121 - 126.
21. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999 – 128 с.
22. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990. - 256 с.
23. Воропаев В.И. Управление проектами в России. М.: Аланс,1995.-225с.
24. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.
25. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. - 144 с.
26. Джапаров Б.А., Кондратьев В.В., Цветков А.В., Шангитбаев Ж.К. Оптимальное согласованное управление процессом шихтоподготовки._ В кн.: Методы исследования сложных систем. Труды конференции молодых ученых. М.: ВНИИСИ, 1985. С.. 52 - 57.
27. Динова Н.И. Бригадные формы оплаты труда / Механизмы управления социально-экономическими системами. М.: ИПУ РАН, 1988. С. 79-82.
28. Динова Н.И., Щепкин А.В. Анализ принципов стимулирования неоднородных коллективов / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1985. С. 93 - 100.

29. Кондратьев В.В., Тихонов А.А., Цветков А.В. Частично согласованное планирование в условиях неполной информированности центра.- В кн.: Материалы YIII Всесоюзного семинара-совещаниия: «Управление большими системами». Алма-Ата: Каз.ПТИ, 1983. С. 18 - 20.
30. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.
31. Морозов А.И., Палюлис Н.К.-С., Цветков А.В. Анализ системы стимулирования тематического подразделения.- В кн.: Неопределенность, риск, динамика в организационных системах. М.: Институт проблем управления, 1984. С. 14 - 23.
32. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. - 464 с.
33. Новиков Д.А. Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
34. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
35. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997. - 101 с.
36. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. - 150 с.
37. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. - 68 с.
38. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. Часть 1. Механизмы планирования // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 2. С. 154 - 161.
39. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. Часть 2. Механизмы стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 3. С. 161 - 167.
40. Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. Часть 3. // Автоматика и Телемеханика. 1995. № 12. С. 118 - 123.
41. Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активных системах с нечеткой внешней неопределенностью // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 9. С. 200 - 203.
42. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
43. Новиков Д.А. Стимулирование в вероятностных активных системах: роль неопределенности // Автоматика и Телемеханика.1997.№8.С.168-177.

44. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. - 216 с.
45. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. - 230 с.
46. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. - 304 с.
47. Сандак Н.Н. Некоторые общесистемные и математические аспекты теории систем с соревнующимися элементами / Управление техническими и организационными системами с применением вычислительной техники. Труды XXIII конференции молодых ученых. М.: Наука, 1979. С. 160 - 171.
48. Уандыков Б.К. Методы согласованного планирования в активных производственных системах с зависимыми элементами / Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. М.: ИПУ РАН, 1998.
49. Цветков А.В. Многокритериальная согласованная оптимизация при неопределенности в активных системах.- В кн.: Декомпозиция и координация в сложных системах. Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции. Ч. II. Челябинск: Челябинский политехнический институт, 1986. С.103-104.
50. Цветков А.В. Модель механизма реализации целевой программы выполнения и перевыполнения плана в условиях неопределенности. – В кн.: Теоретические и прикладные задачи оптимизации. М.: Наука, 1985. С.60-65.
51. Цветков А.В. О выборе согласования в двухуровневой активной системе с неопределенностью.- В кн.: Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: Институт проблем управления, 1985. С. 30 - 34.
52. Цветков А.В. Свойства множеств согласованных управлений в случае нескольких целей согласования.- В кн.: Тезисы докладов X Всесоюзного совещания-семинара «Управление иерархическими активными системами». Тбилиси: Мецниереба, 1986. С. 49.
53. Цветков А.В. Согласованное планирование в задаче выполнения и перевыполнения плана в условиях неопределенности.- В кн.: Материалы YIII Всесоюзного семинара-совещания: «Управление большими системами». Алма-Ата: Каз.ПТИ, 1983. С. 61 - 63.
54. Цветков А.В. Условия оптимальности согласованных механизмов функционирования при неопределенности.- В кн.: Неопределенность, риск, динамика в организационных системах. М.: Институт проблем управления, 1984. С. 73 - 81.
55. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении М.: Наука, 1991. - 166 с.
56. Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995.–579 p.

57. Green J., Stockey N. A comparison of tournaments and contracts // Journal of Political Economy. 1983. Vol. 91. N 3. P. 349 - 364.
58. Grossman S., Hart O. An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51. N 1. P. 7 - 45.
59. Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5th World congress. Cambridge: Cambridge Univ.Press, 1987.P.71-155.
60. Hart O.D. Optimal labor contracts under asymmetric information: an introduction // Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. N 1. P. 3 - 35.
61. Itoh H. Incentives to help in multi-agent situations // Econometrica. 1991. Vol. 59. № 3. P. 611 - 636.
62. Lasear E., Rosen S. Rank-order tournaments as optimal labor contracts // Journal of Political Economy. 1981. Vol. 89. N 5. P. 841 - 864.
63. Ma C. Unique implementation of incentive contracts with many agents // Review of Economic Studies. 1988. Vol. 55. № 184. P. 555 - 572.
64. Malcomson J.M. Rank-order contracts for a principal with many agents // Review of Economic Studies. 1986. Vol. 53. N 5. P. 803 - 817.
65. Mookherjee D. Optimal incentive schemes with many agents // Review of Economic Studies. 1984. Vol. 51. № 2. P. 433 - 446.
66. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. - 568 p.
67. Myerson R.B. Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent problems // Journal of Mathematical Economy. 1982.Vol.10.№1.P.67-81.