РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

<u>И Н С Т И Т У Т   П Р О Б Л Е М   У П Р А В Л Е Н И Я</u>

МОДЕЛИ И МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ И ДОХОДОВ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д. А., Юсупов Б.С.

П Р Е П Р И Н Т

Москва 1996

УДК.65.012.

МОДЕЛИ И МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ И ДОХОДОВ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ - М. 1996
(Препринт/Институт проблем управления).

В работе рассматриваются модели и механизмы распределения ресурсов, которые содержательно интерпретируются либо как задачи распределения затрат на реализацию общего проекта (программы) между участниками (инвесторами), заинтересованными в этом проекте, либо как задачи распределения дохода или прибыли, полученных от совместной деятельности нескольких участников. В качестве агентов могут выступать юридические и физические лица, а также федеральные и местные органы управления. Анализируются различные механизмы распределения затрат (доходов) - приоритетные, конкурсные, механизмы честной игры и др.

Авторы: *В.Н. Бурков, И.И. Горгидзе, Д.А. Новиков, Б.С. Юсупов*.

Рецензент: д.т.н. Ф. Т. Алескеров.

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи распределения затрат и доходов относятся, пожалуй, к наиболее распространенным задачам распределения ресурсов в условиях рыночной экономики. Действительно, характерной чертой современных рыночных отношений является объединение усилий рыночных предприятий, фирм, других юридических и физических лиц, а также федеральных и местных органов власти для реализации проектов и программ, представляющих общий интерес. Как делить затраты на реализацию проекта или программы, как распределять доход, получаемый в результате их реализации - центральные задачи, от эффективности решения которых зависит успех в достижении поставленных целей. Задачи распределения доходов и затрат весьма близки к известной задаче распределения ограниченного ресурса, методы решения которой разработаны весьма детально [1,2,3]. Однако, в отличие от последней, в данном случае затраты (доход) не являются ограниченными, а зависят от суммарного дохода (затрат), который желают получить (могут потратить) участники, называемые далее агентами. Тем не менее, существует достаточно тесная связь между механизмами распределения ограниченных ресурсов и механизмами распределения доходов или затрат.

В работе исследуются свойства различных механизмов распределения затрат или доходов. В качестве базовой берется модель распределения затрат. Рассмотрены две основные схемы взаимодействия агентов. В первой схеме каждый агент сообщает оценку y_i требуемых ему ресурсов (материальных или финансовых), использование которых дает ему определенный доход $\varphi_i(y_i)$ (в частном случае эта оценка может интерпретироваться непосредственно как оценка дохода, который агент рассчитывает получить от реализации общей программы). Затраты C(Y) на общую для всех агентов программу (на обеспечение требуемыми ресурсами) зависят от суммарного ресурса $Y=\sum_{j=1}^{n} y_j$, который потребовали агенты. Задача заключается в определении механизма распределения этих затрат между агентами $x_i = \pi_i(y_i)$, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1,n}$, где n - число агентов, причем, очевидно $\sum_i x_i = C(Y)$.

Во второй схеме каждый агент сообщает свою функцию дохода $\varphi_i(y_i)$ (как правило, предполагается, что функция дохода $\varphi_i(y_i)$ задана в параметрическом виде: $\varphi_i(y_i, r_i)$, где r_i - параметр и каждый агент сообщает оценку s_i этого параметра). На основе этой информации определяется и количество ресурса $y_i = \eta_i(s)$, которое получает агент i (а значит и доход $\varphi_i(y_i, r_i)$, который он получает от общей программы), и затраты i-го агента $x_i = \pi_i(s)$ на эту программу ($\sum_i x_i = C(Y)$).

Функционирование системы при заданном механизме распределения затрат (доходов) можно рассматривать как игру n лиц (агентов), стратегиями которых является сообщение оценки требуемого ресурса (или оценки параметров функции дохода), а функция выигрыша равна разности дохода и затрат.

В качестве решения игры в настоящей работе рассматривается ситуация равновесия Нэша или совокупность доминантных стратегий (если они существуют).

1. Задачи распределения затрат и доходов в рыночной экономике

Рассмотрим содержательные интерпретации ряда задач распределения затрат или доходов.

Задача 1. Финансирование совместного проекта. Несколько фирм (агентов) решили совместно осуществить строительство объекта, представляющего общий интерес. От эксплуатации этого объекта фирма i ожидает получить доход q_i. Затраты на строительство объекта зависят от суммарного дохода, который ожидают получить фирмы. Обозначим y_i оценку дохода, которую сообщает фирма i (сообщает представитель фирмы в Совет правления акционерного общества, созданного для реализации строительства объекта). Тогда суммарная оценка ожидаемого дохода $Y = \sum_i y_i$, а затраты равны C(Y). Очевидно, C(Y) возрастающая функция Y, C(0)=0. Как распределить эти затраты между фирмами-учредителями акционерного общества? Обозначим механизм распределения затрат x = π(y) $\left(x_i = \pi_i(y),\quad i = \overline{1,n},\ \sum_i \pi_i(y) = C(Y)\right)$.

Какой механизм распределения затрат является наиболее справедливым и предпочтительным? Как правило, для данной задачи предполагается, что справедливый механизм должен удовлетворять двум условиям (аксиомам): анонимности и монотонности.

Аксиома анонимности: механизм распределения затрат называется анонимным, если результат распределения не зависит от перенумерации агентов. Другими словами, распределение затрат зависит только от оценок ожидаемого дохода и ни один агент не имеет особого преимущества перед другими агентами.

Аксиома монотонности: с ростом оценки ожидаемого дохода *i*-го агента растут (не уменьшаются) его затраты $\left(\frac{\partial \pi_i(y)}{\partial y_i} \geq 0\right)$. В более сильной форме аксиомы монотонности требуется, чтобы росла (не уменьшалась) доля затрат агента при росте его оценки ожидаемого дохода $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{\pi_i(y)}{C(Y)}\right] \geq 0\right)$.

Аксиома анонимности отражает естественное требование равенства партнеров, а аксиома монотонности столь же естественное требование, суть которого: больше получаешь - больше платишь.

Заметим, что, желая уменьшить свои затраты, фирма может сознательно исказить (уменьшить) оценку ожидаемого дохода. Такое явление называется манипулированием данными. Механизмы распределения затрат, защищенные от манипулирования, называются механизмами честной игры (открытого управления, неманипулируемыми механизмами). Манипулирование оценками проявляется в тех случаях, когда партнерам трудно проконтролировать уровни доходов, получаемых друг другом от эксплуатации общего объекта. В зарубежной литературе этот эффект получил название эффекта наездника (free-rider problem), когда один агент хочет «прокатиться» за счет других.

Эта задача имеет и другую содержательную интерпретацию. Пусть речь идет о финансировании некоторой региональной программы, затрагивающей федеральные интересы или наоборот, федеральной программы, в которой заинтересован и регион (или несколько регионов). В данном случае y_1 определяет ожидаемый эффект от реализации мероприятий (проектов) программы (региональной или федеральной) для региона, а y_2 - для федерации в целом, то есть и y_1 и y_2 являются обобщенными оценками эффекта от мероприятий (проектов) программы, которые интересуют регион (федерацию). Как распределить общий объём финансирования C(Y) между региональным и федеральным уровнями?

•Задача 2. Финансирование программ развития. Крупная фирма, объединяющая несколько предприятий разрабатывает программу развития. Эта программа представляет собой объединение программ развития отдельных предприятий, входящих в объединение. Каждое предприятие формирует и представляет в Совет директоров (или правления) фирмы свою программу с обоснованием требуемого финансирования y_i. Обозначим $\varphi_i(y_i)$ ожидаемый доход i-го предприятия в результате реализации программы. Если суммарный объём средств $\sum_i y_i = Y$, требуемый для финансирования всех программ, превышает величину централизованного фонда развития фирмы R, то есть $Y = \sum_j y_i > R$ (как правило, это превышение значительно) то возникает необходимость получить дополнительные средства путем взятия кредита, выпуска дополнительных акций и т. д., что приводит к дополнительным затратам (Y-R). Разность (Y-R) определяет величину дополнительных затрат на реализацию всех программ. Задача заключается в распределении этих дополнительных затрат между предприятиями. В данном случае аксиома анонимности не всегда имеет место. Так, если представленные предприятиями проекты программ оцениваются независимыми экспертами, и эти оценки существенно влияют на распределение дополнительных затрат, то аксиома анонимности может не выполняется.

Задача 3. Распределение дохода. Эта задача в определенном смысле является двойственной к предыдущей. Несколько предприятий объединяются для реализации общего проекта. Каждое предприятие сообщает объём средств y_i , который оно может вложить в этот проект (то есть объём затрат). Ожидаемый доход от проекта C(Y), естественно, зависит от объёма суммарного финансирования Y, $Y = \sum_i y_i$. Как распределить этот доход C(Y) между предприятиями? Здесь аксиомы анонимности и монотонности представляются естественными, хотя возможны исключения (если, например, в качестве одного из предприятий выступают органы государственной или местной власти).

Задача 4. Финансирование программ развития приоритетных направлений.

При существующем положении слабой развитости рыночных отношений в России стабилизация экономики возможна только на основе селективной государственной поддержки приоритетных направлений. Формы такой поддержки различны. Это и прямое бюджетное финансирование (частичное или полное), и льготное кредитование, и льготное налогообложение и др. При формировании программ развития приоритетных направлений организуется конкурс на участие в этих программах. Государственные, частные предприятия и организации подают заявки, указывая объём требуемых финансовых ресурсов и обосновывая эффективность своего участия в программе. Необходимо сформировать программу, определив состав участников, форму государственной поддержки и объёмы финансирования.

Итак, все рассмотренные задачи имеют общие черты. Каждый агент имеет определенную свободу в сообщении того эффекта (дохода), который он ожидает получить от участия в финансировании общего проекта (программы), либо в сообщении объёма средств, который он согласен затратить на этот проект. Однако от эффекта (дохода) зависит доля его затрат и, наоборот, от его доли затрат зависит доля его эффекта (дохода).

В работе проводится сравнение различных механизмов распределения затрат и доходов. В качестве базовой задачи взята задача распределения затрат (Финансирование программ развития - задача 2).

Как уже отмечалось выше, задача распределения затрат тесно связана с известной задачей распределения ограниченных ресурсов. Действительно, рассмотрим следующую зависимость затрат на реализацию программы C(Y) от требуемого объёма, финансирования Y

$$C(Y) = \begin{cases} \lambda Y, & \text{если } Y \le R \\ M, & \text{если } Y > R \end{cases},$$

где M большое число, заведомо превышающее ожидаемый суммарный эффект от программы. Достаточно очевидно, что результирующие оценки требуемого финансирования будут такими, что $\sum_i y_i \le R$. Следовательно, распределение затрат будет соответствовать некоторому распределению ограниченного ресурса R с ценой ресурса λ.

2. Механизмы распределения затрат

Механизм распределения затрат ставит в соответствие совокупности оценок агентов $\{y_i\}_{i=1}^n$ распределение затрат $\{x_i = \pi_i(y)\}_{i=1}^n$ такое, что

$$\sum_i p_i(y) = C(Y). \tag{2.1}$$

Опишем механизмы распределения затрат, анализу которых посвящена данная работа. В первую очередь, в силу их простоты, выделяют приоритетные механизмы. В этих механизмах для каждого агента определяется его приоритет (вес) $\eta_i(y_i)$, и затраты распределяются прямо пропорционально приоритетам агентов

$$x_i = \pi_i(y) = \frac{\eta_i(y_i)}{\sum_i \eta_i(y_i)} \cdot C(Y). \tag{2.2}$$

Условие (2.1) при использовании приоритетных механизмов выполняется автоматически.

В зависимости от вида функций $\eta_i(y_i)$ различают механизмы прямых, обратных и абсолютных приоритетов. В механизмах прямых (обратных) приоритетов $\eta_i(y_i)$ - возрастающая (убывающая) функция y_i, $i=\overline{1,n}$, а в механизмах абсолютных приоритетов $\eta_i(\cdot)$ не зависит от y_i, то есть $\eta_i(y_i)=\alpha_i \ge 0$. Очевидно, приоритетные механизмы удовлетворяют аксиоме монотонности (в сильной форме). Если потребовать анонимности, то функции приоритета $\eta_i(y_i)$ должны быть одинаковыми (не должны зависеть от i).

Широкий класс механизмов распределения затрат можно получить на основе анализа известных механизмов распределения ограниченных ресурсов. Напомним, что механизмом распределения ограниченных ресурсов называется отображение вектора заявок $\{y_i\}$ в вектор распределения ресурса $x_i=\theta_i(y,R)$, такое, что $\sum_i \theta_i(y,R)=R$.

Покажем, что любому механизму распределения ограниченных ресурсов, удовлетворяющему аксиоме монотонности по R ($\theta_i(y,R)$ - возрастающая функция R, $i=\overline{1,n}$), можно поставить в соответствие некоторый механизм распределения затрат $\pi(y,R)$. Примем сначала, что C(Y) кусочно-линейная непрерывная функция Y с точками излома R_k, $k=\overline{1,q}$, то есть:

$$C(Y) = C(R_{k-1}) + \lambda_k (Y-R_{k-1});\ R_{k-1} < Y \le R_k,\ \lambda_k \ge 0,$$

$$\text{где } R_0 = 0,\ C(R_0) = 0.$$

Определим отрезок $[R_{q-1}, R_q]$, такой, что $R_{q-1} < Y \le R_q$. Распределяем последовательно ресурс в количестве R_1, R_2, ... R_{q-1}, Y на основе механизма $\pi(y,R)$. Обозначим $\{x_{ik},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,q}\}$ соответствующие распределения ресурса. Результирующее распределение затрат определяется следующим образом:

$$z_i = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k (x_{ik} - x_{ik-1});\ x_{io}=0 \qquad (2.3)$$

Пусть теперь C(Y) произвольная неубывающая дифференцируемая функция, $\pi_i(y, R)$ - дифференцируемые функции R. Заметим, что

$$\sum_i \frac{d\pi_i(y, R)}{dR} = 1$$

Определим затраты i-го агента следующим образом

$$z_i = \int_o^Y \frac{dC(R)}{dR} \cdot \frac{\partial \pi_i(y, R)}{\partial R} \cdot dR. \qquad (2.4)$$

Легко убедиться, что $\sum_i z_i = C(Y)$. Таким образом, любой механизм распределения ограниченного ресурса R порождает вполне определенный механизм распределения затрат. Соответствующий механизм распределения затрат будем далее называть R-механизмом. Опишем основные механизмы распределения ограниченных ресурсов и порождаемые ими механизмы распределения затрат.

<u>Приоритетные механизмы распределения ресурса</u>. В этих механизмах, также как и в приоритетных механизмах распределения затрат (2.2), распределение ведется на основе функций приоритета агентов

$$x_i = \pi_i(y, R) = \min(y_i; \gamma \cdot \eta_i(y_i)) \qquad (2.5)$$

где γ определяется из уравнения

$$\sum_i \min(y_i; \gamma \cdot \eta_i(y_i)) = R$$

В зависимости от вида функций приоритета выделяют механизмы абсолютных, прямых и обратных приоритетов.

Рассмотрим соответствующие R-механизмы, удовлетворяющие условию анонимности:

<u>R-механизм абсолютных приоритетов.</u>

Пусть $\eta_i(y_i)=1$ (аналогичные выводы можно получить, если все функции приоритетов равны одной и той же положительной величине),

$$x_i = \min(y_i;\gamma), \quad i=\overline{1,n}.,$$

где γ определяется из уравнения

$$\sum_i \min(y_i;\gamma) = R.$$

Пусть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Обозначим

$$\gamma_i = y_i, \quad R_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j + \gamma_i[n-(i-1)], \; i=\overline{2,n}.$$

Заметим, что $\{R_i\}$ - возрастающая последовательность, значит, если $R_{i-1} < R < R_i$, то

$$x_j(y,R) = \begin{cases} y_j & , \; 1 \le j \le i-1 \\ \dfrac{R - \sum\limits_{k=1}^{i-1} y_k}{n-i+1} & , \; j \ge i \end{cases}$$

т.е. ресурс распределяется по следующей процедуре:

$$x_j(y,R) = \min(y_j;\gamma), \text{ где}$$

$$\gamma = \frac{R - \sum\limits_{k=1}^{i-1} y_k}{n-(i-1)};$$

поэтому

$$z_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{C(R_k) - C(R_{k-1})}{n-k+1}, \; C(R_o) = 0,$$

$$C(R_n) = C(Y).$$

R-механизм прямых приоритетов.

Рассмотрим три вида функции приоритета $\eta(\cdot)$ - выпуклую, линейную и вогнутую.

1) <u>Выпуклые функции приоритета</u>. Пусть $\eta_i(y_i) = y_i^2$ и y_i упорядочены по убыванию и все различны, то есть $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$.

Обозначим:

$$\gamma_i = \frac{1}{y_i}\ ,\ \ R_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j + \gamma_i \sum_{j=i}^{n} y_j^2\ .$$

Нетрудно показать, что

$$z_i = y_i^2 \sum_{k=1}^{i} \frac{C(R_k) - C(R_{k-1})}{A_k^2},$$

где

$$A_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} y_j^2}\ ,\ \ C(R_o) = 0\,,\ C(R_n) = C(Y).$$

Для сравнения отметим, что обычный приоритетный механизм распределения затрат (2.2) с теми же функциями приоритета дает следующее распределение затрат:

$$\tilde{z}_i = \frac{y_i^2}{A_1^2} \cdot C(Y)$$

Можно показать, что R-механизм с выпуклыми функциями приоритета дает определенное преимущество агентам с высокими заявками. Более точно, имеет место:

$$\sum_{k=1}^{i} z_k < \sum_{k=1}^{i} \tilde{z}_k\ ,\ i = \overline{1,(n-1)}$$

б) <u>Линейные функции приоритета</u>. Пусть $\eta_i(y_i) = y_i$. В этом случае

$$x_i = \pi_i(y,R) = y_i \min(1;\gamma) = \frac{y_i R}{Y}\ ,\ \ R \le Y$$

и R-механизм полностью аналогичен обычному приоритетному механизму с линейными функциями приоритета.

в) <u>Вогнутые функции приоритета</u>. Пусть $\eta_i(y_i) = \sqrt{y_i}$ и y_i упорядочены по возрастанию и все различны, то есть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

Обозначим:

$$\gamma_i = \sqrt{y_i}\,,\ R_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j + \gamma_i \sqrt{B_i} \text{ где } B_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{y_j} \right)^2,\ i = \overline{1, n}\,.$$

Имеем

$$z_i = \sqrt{y_i} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{C(R_k) - C(R_{k-1})}{\sqrt{B_k}}$$

Обычный приоритетный механизм с теми же функциями приоритета дает распределение затрат

$$\tilde{z}_i = \frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt{B_1}} \cdot C(Y)\,,\ i = \overline{1, n}\,.$$

В данном случае R-механизм дает преимущество агентам с меньшими заявками, то есть имеет место

$$\sum_{k=1}^{i} z_k < \sum_{k=1}^{i} \tilde{z}_k\,.$$

<u>R-механизм обратных приоритетов</u>. Рассмотрим функции приоритета $\eta_i(y_i) = 1/y_i$. Пусть y_i упорядочены по возрастанию и все различны, то есть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

Обозначим:

$$\gamma_i = y_i\,,\ R_i = \sum_{j=1}^{k} y_j + \gamma_i \frac{1}{Q_i}\,, \text{где } Q_i = \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{y_i} \right)^{-1},\ i = \overline{2, n}\,.$$

Имеем

$$z_i = \frac{1}{y_i} \sum_{k=1}^{i} [C(R_k) - C(R_{k-1})] \cdot Q_k\,,\ \ C(R_o) = 0\,,\ C(R_n) = C(Y)\,.$$

Сравнивать R-механизм обратных приоритетов с обычными приоритетными механизмами в данном случае не удается, так как приоритетный механизм с убывающими функциями приоритета не удовлетворяет условию монотонности. Однако, R-механизм обратных приоритетов дает весьма серьезные преимущества агентам с меньшими заявками. А именно, такие агенты платят за одно и то же количество ресурса меньше, чем агенты с более высокими заявками. Это следует из соотношения

$$\pi_i(y, R) < \pi_j(y, R),\ \text{для всех}\ i > j,\ R < R_j.$$

Конкурсные механизмы распределения ресурсов.

Эти механизмы составляют особый класс приоритетных механизмов. Агенты упорядочиваются по величине приоритетов. Агент с наивысшим приоритетом является в определенном смысле диктатором. Он получает ресурс в первую очередь. Остальные агенты получают ресурс в порядке убывания приоритетов. Распределение затрат при этом возможно различными способами. Однако должно выполняться следующее условие - затраты агента могут зависеть только от его заявки и от заявок агентов с более высоким приоритетом.

Ограничимся описанием R-механизма на основе конкурса при условии анонимности. В этом случае, агенты упорядочиваются по возрастанию заявок. Пусть $y_1 < y_2 <\ldots< y_n$. Обозначим $Y_i = \sum\limits_{j=1}^{i} y_i$. В литературе рассмотрены два механизма распределения затрат на основе конкурса [1, 4]. В первом затраты агента i определяются выражением:

$$z_i = C(Y_i) - C(Y_{i-1}),\ Y_o = 0,\ i = \overline{1, n}.$$

(в случае одинаковых заявок затраты также берутся равными).

Во втором механизме:

$$z_i = z_{i-1} + \frac{1}{n-i+1}\left[C(n.y_i) - C(n.y_{i-1})\right].$$

Очевидно, в обоих случаях: $\sum_{i=1}^{n} z_i = C(Y)$.

<u>Многоэтапные механизмы распределения затрат.</u>

Пусть C(Y) кусочно-линейная выпуклая функция Y с точками излома R_k, $k = \overline{1, l}$, то есть $C(Y) = C(R_{k-1}) + \lambda_k (Y - R_{k-1})$, $Y \in [R_{k-1}, R_k]$, $\lambda_k \geq \lambda_{k-1}$.

В этом случае естественно трактовать λ_k как цену ресурса на отрезке $[R_{k-1}, R_k]$.

Рассмотрим механизмы распределения затрат, в основе которых лежит поэтапная процедура распределения ресурса. На первом этапе распределяется ресурс в количестве $\Delta_1 = R_1$ по цене λ_1, на втором - ресурс в количестве $\Delta_2 = R_2 - R_1$ по цене λ_2, и т.д., до тех пор, пока на очередном этапе не будет желающих получить ресурс. На каждом этапе агенты дают заявку S_{ik} на ресурс, который они желают получить на данном этапе. Возможна различная организация многоэтапных процедур. Можно на каждом этапе делать несколько итераций, приближаясь к ситуации равновесия на этом этапе. Можно, наоборот, на каждом этапе допускать только одну итерацию (одно сообщение заявок), повторяя процедуру после того, как на очередном этапе заявки будут равны нулю.

Многоэтапные механизмы привлекательны тем, что они позволяют применить для распределения затрат процедуры распределения ограниченного ресурса. Заметим, что в силу возрастания цены ресурса с ростом номера этапа, агентам предпочтительнее получать ресурс на ранних этапах. Этот факт еще больше сближает многоэтапную процедуру распределения затрат с процедурами распределения ограниченного ресурса. Действительно, обозначим υ_{ik} оптимальное количество ресурса для i-го агента по цене λ_k. Очевидно, что цель i-го агента на каком-то этапе получить ресурс в количестве υ_{ik} (тогда на последующих этапах ресурс ему больше не нужен). Таким образом, игровой анализ многоэтапных процедур, фактически, распадается на поэтапный анализ процедур распределения ограниченного ресурса.

Интересной представляется модификация многоэтапных процедур, в которой агенты сразу сообщают совокупность оценок $\{S_{ik}\}$ количеств ресурсов, которое они желают приобрести по цене λ_k. Очевидно, что $S_{i1} > S_{i2} > \ldots > S_{il}$ в силу выпуклости C(Y) и вогнутости функций эффекта. Эта модификация привлекательна тем, что она сглаживает (смягчает) отрицательные тенденции манипулирования данными (завышения или занижения оценок), которые могут появляться при применении тех или иных процедур распределения ресурса (подробнее это свойство будет рассмотрено ниже).

<u>Двухоценочные механизмы с сообщением оценки эффекта или эффективности распределения затрат.</u>

В тех случаях, когда орган, распределяющий ресурс (далее будем называть его центром), имеет возможность получить информацию о фактическом эффекте агентов $\varphi_i(y_i)$ от использования ресурса y_i, распределение затрат может проводиться на основе двух оценок - требуемого ресурса y_i и ожидаемой эффективности его использования ξ_i, где под эффективностью понимается отношение эффекта $\varphi_i(y_i)$ к ресурсу y_i. Наличие у Центра информации о фактическом эффекте позволяет ему применять систему санкций (штрафов и премий) в случае, когда ожидаемый (или обещанный агентом) эффект $\xi_i \cdot y_i$ не совпадает с фактическим.

Так, в случае линейных санкций, целевая функция агента принимает вид

$$f_i(y_i, \xi_i) = \varphi_i(y_i) - \alpha(\xi_i y_i - \varphi_i(y_i)) - z_i ,$$

где α - коэффициент штрафа (премий).

Зачастую санкции применяются только в виде штрафов в случае, когда фактический эффект ниже ожидаемого. В этом случае

$$f_i = \begin{cases} \varphi_i(y_i) - z_i, & \text{если } \xi_i y_i \le \varphi_i(y_i) \\ \varphi_i(y_i) - \alpha(\xi_i y_i - \varphi_i(y_i)) - z_i, & \text{если } \xi_i y_i > \varphi_i(y_i) \end{cases}$$

Если α настолько велико, что превышение ожидаемого эффекта над фактическим явно невыгодно агенту, то получаем случай «сильных штрафов». Как правило, механизмы распределения затрат, использующие оценки эффективности, устроены таким образом, что агент заинтересован завысить оценку. При сильных штрафах такое манипулирование данными невыгодно агентам и поэтому сообщаемая оценка равна $\xi_i = \dfrac{\varphi_i(y_i)}{y_i}$.

Все описанные выше механизмы распределения затрат можно применить и в случае двух оценок. Для этого достаточно функции приоритета $\eta_i(\xi_i)$ сделать зависящими от оценки эффективности ξ_i (естественно, что $\eta_i(\xi_i)$ возрастающие функции ξ_i). Для двухоценочных механизмов условие анонимности представляется естественным и справедливым, поскольку оценки эффективности вполне отражают различия между агентами.

Параметрические механизмы.

Параметрическими мы будем называть механизмы распределения затрат, в которых агенты сообщают параметры функции эффекта $S=(S_1,\ S_2,\ldots,S_n)$, на основе которых центр определяет распределение ресурса $y_i=\theta_i(S)$. На основе распределения ресурса $\{y_i\}$ определяется распределение затрат $z_i=\pi_i(y)$. Применение параметрических механизмов возможно в тех случаях, когда центр имеет достаточно точное представление о параметрическом виде функций эффекта агентов (знает эти функции с точностью до параметров). Параметрическое представление функций эффекта будем обозначать $\varphi_i(y_i,r_i)$, где r_i - параметр.

Рассмотрим следующий класс механизмов распределения затрат.

$$\pi_i(y)=\lambda(Y)y_i-\frac{\lambda(Y)\cdot Y-C(Y)}{n}.$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i(y)=C(Y).$$

Целевая функция агента принимает вид

$$f_i=\varphi_i(y_i,r_i)-\lambda(Y)\cdot y_i+\frac{\lambda(Y)\cdot Y-C(Y)}{n}$$

При большом числе агентов достаточно обоснованным является предположение о слабом влиянии количества ресурса y_i отдельного агента на общие для всех агентов величины $\lambda(Y)$, Y и $C(Y)$ (гипотеза слабого влияния). Смысл этой гипотезы в том, что максимизируя свою целевую функцию по y_i, агент i не учитывает того, что y_i входит в Y. В этом случае оптимальное количество ресурса для i-го агента удовлетворяет условию

$$\varphi_i^{'}(y_i, r_i) = \lambda(Y) \;\; , \;\; i = \overline{1, n}$$

Если теперь в качестве $\lambda(Y)$ взять C(Y), то при естественных условиях вогнутости функции $\varphi_i(y_i)$ и выпуклости C(Y), получим оптимальное решение задачи максимизации суммарного эффекта всех агентов с учетом затрат:

$$\sum_i^n \varphi(y_i, r_i) - C(Y) \to \max$$

Эту задачу будем называть задачей центра.

Заметим теперь, что если распределение ресурса $\{y_i\}$ будет удовлетворять условию

$$\varphi_i^{'}(y_i, S_i) = C'(Y),$$

то для максимизации своей целевой функции агента при гипотезе слабого влияния, ему будет достаточно сообщить истинную оценку $S_i = r_i$. Таким образом, при справедливости гипотезы слабого влияния описанный выше механизм распределения ресурса и затрат является оптимальным с точки зрения центра.

Частным случаем полученного результата является следующая ситуация. Пусть $C(Y) = \lambda Y$. Тогда назначение $x_i = \lambda y_i$ приводит к

$$\frac{\partial \varphi_i(y_i, z_i)}{\partial y_i} = \lambda, \;\; i = \overline{1, n},$$

а это ни что иное, как условие максимума суммарной эффективности.

<u>Пример</u>. Пусть $\varphi_i(y_i,\, r_i) = 2\sqrt{r_i y_i}\,, C(Y) = \frac{1}{2}\alpha Y^2.$

Получаем:

$$\sqrt{\frac{S_i}{y_i}} = \alpha Y, \quad y_i = \frac{S_i}{\alpha^2 Y^2}, \; Y = \sqrt[3]{\frac{S}{\alpha^2}},$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i, \quad y_i = \frac{S_i}{\alpha}\sqrt[3]{\frac{\alpha}{S^2}}, \; i = \overline{1, n}.$$

Таким образом,

$$f_i = \frac{2\sqrt{r_i S_i}}{\sqrt[3]{\alpha S}} - \frac{S_i}{\sqrt[3]{\alpha S}} + \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{S^2}{\alpha}}.$$

Определим оптимальную оценку S_i^* из условия максимума f_i

$$\sqrt{\frac{r_i}{S_i}} \text{ -1} = \frac{2\sqrt{r_i S_i} - S_i}{3S} - \frac{1}{3n}.$$

Если $r_i << H$, где $H = \sum_{j=1} r_j$, то при больших n решение этого уравнения $S_i^* \approx r_i$.

Окончательно получаем

$$y_i^* \approx \frac{r_i}{\sqrt{\alpha^2 H^2}}; \quad Y^* = \sqrt[3]{\frac{H}{\alpha^2}},$$

что определяет оптимальное решение задачи центра.

Описанный механизм, защищен от манипулирования (делающий невыгодным представление недостоверной информации) и называется механизмом открытого управления или механизмом честной игры [ ].

Таким образом, если есть основания принять гипотезу слабого влияния, то можно предложить параметрический механизм, защищенный от манипулирования данными, обеспечивающий оптимальный уровень затрат и оптимальное распределение ресурса между агентами. К сожалению, если гипотеза слабого влияния не имеет места, то решение задачи существенно усложняется.

Механизмы финансирования программ развития приоритетных направлений

Финансирование программ развития приоритетных направлений науки и техники осуществляется несколькими путями. Первый - это непосредственное финансирование проектов, включенных в программы либо из бюджета, либо из средств тех или иных фондов. Второй - льготное кредитование и, наконец, третий - обычное кредитование под государственную гарантию. Также большой интерес вызывают механизмы смешанного (государственного и частного) финансирования.

Естественным является желание участников программы получить прямое (безвозмездное) финансирование в первую очередь. Однако, как правило, суммарный объем предложений по участию в программах значительно превышает возможности бюджетного финансирования и даже льготного кредитования. Поэтому необходим механизм финансирования, обеспечивающий наиболее эффективное распределение ограниченных финансовых ресурсов.

Ниже исследуются различные механизмы финансирования. Сначала задача финансирования программ развития сводится к известной в литературе задаче распределения затрат. Демонстрируется связь механизмов распределения затрат с механизмами распределения ограниченных ресурсов. Далее рассматриваются конкурсные механизмы финансирования и приводится ряд результатов об оптимальности конкурсных механизмов. В заключении описываются модели финансирования зависимых проектов, модели смешанного финансирования с привлечением средств частных фирм (инвесторов), и наконец, рассматриваются экспертные механизмы финансирования приоритетных направлений (так называемые механизмы согласия).

Финансирование приоритетных направлений как задача распределения затрат

Формирование программ развития приоритетных направлений науки и техники, как правило, происходит на основе конкурсного отбора проектов. Претендентами на участия в программах выступают научные организации, государственные и частные фирмы, а также отдельные творческие коллективы. Каждый претендент подает в орган, распределяющий финансирование (например, Министерство науки) заявку с описанием предполагаемых результатов и обоснованием необходимых затрат. Для оценки проектов создаются экспертные советы по программам.

Обозначим y_i - объем финансирования проектов, представленных *i*-ым претендентом, $\varphi_i(y_i)$ оценку ожидаемого эффекта от проекта в случае его включения в программу (этот эффект отражает вклад проекта в достижение требуемого уровня по соответствующему направлению). Оценка ожидаемого эффекта может производится самим претендентом (самооценка), либо экспертным советом по программе. В первом случае (самооценка) безусловно нельзя не учитывать возможного искажения претендентами оценки ожидаемых результатов (как правило, в сторону преувеличения ожидаемых результатов с целью получить финансирование). Такое искажение возможно, конечно, и со стороны экспертных советов в силу как объективных причин (недостаточная компетентность экспертов), так и субъективных (заинтересованность экспертов в поддержке того или иного проекта).

Заметим также, что оценка $\varphi_i(y_i)$ ожидаемого эффекта от проекта с точки зрения целей направления может отличаться от оценки ожидаемого эффекта от проекта с точки зрения претендента, подающего заявку. Чаще всего цель претендентов - просто получить финансирование (желательно бюджетное), либо обеспечить возможность финансирования проекта, обещающего значительный экономический эффект. В последнем случае оценка ожидаемого экономического эффекта с точки зрения целей программы и интересов претендента может совпадать. Оценку ожидаемого эффекта от проекта с точки зрения претендента будем обозначать $f_i(y_i)$. Будем считать, что эта оценка приведена к настоящему моменту (в ценах на рассматриваемый момент).

Пусть определен объем бюджетных средств R, выделенных на развитие приоритетных направлений. Обозначим S_i величину средств, заявленную i-ым претендентом.

Примем, что $S = \sum_i s_i > R$ (как правило, значительно). Разность (S-R) определяет величину дополнительных (сверхбюджетных) затрат на реализацию всех проектов. Задача заключается в распределении этих дополнительных затрат между претендентами. Обозначим $y_i = \pi_i(S)$, $i = \overline{1, n}$ механизм (процедуру) распределения дополнительных затрат Q = S - R. Фактически Q определяет объем финансирования развития приоритетных направлений из внебюджетных источников.

Очевидно, $\pi_i(S) \le S_i$, $i = \overline{1, n}$ и $\sum_i \pi_i(S) = Q$. При этом, если $\pi_i(S) = S_i$ то претенденту фактически предлагается выполнять проект за свой счет, если $\pi_i(S) = 0$, то проект полностью выполняется за счет бюджетных средств. Задача распределения затрат широко известна в литературе [ ].

Рассмотрим для нашего случая механизм прямых приоритетов, согласно которому затраты распределяются между претендентами (в зарубежных работах претенденты называются агентами) прямопропорционально их заявкам S_i, то есть

$$y_i = \pi_i(S) = \frac{S_i}{S} \cdot Q. \tag{3.1.1}$$

Соответственно величина бюджетного финансирования проекта составляет

$$x_i = \frac{S_i}{S} \cdot R. \tag{3.1.2}$$

При этом, очевидно, $y_i + x_i = S_i$, $i = \overline{1, n}$.

Проведем анализ механизма прямых приоритетов. Целевую функцию i-ого элемента системы (претендента или участника программы) с учетом дополнительных затрат можно записать в виде

$$f_i(S_i) - S_i(1 - \frac{R}{S}),\ i = \overline{1, n}. \tag{3.1.3}$$

Будем предполагать, что каждый элемент сообщает заявку S_i, максимизирующую его целевую функцию. Кроме того, примем, что при сообщении заявки S_i элемент не учитывает влияния S_i на величину R/S, считая эту величину просто параметром (гипотеза слабого влияния). Для вогнутых дифференцируемых функций $f_i(S_i)$ условие максимума можно записать в виде

$$\frac{d\,f_i(S_i)}{dS_i} = 1 - \frac{R}{S}, \;\; i = \overline{1, n}$$

(предполагается, что это уравнение имеет положительное решение).

Обозначим ξ_i функцию, обратную $f_i^{'}(S_i)$. Тогда

$$S_i = \xi_i(1 - \frac{R}{S}), \; i = \overline{1, n}.$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(1 - \frac{R}{S}). \tag{3.14}$$

Обозначим $\eta = (S/R) - 1 = Q/R$ - относительный объем частного финансирования.

Уравнение (3.1.4) теперь можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\frac{\eta}{1+\eta}) = R(1+\eta). \tag{3.15}$$

Так как ξ_i - убывающая функция, то при условии $\sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) > R$ (это условие - естественное следствие принятого выше предположения, что объем заявок на бюджетные средства превышает их наличие) уравнение (3.1.5) имеет единственное решение $0 < \xi^* < 1$.

Рассмотрим пример с функциями эффекта элементов типа Кобба-Дугласа

$$f_i = \frac{1}{\alpha} y^{\alpha} \cdot r_i^{1-\alpha}.$$

Имеем

$$f_i^{'}(S_i) = (\frac{r_i}{S_i})^{1-\alpha} = \frac{\eta}{1+\eta}.$$

$$S_i = r_i \left(\frac{1+\eta}{\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

$$S = H\left(\frac{1+\eta}{\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ где } H = \sum_{i=1}^{n} r_i ,$$

или

$$\eta = \delta^{(1-\alpha)} \cdot (1+\eta)^{\alpha}, \text{ где } \delta = \frac{H}{R}.$$

Заметим, что в случае финансирования i-го проекта самим претендентом оптимальный объем финансирования определяется из условия максимума (3.1.3) при R=0 и, как легко показать, равен $S_i^{опт} = r_i$. Поэтому H определяет объем финансирования проектов при отсутствии государственной поддержки, а δ характеризует этот объем в долях государственного финансирования.

Рассмотрим как связаны η и δ. Если $\eta = \delta$, то данный механизм финансирования обеспечивает объем частного финансирования такой же, как и при отсутствии государственного. Если $\eta > \delta$, то механизм государственного финансирования оказывает стимулирующее влияние на привлечение частного капитала, если $\eta < \delta$, то наоборот.

Покажем, что в рассматриваемом примере всегда имеет место $\eta > \delta$, то есть, что предложенный механизм финансирования оказывает стимулирующее влияние на привлечение частных средств для финансирования программ развития приоритетных направлений. Необходимо показать, что $\eta < \delta$ или

$$\delta^{(1-\alpha)} = \frac{\eta}{(1+\eta)^{\alpha}} < \eta^{(1-\alpha)}.$$

Имеем

$$(1+\eta)^{\alpha} > \eta^{\alpha},$$

что очевидно.

Если оценивать эффективность механизма финансирования по величине привлечения частного капитала по отношению к государственному, то есть по величине $x = \eta/\delta = Q/H$, то для величины *x* получаем уравнение

$$x = (\frac{1}{\delta} + x)^{\alpha}. \qquad (3.1.7)$$

Покажем, что x убывающая функция δ, то есть чем меньше заинтересованность частных фирм в государственных программах, тем больше эффективность рассмотренного механизма. Этот факт сразу следует из анализа рис. 3.1 (при $\delta_2 > \delta_1$ точка x_2 пересечения кривой $y = (\frac{1}{\delta_2} + x)^{\alpha}$ и прямой $y = x$ всегда лежит правее точки x_1 пересечения кривой $y = (\frac{1}{\delta_1} + x)^{\alpha}$ с той же прямой $y = x$).

Верно и другое. С ростом объема государственного финансирования (то есть с уменьшением δ) растет x, что означает рост объема частного финансирования.

Таким образом, предложенный механизм финансирования проектов на основе механизма прямых приоритетов обладает хорошими стимулирующими свойствами с точки зрения привлечения частного капитала. Эффективность механизма существенно зависит от показателя α функций эффекта претендентов. Не сложно показать, что с ростом α растет и *x*. Зависимость x от α и δ для различных значений α и δ приведена в таблице 3.1.

До сих пор мы не учитывали оценки проекта с точки зрения целей развития приоритетных направлений, то есть оценку $\varphi_i(S_i)$, даваемую экспертным советом по соответствующей программе.

Примем, что эта оценка не зависит от величины запрашиваемых средств и обозначим ее $\mathbf{l}_i$. Учтем величину этой оценки при распределении финансирования, то есть примем $x_i = \frac{\mathbf{l}_i S_i}{\sum_i \mathbf{l}_i S_i} \cdot R$. Повторяя рассуждение, аналогично выводу уравнения (3.1.4), получим

$$S_i = \xi_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(p)}), \text{ где } S(p) = \sum_i \mathbf{l}_i S_i . \qquad (3.1.8)$$

$$S(\mathbf{l}) = \sum_i x_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(p)}) . \qquad (3.1.9)$$

Анализ этих выражений показывает, что чем выше коэффициент приоритетности программы p_i, тем больше дополнительное финансирование этой программы за счет средств претендентов, то есть тем больше величина $S_i - x_i$. Действительно:

$$S_i - x_i = S_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})}) = (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})}) \xi_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})}),$$

так как

$$\xi_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})}) = r_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})})^{-\frac{1}{1-\alpha}},$$

то

$$S_i - x_i = r_i (1 - \frac{\mathbf{l}_i R}{S(\mathbf{l})})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

и растет с ростом p_i.

Таким образом, рассмотренный механизм финансирования достаточно эффективен как с позиции распределения бюджетных средств, так и с позиции привлечения средств частных фирм, заинтересованных в развитии приоритетных направлений.

3. Механизмы смешанного финансирования и кредитования

Крупные проекты, как правило, редко финансируются из одного источника. Инициаторы проекта стараются привлечь средства федерального и регионального бюджетов, различные фонды, средства частных фирм и т.д. Задача финансирования в этом случае относится к классу задач распределения затрат, рассмотренных в предыдущем разделе.

Рассмотрим механизмы смешанного финансирования проектов. Примем для определенности, что имеется n типов региональных проектов (социальной защиты, охраны окружающей среды, строительства дорог и т.д.), к реализации которых желательно привлечь средства частных фирм. Однако, проекты экономически невыгодны для частных фирм, поскольку отдача от них (эффект на единицу вложенных средств) меньше 1. Обозначим эффект от проектов на единицу вложенных средств для i-ой фирмы через a_i ($a_i < 1,\ i = \overline{1,n}$).

Региональный бюджет ограничен и явно недостаточен для реализации необходимого числа проектов. Однако, частные фирмы не прочь получить бюджетные деньги либо льготный кредит. Идея смешанного финансирования состоит в том, что бюджетные средства или льготный кредит выдаются при условии, что фирма обязуется выделить на проект и собственное финансирование. Как правило, на практике фиксируется доля средств, которую должна обеспечить фирма (например, 20% средств выделяется из бюджета, а 80% - составляют собственные средства фирмы). Однако, такая жесткая фиксация доли бюджетных средств имеет свои минусы. Если эта доля мала, то будет незначительным и объем частных средств, а если велика, то, во-первых, желающих вложить собственные средства будет слишком много, и придется проводить дополнительный отбор (например, на основе конкурсных механизмов), а во-вторых, уменьшается эффективность использования бюджетных средств. Ниже рассматривается механизм смешанного финансирования с гибко настраиваемой величиной доли бюджетного финансирования.

Дадим формальную постановку задачи разработки механизма смешанного финансирования. Имеются n фирм, потенциальных инвесторов в программы социального развития региона. Имеется также централизованный фонд финансирования программ развития. Каждая фирма предлагает для включения в программу социального развития проекты, требующие суммарного финансирования S_i. Эти проекты проходят экспертизу, в результате которой определяется их социальная ценность $f_i(S_i)$. Помимо социальной ценности, предлагаемый фирмой пакет проектов имеет экономическую ценность $\varphi_i(S_i)$ для фирмы. На основе заявок фирм центр (менеджер проекта, руководство региона и т.д.) определяет объемы финансирования проектов фирм$\{x_i\}$ (как правило, $x_i \le S_i$), исходя из ограниченного объема бюджетных средств R. Процедура $\{x_i = \pi_i(S)$, $i = \overline{1, n}\}$ называется механизмом смешанного финансирования. Дело в том, что недостающие средства $y_i = S_i - x_i$ фирма обязуется обеспечить за свой счет. Таким образом, интересы фирмы описываются выражением:

$$\varphi_i(S_i) - y_i, \qquad (3.1)$$

где $\varphi_i(S_i)$ - доход фирмы (если фирма берет кредит y_i в банке, то учитывается процент за кредит). Задача центра заключается в том, чтобы разработать такой механизм $\pi(S)$, который обеспечит максимальный социальный эффект:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(S_i^*\right),$$

где S^* = $\{S_i^*\}$ - равновесные стратегии фирм (точка Нэша соответствующей игры).

Рассмотрим линейный случай, когда $\varphi_i(S_i) = a_i S_i$, $f_i(S_i) = b_i S_i$, $0 < a_i < 1$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Проведем анализ механизма прямых приоритетов

$$x_i(\overline{S}) = \frac{\lambda_i S_i}{\sum\limits_j \lambda_j S_j} R, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (3.2)$$

где λ_i - приоритет i-ой фирмы, $\overline{S} = \left(S_1, S_2, \ldots, S_n\right)$. Примем без ограничения общности, что R = 1. Заметим, что в данном случае может иметь место $x_i(S) > S_i$ (фирма получает средств больше, чем заявляет). Будем считать, что в этом случае разность $x_i(S) - S_i$ остается у фирмы.

Определим ситуацию равновесия Нэша. Для этого подставим (3.2) в (3.1) и определим максимум по S_i выражения

$$a_i S_i - \left(S_i - \frac{\lambda_i S_i}{L(S)}\right) = \frac{\lambda_i S_i}{L(S)} - (1 - a_i) S_i$$

$$\text{где} \;\; L(S) = \sum_j \lambda_j S_i \, .$$

После несложных вычислений получим:

$$\lambda_i S_i = L(S)\left[1 - q_i L(S)\right], \;\; \text{где} \;\; q_i = \frac{1 - a_i}{\lambda_i}.$$

Из условия

$$\sum_i \mathbf{l}_i S_i = L(S)$$

определяем

$$L(S^*) = \frac{(n-1)}{Q} \quad \text{и}$$

$$S_i^* = \frac{(n-1)}{\mathbf{l}_i Q}\left[1 - \frac{(n-1)q_i}{Q}\right], \qquad (3.3)$$

где $Q = \sum_i q_i$. При этом должно, очевидно, выполняться условие $S_i^* \geq 0$ или

$$\frac{q_i}{Q} < \frac{1}{n-1}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (3.4)$$

Если это условие нарушается, то соответствующие фирмы выбывают из состава претендентов. С новыми значениями Q и n вычисления следует повторить. Если при этом появляются новые фирмы, для которых нарушается (3.4), то эти фирмы также выбывают, и т.д. За конечное число шагов будет получена ситуация равновесия, такая, что для всех фирм выполняется (3.4). Пусть фирмы упорядочены по возрастанию q_i, то есть $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$. Для определения числа фирм - претендентов на участие в социальных программах развития региона необходимо найти максимальное k, такое что

$$q_i < \frac{Q_k}{k-1}, \text{ где } Q_k = \sum_1^k q_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Пример. Значения a_i, $\mathbf{l}_i$ и q_i приведены в таблице.

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
$\mathbf{a_i}$	0,9	0,6	0,1	0,12	0,75	0,1
$\mathbf{l_i}$	1	2	3	2,2	0,5	1,5

$\mathbf{q_i}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Нетрудно определить, что максимальное k = 3. Действительно:

$$\frac{q_1 + q_2}{1} = 0{,}3 > q_2 = 0{,}2,$$

в то же время

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{2} = 0{,}3 = q_3 = 0{,}3.$$

Таким образом, претендентами на участие в программе по схеме смешанного финансирования являются первые две фирмы. Если $b_i = \mathbf{l}_i$ для всех i, то суммарный эффект от программы составляет

$$L(S^*) = \frac{(n-1)R}{Q_3} = 3\frac{1}{3} \cdot R,$$

а суммарное финансирование $S^* = 2\frac{7}{9}R$. Таким образом, финансирование программы в $2\frac{7}{9}$ раза превышает бюджетные средства. Заявки фирм в равновесии

$$S_1^* = 2\frac{2}{9}, \qquad S_2^* = 2\frac{5}{9}.$$

В рассмотренном примере мы взяли $\mathbf{l}_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Поставим задачу определить механизм прямых приоритетов, обеспечивающий максимум социального эффекта. Необходимо определить приоритеты $\{\mathbf{l}_i\}$ таким образом, чтобы суммарный эффект был максимальным. Задача сводится к определению $\{\mathbf{l}_i \geq 0\}$, таких что

$$\sum_{i=1}^{n} b_i S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i (n-1)R}{\mathbf{l}_i Q} \left[1 - \frac{(n-1)q_i}{Q}\right] \tag{3.5}$$

принимает максимальное значение. Заменой $\mathbf{l}_i = (1-a_i)/q_i$, $q_i/Q = \alpha_i$, $p_i = (1-a_i)/b_i$ приведем (3.5) к виду

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{{}_i(n-1)\alpha_i}{p_i}\left[1-(n-1)\alpha_i\right]. \qquad (3.6)$$

Необходимо определить $\{\alpha_i \geq 0\}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, при которых (3.6) максимален. Применяя метод множителей Лагранжа, получим

$$\mathbf{l}_i^0 = \frac{1+(n-2)\beta_i}{2(n-1)}, \quad \beta_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (3.7)$$

Соответственно

$$\mathbf{l}_i^0 = \frac{1-a_i}{\alpha_i^0}, \quad i = \overline{1, n}$$

(с точностью до постоянного множителя). Интересно отметить, что в случае двух фирм оптимальные приоритеты не зависят от коэффициентов при функциях социального эффекта b_1 и b_2.

Пример. Определим оптимальные приоритеты для задачи предыдущего примера. Для случая двух фирм имеем

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{1}{2}$$

и, подставляя в (3.6), получаем

$$p_1 = 0{,}1; \;\; p_2 = 0{,}2; \;\; \beta_1 = 1/3; \;\; \beta_2 = 2/3;$$

$$\Phi = \left[\frac{\alpha_1^0}{p_1}\left(1-\alpha_1^0\right) + \frac{\alpha_2^0}{p_2}\left(1-\alpha_2^0\right)\right] = 3\frac{3}{4},$$

что весомо больше чем $3^1/_3$. Увеличилось и суммарное финансирование до $3^1/_8$.

При оптимальных приоритетах может измениться число фирм - претендентов на участие в программе. Поэтому необходимо проверить варианты с тремя фирмами и более. Рассмотрим вариант с тремя фирмами. Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ \ p_2 = 0{,}2;\ \ p_3 = 0{,}3;\ \ \beta_1 = 1/6;\ \ \beta_2 = 1/3;\ \beta_3 = 1/2;$$

$$\alpha_1^0 = \frac{1+\beta_1}{4} = \frac{7}{24};\quad \alpha_2^0 = \frac{1+\beta_2}{4} = \frac{1}{3};\quad \alpha_3^0 = \frac{1+\beta_3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Поскольку все $\{\alpha_i^0\}$ меньше 1/2, то условия (3.4) выполнены. Подставляя в (3.6), получаем:

$$\Phi = 2\left[\frac{\alpha_1^0}{p_1}\left(1-2\alpha_1^0\right) + \frac{\alpha_2^0}{p_2}\left(1-2\alpha_2^0\right) + \frac{\alpha_3^0}{p_3}\left(1-2\alpha_3^0\right)\right] = 4\frac{1}{6}.$$

Как видим, эффективность механизма смешанного финансирования увеличилась. Рассмотрим случай четырех фирм. Имеем:

$$p_1 = \beta_1 = 0{,}1;\ \ p_2 = \beta_2 = 0{,}2;\ \ p_3 = \beta_3 = 0{,}3;\ p_4 = \beta_4 = 0{,}4;$$

$$\alpha_1^0 = \frac{1+2\beta_1}{6} = 0{,}2;\ \alpha_2^0 = \frac{1+2\beta_2}{6} = \frac{7}{30};\ \alpha_3^0 = \frac{4}{15};\ \alpha_4^0 = 0{,}3.$$

Условия (3.4) по-прежнему выполняются. Суммарный социальный эффект составит:

$$\frac{\Phi}{R} = 3\sum_{i=1}^{4}\frac{\alpha_i^0}{p_i}\left(1-3\alpha_i^0\right) =$$

$$3\left[\frac{0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}1} + \frac{7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5}{30} + \frac{8}{45} + 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 2{,}5\right] = 4\frac{5}{24} > 4\frac{1}{6}.$$

Поскольку социальный эффект опять увеличился, необходимо проверить случай n = 5. Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ \ p_2 = 0{,}2;\ \ p_3 = 0{,}3;\ \ p_4 = 0{,}4;\ \ p_5 = 0{,}5;$$

$$\beta_1 = 1/15;\ \ \beta_2 = 2/15;\ \ \beta_3 = 1/5;\ \ \beta_1 = 4/15;\ \ \beta_2 = 1/3;$$

$$\alpha_1^0 = \frac{1+3\beta_1}{8} = \frac{6}{40};\quad \alpha_2^0 = \frac{7}{40};\quad \alpha_3^0 = \frac{8}{40};\quad \alpha_4^0 = \frac{9}{40};\quad \alpha_5^0 = \frac{10}{40}.$$

Условие (3.4) не выполняется для пятой фирмы. Поэтому оптимальное решение включает четыре фирмы претендента с суммарным социальным эффектом $4^5/_{24}$. За счет выбора оптимального механизма смешанного финансирования удалось увеличить социальный эффект примерно на 25% при том же объеме бюджетного финансирования.

Рассмотрим теперь нелинейный случай. Примем, что эффект от реализации проектов для i-ой фирмы составляет

$$\varphi_i(S_i) = \frac{1}{\alpha} r_i^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.8}$$

В этом случае интересы фирмы описываются выражением

$$\varphi_i(S_i) - y_i = \frac{1}{\alpha} S_i^{\alpha} r_i^{1-\alpha} - (S_i - x_i). \tag{3.9}$$

Проведем анализ механизма прямых приоритетов

$$\pi_i(S) = \frac{S_i}{\sum_j S_j}.$$

Примем, что имеет место гипотеза слабого влияния, согласно которой фирмы не учитывают влияния своей заявки на общий множитель $\left(\sum S_j\right)^{-1}$. В этом случае равновесная заявка i-ой фирмы определяется из условия

$$\left(\frac{r_i}{S_i}\right)^{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{S} \tag{3.10}$$

или

$$S_i = r_i \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{3.11}$$

где S определяется из уравнения

$$H = S\left(1 - \frac{1}{S}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad H = \sum_j r_j. \tag{3.12}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3.12) всегда имеет единственное решение $S^* > 1$. Покажем, что всегда имеет место $S^* > H$. Это следует из очевидного неравенства в случае $H > 1$:

$$\left(1-\frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < 1.$$

Таким образом механизм смешанного финансирования обеспечивает привлечение средств частных фирм, большее чем в случае непосредственного финансирования фирмами проектов. Действительно, при непосредственном финансировании фирма i получает максимум прибыли при объеме финансирования $S_i = r_i$. Поэтому суммарное привлечение средств частных фирм в случае прямого финансирования составит ровно H.

Интересно оценить отношение $u = S/H$ в зависимости от параметра α. Производя в (3.12) замену переменных $S = uH$, получим уравнение для u:

$$u\left(1-\frac{1}{uH}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 1. \qquad (3.13)$$

Анализ этого уравнения показывает, что с ростом α растет u. Таким образом, эффект от механизма смешанного финансирования тем больше, чем больше параметр α в функциях эффекта фирм.

Рассмотрим теперь задачу выбора оптимального механизма смешанного финансирования для линейного случая на множестве механизмов смешанного финансирования следующего вида:

$$\pi_i(S) = \frac{S_i^\beta}{\sum_j S_j^\beta}, \quad i = \overline{1, n}\ . \qquad (3.14)$$

Прибыль фирмы в этом случае будет равна

$$\varphi_i(S_i) - \left(S_i - \pi_i(S)\right) = a_i S_i - \left(S_i - \frac{S_i^\beta}{\sum_j S_j^\beta} \right). \qquad (3.15)$$

Равновесная заявка определяется из системы уравнений

$$\frac{\beta S_i^{\beta-1}}{\sum_j S_j^\beta} = 1 - a_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (3.16)$$

В данном случае мы также предполагаем гипотезу слабого влияния. Из (16) получаем:

$$S_i = \left[\frac{1}{\beta}\left(1 - a_i\right) \sum_j S_j^\beta \right]^{\frac{1}{\beta-1}}, \qquad (3.17)$$

где $S(\beta) = \sum_j S_j^\beta$ определяется из уравнения

$$S(\beta) = \left[\frac{1}{\beta} S(\beta) \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - a_j\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}. \qquad (3.18)$$

Имеем

$$S(\beta) = \beta \left[\sum_{j=1}^{n} \left(1 - a_j\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right]^{-\beta-1}.$$

Окончательно получаем

$$S_i = \beta \cdot \frac{\left(1 - a_i\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\sum_j \left(1 - a_i\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}}.$$

Суммарное финансирование проектов всеми фирмами составит

$$S = \beta \cdot \frac{\sum_j \left(1 - a_i\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\sum_j \left(1 - a_i\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}}.$$

В случае, если все фирмы одинаковы, то есть $a_i = a, i = \overline{1, n}$, имеем:

$$S = \frac{\beta}{1 - a},$$

то есть с ростом β растет и суммарное финансирование. Отсюда следует, что оптимальный механизм по сути дела соответствует конкурсному механизму, когда в первую очередь средства выделяются фирме, предложившей максимальную заявку. Заметим, что проведенный анализ не учитывал важного практического ограничения, когда фирма получает финансирование не более заявленного. Анализ при учете этого условия, также, как и анализ случая разных фирм является более сложным и требует дополнительных исследований.

4. Механизмы распределения ресурса в условиях неопределенности

Прежде чем рассматривать механизмы распределения ресурса в условиях неопределенности, напомним основные результаты по синтезу эквивалентных прямых механизмов [2]. Пусть имеется множество I = {1, 2, ... , n} активных элементов, характеризуемых однопиковыми [ ] функциями предпочтения:

$$\varphi_i(x_i, r_i),\ i \in I, \tag{4.1}$$

где x_i - количество ресурса, получаемое i-ым АЭ, r_i - точка пика (параметр функции предпочтения - значение аргумента, при котором достигается глобальный максимум). Количество ресурса, получаемое i-ым АЭ, определяется в соответствии с процедурой планирования (процедурой, принципом, механизмом распределения ресурса):

$$x_i = \pi_i(s, R) \geq 0,\ i \in I, \tag{4.2}$$

где R - распределяемое количество ресурса, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ - сообщения (заявки) элементов. Будем предполагать, что $s_i \in \Omega_i$, где $\Omega_i = [0, D_i] \subseteq R_1$, $0 < D_i < +\infty$, $i \in I$, $s \in \Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$.

Как правило, при рассмотрении механизмов распределения ресурса вводится гипотеза дефицитности: $\sum_{i=1}^{n} r_i > R$, которую мы будем считать выполненной в ходе дальнейшего изложения.

Ниже мы, в основном, ограничимся рассмотрением анонимных механизмов, в которых функции $\pi_i(\cdot, R)$ непрерывны и симметричны относительно заявок элементов, а все ограничения $\{D_i\}$ одинаковы и равны D. Предположим также, что $\pi_i(\cdot, R)$ возрастает по s_i и R и убывает по s_j, $j \neq i$, а механизм обладает следующими свойствами [1]:

1. Весь ресурс распределяется полностью, то есть $\forall\ s \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R;$$

2. Если суммарное количество ресурса R увеличивается, то каждый АЭ получает не меньшее количество ресурса;

3. Если АЭ получает некоторое количество ресурса, то он всегда может получить любое меньшее его количество (для выполнения этого свойства достаточно, например, потребовать, чтобы ресурс был делим в произвольных пропорциях и $\forall\ s_{-i} \in \Omega_{-i}$ $\pi(0, s_{-i}, R) = 0$, где $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, $\Omega_{-i} = \prod_{j \neq i} \Omega_j$.

В работе [1] доказано, что для любого механизма из рассматриваемого класса механизмов распределения ресурса существует механизм открытого управления не меньшей эффективности. Иными словами, существует прямой (механизм, в котором все АЭ сообщают непосредственно параметры функции предпочтения) неманипулируемый механизм (в котором сообщение достоверной информации - равновесие Нэша для элементов), в котором все АЭ получают то же количество ресурса, что и в исходном механизме [2, 3].

Напомним, что для поиска эквивалентного прямого механизма используется следующий алгоритм:

- пусть все АЭ сообщили $s_i = D$, $i \in I$;

- те АЭ, для которых получаемое при этих заявках количество ресурса превосходит оптимальное, объявляются победителями и получают ровно оптимальное для себя количество ресурса;

- оставшийся ресурс аналогичным образом распределяется между проигравшими, появляются новые победители и т.д.

Легко видеть, что при использовании этого алгоритма элементам выгодно сообщать достоверную информацию [1, 3].

Перейдем теперь к рассмотрению механизмов распределения ресурса в условиях неопределенности. На практике достаточно распространена ситуация, в которой первоначально разрабатываются механизмы распределения одного количества ресурса, а затем оказывается, что распределять придется другое (к сожалению, как правило, меньшее) количество. Поэтому исследуем как «работают» механизмы распределения ресурса в условиях априорной неопределенности относительно суммарного количества ресурса, которое придется распределять; каковы равновесные заявки элементов; насколько известные процедуры устойчивы к изменениям величины R.

Рассмотрим формальную модель. Будем считать, что на момент выбора стратегий и центр, и активные элементы симметрично информированы либо только относительно множества возможных будущих значений количества ресурса

$$\Re = \{R_1, R_2, \dots, R_m\} \qquad (4.3)$$

(для простоты будем считать, что $R_1 \le R_2 \le \dots \le R_m$), либо им известно множество $\Re$ и вероятности реализации соответствующих значений:

$$\wp = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

$$p_i > 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Последовательность функционирования активной системы следующая:

– центр объявляет АЭ процедуру распределения $\pi(s,\cdot)$;
– зная свои функции предпочтения и допустимые множества, элементы выбирают стратегии и сообщают их центру;
– становится известным количество ресурса;
– этот ресурс распределяется в соответствии с объявленной процедурой и сообщенными заявками.

Для определения равновесных стратегий активных элементов необходимо ввести принцип рационального выбора. Будем считать, что в случае, если имеет место «интервальная» неопределенность - элементам известно только множество $\Re$, то они используют принцип максимального гарантированного результата (МГР).

В случае вероятностной неопределенности (если элементам дополнительно известно вероятностное распределение), то будем считать, что АЭ выбором стратегий максимизируют ожидаемые значения своих функций предпочтения:

$$f_i\left(\pi(\cdot), r_i, \Re, \wp\right) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_i\left(\pi_i\left(s, R_j\right), r_i\right) p_j . \qquad (4.4)$$

Определим равновесие Нэша $s^* \in \Omega$: $\forall\ i \in I$, $\forall\ s_i \in \Omega_i$

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_i\left(\pi_i\left(s_i^*, s_{-i}^*, R_j\right), r_i\right) p_j \geq \sum_{j=1}^{m} \varphi_i\left(\pi_i\left(s_i, s_{-i}^*, R_j\right), r_i\right) p_j . \qquad (4.5)$$

Очевидно, что если все $\{r_i\}$ достаточно велики (в частном случае, если все $\{\varphi_i\}$ - строго монотонно возрастающие функции), а все $\{R_j\}$ ограничены, то доминантной стратегией АЭ является о сообщение максимальных заявок. Этот достаточно тривиальный вывод, кстати, справедлив и для соответствующих систем с интервальной неопределенностью.

Более интересным представляется случай, когда при различных значениях R различное число АЭ получает оптимальное количество ресурса. Однако, этот случай гораздо труднее поддается анализу, особенно при больших n и m.

Первое, что приходит в голову - использовать классические результаты исследования механизмов распределения ресурса в детерминированных активных системах. Например, отыскав равновесные стратегии АЭ для каждого из значений $R_j \in \Re$, объявить, что в вероятностной системе равновесной будет стратегия, получаемая из «детерминированных» усреднением по $\wp$. Или, например, вычислить ожидаемое значение количества ресурса и решать дальше детерминированную задачу. Очевидно, что ни один из этих методов, в общем случае не верен. Но все-таки, использовать результаты анализа детерминированной задачи можно и нужно, только более осторожно. Поэтому сделаем небольшое отступление и обратимся к анализу детерминированной задачи.

Упорядочим все АЭ по возрастанию точек пика:

$$r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots \le r_n. \quad (4.6)$$

Как отмечалось выше, механизмом последовательного распределения ресурса (затрат) называется такой механизм, в котором элементы упорядочиваются в порядке возрастания (убывания) заявок (дохода, затрат, эффективности и т.д.), затем ресурс, равный заявке первого АЭ, выделяется всем АЭ, далее первый элемент исключается из рассмотрения и оставшийся ресурс распределяется между остальными элементами и т.д [1, 4].

Для рассматриваемого класса детерминированных механизмов распределения ресурса справедлив следующий результат (ср. с характеризацией, приведенной в [4]):

Теорема 4.1. Для любого анонимного механизма распределения ресурса существует эквивалентный прямой механизм последовательного распределения ресурса.

Доказательство. Из результатов работы [1] известно, что для любого механизма из рассматриваемого класса существует эквивалентный прямой механизм (механизм открытого управления). Алгоритм построения этого механизма приведен выше. Поэтому докажем, что для этого механизма существует эквивалентный механизм последовательного распределения ресурса.

Структура равновесия такова, что все проигравшие элементы сообщают максимальное количество ресурса. Обозначим $P \subset I$ - множество победителей. Понятно, что в упорядочивании (4.6) при использовании анонимного механизма элемент, стоящий левее победителя также является победителем. Тогда если $k = k(R)$ - число победителей, то $P(R) = \{ 1, 2, \dots , k(R) \}$. Значит, в силу анонимности механизма (если все АЭ сообщают одинаковые заявки, то все АЭ получают ресурс в одинаковом количестве):

$$x_i^* = r_i, \ i = \overline{1, k(R)}, \qquad (4.7)$$

$$x_i^* = \frac{\left(R - \sum_{j=1}^{k(R)} r_j\right)}{n - k(R)}, \quad i = \overline{k(R) + 1, \ n} \ . \qquad (4.8)$$

Сконструируем теперь механизм последовательного распределения, эквивалентный рассмотренному выше. Пусть АЭ сообщили центру оценки точек пика $\{\tilde{r}_i\}$. Расположим эти оценки в порядке возрастания:

$$\tilde{r}_1 \le \tilde{r}_2 \le \tilde{r}_3 \le \ldots \le \tilde{r}_n. \qquad (4.9)$$

Вычислим n величин

$$w_i = \sum_{j=1}^{i} \tilde{r}_j + (n-1)\tilde{r}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Очевидно, $w_i \le w_{i+1}$, причем для любого количества распределяемого ресурса R либо R < $\tilde{r}_1 \cdot n$ и победителей нет, либо существует такой номер $q \in \overline{1, n-1}$, $q = q(R)$, что $w_q \le R < w_{q+1}$. Возможность q = n исключается в силу введенной выше гипотезы дефицитности.

Рассмотрим следующий механизм последовательного распределения ресурса:

–АЭ упорядочиваются в соответствии с (4.9);

–если $R \ge n\tilde{r}_1$, то всем АЭ выделяется ресурс в количестве $\tilde{r}_1$ и первый АЭ исключается из рассмотрения, иначе все получают по R/n (все АЭ сообщают максимальные заявки и получают строго меньше оптимального количества) и процедура заканчивается;

–если $(R - n\tilde{r}_1) \ge (n-1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)$, то всем оставшимся АЭ добавляется по $(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)$ единиц ресурса и второй АЭ исключается из рассмотрения, иначе всем добавляется по

$$\frac{R - n\tilde{r}_1}{n-1}$$

и процедура заканчивается;

– и т.д.

Число шагов механизма, очевидно, конечно. Более того, он эквивалентен рассматриваемому выше механизму так как приводит к распределению ресурса, совпадающему с (4.7)-(4.8), где

$$\forall\ R \in \Re \qquad k(R) = q(R).$$

Отметим, что при использовании анонимных механизмов существует определенная иерархия элементов - количество ресурса, получаемое некоторым АЭ, зависит только от предпочтений элементов, расположенных левее него в упорядочении (4.9), и не зависит от предпочтений элементов, имеющих большие номера.

Докажем неманипулируемость механизма последовательного распределения, то есть докажем, что сообщение $\tilde{r}_i = r_i,\ i = \overline{1, n}$ - равновесие Нэша. Элементы-победители, очевидно, сообщат достоверную информацию так как они получают абсолютно оптимальное для себя количество ресурса. Рассмотрим, могут ли проигравшие (получившие ресурс в количестве, меньшем оптимального), поодиночке манипулируя информацией, увеличить свой выигрыш (значение своей функции предпочтения). В силу анонимности механизма при сообщении $\tilde{r}_i > r_i$ проигравший АЭ не изменит итогового распределения ресурса. Если же $\tilde{r}_i < r_i$, то количество выделяемого ему ресурса при той же обстановке может только уменьшиться. Теорема доказана.

Рассмотрим динамический аналог механизмов последовательного распределения (см. также [4]). Пусть ε - количество ресурса, производимое в единицу времени. В каждый момент времени ресурс делится поровну между всеми АЭ, текущее количества ресурса которых меньше оптимального. В интервале от $t = 0$ до $t = t_1$, где $t_1 = r_1 \cdot n/\varepsilon$, все АЭ получают в единицу времени по ε/n.

В момент времени t_1 количество ресурса, накопленное первым элементом равно $x_1(t_1)= r_1$. При $t \in (t_1, t_2]$ ресурс распределяется между всеми элементами, кроме первого. При этом

$$x_2(t) = \begin{cases} \varepsilon t/n,\ t \le t_1, \\ (\varepsilon t_1/n) + \varepsilon(t - t_1)/(n-1),\ t \in [t_1, t_2], \\ r_2,\ t \ge t_2 \end{cases}$$

где $t_2 = t_1 + (r_2 - r_1)\cdot(n - 1)/\varepsilon$, и т.д.

Легко видеть, что время, через которое i-ый АЭ получит оптимальное для себя количество ресурса, определяется выражением:

$$t_i = \frac{w_i}{\varepsilon},\ \ i = \overline{1, n}.$$

Ограниченность распределяемого ресурса соответствует в рассматриваемой динамической модели ограниченности времени. Если предположить, что $t \le T$, то за время T успеют получить ресурс в требуемом количестве первые k(T) элементов, где k определяется из условия: $t_k \le T < t_{k+1}$, или, что то же самое, $w_k \le \varepsilon T \le w_{k+1}$. Обозначая $\varepsilon T = R$, получаем, что $k = q(R)$.

Отметим конструктивный характер доказательства теоремы 4.2 - для любого анонимного механизма распределения ресурса она позволяет найти равновесное распределение ($k(R) = q(R)$) (4.7)-(4.8) и равновесные заявки:

$$s_i^* = D, \quad i = \overline{k(R), n}. \tag{4.10}$$

$$\left\{s_i^*(R)\right\}: \pi_i\left(s_1^*(R), s_2^*(R), \dots, s_{k(R)}^*(R), D, \dots, D\right) = r_i,\ i = \overline{1, k(R)}. \tag{4.11}$$

Следствием теоремы 4.1 является следующий факт:

Теорема 4.2. При фиксированном количестве распределяемого ресурса все анонимные механизмы эквивалентны.

Действительно, окончательное распределение ресурса не зависит от процедуры $\pi(\cdot)$ (от нее, естественно, зависят равновесные заявки элементов-победителей), а определяется только величинами (R, $\{r_i\}$, n). Интересно отметить, что итоговое равновесие не зависит и от ограничения D (при условии, что механизм удовлетворяет перечисленным выше свойствам). Это обусловлено тем, что анонимный механизм характеризуется симметричностью процедуры планирования и одинаковым для всех АЭ ограничением на заявки. При изменении (увеличении или уменьшении) величины D итоговое равновесие не меняется. В механизмах, не удовлетворяющих условию анонимности, изменение индивидуальных ограничений на заявки влияет как на равновесные заявки, так и на итоговое распределение ресурса (даже при симметричной процедуре планирования), то есть в этом случае выбор ограничений $\{D_i\}$ является одним из возможных управлений со стороны центра. Целесообразность и эффективность использования управлений такого рода на сегодняшний день, к сожалению, малоизученна.

Отдельной задачей, также заслуживающей внимания, является изучение неманипулируемости анонимных механизмов распределения ресурса при отказе от гипотезы некооперативного поведения АЭ. Есть основания предполагать, что эти механизмы являются коалиционно-неманипулируемыми (ср. с результатами [4]). Обоснование или опровержение этой гипотезы выходит за рамки настоящей работы и является задачей будущих исследований.

Зная структуру решения детерминированной задачи для произвольного (но известного элементам) количества ресурса, вернемся к анализу механизмов распределения ресурса в условиях неопределенности.

Результат теоремы 4.1 позволяет исключить из рассмотрения следующий малоинтересный случай (более тонкие оценки приводятся ниже):

Следствие. Если для некоторого АЭ $i \in I$ $\forall R \in \Re$ $w_i > R$, то $s_i^* = D$.

Приведенное следствие утверждает, что для некоторых АЭ в случае как интервальной, так и вероятностной неопределенности, стратегия - сообщать максимальные заявки, может быть доминантной, независимо от количества распределяемого ресурса. Однако, наиболее интересные эффекты проявляются в случае, когда существуют элементы, равновесные заявки которых зависят от количества распределяемого ресурса.

В случае интервальной неопределенности дело обстоит достаточно просто:

Теорема 4.3. Если активным элементам известно только множество возможных будущих значений количества ресурса, то они сообщат заявки, определяемые в соответствии с (4.10)-(4.11) при $R = R_1$.

Действительно, наихудшей для i-го АЭ ситуацией (в смысле и классического принципа гарантированного результата, и ограниченного принципа гарантированного результата [2, 3]) является минимальное значение распределяемого количества ресурса, так как с уменьшением R растут равновесные заявки всех АЭ.

Следствие. Если $r_1 > R_1/n$, то в случае интервальной неопределенности все АЭ сообщат максимальные заявки.

Результат следствия вполне соответствует наблюдаемому на практике явлению: если не исключено, что распределяемое количество ресурса окажется достаточно маленьким, то все будут просить по-максимуму.

В случае вероятностной неопределенности структура равновесия не так проста, как при интервальной неопределенности, и, интуитивно, должна зависеть от всех элементов множеств $\Re$ и $\wp$. На самом деле, во многих практически важных случаях эта зависимость несколько проще, чем кажется на первый взгляд:

Теорема 4.4. Если процедура планирования линейна по количеству распределяемого ресурса, а функции предпочтения элементов - полиномы, максимальная степень которых не превосходит **l**, то равновесные стратегии АЭ зависят только от **l** первых моментов распределения $\wp$.

Справедливость утверждения теоремы 4.4 следует из того, что при вычислении ожидаемой полезности i-го элемента возникают математические ожидания тех степеней R, коэффициенты при которых в функции предпочтения отличны от нуля. Следовательно, если **l** - максимальная из степеней полиномов $\{\varphi_i\}$, то в системе (4.5) фигурируют только первые **l** моментов.

Результаты теорем 4.2 и 4.4 значительно упрощают задачу анализа и синтеза реальных анонимных механизмов распределения ресурса. Так как все анонимные механизмы эквивалентны, то вряд ли стоит использовать экзотические процедуры планирования - достаточно взять, например, хорошо известный принцип пропорционального распределения [1] - окончательный результат будет один и тот же. Более того, так как существенными оказываются только несколько (**l**) первых моментов распределения $\wp$, задачу можно редуцировать к эквивалентной задаче, в которой имеется более простое распределение, первые **l** моментов которого совпадают с моментами исходного распределения.

Известно, что первые l - 2 моментов не всегда определяют распределение однозначно. В силу теоремы 4.4, оптимальные стратегии в механизмах распределения ресурса в условиях вероятностной неопределенности, в некотором смысле, инвариантны относительно классов распределений (факторизация по совпадению моментов). Поэтому при синтезе реальных механизмов представляется целесообразным создание библиотеки процедур планирования и распределений и подборе их комбинации, наиболее соответствующей рассматриваемой ситуации. Приводимый ниже пример содержит конкретный алгоритм и хорошо иллюстрирует возможности использования предложенных подходов.

<u>Пример</u>. Пусть n = 2, m = 100, $\mathrm{Prob}\{R = R_j\} = p_j$, $j = \overline{1, 100}$. Предположим, что функции предпочтения элементов имеют вид:

$$\varphi_i(x_i, r_i) = x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2, \quad i = 1, 2 \quad , \tag{4.12}$$

и используется принцип прямых приоритетов:

$$x_i = \pi_i(s_1, s_2, R) = \frac{s_i}{S} R, \quad i = 1, 2 \tag{4.13}$$

где $S = s_1 + s_2$.

Ожидаемая полезность i-го АЭ:

$$E\varphi_i = \frac{s_i}{S} \sum_{j=1}^{100} R_j p_j - \frac{1}{2r_i} \left(\frac{s_i}{S} \right)^2 \sum_{j=1}^{100} (R_j)^2 p_j, \quad i = 1, 2 \tag{4.14}$$

Обозначим M_i - i-ый момент распределения ($\wp$, $\Re$), $M_i = E(R)^i$, где E-оператор математического ожидания, и вычислим

$$M_1 = \sum_{j=1}^{100} R_j p_j, \quad M_2 = \sum_{j=1}^{100} \left(R_j\right)^2 p_j, \quad \sigma = \sqrt{M_2 - \left(M_1\right)^2},$$

первые два момента и стандартное уклонение. Решением системы уравнений:

$$\begin{cases} pR_1 + (1-p)R_2 = M_1 \\ pR_1^2 + (1-p)R_2^2 = M_2 \end{cases} \tag{4.15}$$

является

$$R_1(p) = M_1 \pm \sqrt{\frac{1-p}{p}} \cdot \sigma, \quad R_2(p) = M_1 \pm \sqrt{\frac{p}{1-p}} \cdot \sigma. \tag{4.16}$$

Выражения (4.16) являются решениями системы (4.15) при любых значениях $p \in (0, 1)$ (интересно отметить, что вероятностную задачу нельзя свести к полностью детерминированной, положив $p = 0$ или $p = 1$). Для простоты положим $p = 1/2$. Тогда, учитывая, что $R_1 \le R_2$, получим:

$$R_1 = M_1 - \sigma, R_2 = M_1 + \sigma. \tag{4.17}$$

Выбрав значения величин R_1, R_2 и p перейдем к рассмотрению задачи распределения ресурса в активной системе с двумя АЭ, имеющими те же функции предпочтения, но при $m = 2$ и равновероятных значениях R_1 и R_2, определяемых (4.17).

Обозначим

$$\alpha = ER = pR_1 + (1-p)R_2 . \quad \beta = ER_2 = pR_1^2 + (1-p)R_2^2.$$

Ожидаемая полезность i-го элемента:

$$E\varphi_i = \alpha \frac{s_i}{s_1 + s_2} - \frac{\beta}{2r_i}\left[\frac{s_i}{s_1 + s_2}\right]^2, \quad i = 1, 2.$$

В силу (4.17) $\alpha = M_1$, и $\beta = M_2$, а (4.18), очевидно, совпадает с ожидаемой полезностью (4.14). Таким образом, мы редуцировали задачу с m = 100 возможными значениями случайной величины (количество распределяемого ресурса) к несомненно более простой эквивалентной (имеющей в качестве окончательного то же распределение ресурса и те же равновесные заявки) задаче распределения ресурса.

Найдем решение эквивалентной задачи. Рассмотрим невырожденный случай, то есть предположим, что при максимальном количестве ресурса первый АЭ является победителем. Соответственно, в силу гипотезы дефицитности, второй АЭ при этом получает строго меньше оптимального количества ресурса. Следовательно, при распределении минимального количества ресурса он тем более получает строго меньше r. Значит доминантная стратегия второго АЭ - сообщение максимальной заявки.

Определим стратегию первого АЭ, максимизирующую его ожидаемую полезность. Очевидно, пары стратегий, обращающей в ноль производные ожидаемых полезности обоих АЭ не существует. Приравнивая нулю производную ожидаемой полезности первого элемента и принимая во внимание, что $s_1^* = D$, определяем

$$s_1^* = D\frac{\alpha r_1}{\beta - \alpha r_1} = D\frac{M_1 r_1}{M_2 - M_1 r_1}.$$

Оптимальная (проверяя знак второй производной, убеждаемся, что s_1^* - точка максимума) стратегия первого АЭ является убывающей функцией R_1, то есть при достаточно малых значениях R_1 максимум ожидаемой полезности достигается при сообщении максимальной заявки.

В процессе рассмотрения примера (учитывая результат теоремы 4.4), мы, фактически, доказали следующий факт:

Теорема 4.5. Если функции предпочтения элементов - полиномы второй степени, то при любом $m \geq 2$ задача распределения ресурса в условиях вероятностной неопределенности эквивалентна задаче распределения ресурса при $m = 2$ и $R_{1,2} = M_1 \pm \sigma$.

Результат теоремы 4.5, во-первых, существенно упрощает поиск равновесных стратегий АЭ (см. (4.5)), а во-вторых, свидетельствует, что на практике рассмотрение большого числа возможных будущих значений распределяемого количества ресурса вряд ли целесообразно.

Заключение

Рассмотренные модели и механизмы распределения затрат и доходов охватывают широкий класс прикладных задач, связанных с выбором схем финансирования инвестиционных проектов, распределением доходов в корпоративных структурах, реализацией крупных социальных программ, затрагивающих федеральные и региональные интересы и др.

Многие задачи в работе только поставлены и требуют дополнительных исследований. Это, в первую очередь, задачи синтеза оптимальных механизмов распределения затрат (доходов) и учет риска в задачах финансирования инвестиционных проектов. Кроме того, помимо исследований общих постановок крайне важно описывать прикладные модели распределения затрат (доходов), связанные с функционированием банковских и корпоративных структур, реализацией федеральных и региональных программ и др. С точки зрения методологии представляется важным исследование коалиционного поведения агентов.

Литература

1.Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.

2.Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с собщением информации // Автоматика и телемеханика, 1996, N 3. - С. 3 - 25.

3.Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.

4.Moulin H., Shenker S. Serial cost sharing // Econometrica, 1992. Vol. 60. N 5. P. 1009-1037.