

В.М. Червяков, В.Ф. Юдаев

# Гидродинамические и кавитационные явления в роторных аппаратах

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2007

В.М. Червяков, В.Ф. Юдаев

# Гидродинамические и кавитационные явления в роторных аппаратах

Монография

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2007

УДК 62-13: 53 2,5.013  
ББК Л11-5  
Ч-45

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой "Информационные технологии"  
Московского государственного университета технологий и управления  
**А.Е. Краснов**

Доктор технических наук, профессор,  
заведующий лабораторией ГНУ ВИИТиН  
**Н.П. Тишанинов**

### **Червяков, В.М.**

Ч-45 Гидродинамические и кавитационные явления в роторных аппаратах : монография / В.М. Червяков, В.Ф. Юдаев.  
– М. : "Издательство Машиностроение-1", 2007. – 128 с. – 400 экз. – ISBN 978-5-94275-340-5.

Впервые разработана зонная модель течения несжимаемой и сжимаемой жидкости в модуляторе аппарата на основе уравнений Навье-Стокса. Создана трехмерная модель течения жидкости в радиальном зазоре между коническими ротором и статором, что позволило разработать метод расчета потребляемой мощности для привода ротора аппарата без эмпирических коэффициентов. При исследовании кавитационных явлений впервые найдена зависимость оптимального значения величины критерия импульсной кавитации от содержания свободного газа в жидкости.

Предназначена для студентов и аспирантов, обучающихся по техническим специальностям, а также научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами нестационарного течения и кавитации в технологических объемах.

УДК 62-13: 53 2,5.013  
ББК Л11-5

**ISBN 978-5-94275-340-5**

© Червяков В.М., Юдаев В.Ф., 2007

© "Издательство Машиностроение-1",  
2007

Научное издание

**Червяков ВИКТОР МИХАЙЛОВИЧ,  
Юдаев ВАСИЛИЙ ФЕДОРОВИЧ**

**Гидродинамические и кавитационные  
явления в роторных аппаратах**

Монография

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 30.03.2007

Формат 60 × 84/16. 7,44 усл. печ. л. Тираж 400 экз. Заказ № 242

"Издательство Машиностроение-1"  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в Издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14  
Контактный телефон 4752-71-81-08

# СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	7
<b>1. ГИДРОДИНАМИКА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РОТОРНОМ АППАРАТЕ С ПОЗИЦИИ ЗОННОГО ПОДХОДА .....</b>	<b>10</b>
<b>1.1. Нестационарное течение несжимаемой жидкости     в каналах роторного аппарата .....</b>	<b>10</b>
1.1.1. Зонный подход к закономерностям движения среды при переходе от подвижного канала к неподвижному .....	10
1.1.2. Изменение площади проходного сечения модулятора роторного аппарата .....	12
1.1.3. Модель течения среды во вращающихся каналах .....	22
1.1.4. Критерии подобия нестационарного течения среды в каналах роторного аппарата .....	29
1.1.5. Модель течения среды в каналах статора .....	33
1.1.6. Компьютерное моделирование течения несжимаемой среды в канале статора .....	34
1.1.7. Границы применимости модели течения несжимаемой жидкости .....	47
1.1.8. Влияние массовых сил на течение среды в модуляторе роторного аппарата .....	49
<b>1.2. Течение сжимаемой жидкости в каналах роторного     аппарата .....</b>	<b>54</b>
1.2.1. Модель течения среды во вращающихся каналах прямоугольного сечения .....	54
1.2.2. Модель течения среды в каналах статора .....	62
1.2.3. Компьютерное моделирование течения сжимаемой среды в каналах статора .....	63
1.2.4. Границы применимости модели течения сжимаемой жидкости .....	66
<b>1.3. Нестационарное течение среды в радиальном зазоре     между цилиндрическими ротором и статором .....</b>	<b>68</b>
1.3.1. Модель нестационарного течения жидкости в радиальном зазоре между цилиндрическими ротором и статором .....	68
1.3.2. Компьютерное моделирование течения среды в радиальном зазоре .....	74
<b>1.4. Течение среды в радиальном зазоре между коническими     ротором и статором .....</b>	<b>78</b>
1.4.1. Модель течения вязкой среды между коническими проницаемыми поверхностями .....	78
1.4.2. Численное решение уравнений .....	82
<b>1.5. Определение энергозатрат в роторном аппарате .....</b>	<b>86</b>
1.5.1. Потребляемая мощность роторным аппаратом с цилиндрическими ротором и статором .....	86
1.5.2. Потребляемая мощность роторным аппаратом с коническими ротором и статором .....	91
1.5.3. Диссипация энергии в радиальном зазоре при нестационарном течении .....	93
<b>2. КАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В РОТОРНЫХ АППАРАТАХ .....</b>	<b>100</b>
<b>2.1. Динамика кавитационного пузыря с учетом влияния     газосодержания на сжимаемость среды .....</b>	<b>100</b>
2.1.1. Влияние содержания свободного газа на интенсивность кавитационных явлений .....	100
2.1.2. Уравнение динамики кавитационного пузыря применительно к условиям работы роторного аппарата .....	102

<b>2.2. Исследование влияния различных параметров на динамику кавитационного пузыря</b> .....	109
2.2.1. Влияние числа акустической кавитации, газосодержания и начального радиуса пузыря на амплитуду кавитационных импульсов давления .....	109
2.2.2. Влияние содержания свободного газа в жидкости, критериев Вебера, Рейнольдса и начального радиуса пузыря на критерий акустической кавитации .....	114
2.2.3. Влияние режимных и конструктивных параметров роторного аппарата на критерий акустической кавитации .....	116
2.2.4. Влияние режимных и конструктивных параметров роторного аппарата на величину кавитационных импульсов давления .....	118
2.2.5. Влияние газосодержания на затухание пульсаций кавитационного пузыря и критерий Маха .....	120
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	122

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Повышение эффективности работы оборудования для проведения химико-технологических процессов (ХТП) является одной из приоритетных задач для народного хозяйства страны. В настоящее время в связи с перспективой энергетического кризиса из-за сокращения разведанных запасов энергоносителей и, как следствие, резкого повышения цен на них, особенно остро встала задача создания технологического оборудования с низкими удельными энергозатратами на проведение различных химико-технологических процессов и одновременно позволяющих повысить качество производимой продукции. К такому оборудованию с полным основанием отнесут устройства, которые можно объединить под одним названием – роторные аппараты.

Роторные аппараты известны под различными названиями – гидродинамические сирены (ГДС), роторные аппараты с модуляцией потока (РАМП), роторно-пульсационные аппараты (РПА), гидродинамические аппараты роторного типа (ГАРТ), роторно-статорные аппараты, пульсационные аппараты роторного типа (ПАРТ), гидромеханические диспергаторы (ГМД) и др. Конструктивная схема этих аппаратов одинакова. Аппараты содержат основные детали – ротор и статор с каналами в их боковых стенках. Обрабатываемая среда проходит через периодически перекрывающиеся каналы и выводится из аппарата. В результате, в аппарате на среду оказывают воздействие различные факторы: турбулентные пульсации, механическое воздействие элементов конструкции, сдвиговые напряжения, возникающие в зазорах между ротором и статором, интенсивная акустическая импульсная и гидродинамическая кавитация, гидравлические удары и т.д. Перечисленные факторы физического воздействия на обрабатываемую среду интенсифицируют ХТП особенно в системах "жидкость–жидкость" (Ж–Ж) и "твердое–жидкость" (Т–Ж).

Основное различие между роторными аппаратами, при всем многообразии конструктивных решений, является величина зазора между ротором и статором. Это незначительное отличие очень сильно изменяет характер и величину физических факторов, воздействующих на обрабатываемую среду. В аппаратах с маленькими зазорами порядка 0,03...0,1 мм основное воздействие осуществляет различные типы кавитации. В устройствах, где зазоры имеют большие величины, вплоть до нескольких миллиметров, интенсификация ХТП происходит в зазоре за счет сдвиговых усилий. Однако, в настоящее время признано, что кавитационное воздействие наиболее эффективно с точки зрения высокой концентрации энергии в микрообъемах жидкости. Поэтому мы будем рассматривать роторные аппараты с малыми радиальными зазорами между ротором и статором.

На факторы, определяющие эффективность физического воздействия на среду, основное влияние оказывают закономерности нестационарного течения жидкости в каналах, радиальном зазоре, камере озвучивания. Кроме того, создание условий для возникновения различных резонансных явлений, автоколебаний, способствует усилению воздействия вышеперечисленных факторов на проводимые ХТП. На основании математических моделей течения среды в роторном аппарате можно переходить к конструированию и модернизации существующих аппаратов, обладающих повышенными технико-экономическими показателями.

В монографии не ставится цель сделать обзор многочисленных исследований в этом направлении. В предлагаемой работе рассматривается круг задач, связанный с движением сплошной среды в гидравлическом тракте роторного аппарата и вызываемые этим течением нелинейный эффект – кавитацию.

Авторы базировались на фундаментальных исследованиях в данной области А.И. Зимина, А.М. Балабышко, М.А. Балабудкина, М.А. Промтова, О.А. Трошкина и других ученых.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.В. Воробьеву, В.И. Галаеву, А.А. Коптеву, Е.А. Мандрыке, В.Ф. Першину за неоценимую помощь при проведении теоретических и экспериментальных исследований, ценные советы и замечания при обсуждении полученных результатов.

Своим долгом считаем выразить благодарность членам кафедры ТММ и ДМ ТГТУ за доброжелательное отношение и оказываемую помощь при работе над монографией, а также лично А.И. Четырину за помощь при подготовке рукописи к печати.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a_2, a_c$  – ширина каналов ротора, статора по внешней поверхности ротора и внутренней поверхности статора, м;  $c, c_v, c_L$  – скорости звука в двухфазной, газовых средах и в жидкости, м/с;  $C$  – коэффициент давления;  $d_{э,с}$  – эквивалентный диаметр канала статора, м;  $G$  – безразмерная азимутальная составляющая скорости;  $h_p, h_c$  – толщина ротора и статора в радиальном направлении, м;  $H_p, H_c$  – высота каналов в роторе, статоре, м;  $H_p^*$  – высота боковой поверхности цилиндрического ротора, м;  $H, H'$  – безразмерные нормальная к поверхности конуса, меридиональная составляющие скорости;  $l = l_p + \sqrt{S_p/\pi}$  – эквивалентная длина канала ротора, м;  $l_p, l_c, l_k$  – геометрические дины канала ротора, канала статора и камеры озвучивания, м;  $n_p$  – число оборотов ротора, об/мин;  $p, P$  – давление и масштаб давления, Па;  $|P_m|$  – модуль амплитуды отрицательного импульса давления, Па;  $\Delta P = 0,5\kappa\rho\omega^2(R_2 - l) + \rho\omega^2l(1 - \chi) + \Delta P_b$  – разность давления между полостью ротора и камерой озвучивания, Па;  $\Delta P_b$  – перепад давления, создаваемый внешним источником, Па;  $P_s = P_\infty - P_v + 2\sigma/R_0$  – давление жидкости на границе с пузырьем, Па;  $P_{v_0}$  – давление пара в пузырье в начальный момент, Па;

$P_\infty$  – статическое давление в жидкости, Па;  $P_k$  – статическое давление жидкости в камере озвучивания, Па;  $P_v$  – давление насыщенного пара, Па;  $Q$  – объемный расход среды через аппарат, м<sup>3</sup>/с;  $r$  – радиальная координата, м;  $R_1, R_2, R_c$  – внутренний, наружный радиус цилиндрического ротора, внутренний радиус цилиндрического статора, м;  $R_{1к}, R_{2к}$  – малый и большой радиусы конического ротора, м;  $R, R_0$  – текущий, начальный радиус пузыря, м;  $R_m(\bar{r}\lambda_m)$  – собственные функции;  $R(r)$  – функция радиальной координаты, определяемая граничными условиями;  $S_p, S_c, S(t)$  – площадь сечения канала ротора, статора, диафрагмы модулятора, м<sup>2</sup>;  $t$  – время, с;  $T(t)$  – функция времени, определяемая начальными условиями;  $U = \omega R_2$  – масштаб азимутальной составляющей скорости в зазоре, м/с;  $v_p, v_1$  – радиальные компоненты скорости в канале ротора и на входе в канал, м/с;  $v_\phi, v_\phi^*, v_x$  – азимутальный, меридиональный, нормальный к поверхности конуса компоненты скорости в зазоре, м/с;  $\mathcal{V}(\bar{t})$  – относительная скорость пузыря вдоль линии тока;  $V = \sqrt{2\Delta p/\rho}$  – масштаб радиального компонента скорости в канале ротора, м/с;  $W$  – безразмерный нормальный к поверхности конуса компонент скорости в зазоре;  $x, x_0$  – радиальная координата в конической системе, зазор между коническими ротором и статором, м;  $z$  – осевая координата, цилиндрическая система, м;  $z_p, z_c$  – число каналов в роторе, статоре;  $\beta = P_{v_0}/P_s$  – начальное содержание газа в пузырье;  $\gamma$  – полуконусность конических ротора и статора, рад;  $\delta_a, \delta$  – относительный радиальный и радиальный(м) зазоры;  $\xi, \xi_0$  – относительная радиальная координата, коническая система и относительный зазор между коническими ротором и статором;  $\lambda = \rho c V / P$  – приведенное волновое сопротивление;  $\lambda_m$  – параметр разделения переменных;  $\mu, \nu$  – коэффициенты динамической и кинематической вязкости жидкости или газа;  $\rho^*$  – меридиональная координата, коническая система, м;  $\rho, \rho_v, \rho_L$  – плотность среды, газовой и жидкой сред, кг/м<sup>3</sup>;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения, Н/м;  $\phi$  – азимутальная координата в цилиндрической и конической системах координат, рад;  $\omega$  – угловая частота вращения ротора, с<sup>-1</sup>;  $Eu = \Delta P / \rho V^2$  – критерий Эйлера;  $K_K = \omega R_2 / V$  – критерий, оценивающий соотношение центробежной и кориолисовой сил;  $K_C = \Delta P / P_k$  – критерий кавитации Стайлса;  $l/a_p$  – симплекс, характеризующий инертность жидкости в канале ротора;  $M = V/c$  – критерий Маха для течения жидкости в канале ротора;  $Ma = R'/c$  – критерий Маха для движения границы раздела "газ–жидкость" пузыря;  $Re_\phi = UR_2/\nu$  – критерий Рейнольдса для течения жидкости в зазоре в азимутальном направлении;  $Re_r = v_1 R_2/\nu$  – критерий Рейнольдса для течения жидкости в зазоре в радиальном направлении;  $Sh_\phi = R_2/TU$  – критерий Струхала для течения жидкости в зазоре в азимутальном направлении;  $Sh = l/VT$  – критерий Струхала для течения жидкости в канале ротора;  $Re_k = (R_0/\nu)P_s^{0,5}\rho^{-0,5}$  – критерий Рейнольдса для движения границы раздела "газ–жидкость" пузыря;  $We = 2\sigma/R_0P_s$  – критерий Вебера;  $\chi = l/R_2$  – симплекс, относительная длина канала ротора;  $\chi_r = 2P_s/\rho_L v^2$  – критерий гидродинамической кавитации;  $\chi_a = P_s/|P_m|$  – критерий акустической кавитации.

**Индексы:**  $\bar{\phantom{x}}$  – безразмерная величина;  $'$ ,  $''$  – первая и вторая производная;  $_{\max}$  – наибольшая величина.

**Сокращения:** ХТП – химико-технологический процесс.



# 1. ГИДРОДИНАМИКА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РОТОРНОМ АППАРАТЕ С ПОЗИЦИИ ЗОННОГО ПОДХОДА

## 1.1. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ РОТОРНОГО АППАРАТА

### 1.1.1. ЗОННЫЙ ПОДХОД К ЗАКОНОМЕРНОСТЯМ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ПОДВИЖНОГО КАНАЛА К НЕПОДВИЖНОМУ

В настоящее время существует несколько моделей, описывающих течение несжимаемой среды в каналах роторного аппарата [1 – 6]. В работах [1 – 5] течение среды описывается на основании нестационарного уравнения Бернулли. При этом вращение канала ротора учитывается использованием в модели гидравлического сопротивления диафрагмы, образуемой в модуляторе роторного аппарата перекрывающимися каналами статора промежутками между каналами ротора. Очевидно, что закономерности течения жидкости во вращающихся и неподвижных каналах различны. В работе [6] сделана попытка рассмотреть движение частицы среды отдельно в каналах ротора и статора под действием действующих на нее сил, причем переход от канала ротора в канал статора также моделируется с использованием закономерностей гидравлического сопротивления диафрагмы. В полученной модели учитывается течение среды в радиальном зазоре, а так как особенностью конструкции роторного аппарата является малые радиальные зазоры  $\delta < 0,1$  мм, это приводит к необоснованному осложнению полученного выражения. При этом по сравнению с результатами, полученными в [1 – 5], не получается более адекватного описания реального гидромеханического процесса.

Закономерности течения среды в каналах ротора и статора различны и должны описываться разными дифференциальными уравнениями движения. Поэтому при построении модели течения среды в каналах ротора и статора используется зонный подход, который заключается в том, что рассматриваемые объекты разбиваются на зоны вдоль гидравлического тракта. В каждой зоне определяются зависимости, описывающие протекающие в них процессы, с учетом особенностей характерных геометрических, режимных параметров, условий гидродинамической обстановки и т.д. Условием этого метода является то, что выходные параметры предыдущей зоны являются входными для последующей. Для создания единой модели, описывающей процессы, протекающие в объекте, необходимо наличие условий и функций, обеспечивающих "сшивание" зависимостей, полученных в отдельных зонах.

Этот метод нашел применение при изучении различных процессов. В работах [7 – 10] используется так называемая ячеичная модель для описания различных химико-технологических процессов (ХТП). Поток разбивается на ряд последовательно соединенных ячеек. Принимается, что в каждой из ячеек происходит идеальное перемешивание потока, а перемешивание между ячейками отсутствует. Количество таких ячеек является параметром, характеризующим модель идеального потока.

Ячеичная модель используется при описании процесса перемешивания на тарелках тарельчатых колонн в ректификационных установках, в экстракционных насадочных колоннах, в аппаратах с мешалками, роторно-дисковых экстракторах и т.д. Например, рассматривая пульсационную колонну, состоящую из участков с различными формами проходного сечения, длинами, гидравлическими диаметрами, коэффициентами сопротивления и удельными весами, а также используя уравнение неразрывности потока для приведения перемещений во всех частях установки к перемещению жидкости под действием внешней силы [10].

В работах [11 – 14] рассматриваются задачи нестационарной теплопроводности и диффузии в теплообменном, адсорбционном и сушильном оборудовании. При получении расчетных зависимостей и процессов используется понятие – элементарная область, т.е. весь объем аппарата разбивается на элементарные области и затем по разработанным методикам производится расчет оборудования.

В аппаратах с явно выраженной протяженностью сушильного тракта, например в шахтных сушилках, параметры процесса сушки изменяются по длине, рассматриваемой фазы, поэтому расчет кинетики рекомендуется проводить зональным методом с разбиением всей длины потока твердой фазы на ряд элементарных зон и позонным заданием параметров процесса [15 – 19]. При этом весь диапазон изменения влагосодержания материала разбивается на ряд концентрационных зон (оптимальное количество зон 5–6).

Зонный подход применен при изучении центробежного разделения пен [20–21]. При движении низкократной пены по межтарельчатому зазору в системе происходит структурное изменение формы пенных оболочек от сферической к ячеистой. Поэтому межтарельчатый зазор представляют состоящим из зон, в каждой из которых синерезис (вытекание жидкости из пены) описывается своим кинетическим уравнением. Определены условия, обеспечивающие "сшивание" зон на границе.

Применительно к роторному аппарату предложено выделять две зоны соединенных последовательно: вращающийся канал ротора и неподвижный канал статора. На закономерности течения среды оказывает основное влияние геометрические и режимные параметры канала ротора и особенности процесса перекрывания канала статора промежутком между отверстиями в роторе. Канал статора служит для передачи модулированного потока среды в камеру озвучивания роторного аппарата, однако отметим заранее, что длина канала статора влияет на возникновение в нем стоячей волны и резонансных явлений.

Функцией, служащей для сшивания зависимостей на границе зон, описывающих течения среды в канале ротора и статора, является уравнение неразрывности. При этом количество среды, находящееся в радиальном зазоре, в основном учитывается выражением для изменения площади проходного сечения модулятора. Кроме того, величина зазора на порядок и более меньше длин каналов ротора и статора. Отметим, что для несжимаемой жидкости используется постоянство объемного расхода, а для сжимаемой среды – постоянство массового расхода через каналы роторного аппарата. Таким образом, параметры потока на выходе из канала ротора равны параметрам среды на входе в канал статора. Это обеспечивается использо-

ванием полученных в работе зависимостей для определения закона изменения площади поперечного сечения модулятора, соответствующих физическим представлениям о течении жидкости через модулятор.

Таким образом, уравнение неразрывности в интегральной форме для несжимаемой жидкости имеет вид

$$v_p(r, t)S_p = v_c(r, t)S_c. \quad (1.1)$$

Для сжимаемой среды уравнение неразрывности в интегральной форме

$$\rho_p(p)v_p(r, t)S_p = \rho_c(p)v_c(r, t)S_c. \quad (1.2)$$

### 1.1.2. ИЗМЕНЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПРОХОДНОГО СЕЧЕНИЯ МОДУЛЯТОРА РОТОРНОГО АППАРАТА

Закон изменения площади проходного сечения модулятора роторного аппарата оказывает значительное влияние на закономерности нестационарного течения среды в каналах ротора и статора. Он формирует форму и величину импульсов давления, что, в свою очередь, влияет на интенсивность акустической импульсной кавитации, возникающей в технологическом объеме аппарата. Все это определяет повышенное внимание исследователей к определению зависимостей изменения площади проходного сечения от геометрических и режимных параметров аппарата.

Остановимся на некоторых работах, посвященных этому вопросу, которые представляют наибольший интерес. В исследованиях [22, 23] предложены зависимости для определения закона изменения проходного сечения модулятора роторного аппарата в явном виде, при этом график этой функции представляет собой трапецию на интервале процесса открывания и закрывания каналов статора при различных сочетаниях размеров ширины каналов ротора и статора прямоугольного сечения. Отверстия овальной формы приводятся к прямоугольной форме с помощью соответствующих выражений. Площадь поперечного сечения изменяется от минимального значения, равного произведению величин радиального зазора и ширины канала, до максимального, равного площади канала [24]. При этом не учитывается течение по высоте канала через зазор в момент, когда канал статора перекрыт промежутком между каналами ротора. Кроме того, исходя из физических представлений об изменении проходного сечения модулятора, функция, описывающая этот закон не должна иметь изломов.

Дальнейшее развитие исследования процесса открывания и закрывания каналов статора получило в работах [25 – 31]. В них более правильно рассмотрен участок от начального момента процесса открывания канала статора, однако участок начала процесса закрывания опять имеет излом. Кроме того, в безразмерном виде максимальная площадь поперечного сечения больше единицы. Этим же недостатком обладает зависимость, предложенная в работе [32], хотя в ней более правильно определена минимальная площадь поперечного сечения модулятора.

Общим недостатком рассмотренных моделей изменения поперечного сечения модулятора роторного аппарата является то, что они не учитывают течение через зазор с двух сторон по ширине каналов ротора и статора при их взаимном перекрытии. Особенно это заметно в начальный период открывания каналов статора, а именно этот участок оказывает наибольшее влияние на гидравлическое сопротивление модулятора.

Отметим работу [35], в которой, используя результаты [36], зависимость коэффициента сопротивления диафрагмы от степени открытия окон относительно неподвижных цилиндров, разбивалась на участки по экспериментальным данным, т.е. в явном виде не дается зависимость площади поперечного сечения модулятора от времени.

В момент времени, когда канал статора полностью "закрит" промежутком между каналами ротора, жидкость поступает в него через зазор по всему периметру канала; т.е. минимальная площадь поперечного сечения модулятора определяется как

$$S_{\min} = 2\delta(a_c + H_c). \quad (1.3)$$

В момент полностью "открытого" канала ротора площадь поперечного сечения модулятора наибольшая и равна

$$S_{\max} = a_c H_c. \quad (1.4)$$

Вначале сделано предположение, что, в первом приближении, площадь проходного сечения модулятора от  $S_{\min}$  до  $S_{\max}$  возрастает линейно, остается такой определенный промежуток времени и уменьшается также линейно, до  $S_{\min}$ . Этот процесс изменения площади поперечного сечения модулятора изображен на рис. 1.1.

На основании предложенного графика получается следующее выражение для  $S(t)$ :

$$S(t) = \begin{cases} S_{\min} + S_1(t), & 0 \leq t \leq \frac{a_c}{\omega R}; \\ S_{\max}, & \frac{a_c}{\omega R} < t < \frac{a_p}{\omega R}; \\ S_{\max} - S_2(t), & \frac{a_p}{\omega R} < t \leq \frac{a_p + a_c}{\omega R}; \\ S_{\min}, & \frac{a_p + a_c}{\omega R} < t \leq \frac{b_p - a_c}{\omega R}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Текущие значения приращения площади поперечного сечения  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  определяются из простых геометрических соображений.

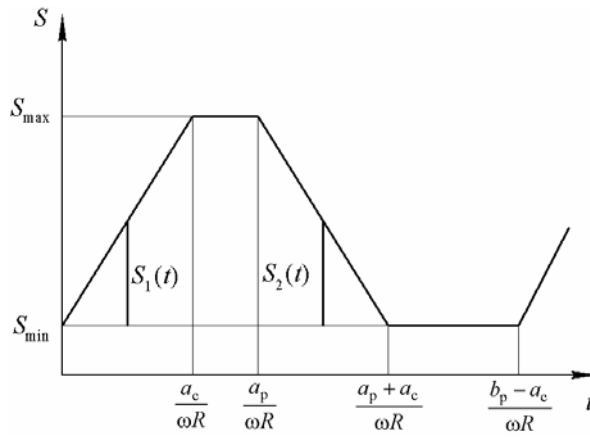


Рис. 1.1. Зависимость площади проходного сечения модулятора роторного аппарата от времени за период модуляции площади проходного сечения

Часто необходимо использовать уравнение (1.5) в безразмерном виде. Проведем преобразования. За масштаб площади поперечного сечения модулятора возьмем  $S_{\max} = a_c H_c$ , а за масштаб времени – период "открывания" канала статора

$$T = \frac{a_c}{\omega R_p}.$$

В результате получаем:

$$\bar{S}(t) = \begin{cases} \bar{t}(1-\bar{\delta}) + \bar{\delta}, & 0 \leq \bar{t} \leq 1; \\ 1, & 1 < \bar{t} \leq A; \\ (A+1-\bar{t})(1-\bar{\delta}) + \bar{\delta}, & A < \bar{t} \leq A+1; \\ \bar{\delta}, & A+1 < \bar{t} \leq B-1. \end{cases} \quad (1.6)$$

В уравнении (1.6) приняты обозначения:

$$A = \frac{a_p}{a_c}; \quad B = \frac{b_c}{a_c}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T}. \quad (1.7)$$

Остановимся немного подробнее на безразмерном зазоре  $\bar{\delta}$ , так как он отличается от принятых в работах [37] и [34].

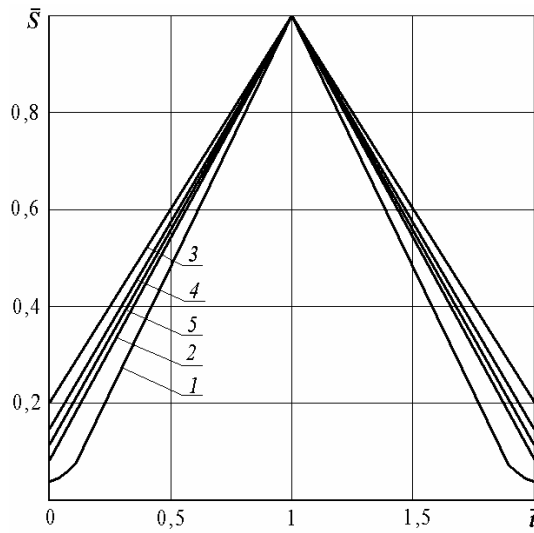
При делении левой части первой строчки уравнения (1.5) на  $S_{\max}$  мы получаем:

$$\frac{S_{\min}}{S_{\max}} = \frac{2\delta}{H_c} + \frac{2\delta}{a_c} = \delta_a + \delta_h = \bar{S}_{\min}. \quad (1.8)$$

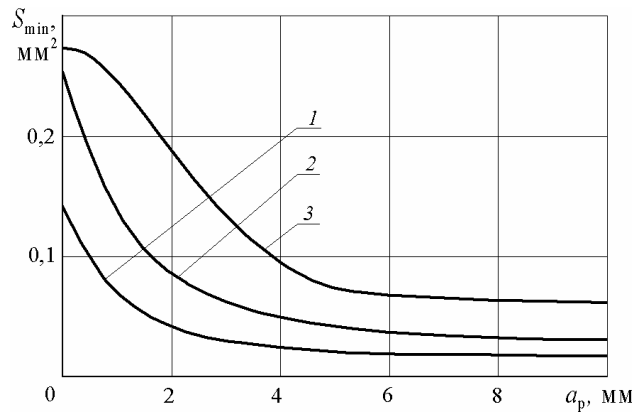
Для сравнения полученного уравнения (1.6) с уравнениями, приведенными в работах [34] и [37], построены сравнительные графики (рис. 1.2 и 1.3) при величине зазора  $\delta = 0,1$  мм и различных значениях  $a_c$  и  $H_c$ . Для наглядности использован случай  $A = 1$ .

Из графиков на рис. 1.2 следует вывод: если не учитывать течение жидкости через зазор по ширине канала статора  $a_c$ , то  $S_{\min}$ , рассчитанная по предложенной формуле (1.4), может превышать ее значение по формуле из работы [34] в четыре раза, а по формуле из работы [37] – в два раза. Отметим, что при увеличении  $H_c$  наши результаты приближаются к результатам работы [37] и при больших значениях  $H_c$  отличаются незначительно.

Графики на рис. 1.3 показывают, что с увеличением ширины канала значения  $S_{\min}$ , определенные по формуле (1.8) и по формулам из работ [34] и [37], различаются в четыре раза. С уменьшением ширины канала результаты работы [37] и полученные в данной работе различаются незначительно, что нельзя сказать о данных из работы [34].



**Рис. 1.2. Изменение безразмерной площади поперечного сечения модулятора:**  
 1 – по формуле из работы [34]; 2 – по формуле из работы [37];  
 3 – по формуле (1.4),  $H_c = 2$ ; 4 – по формуле (1.4),  $H_c = 5$ ;  
 5 – по формуле (1.4),  $H_c = 10$ ;  $a_c = 2$  мм



**Рис. 1.3. Изменение  $S_{\min}$  в модуляторе роторного аппарата:**  
 1 – по формуле из работы [34]; 2 – по формуле из работы [37];  
 3 – по формуле (1.6),  $H_c = 10$  мм;  $a_c = 2$  мм

Из вышесказанного можно сделать вывод, что предложенная зависимость позволяет более точно определить изменение площади поперечного сечения модулятора роторного аппарата, особенно в начальный период процесса "открывания" канала статора. Однако, как отмечалось выше, на графике  $S(t)$  не должно быть изломов.

Для определения закона изменения площади проходного сечения модулятора, отвечающего всем предъявленным требованиям используется следующий подход [39]. Рассмотрим отдельно две функции, характеризующие изменение площади проходного сечения. Первая учитывает течение жидкости через зазор по высоте канала, а вторая – по ширине канала, причем

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t). \quad (1.9)$$

Рассмотрим схему процесса открывания канала статора и приведем пример определения изменения площади поперечного сечения модулятора с высотой каналов  $H_p = H_c = H$  и  $a_p \geq a_c$  на участке  $0 \leq x \leq a_c$ .

Очевидно, что основная проходная площадь сечения модулятора, гипотенуза  $a_c$  на рис. 1.4, с учетом высоты канала  $H$ , равна

$$S_1(t) = \sqrt{x^2 + \delta^2} H. \quad (1.10)$$

Учитывая, что в момент перекрытия канала статора промежутком между каналами ротора жидкость течет через зазор по высоте канала с двух сторон, то формула будет иметь вид

$$S_1(t) = \sqrt{x^2 + (2\delta)^2} H. \quad (1.11)$$

В безразмерном виде

$$\bar{S}_1(\bar{t}) = \sqrt{\bar{t}^2 + \bar{\delta}_a^2}. \quad (1.12)$$

График данной функции имеет вид, изображенный на рис. 1.5, а.

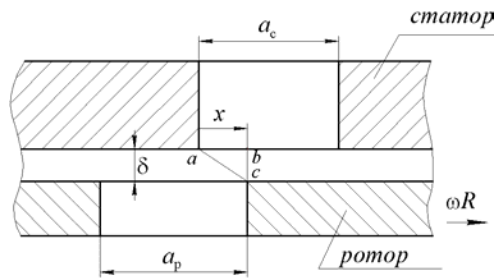
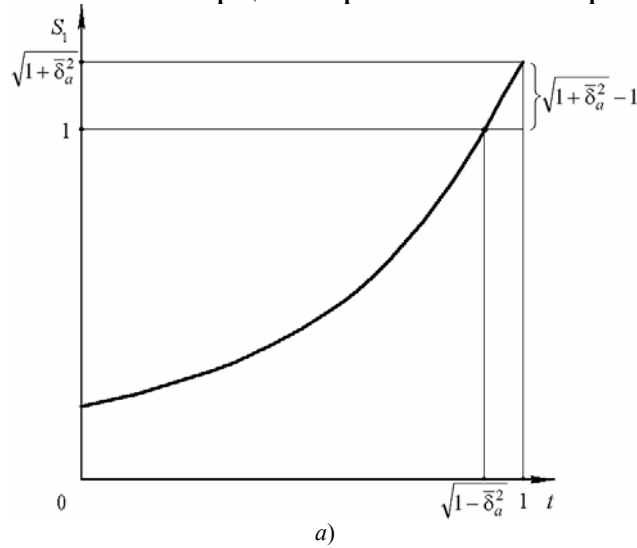
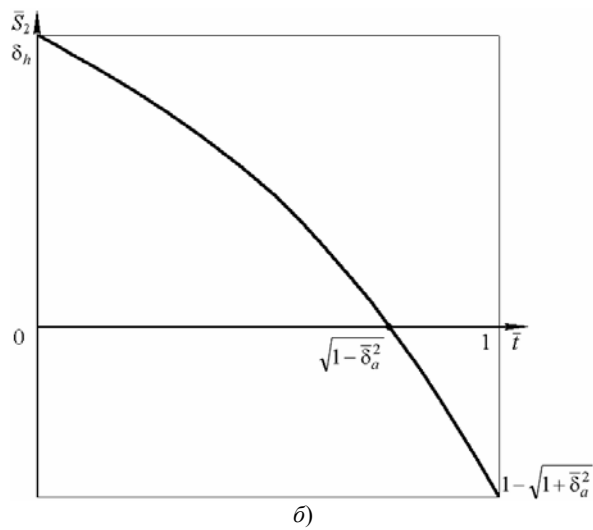


Рис. 1.4. Схема процесса открывания канала статора



а)



б)

Рис. 1.5. Общий вид функции:

$$a - \bar{S}_1(\bar{t}); \quad б - \bar{S}_2(\bar{t})$$

Очевидно, что при  $\bar{t} = 0$  график функции соответствует по характеру требуемой зависимости  $\bar{S}_1(\bar{t})$ , но при  $\bar{t} = 1$   $\bar{S}_1(\bar{t}) > 1$  и имеет излом. Чтобы учесть течение по ширине зазора и исключить излом мы должны выбрать функцию  $\bar{S}_2(\bar{t})$  такой, чтобы при суммировании с графиком зависимости  $\bar{S}_1(\bar{t})$  график  $\bar{S}(\bar{t})$  отвечал следующим требованиям: при  $\bar{t} = 0$   $\bar{S}(\bar{t}) = \bar{\delta}_a + \bar{\delta}_n$ , а при  $\bar{t} = 1$   $\bar{S}(\bar{t}) = 1$ , при этом функция не должна иметь изломов, т.е.  $d\bar{S}/d\bar{t}$  не имела скачков. Этим требованиям соответствует функция с графиком  $\bar{S}_2(\bar{t})$ , изображенным на рис. 1.5, б.

Если сложить две функции, то будем иметь функцию с графиком изменения проходного сечения, удовлетворяющим нашим требованиям. Вид функции  $\bar{S}_2(\bar{t})$  вначале принимался в виде параболы, однако, после решения полученный график  $\bar{S}(\bar{t})$  не соответствовал физическим представлениям о закономерностях его изменения на интервале  $0 \leq \bar{t} \leq 1$ . Поэтому характер функции  $\bar{S}_2(\bar{t})$  был представлен гиперболой вида

$$\bar{S}_2(\bar{t}) = \frac{d}{\bar{t} - e} + f. \quad (1.13)$$

Используем начальные и граничные условия для определения коэффициентов уравнения (1.13):

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{\delta}_h = -\frac{d}{e} + f; \quad (1.14)$$

$$\bar{t} = 1, \quad 1 - \sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} = \frac{1}{1 - e} + f; \quad (1.15)$$

$$\bar{t} = \sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2}, \quad 0 = \frac{d}{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2}} + f. \quad (1.16)$$

Выразив из (1.14) и (1.16) величину  $d$ , приравняем эти выражения и найдем  $e$ , затем определим  $d$  и подставим в (1.15). После преобразований получим:

$$f = \frac{\bar{\delta}_h \sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - \bar{\delta}_h}{\sqrt{(1 - \bar{\delta}_a^2)(1 - \bar{\delta}_a^2)} - \sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} + \bar{\delta}_h \sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} - \bar{\delta}_h}; \quad (1.17)$$

$$e = \frac{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1)}{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1) + \bar{\delta}_h (\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} - 1)}; \quad (1.18)$$

$$d = \frac{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1)}{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1) + \bar{\delta}_h (\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} - 1)} \times \left[ \frac{\bar{\delta}_h (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1)}{\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} (\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1) + \bar{\delta}_h (\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} - 1)} - \bar{\delta}_h \right]. \quad (1.19)$$

Введем обозначения

$$(\sqrt{1 + \bar{\delta}_a^2} - 1) = m;$$

$$(\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} - 1) = n; \quad (1.20)$$

$$\sqrt{1 - \bar{\delta}_a^2} = p.$$

После преобразования выражений (1.17) – (1.19) с помощью подстановок (1.20) подставим полученные выражения для  $d$ ,  $e$ ,  $f$  в выражение для  $\bar{S}_2(\bar{t})$ . После громоздких преобразований, и проверки по граничным условиям (1.14) – (1.16) получим выражение

$$\bar{S}_2 = \frac{\bar{\delta}_h m (\bar{t} - p)}{(pm + \bar{\delta}_h n) \bar{t} - pm}. \quad (1.21)$$

Аналогично получают выражения для других периодов перекрытия каналов статора промежутками между каналами ротора.

Таким образом, получено выражение для определения изменения площади проходного сечения модулятора для малых значений радиального зазора в безразмерном виде:

$$\bar{S}(t) = \begin{cases} \sqrt{\bar{t}^2 + \bar{\delta}_a^2} + \frac{\bar{\delta}_h m (\bar{t} - p)}{(pm + \bar{\delta}_h n) \bar{t} - pm}, & 0 \leq \bar{t} \leq 1; \\ 1, & 1 < \bar{t} \leq A; \\ \sqrt{(A + 1 - \bar{t})^2 + \bar{\delta}_a^2} + \frac{\bar{\delta}_h m (A + 1 - \bar{t} - p)}{(pm + \bar{\delta}_h n) (A + 1 - \bar{t}) - pm}, & A < \bar{t} \leq A + 1; \\ \bar{\delta}_a + \bar{\delta}_h, & A + 1 < \bar{t} \leq B - 1. \end{cases} \quad (1.22)$$

Данное выражение применимо при условии

$$\bar{\delta}_a < 0,1 \text{ и } \bar{\delta}_h < 0,1. \quad (1.23)$$

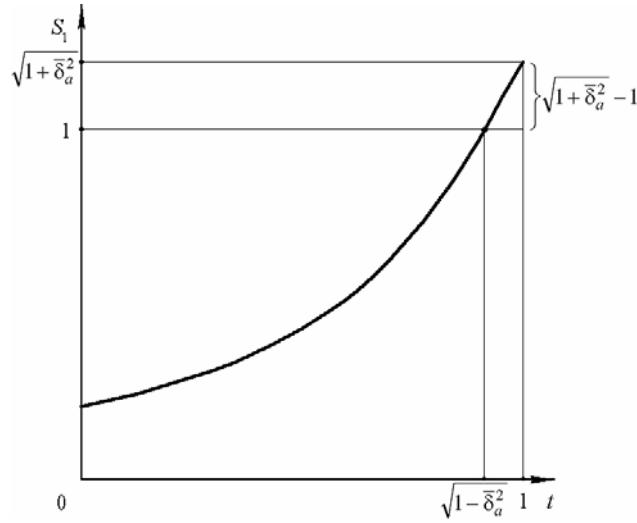
В системе (1.22) приняты обозначения, аналогичные используемым в (1.7)–(1.8).

Относительная громоздкость выражения (1.22) легко разрешается современным состоянием вычислительных средств.

Используя программу MathCAD построены графики для сравнения предложенных зависимостей изменения площади проходного сечения модулятора роторного аппарата с результатами работ [34] и [38].

Из анализа графиков, представленных на рис. 1.6 следует, что предложенные зависимости (1.22) физически обосновано описывают процесс открывания и закрывания канала статора при малых радиальных зазорах (условие (1.23)).

В заключение можно отметить следующее, когда характер изменения площади поперечного сечения модулятора не влияет на характер полученных зависимостей, например, при определении изменения гидравлического сопротивления модулятора [32, 34] можно рекомендовать использовать более простое выражение (1.6).



**Рис. 1.6. Изменение безразмерной площади поперечного сечения модулятора:**

1 – по формуле (1.22); 2 – по формуле (4) из работы [38];  
3 – по формуле (2.13) из работы [34],  $\delta = 0,1$  мм,  $a_c = 2$  мм,  $H_c = 5$  мм,  $A = 1$

### 1.1.3. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ

За основу теоретических исследований газо- и гидродинамических процессов в роторном аппарате положим уравнение Навье-Стокса в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  [40]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right); \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right); \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \quad (1.26)$$

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z r) \right] = 0. \quad (1.27)$$

Эти уравнения будут использоваться в работе с соответствующими корректировками, в зависимости от поставленной задачи.

Рассмотрим одномерную задачу для нестационарного течения несжимаемой жидкости во вращающемся канале прямоугольного сечения, причем высота канала значительно больше ширины (рис. 1.7) [42, 43]. Вследствие несжимаемости среды  $v$  и  $\rho$  постоянные величины.

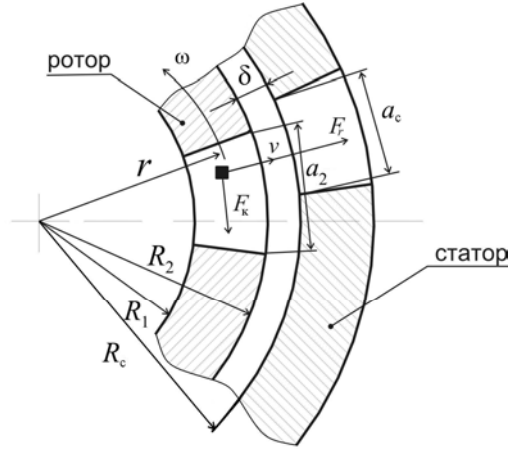


Рис. 1.7. Схема движения элемента жидкости в каналах модулятора

Свяжем систему координат с вращающимся каналом. Тогда проекция массовой силы, отнесенной к единице объема, войдет в явном виде в уравнение (1.24), т.е. в этом случае

$$F_r = \rho \omega^2 r. \quad (1.28)$$

В левую часть уравнения (1.24) входит относительная окружная скорость.

Вследствие малой ширины канала можно считать, что  $u \ll v$ , т.е. можно не учитывать относительную окружную скорость.

На основании принятых допущений в модели течения жидкости и учитывая осевую симметрию задачи, т.е.  $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ ,  $\partial^2/\partial\varphi^2 \equiv 0$  и (1.28), получаем уравнение для течения жидкости (индекс  $r$  при  $v$  опускаем)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \omega^2 r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (1.29)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0. \quad (1.30)$$

Подставим (1.30) в уравнение (1.29) и получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v^2}{r} + v \left( \frac{2v}{r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) = \omega^2 r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.31)$$

Определим градиент давления, учитывая, что в реальных аппаратах отношение  $l/r$  достаточно мало, оно отличается на порядок

$$P_2 - P_1 \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_1} (R_2 - R_1),$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_1} (R_2 - R_1) = -\frac{\Delta P}{\rho l}.$$

Уравнение нестационарного течения жидкости в канале ротора получает окончательный вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v^2}{r} + v \left( \frac{2v}{r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) = \omega^2 r + \frac{\Delta P}{\rho l}. \quad (1.32)$$

Как отмечено в работе [34], необходимо учесть влияние давления, генерируемого модулятором, на параметры гидромеханического процесса. При этом источник давления принимается монополем. Используя работу [1], учтем присоединенную длину канала ротора. Тогда характерный размер в уравнении (1.32), если сечение каналов ротора и статора одинаковое, равен

$$l = l_p + \sqrt{\frac{S_c}{\pi}}. \quad (1.33)$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду с помощью подстановок, обозначив безразмерные величины теми же буквами, что и размерные, но с черточками



$$v = V \bar{v}, \quad t = T \bar{t}, \quad r = R_2 \bar{r}. \quad (1.34)$$

Масштабы скорости в работах [1, 5, 34] имеют различный вид, а за масштаб времени выбрано время полного открывания канала. Ограничимся вначале масштабами в общем виде. За масштаб радиальной координаты выберем наружный радиус ротора.

Уравнение (1.32) принимает вид

$$\frac{V}{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} - \frac{V^2}{R_2} \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + v \frac{V}{R_2^2} \left( \frac{2\bar{v}}{\bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} \right) = \omega^2 R_2 \bar{r} + \frac{\Delta P}{\rho l}. \quad (1.35)$$

Умножим все члены уравнения (1.35) на  $l/V^2$ . Учитывая, что критерии подобия имеют следующий вид [41]:

$$\text{Sh} = \frac{1}{VT}, \quad \text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}, \quad \text{Re} = \frac{Vl}{\nu}, \quad (1.36)$$

введем симплекс, учитывающий длину канала,

$$\chi = \frac{l}{R_2}. \quad (1.37)$$

Обозначим критерий, учитывающий влияние кориолисовых сил,

$$K_K = \frac{\omega R_2}{V}. \quad (1.38)$$

В результате преобразований (1.35) с учетом (1.36) – (1.38) уравнение нестационарного течения жидкости в безразмерном виде принимает вид (для простоты черточки над безразмерными величинами в дальнейшем опускаем)

$$\text{Sh} \frac{\partial v}{\partial t} - \chi \frac{v^2}{r} + \frac{\chi^2}{\text{Re}} \left( \frac{2v}{r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) = \chi K_K^2 r + \text{Eu}. \quad (1.39)$$

Уравнение (1.39) является нелинейным, параболического типа.

Найдем частное решение. Сделаем предположение, что на бесконечно большом радиусе радиальная составляющая скорости стремится к нулю. Допущение вытекает из рассмотрения радиальных каналов, боковые стенки которых направлены по радиусу. Окончательное заключение о возможности такого допущения должно быть сделано на основании сравнения результатов полученного решения с экспериментальными данными.

Отметим, что полученные в дальнейшем аналитические зависимости нашли удовлетворительное подтверждение в экспериментальных результатах, полученных на опытно-промышленной установке производительностью до  $4,5 \text{ м}^3/\text{ч}$  [43].

Преобразуем уравнение (1.39) следующим образом:

$$\ln v = -\ln r + \ln f(t),$$

где  $f(t)$  – произвольная функция.

Следовательно, радиальная составляющая скорости принимается в виде

$$v = \frac{f(t)}{r}. \quad (1.40)$$

Возьмем производные от выражения (1.40):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f'(t)}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{f(t)}{r^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{2f(t)}{r^3},$$

и подставим их в уравнение (1.39), получим

$$\text{Sh} \frac{f'(t)}{r} - \chi \frac{f(t)^2}{r^3} = \chi K_K^2 r + \text{Eu}. \quad (1.41)$$

Введем обозначение

$$b = \chi K_K^2 r^2 + \text{Eu} r, \quad (1.42)$$

и после подстановки (1.42) в (1.41) получим уравнение

$$\text{Sh} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\chi f(t)^2 + br^2}{r^2}.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем выражение

$$\frac{\text{Sh}}{\sqrt{\chi br}} \arctg \frac{f(t)\sqrt{\chi}}{\sqrt{br}} = \frac{t}{r^2} + C_1.$$

Продолжим преобразование

$$\frac{f(t)\sqrt{\chi}}{\sqrt{br}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\chi b}}{\operatorname{Sh} r} t + C_2 r \right),$$

где  $C_2 = C_1 \frac{\sqrt{b\chi}}{\operatorname{Sh}}$ .

Учитывая (1.40), имеем

$$v = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\chi}} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\chi b}}{\operatorname{Sh} r} t + C_2 r \right). \quad (1.43)$$

Найдем  $C_2$  из граничных условий. На входе в канал ( $r = r_1$ ) радиальная составляющая скорости равна

$$v_1 = \frac{Q}{S_p z_p},$$

а в безразмерном виде

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{V}. \quad (1.44)$$

Подставим (1.44) в (1.43) и после преобразований найдем значение постоянной интегрирования

$$C_2 = \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\chi} v_1}{\sqrt{b_1}} - \frac{\sqrt{\chi b}}{\operatorname{Sh} r_1} t \right) / r_1,$$

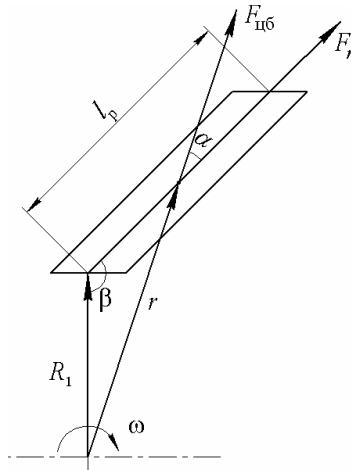
где  $b_1 = \chi K_K^2 r_1^2 + \operatorname{Eu} r_1$ .

Окончательно получаем решение уравнения (1.39) в следующем виде:

$$v_p = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\chi}} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\chi b}}{\operatorname{Sh} r} t + \frac{r}{r_1} \operatorname{arctg} \left( v_1 \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{b_1}} \right) - \frac{\sqrt{\chi b} r}{\operatorname{Sh} r_1^2} t \right). \quad (1.45)$$

В существующих конструкциях роторных аппаратов достаточно часто каналы ротора выполняются наклонными. Это позволяет изменить длину канала в стенке ротора при постоянной ее толщине. Так как длина канала входит в уравнение (1.32), описывающее в явном виде закономерности течения несжимаемой жидкости, а также в критерии Струхала, Рейнольдса, в симплекс  $\chi$ , то изменяя угол наклона канала мы можем влиять на технологические режимы работы роторного аппарата. Вследствие этого необходимо определить как такое конструктивное решение повлияет на уравнение (1.45).

Из анализа уравнения Навье-Стокса для нашего конкретного случая (1.29) следует, что исполнение канала в стенке ротора наклонным повлияет только на переносную силу инерции  $F_r$ , так как ось координат связана с осью вращающегося канала.



**Рис. 1.8. Схема движения частицы жидкости в наклонном канале ротора**

Рассмотрим принципиальную схему движения элементарного объема жидкости в канале ротора, имеющего нерадиальное направление оси (рис. 1.8).

Свяжем оси координат с вращающимся каналом, как и ранее.

В дифференциальное уравнение Навье-Стокса для течения жидкости войдет проекция центробежной силы в виде

$$F_r = \rho \omega^2 r \cos \alpha. \quad (1.46)$$

Косинус угла  $\alpha$  определяется выражением

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (1.47)$$

Из теоремы синусов следует

$$\sin \alpha = \frac{R_1 \sin \beta}{r}. \quad (1.48)$$

Подставим (1.48) в (1.47) и получим

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{r^2 - R_1^2 \sin^2 \beta}{r^2}}.$$

Следовательно, проекция переносной силы инерции равна

$$F_r = \rho \omega^2 \sqrt{r^2 - R_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (1.49)$$

В безразмерном виде выражение (1.49) после подстановки вида  $r = R_2 \bar{r}$  имеет вид

$$F_r = \rho \omega^2 R_2 \sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (1.50)$$

В результате использования полученного выражения (1.50) при решении уравнения (1.39) выражение (1.42) принимает вид

$$b = \chi K_K^2 r \sqrt{r^2 - r_1^2 \sin^2 \beta} + Eu r. \quad (1.51)$$

Следовательно, и выражение для  $b_1$  изменится следующим образом:

$$b_1 = \chi K_K^2 r_1^2 \sqrt{1 - \sin^2 \beta} + Eu r_1. \quad (1.52)$$

Выражение (1.52) можно записать в виде

$$b_1 = \chi K_K^2 r_1^2 |\cos \beta| + Eu r_1. \quad (1.53)$$

Таким образом, решение уравнения движения несжимаемой жидкости (1.45) не изменит своего вида.

В дальнейшем, при разработке методики расчета роторного аппарата, удобнее использовать не угол  $\beta$ , а угол  $\gamma$ , который определяется выражением (рис. 1.8)

$$\gamma \approx \arcsin \frac{R_2 - R_1}{l_p}. \quad (1.54)$$

Угол  $\gamma$  связан с углом  $\beta$  очевидным соотношением

$$\gamma = \beta - 90^\circ. \quad (1.55)$$

#### 1.1.4. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ В КАНАЛАХ РОТОРНОГО АППАРАТА

Приведение уравнений гидромеханики к безразмерному виду полезно с некоторых точек зрения. Приведенные к безразмерному виду уравнения и граничные условия описывают уже не частный случай течения в конкретных условиях, а более широкий класс подобных течений. При преобразовании к безразмерному виду одновременно выявляются безразмерные комплексы, называемые критериями подобия. Основным преимуществом применения уравнений в безразмерном виде является сохранение физического смысла получаемых уравнений. Это дает возможность сопоставления порядка величин и соответствующего вклада в рассматриваемый процесс отдельных членов уравнения. В результате анализа можно упростить уравнение, отбросив малые члены.

При наличии дифференциальных уравнений исследуемого процесса критерии подобия легко выделяются как коэффициенты уравнений представленных в безразмерном виде. Другой подход – получение критериев подобия из теории размерностей.

В 1.1.3 рассмотрен вопрос нестационарного течения несжимаемой жидкости в модуляторе роторного аппарата. Из безразмерного дифференциального уравнения получены следующие критерии и симплексы подобия:

$$\text{критерий Струхала } Sh = \frac{l}{VT}; \quad (1.56)$$

$$\text{критерий Эйлера } Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2}; \quad (1.57)$$

коэффициент, учитывающий влияние кориолисовых сил на течение жидкости во вращающемся канале

$$K_K = \frac{\omega R_2}{V}; \quad (1.58)$$

относительная длина канала ротора, геометрический симплекс

$$\chi = \frac{l}{R_2}. \quad (1.59)$$

Для приведения критериев к виду, удобному для описания процесса нестационарного течения жидкости в канале ротор-статор, называемый в дальнейшем модулятором, поступим следующим образом [44]. За масштаб скорости истечения принимаем скорость истечения идеальной жидкости из патрубка [28]:

$$V = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (1.60)$$

За масштаб времени выбран период времени до полного открывания канала статора [28]:

$$T = \frac{a_c}{\omega R_2}, \quad (1.61)$$

где  $a_c$  – ширина канала ротора, м;  $\omega$  – частота вращения статора,  $\text{с}^{-1}$ .

Подставив выражение (1.60) в (1.57), получим значение критерия Эйлера

$$Eu = 0,5. \quad (1.62)$$

Таким образом, выбранный масштаб скорости позволил упростить анализ решения дифференциального уравнения. Подставим (1.61) в выражение (1.56) и, используя (1.60), получаем

$$Sh = \frac{l\omega R_2}{a_p V} = K_K \left( \frac{l}{a_p} \right). \quad (1.63)$$

Таким образом, из критерия Струхалия в данном конкретном случае следует еще один симплекс геометрического подобия  $l/a_p$ .

Анализируя работы [45 – 48], можно сделать вывод, что в случае одномерной задачи течения жидкости критерий  $l/a_p$  характеризует инертность массы жидкости в канале ротора. Подробнее этот вывод обоснован в работах [45, 48].

В работе [49] в результате приведения к безразмерному виду дифференциального уравнения движения, полученного на основании нестационарного уравнения Бернулли, получен комплекс  $\left( \frac{a_p}{2l} \right)^2$ , названный ротационным коэффициентом. Счи-

тается, что он характеризует влияние центробежных сил. Такой вид симплекса вызван тем, что за масштаб скорости принято не обоснованное, по нашему мнению, выражение. Если в работе [49] принять выбранный нами масштаб скорости, то получается симплекс, аналогичный нашему. Аналогичные результаты можно получить по работе [6].

Таким образом, при решении задач нестационарного течения несжимаемой жидкости мы имеем следующие физически обоснованные критерии подобия

- коэффициент Кориолиса  $K_K$  – характеризует соотношение центробежных и кориолисовых сил;
- геометрический симплекс  $l/a_p$  – характеризует инертность жидкости в канале ротора;
- геометрический симплекс  $\chi$  – отражает влияние длины канала ротора.

При принятом масштабе скорости критерий Эйлера равен 0,5.

Следует отметить, что в работе [28] критерий Эйлера равен единице, что вызвано только масштабом для критерия несколько отличным от нашего.

Введение в качестве симплекса  $l/a_p$  не увеличивает общего количества критериев (четыре), а позволяет при анализе решения, полученного в работе [42], рассмотреть отдельно влияние режима течения несжимаемой жидкости в модуляторе, определяемого коэффициентом Кориолиса, и основных геометрических параметров модулятора – длины и ширины канала ротора на скорость потока.

Для подтверждения полученных результатов проведем анализ критериев, характеризующих нестационарное течение несжимаемой жидкости в модуляторе роторного аппарата, используя теорию размерностей [40].

Параметрами, определяющими исследуемый процесс, протекающий в поле центробежных сил, являются: линейные размеры  $l$ ,  $R_2$  и  $a_p$ ; характерные скорости  $V$  и  $\omega$ ; перепад давления  $\Delta P$ ;  $\rho$  – плотность среды. Коэффициент кинематической вязкости не учитываем, так как из-за малой длины канала силами вязкого трения можно пренебречь. Параметры  $R_2$ ,  $\omega$  и  $\rho$  имеют размерности  $L$ ,  $T$ ,  $M$ .

Согласно  $\pi$ -теореме мы должны получить четыре безразмерных комплекса. Приведем пример решения при получении комплекса  $\pi_V$

$$\pi_V = \frac{V}{R_2^{x_V} \omega^{y_V} \rho^{z_V}}, \quad (1.64)$$

где  $x_V$ ,  $y_V$ ,  $z_V$  – показатели степени, получаемые из следующих соображений.

Запишем размерность  $\pi_V$  в виде

$$[\pi_V] = L^0 T^0 M^0, \quad (1.65)$$

где  $L$ ,  $T$ ,  $M$  – единицы длины, времени и массы.

Сравним (1.65) с размерностью правой части (1.64):

$$L^0 T^0 M^0 = \left(\frac{L}{T}\right) L^{-x_V} \left(\frac{1}{T}\right)^{-y_V} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{-z_V}. \quad (1.66)$$

Приравняем показатели степеней при одноименных величинах в левой и правой частях. Из этого находим  $x_V = 1$ ;  $y_V = 1$ ;  $z_V = 0$ . Следовательно,

$$\pi_V = \frac{V}{\omega R_2}.$$

Сравнивая с выражением (1.58), получаем:

$$\pi_V = (K_K)^{-1}. \quad (1.67)$$

Проведя аналогичные действия, получим другие безразмерные комбинации:

$$\pi_1 = \frac{l}{R_2} = \chi; \quad (1.68)$$

$$\pi_a = \frac{a_p}{R_2}; \quad (1.69)$$

$$\pi_{\Delta P} = \frac{\Delta P}{\omega^2 R_2^2 \rho}. \quad (1.70)$$

Рассматривая выражение (1.69), можно сделать следующий вывод: так как изменяемой частью  $R_2$  является  $l$ , то физически обоснованным будет использование только переменной длины  $l$ . Следовательно, (1.69) можно записать в следующем виде:

$$\pi_a = \frac{a_p}{l} = \left(\frac{l}{a_p}\right)^{-1}. \quad (1.71)$$

Выражение (1.70) называется модифицированным критерием Эйлера, так как вместо линейной скорости в него входит выражение  $V = \omega R_2$ .

Этот критерий является определяющим для течения жидкости не в каналах модулятора, а в зазоре между ротором и статором. Кроме того, как следует из (1.62), для течения несжимаемой жидкости, в нашем случае критерий Эйлера вырождается, принимая значение 0,5.

Следует отметить, что критерий  $K_K$  вида (1.58), получен аналогичным способом для течения жидкости между вращающимися дисками [50], в радиальных вращающихся трубах [48].

Таким образом, можно считать, что критерий  $K_K$  является одним из определяющих при течении жидкости в поле центробежных сил, где необходимо учитывать кориолисову силу. Можно использовать критерий Струхала, пользуясь выражением (1.63), что равноценно, а выбор применяемого для анализа критерия определяется конкретным случаем обработки экспериментальных данных.

### 1.1.5. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ В КАНАЛАХ СТАТОРА

На основании зонного подхода, используя уравнение (1.1), запишем зависимость для определения скорости течения среды в начале канала статора в безразмерном виде (черточки в дальнейшем для удобства отбрасываем):

$$v_c = v_p|_{r=r_2} S(t). \quad (1.72)$$

Уравнение (1.72) показывает, что на входе в канал статора скорость жидкости определяется скоростью на выходе из канала ротора и законом изменения площади проходного сечения модулятора (1.22).

Выражение для скорости течения жидкости на выходе из канала ротора (1.45) с учетом критериев, полученных в разделе 1.1.4 и с учетом того, что  $\bar{r}_2 = 1$

$$v|_{r=r_2} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\chi}} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{\chi b}}{K_K \left(\frac{l}{a_p}\right)} t + \frac{1}{r_1} \operatorname{arctg} \left( v_1 \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{b_1}} \right) - \frac{\sqrt{\chi b}}{K_K \left(\frac{l}{a_p}\right) r_1^2} t \right]. \quad (1.73)$$

Причем выражения для  $b$  и  $b_1$  имеют вид:

$$b = \chi K_K^2 + 0,5; \quad (1.74)$$

$$b_1 = \chi K_K^2 r_1^2 + 0,5 r_1. \quad (1.75)$$

В случае наклонных каналов в роторе получим:

$$b = \chi K_K^2 \sqrt{1 - r_1^2 \sin^2 \beta} + 0,5; \quad (1.76)$$

$$b_1 = \chi K_K^2 r_1^2 \sqrt{1 - r_1^2 \sin^2 \beta} + 0,5 r_1. \quad (1.77)$$

### 1.1.6. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ В КАНАЛЕ СТАТОРА

Для компьютерного моделирования процесса изменения скорости и ускорения течения жидкости в модуляторе роторного аппарата использовались выражения (1.72) – (1.75), (1.22), так как в экспериментальной установке каналы ротора выполнены радиально. Для моделирования использовалось компьютерное обеспечение MAPLE-9.5.

Изменение критериев и симплексов, входящих в исследуемые уравнения, задавалось изменением конструктивных и режимных параметров соответствующих реально осуществимым конструкциям роторного аппарата. В исследуемые границы укладываются все реально существующие и используемые в промышленности роторные аппараты.

Параметры изменялись в следующих пределах:  $10^{-3} \leq a_p \leq 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $\omega = 10 \dots 600$  с<sup>-1</sup>;  $5 \cdot 10^{-2} \leq R_2 \leq 2 \cdot 10^{-1}$  м;  $V = 3 \dots 15$  м/с;  $10^{-3} \leq l_p \leq 3 \cdot 10^{-2}$  м;  $10^{-4} \leq \delta \leq 10^{-3}$  м.

При анализе уравнений некоторую сложность вызывает то, что все критерии и симплексы подобия связаны между собой одинаковыми конструктивными параметрами, входящими в выражения, определяющими значения этих критериев и симплексов. Например, в  $K_K$  и  $\chi$  входит наружный радиус ротора  $R_2$ , в  $\frac{l}{a_p}$  и  $\chi$  входит величина эквивалентной длины ка-

нала ротора. Таким образом, невозможно исследовать процесс течения среды, произвольно изменяя величину  $K_K$ ,  $\frac{l}{a_p}$ ,  $\chi$ . Все эти особенности учтены при определении границ изменения критериев и симплексов подобия, входящих в выражения (1.72) – (1.75).

На рис. 1.9 показано изменение скорости, а на рис. 1.10 изменение ускорения течения жидкости от критерия, характеризующего соотношение центробежных и кориолисовых сил  $K_K$ .

Из анализа графиков следует, что при возрастании  $K_K$  до некоторой величины, в нашем случае это  $\approx 1,3$ , скорость течения падает, а затем, при дальнейшем увеличении  $K_K$ , она начинает возрастать. Аналогично изменяется величина в интервале, когда  $\partial v / \partial t < 0$ .

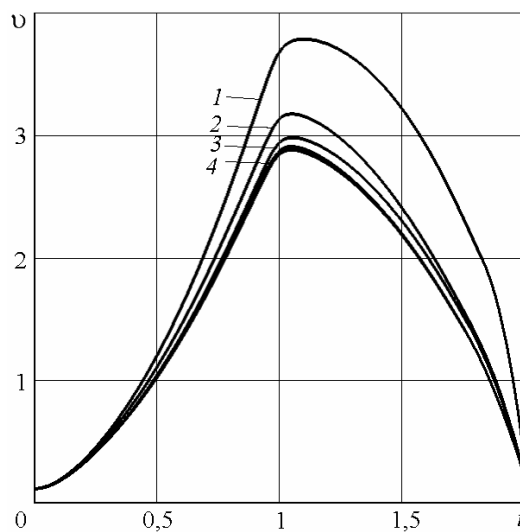
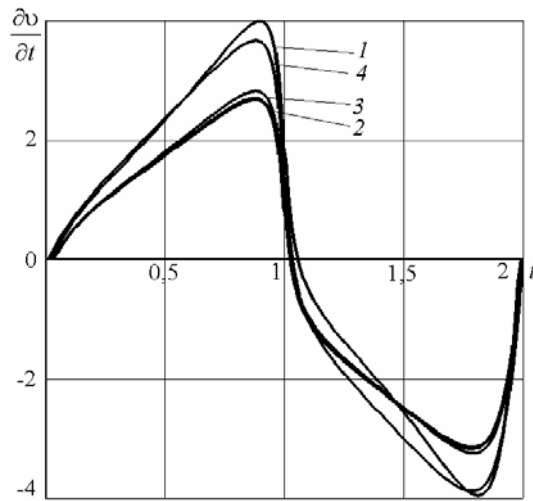


Рис. 1.9. Зависимость скорости от времени модуляции при  $l/a_p = 0,8$  и  $\chi = 0,1$ :  
1 –  $K_K = 0,6$ ; 2 –  $K_K = 4$ ; 3 –  $K_K = 1,2$ ; 4 –  $K_K = 2,4$



**Рис. 1.10.** Зависимость ускорения от времени модуляции при  $l/a_p = 0,6$  и  $\chi = 0,03$ : 1 –  $K_K = 0,6$ ; 2 –  $K_K = 6$ ; 3 –  $K_K = 2,4$ ; 4 –  $K_K = 1,2$

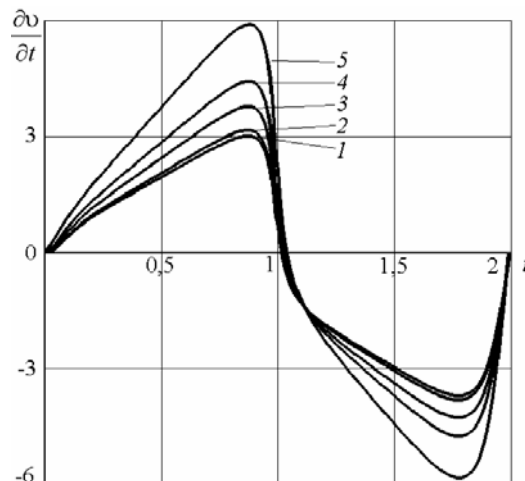
Особенно важно, что при уменьшении  $K_K$  возрастает величина максимального модуля ускорения, которая влияет на интенсивность акустической кавитации. Очевидно, что изменение  $K_K$  возможно двумя способами: изменяя произведение угловой скорости ротора на его наружный радиус ( $\omega R_2$ ) или скорость  $V$ , зависящую от объемного Расхода через аппарат, конструктивных размеров и количества отверстий в аппарате. При регулировании критерия следует учитывать, что, как будет показано ниже, при возрастании  $\omega$  потребляемая роторным аппаратом мощность возрастает в степени  $2,5 \dots 2,7$ . Таким образом, с точки зрения снижения удельных затрат, изменять  $K_K$  выгоднее регулированием радиальной скоростью в каналах аппарата. При этом, если объемный расход не должен изменяться, то скорость в каналах ротора регулируют геометрией и количеством каналов в роторе и статоре.

Важным результатом анализа является то, что увеличение "отрицательной" части ( $\partial v / \partial t$ ) происходит при значениях  $K_K \leq 1,3$ . Это значит, что аппарат работает в режиме, когда кориолисовы и центробежные силы одного порядка. Следовательно, на практике линейная скорость наружной поверхности ротора должна быть также одного порядка с радиальной скоростью течения среды в каналах ротора. Обычно в существующих конструкциях линейная скорость наружной поверхности ротора достигает  $15 \dots 30$  м/с, а радиальная скорость в каналах  $\approx 3 \dots 5$  м/с [1, 2, 5, 34]. Следовательно, одним из путей интенсификации импульсной акустической кавитации и, как следствие, повышения эффективности химико-технологических процессов является увеличение радиальной скорости в каналах роторного аппарата.

Отметим, что этот важный результат стал возможен только после того, как для анализа течения жидкости в каналах ротора и статора, был использован предложенный критерий  $K_K$ .

Для возбуждения импульсной кавитации очень важна величина пика  $|\partial v / \partial t|$ , а точнее, его максимальное значение [1, 2]. Поэтому целесообразно в дальнейшем рассматривать влияние критериев и симплексов подобия на величину  $|\frac{\partial v}{\partial t}|$ . Отметим, что характер изменения всех графиков  $v(t)$  подобен виду графиков на рис. 1.9.

На рис. 1.11 изображен график изменения ускорения жидкости в модуляторе роторного аппарата, при значениях  $K_K > 2$ , т.е. когда центробежные силы превышают кориолисовы силы. При таких значениях  $K_K$  модуль отрицательной части ускорения жидкости увеличивается. При увеличении  $K_K$  в пять раз ускорение возрастает примерно в два раза.



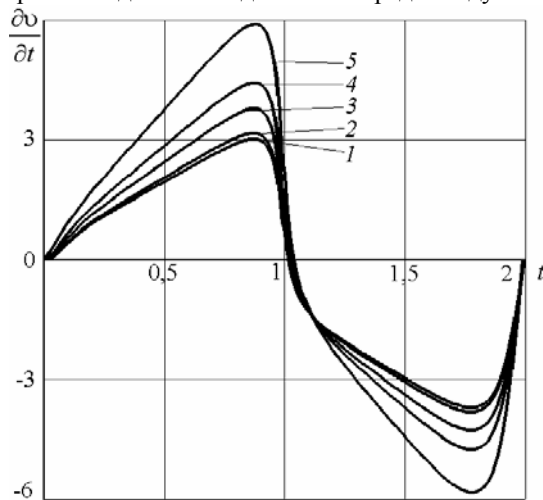
**Рис. 1.11.** Зависимость ускорения от времени модуляции при  $l/a_p = 0,6$  и  $\chi = 0,03$ : 1 –  $K_K = 2$ ; 2 –  $K_K = 3$ ; 3 –  $K_K = 5$ ; 4 –  $K_K = 6,6$ ; 5 –  $K_K = 10$

Сравнивая с рис. 1.10, отметим, что на нем при уменьшении  $K_K$  в два раза (с 0,6 до 1,2)  $|\partial v / \partial t|_{\max}$  возрастает в 1,4. Таким образом, если кориолисовы и центробежные силы одного порядка, влияние критерия  $K_K$  на характер изменения ускорения течения жидкости больше, чем когда центробежная сила преобладает над кориолисовой.

На рис. 1.12 показано влияние критерия  $l/a_p$  на ускорение течения жидкости. Из анализа этих графиков следует, что величина  $|\partial v / \partial t|_{\max}$  в отрицательной части графиков возрастает при уменьшении симплекса  $l/a_p$ . Симплекс  $l/a_p$  учитывает инертность жидкости в канале ротора во время процесса ее истечения при открытии канала статора. Причем, чем меньше  $l$  тем быстрее объем среды в канале ротора придет в движение после открытия канала в статоре.

С другой стороны, при увеличении  $a_p$  возрастает время, когда жидкость может вытекать из канала ротора, при этом увеличивая свою скорость под действие внешних сил. Таким образом, чем больше  $a_p$ , тем круче бывает кривая, описывающая процесс закрывания канала статора.

Таким образом, влияние критерия  $l/a_p$  на изменение величины ускорения течения несжимаемой жидкости соответствует физическим представлениям о закономерностях динамики движения сред в модуляторе



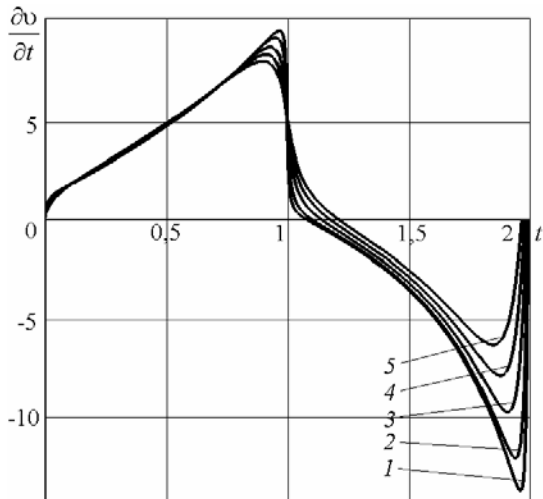
**Рис. 1.12. Зависимость ускорения от времени и  $l/a_p$  при  $K_K = 4$  и  $\chi = 0,08$ :**  
 $1 - l/a_p = 1,6$ ;  $2 - l/a_p = 1,33$ ;  $3 - l/a_p = 1$ ;  $4 - l/a_p = 0,8$ ;  $5 - l/a_p = 0,67$

роторного аппарата. Это косвенно свидетельствует об адекватности разработанной модели течения несжимаемой среды реальным гидромеханическим процессам.

Следует отметить, что при уменьшении величины ( $l/a_p$ ) амплитуда отрицательной часть графика начинает превосходить положительную, т.е. чем меньше  $l$  и больше  $a_p$ , тем условия для возбуждения импульсной акустической кавитации лучше.

Следует отметить, что уменьшение величины  $l$  приводит также к уменьшению металлоемкости конструкции. В общем случае можно рекомендовать ограничивать длину канала в роторе условиями изготовления, прочности перфорированной стенки ротора и особенностями конструкции ротора.

Из существующих исследований известно, что на закономерности течения среды в модуляторе оказывает величина радиального зазора между ротором и статором. На рис. 1.13 показано влияние радиального зазора на ускорение течения несжимаемой жидкости.



**Рис. 1.13. Зависимость ускорения от времени и радиального зазора при  $K_K = 4$ ,  $l/a_p = 0,33$  и  $\chi = 0,1$ :**  
 $1 - \delta = 0,00005$ ;  $2 - \delta = 0,0001$ ;  $3 - \delta = 0,0002$ ;  $4 - \delta = 0,0003$ ;  $5 - \delta = 0,0004$



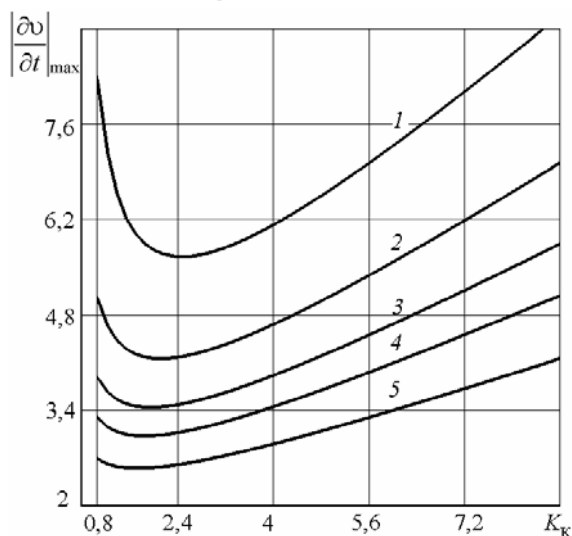
Отметим, что при построении графиков, для реальной оценки влияния зазора изменялась его величина при постоянных значениях  $l$ ,  $a_p$  и высоты канала в роторе. Из анализа графиков можно сделать вывод, что при конструировании роторного аппарата необходимо стремиться к минимально возможному радиальному зазору между ротором и статором. Его величина ограничивается только технологической точностью изготовления и сборки роторного аппарата и, соответственно, возрастанием при этом затрат.

При увеличении значения размерного радиального зазора от  $10^{-4}$  м до  $4 \cdot 10^{-4}$  м значение минимума  $\partial v / \partial t$  уменьшается примерно в два раза, причем, чем меньше величина зазора, тем круче уменьшается отрицательная часть графика  $\partial v / \partial t$ .

Для определения влияния критериев и симплексов подобия на величину минимума ускорения течения жидкости было проведено компьютерное моделирование процесса. Диапазон изменения величины критериев и симплексов подобия определялся, исходя из реально осуществимых геометрических размеров и технологических параметров роторных аппаратов. Для наглядности, полученные графики построены таким образом, что они определяют изменение абсолютной величины минимума ускорения течения несжимаемой жидкости.

На рис. 1.14 показано влияние критерия  $K_K$ , характеризующего соотношение центробежных и кориолисовых сил, на величину пропорциональную модулю амплитуды отрицательного давления.

Из графика следует, что при определенных величинах  $K_K$ , зависимость имеет минимум. Он смещается в сторону уменьшения  $K_K$  с увеличением величины симплекса  $l / a_p$ .

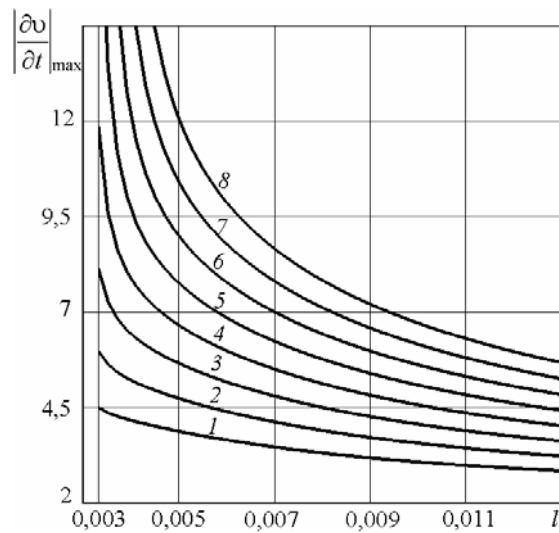


**Рис. 1.14. Зависимость  $|\partial v / \partial t|$  от  $K_K$  и  $l / a_p$  при  $\chi = 0,1$ :**  
 1 –  $l / a_p = 0,8$ ; 2 –  $l / a_p = 1$ ; 3 –  $l / a_p = 1,2$ ; 4 –  $l / a_p = 1,4$ ; 5 –  $l / a_p = 1,8$

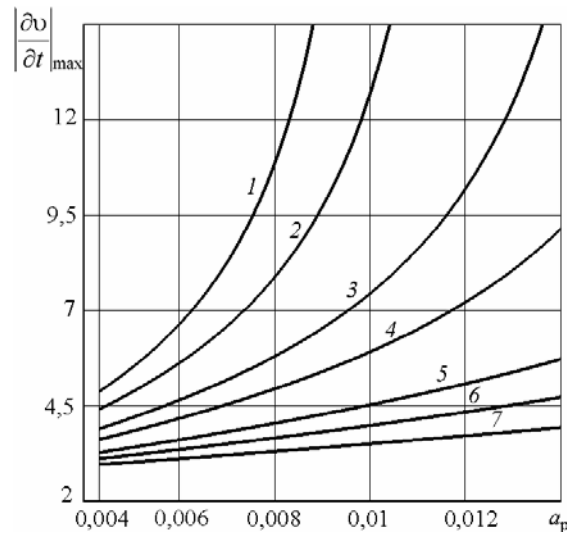
Таким образом можно сделать вывод, что при определенном значении  $l / a_p$  существует такое значение  $K_K$ , которое разграничивает закономерности течения несжимаемой жидкости. При меньших значениях  $K_K$  величина  $|\partial v / \partial t|$  начинает возрастать, причем график растет круче, чем при увеличении  $K_K$ . Таким образом, при постоянном расходе обрабатываемой среды, влияющей на величину средней радиальной скорости через модулятор, одинаковые значения  $|\partial v / \partial t|$  получаются при различных частотах вращения ротора.

Влияние угловой скорости на технологические показатели роторного аппарата различное. При увеличении  $\omega$  потребляемая мощность возрастает в степени  $\approx 2,5$ . С другой стороны, количество актов перекрытия каналов статора промежутками между каналами ротора возрастает прямо пропорционально, т.е. количество импульсов давления вызывающих кавитацию также пропорционально угловой скорости ротора. Следовательно, при увеличении  $\omega$  растет потребляемая мощность при повышении эффективности проводимых технологических процессов, зависящих от интенсивности импульсной акустической кавитации.

Из графиков также следует, что уменьшение симплекса  $l / a_p$  увеличивает величину  $|\partial v / \partial t|$ , что подтверждает ранее сделанные выводы.



**Рис. 1.15. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $l$  и  $a_p$  при  $\chi = 0,1, K_K = 4$ :**  
 $1 - a_p = 0,003$ ;  $2 - a_p = 0,004$ ;  $3 - a_p = 0,005$ ;  $4 - a_p = 0,006$ ;  $5 - a_p = 0,007$ ;  
 $6 - a_p = 0,008$ ;  $7 - a_p = 0,009$ ;  $8 - a_p = 0,01$



**Рис. 1.16. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $l$  и  $a_p$  при  $\chi = 0,1, K_K = 4$ :**  
 $1 - l = 0,005$ ;  $2 - l = 0,006$ ;  $3 - l = 0,008$ ;  $4 - l = 0,01$ ;  $5 - l = 0,015$ ;  
 $6 - l = 0,02$ ;  $7 - l = 0,03$

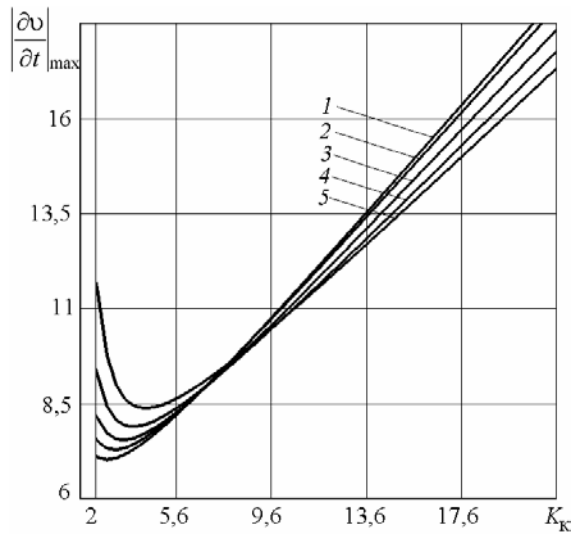
Влияние симплекса  $l/a_p$  на величину  $|\partial v/\partial t|$  показано на рис. 1.15 и 1.16. очевидно, что при увеличении  $a_p$  и уменьшении  $l$ , при постоянном симплексе  $\chi$  возрастает амплитуда "отрицательного" ускорения.

Так как длина канала ротора входит одновременно в два симплекса, то на рис. 1.17 показано влияние  $l$  при изменении  $l/a_p$  и  $\chi$  на  $|\partial v/\partial t|$ .

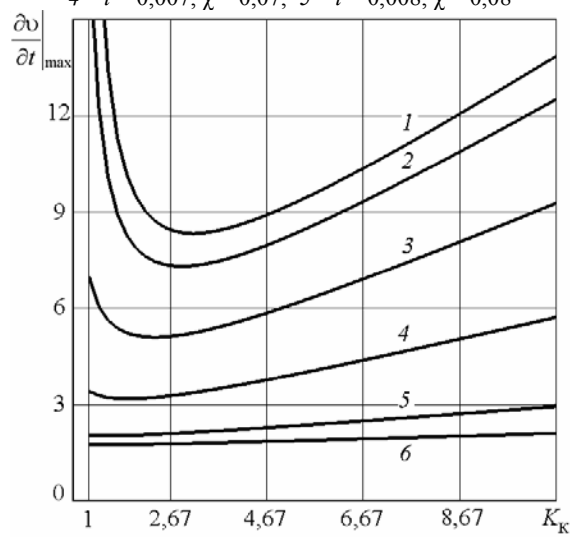
При построении этих графиков изменялась величина  $l$  при постоянной ширине канала, поэтому изменялась также величина  $\chi$ .

Особенностью графиков является то, что при значениях  $K_K \geq 8$ , чем меньше  $l$  (меньше  $l/a_p$ ), тем больше модуль амплитуды отрицательного давления. Это объясняется тем, что здесь изменяется параметр  $\chi$ .

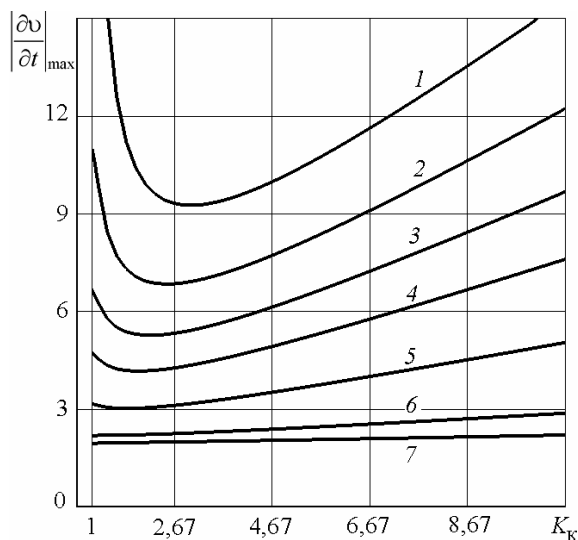
Для определения влияния  $\chi$  на закономерности течения несжимаемой жидкости служат рис. 1.18 – 1.22. На них прослеживается следующая закономерность: при увеличении  $\chi$  при постоянном значении симплекса  $l/a_p$  величина  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  увеличивается.



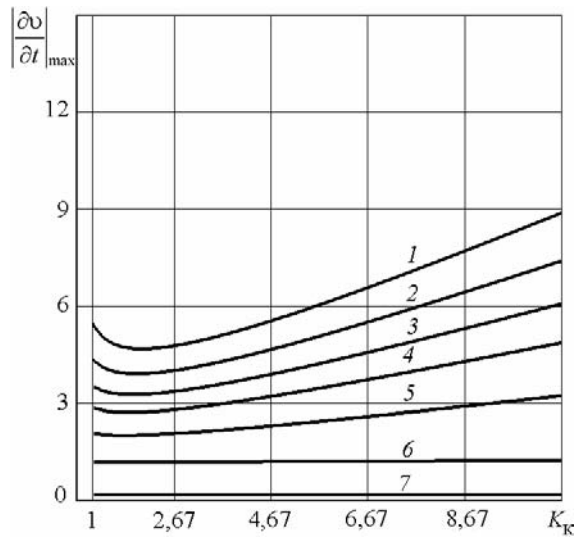
**Рис. 1.17.** Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $K_K$  и  $l/a_p$  при изменении  $l$  и  $\chi$ :  
 $1 - l/a_p = 0,004, \chi = 0,04$ ;  $2 - l/a_p = 0,005, \chi = 0,05$ ;  $3 - l/a_p = 0,006, \chi = 0,06$ ;  
 $4 - l/a_p = 0,007, \chi = 0,07$ ;  $5 - l/a_p = 0,008, \chi = 0,08$



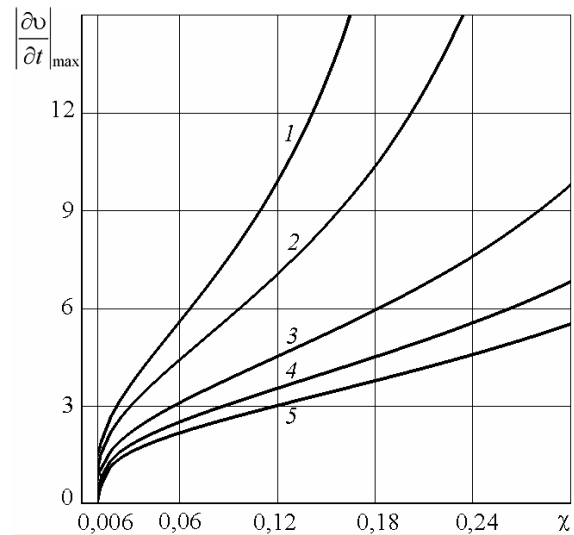
**Рис. 1.18.** Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $K_K$  и  $l/a_p$  при  $\chi = 0,15$ :  
 $1 - l/a_p = 0,83$ ;  $2 - l/a_p = 1$ ;  $3 - l/a_p = 1,25$ ;  $4 - l/a_p = 2$ ;  
 $5 - l/a_p = 5$ ;  $6 - l/a_p = 10$



**Рис. 1.19.** Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $K_K$  и  $l/a_p$  при  $\chi = 0,1$ :  
 $1 - l/a_p = 0,71$ ;  $2 - l/a_p = 0,83$ ;  $3 - l/a_p = 1$ ;  $4 - l/a_p = 1,25$ ;  
 $5 - l/a_p = 2$ ;  $6 - l/a_p = 5$ ;  $7 - l/a_p = 10$



**Рис. 1.20. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $K_K$  и  $l/a_p$  при  $\chi = 0,05$ :**  
 1 -  $l/a_p = 0,71$ ; 2 -  $l/a_p = 0,83$ ; 3 -  $l/a_p = 1$ ; 4 -  $l/a_p = 1,25$ ;  
 5 -  $l/a_p = 2$ ; 6 -  $l/a_p = 5$ ; 7 -  $l/a_p = 10$



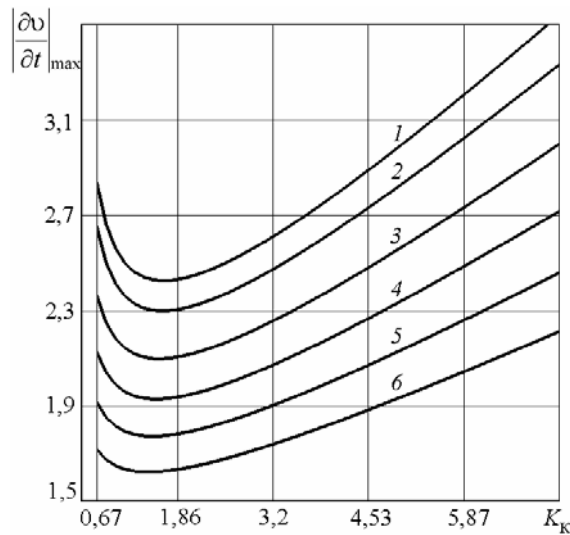
**Рис. 1.21. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от  $\chi$  и  $l/a_p$  при  $K_K = 6,7$ :**  
 1 -  $l/a_p = 0,8$ ; 2 -  $l/a_p = 1$ ; 3 -  $l/a_p = 1,5$ ; 4 -  $l/a_p = 2$ ; 5 -  $l/a_p = 2,5$

Таким образом, характер графиков на рис. 1.17 объясняется следующим образом. При значении  $K_K \leq 8$ , а вообще, какого то значения, зависящего от конкретных значений режимных и конструктивных параметров роторного аппарата, с одной стороны, при увеличении  $l/a_p$  величина  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  должна уменьшаться, с другой стороны, при увеличении  $\chi$  амплитуда отрицательного давления должна возрастать. Таким образом, влияние  $l/a_p$  и  $\chi$  противоположное.

При  $K_K \leq 8$  на рис. 1.17 преобладает влияние  $\chi$ , при  $K_K \geq 8$ , наоборот, большее влияние оказывает параметр  $l/a_p$ .

Отметим, что при меньших значениях  $K_K$ , когда центробежные и кориолисовы силы одного порядка влияние параметра  $\chi$  более заметно. Например при  $K_K = 8$  при увеличении  $\chi$  в два раза (одновременно  $l/a_p$  больше в два раза)  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  возрастает почти в два раза, а при  $K_K = 17,6$  при тех же изменениях  $l/a_p$  и  $\chi$  величина  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  возрастает всего на  $\approx 11\%$ .

Большое влияние на процесс течения жидкости в модуляторе роторного аппарата оказывает величина радиального зазора между ротором и статором. На рис. 1.22 изображены зависимости амплитуды модуля



**Рис. 1.22. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от относительного зазора и  $K_K$  при  $l/a_p = 2, \chi = 0,1$ :**

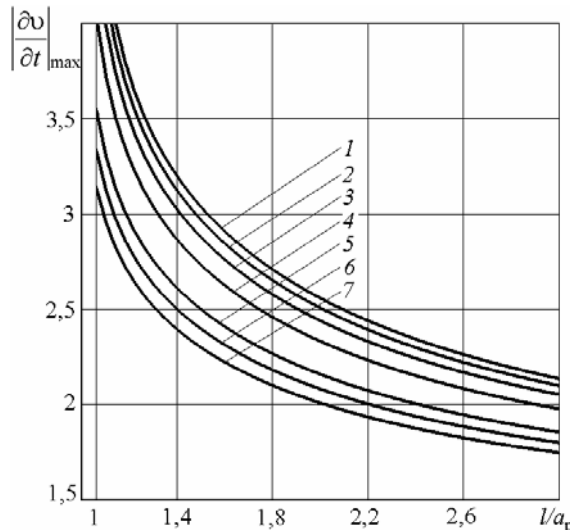
$1 - \delta = 0,03; 2 - \delta = 0,06; 3 - \delta = 0,12; 4 - \delta = 0,18; 5 - \delta = 0,24; 6 - \delta = 0,3$

отрицательного ускорения от относительного радиального зазора. Как и следовало ожидать, при уменьшении относительного радиального зазора величина  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  возрастает. Отметим, что увеличение  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  при всех значениях  $K_K$ , но при  $\min$  функции это увеличение меньше, чем на границах значений  $K_K$  примерно на 35 %. Значение  $\min$  функции приходится, как и ранее, на значение  $K_K$  порядка единицы.

Влияние величины  $l/a_p$  при изменении радиального зазора увеличивается. Например, при уменьшении зазора в три раза (от 0,06 до 0,18) при значении  $l/a_p = 3$  величина  $|\partial v/\partial t|_{\max}$  возрастает на 15 %, а при  $l/a_p = 1$  на 25 %.

Таким образом, характер изменения графиков на рис. 1.14, 1.18 – 1.20, 1.22 одинаков – он имеет минимум функции  $|\partial v/\partial t|_{\max}$ , который приходится на значения критерия  $K_K$ , лежащие в интервале 1...3.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что эти значения критерия разграничивают различное влияние массовых сил – кориолисовой и центробежной, на характер течения в модуляторе роторного аппарата. Подробно влияние инерционных массовых сил будет объяснено в пункте 1.1.8.



**Рис. 1.23. Зависимость  $|\partial v/\partial t|$  от относительного зазора и  $l/a_p$  при  $\chi = 0,1, K_K = 4$ :**

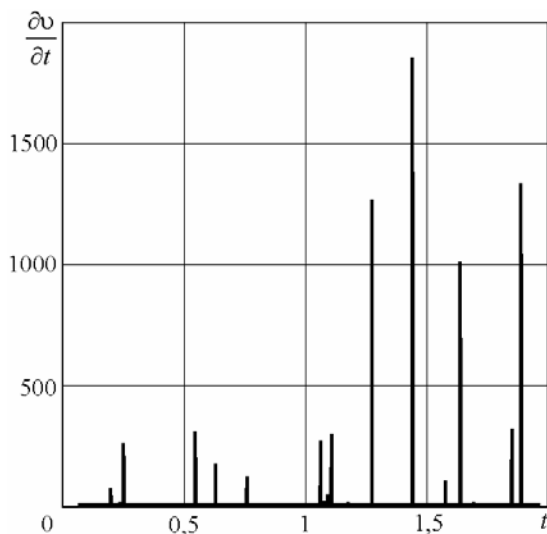
$1 - \delta = 0,006; 2 - \delta = 0,015; 3 - \delta = 0,03; 4 - \delta = 0,06;$   
 $5 - \delta = 0,12; 6 - \delta = 0,15; 7 - \delta = 0,18$

### 1.1.7. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В результате компьютерного моделирования закономерностей течения несжимаемой жидкости было обнаружено, что при определенных сочетаниях значений  $K_K$  и симплексов  $\chi$  и  $l/a_p$  уравнения (1.72) – (1.75) не адекватно описывают процесс нестационарного течения. Это выражается в том, что вид функции  $\bar{v}(\bar{t})$ , а следовательно и  $d\bar{v}/d\bar{t}$ , не соответствует виду экспериментальных графиков  $d\bar{v}/d\bar{t}$ . Характерный график представлен на рис. 1.24.

На основании компьютерного моделирования получены значения  $K_K$ ,  $l/a_p$  и  $\chi$ , соответствующие нижней границе применимости полученной модели. Понятие нижней границы следует понимать следующим образом.

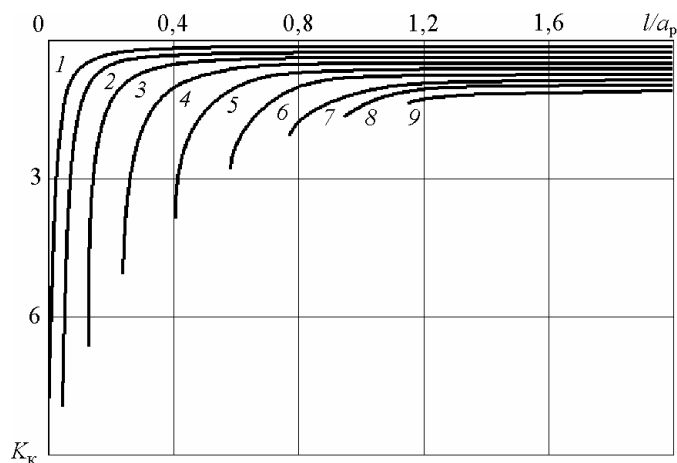
Установлено, что критерий  $K_K$  характеризует режим течения, зависящий от соотношения кориолисовых и центробежных сил. Таким образом,  $K_K$  является как бы определяющим и зависит от используемых критериев. В критерий входит масштаб скорости  $V$ , зависящий от расхода, задаваемого техническим заданием на проектирование роторного аппарата, и конструктивных размеров, которые мы получаем в результате расчета для получения наилучших условий, способствующих интенсификации ХТП. Кроме того, частота вращения ротора значительно влияет на режим работы аппарата. В результате моделирования установлено, что критическое значение  $K_K$  соответствует наименьшей частоте вращения ротора. Поэтому граница применимости и названа нижней, относительно величины частоты вращения ротора.



**Рис. 1.24. Зависимость ускорения среды от времени при  $\chi = 0,1, K_K = 0,1, l/a_p = 1$**

На основании полученных данных построен график, представленный на рис. 1.25.

Значение параметра  $\chi$  ограничено 0,6, так как реально эта величина не превышает 0,1. Следует отметить, что значения  $l/a_p$  исследовались в интервале 0,1...40. При этом полученные значения  $K_K$  асимптотически приближались к нулю ( $K_K \sim 0,01$  и менее). Такие режимы при работе аппарата с большими производительностями, т.е. с внешним насосом, не реализуются на практике, так как это возможно при очень малых значениях угловой скорости ротора, а на практике скорости, применяемых электродвигателей имеют значения  $\omega > 100$ . При таких величинах реализовать масштаб скорости, чтобы  $K_K$  имел такой порядок, нереально. Поэтому на рис. 1.25 введено ограничение по величине  $l/a_p$ . Отметим, что параметры  $l/a_p$  и  $\chi$  связаны между собой и соответственно с внешним радиусом ротора. Поэтому графики строились при постоянном радиусе ротора с изменением ширины канала при постоянной величине  $\chi$ . Значения всех параметров как конструктивных, так и режимных соответствовали реальным аппаратам.



**Рис. 1.25. Нижние границы применимости модели течения несжимаемой среды:**

1 —  $\chi = 0,001$ ; 2 —  $\chi = 0,01$ ; 3 —  $\chi = 0,1$ ; 4 —  $\chi = 0,2$ ;  
5 —  $\chi = 0,3$ ; 6 —  $\chi = 0,4$ ; 7 —  $\chi = 0,5$ ; 8 —  $\chi = 0,6$ ; 9 —  $\chi = 0,7$

Анализируя рис. 1.25, можно заключить, что при увеличении  $l/a_p$  критерий  $K_K$  уменьшается, причем, чем меньше  $\chi$ , тем круче изменяется график  $K_K$ .

С увеличением  $\chi$  диапазон изменения  $K_K$  значительно уменьшается, но это происходит в значительно большем диапазоне изменений  $l/a_p$ .

Общий вывод следующий: с увеличением  $l/a_p$  уменьшается критерий  $K_K$ , причем, чем меньше значение  $\chi$ , тем круче происходит это изменение на уменьшающемся при этом интервале  $l/a_p$ .

### 1.1.8. ВЛИЯНИЕ МАССОВЫХ СИЛ НА ТЕЧЕНИЕ СРЕДЫ В МОДУЛЯТОРЕ РОТОРНОГО АППАРАТА

При вращении радиального канала ротора на поток среды воздействуют центробежная и кориолисова силы. Центробежная сила изменяется по длине канала. Кориолисова сила изменяется по поперечному сечению канала вследствие изменения эпюры осевой скорости по ширине потока жидкости.

Центробежная сила пропорциональна квадрату частоты вращения и расстоянию от центра вращения. Величина кориолисовой силы пропорциональна частоте вращения и скорости потока среды. Таким образом, с увеличением угловой скорости вращения ротора при постоянном объемном расходе и, как следствие, постоянной скорости потока центробежная сила возрастает быстрее, чем кориолисова. Очевидно, при небольших частотах вращения ротора на поток преобладающее влияние оказывает кориолисова сила. При увеличении частоты вращения возрастает влияние центробежных сил на закономерности течения жидкости во вращающихся каналах ротора.

Кориолисово ускорение вызывает неоднородное поле массовых сил вдоль ширины канала. В соответствие с распределением радиальных скоростей кориолисова сила имеет наибольшее значение в середине потока и уменьшается до нуля на боковой поверхности канала. При таком распределении сил кориолиса в поперечном сечении трубы может образовываться парный вихрь [48]. В изотермическом потоке распределение скоростей в поперечном сечении не изменяется по длине канала.

Парный вихрь изменяет профиль распределения радиальной скорости и он становится более полным, а максимум скорости сдвигается в сторону действия кориолисовой силы. Это подтверждено в работе [51]. На графиках, приведенных в [51], наблюдается смещение максимума скорости воздуха вдоль оси трубы в сторону действия кориолисовой силы.

Влияние центробежной силы на форму профиля продольных скоростей рассмотрено в работе [52]. Когда радиальный поток движется в направлении увеличения центробежной силы, градиент продольной скорости в пристенной области канала увеличивается и, согласно закону Ньютона, потери возрастают. В случае движения потока среды к оси вращения градиент скорости уменьшается и потери падают, но отрыв потока в пристенной области способствует росту потерь. Таким образом, характер влияния центробежных сил на профиль скорости в каждом конкретном случае зависит от интенсивности изменения этой силы по нормали к боковой поверхности канала.

В нашем случае соотношение центробежных и кориолисовых сил характеризуется критерием  $K_K$ . При малых значениях  $K_K$  кориолисовы силы по величине преобладают над центробежными. При больших величинах  $K_K$  преимущественное влияние оказывают центробежные силы.

Рассмотрим, какое влияние на ускорение потока среды оказывают различные режимы течения среды, характеризующиеся величиной критерия  $K_K$ .

Как доказано в предыдущих исследованиях [1, 2, 26], основное влияние на интенсивность кавитации в роторных аппаратах оказывает величина "отрицательной" амплитуды динамического давления, пропорционального амплитуде модуля "отрицательного" ускорения, возникающего в потоке среды в процессе закрывания канала статора.

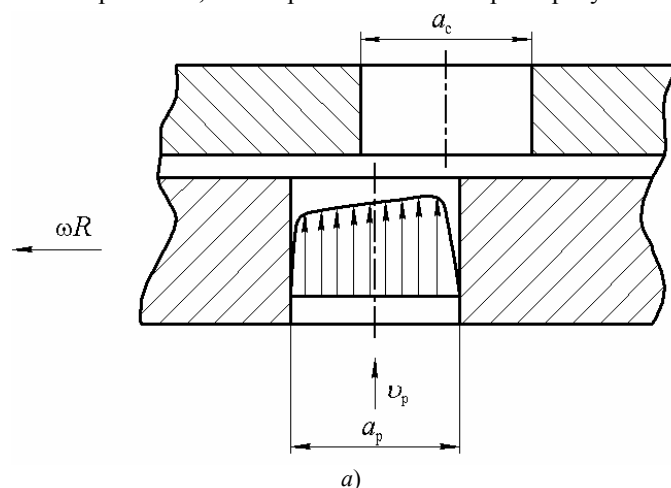
В случае, когда кориолисова сила превышает центробежную (рис. 1.26, а), максимум радиальной скорости приходится на окончание процесса закрывания. В случае, когда центробежная сила оказывает основное влияние на формирование профиля радиальной скорости в поперечном сечении канала ротора (рис. 1.26, б), максимум скорости совпадает с серединой канала и совпадает с серединой процесса закрывания канала статора.

Сравнивая эти режимы работы аппарата, можно сделать вывод: в случае преобладающего влияния кориолисовых сил на процесс течения среды уменьшение скорости в процессе закрывания происходит более круто. Это означает, что и величина "отрицательного" ускорения в процессе торможения движущегося потока жидкой среды будет больше, чем в случае, когда центробежные силы превосходят по величине кориолисовы.

Таким образом, на основании сделанного анализа влияния кориолисовых и центробежных сил на формирование профиля скорости в поперечном сечении канала ротора в зависимости от частоты вращения ротора, можно предложить следующий механизм изменения модуля амплитуды "отрицательного" ускорения потока среды. Как отмечалось выше, режимы течения характеризует величина критерия  $K_K$ . При анализе предполагается, что расход и, следовательно, масштаб радиальной скорости изменяется незначительно.

Условно можно выделить три режима течения среды через модулятор. Первый режим соответствует существенному преобладанию влияния кориолисовых сил. В этом случае, при увеличении линейной скорости ротора до определенного значения  $K_K$ , происходит увеличение модуля амплитуды отрицательного ускорения течения среды.

Второй режим реализуется при дальнейшем увеличении  $\omega R$ , при этом влияние центробежных и кориолисовых сил примерно одинаково, т.е. они имеют величину примерно одного порядка. Изменение профиля радиальной скорости изменяется в сторону формы, изображенной на рис. 1.26, б. Это режим течения характеризуется значением  $K_{K2} > K_{K1}$ .



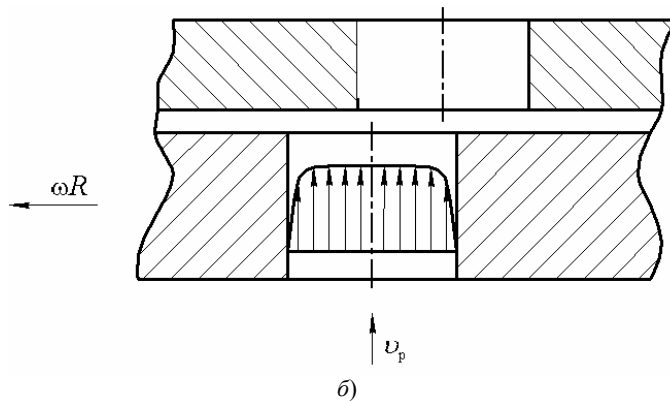


Рис. 1.26. Качественная картина изменения профиля радиальной скорости

При увеличении частоты вращения и, соответственно, линейной скорости ротора формируется профиль скорости изображенной на рис. 1.26, б. В этом случае возрастают центробежные силы и давление, а также время процесса открывания-закрывания канала статора, т.е. растет величина  $|\partial v / \partial t|$ . Таким образом, при значении  $K_{K3} > K_{K2}$  реализуется третий режим течения среды в модуляторе роторного аппарата. В этом режиме значение  $\max$  модуля амплитуды "отрицательного" ускорения среды начинает возрастать пропорционально увеличению величины  $\omega R$ .

Характерный вид кривой, характеризующей изменение амплитуды отрицательного ускорения среды в модуляторе роторного аппарата изображен на рис. 1.27.

Из проведенного анализа можно сделать вывод, что величина модуля амплитуды кавитационных импульсов давления должна меняться аналогично изменению модуля амплитуды "отрицательного" ускорения жидкой среды. Таким образом, в тех технологических процессах, где эффективность зависит от интенсивности кавитации, необходимо работать в области значения критерия  $K_{K1}$ . Однако отметим, что кавитационные импульсы генерируются в момент перекрывания канала статора и чем чаще перекрываются каналы статора в определенный промежуток времени, тем больше возникает кавитационных импульсов. Критерий  $K_K$  можно регулировать двумя способами: или изменять  $\omega R$  или масштаб радиальной составляющей скорости  $V$ , т.е. объемный расход.

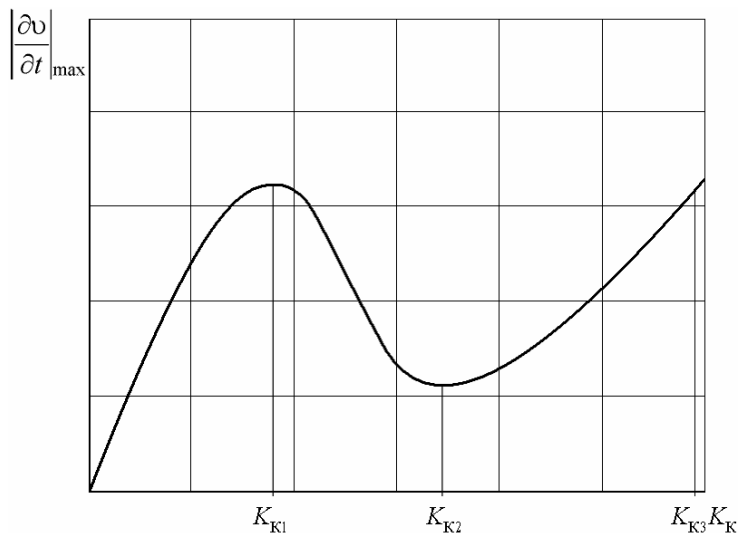


Рис. 1.27. Характерная зависимость амплитуды модуля отрицательного ускорения от критерия  $K_K$

При увеличении  $\omega R$  увеличивается частота перекрывания каналов статора, но, с другой стороны, возрастает потребляемая мощность. Следовательно, необходимо учитывать противоречивое влияние  $\omega R$  на эффективность проводимого технологического процесса.

При увеличении масштаба радиальной составляющей скорости растет производительность роторного аппарата, потребляемая мощность возрастает линейно.

В случае, когда производительность роторного аппарата задается техническим заданием, можно использовать первый способ достижения необходимого режима обработки среды.

Известно, что энергетическая мощность излучения определяется квадратом произведения амплитуды импульсов давления на частоту их следования [53]. Так как частота пропорциональна скорости перекрывания ( $f = \omega R / (a_p + b_p) \approx \omega R$ ), то мощность излучения пропорциональна квадрату произведения величины кавитационных импульсов давления на линейную скорость ротора. Таким образом, максимум эффективности работы аппарата смещается в сторону больших значений скоростей перекрывания (рис. 1.28).

Из проведенного анализа следует, что для достижения наиболее эффективного режима работы, с точки зрения наибольшей интенсификации проводимых технологических процессов, желательно, чтобы величина  $K_{K1} < 1$ , при максимально возможных значениях  $\omega R$  и  $V$ . При этом необходимо учитывать и энергетические затраты роторного аппарата.



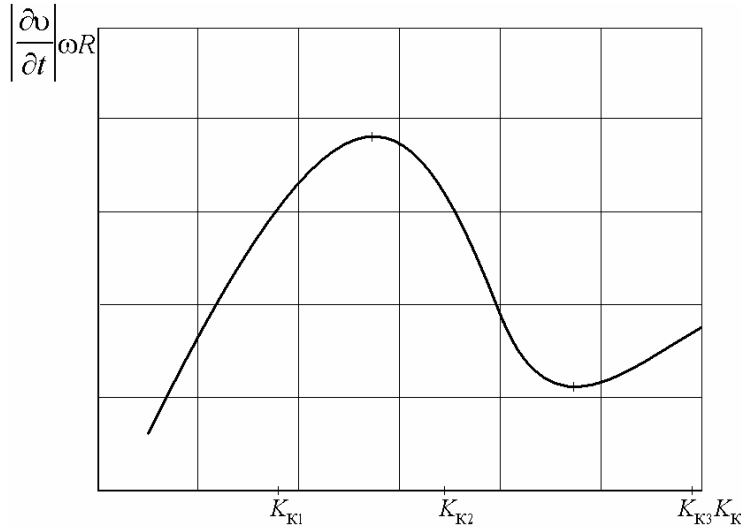


Рис. 1.28. Характерная зависимость мощности излучения от критерия  $K_K$   
**1.2. ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ РОТОРНОГО АППАРАТА**

### 1.2.1. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Во всех предыдущих исследованиях предполагалось, что жидкость в аппарате несжимаемая. Однако, при значительных угловых скоростях вращения ротора и существенном газосодержании обрабатываемой среды, т.е. когда время процесса открывания и закрывания канала статора сопоставимо по величине со временем пробегания волной "сжатия-разряжения" двойной длины канала ротора, аппарат работает в режиме гидравлического удара. Впервые этот режим работы аппарата был рассмотрен в работе [25]. В этом случае сжимаемость среды оказывает существенное влияние на закономерность течения, и ее необходимо учитывать.

Для построения математической модели течения сжимаемой жидкости в каналах модулятора роторного аппарата сделаны следующие допущения: скорость среды зависит только от радиальной координаты и времени; силы вязкости не учитываем из-за относительно малой длины каналов ротора и статора. Вследствие осевой симметрии

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Схема движения частицы среды в канале ротора аналогична схеме, представленной на рис. 1.7.

Рассмотрим движение элемента жидкости в канале ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  [43]. Дифференциальное уравнение относительного движения жидкости имеет форму уравнения Эйлера в цилиндрических координатах (1.24). С учетом сделанных допущений запишем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{F_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.78)$$

Свяжем систему координат с вращающимся ротором. Тогда проекция массовой силы, отнесенная к единице объема  $F_r$ , войдет в явном виде в уравнение (1.78) и определится выражением

$$F_r = \rho \omega^2 r. \quad (1.79)$$

С учетом (1.79) уравнение (1.78) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \omega^2 r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.80)$$

Приведем уравнение (1.80) к безразмерному виду с помощью следующих подстановок:

$$v = V \bar{v}; \quad t = T \bar{t}; \quad r = R_2 \bar{r}; \quad p = P \bar{p}. \quad (1.81)$$

Учитываем, что критерии подобия имеют следующий вид [41]:

$$\text{Sh} = \frac{l}{VT}; \quad \text{Eu} = \frac{P}{\rho V^2}, \quad (1.82)$$

и, используя результаты работы [42, 44] или выражений (1.58)–(1.59)

$$K_K = \frac{\omega R_2}{V}; \quad \chi = \frac{l}{R_2}, \quad (1.83)$$

получим уравнение одномерного движения жидкости в безразмерном виде (для удобства, в дальнейшем черточки отбросим):

$$\text{Sh} \frac{\partial v}{\partial t} + \chi v \frac{\partial v}{\partial r} = K_K^2 \chi r - \text{Eu} \chi \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.84)$$

Запишем уравнение неразрывности для одномерного течения сжимаемой среды в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + v \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0. \quad (1.85)$$

Для процесса сжатия, протекающего в адиабатических условиях, уравнение состояния имеет вид [45]:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2. \quad (1.86)$$

Рассматривая совместно (1.84) и (1.85), получим уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + v \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (1.87)$$

Представим уравнение (1.87) в безразмерном виде. Для этого используем подстановки (1.81), критерии и симплексы подобия (1.82), (1.83), выражения для приведенного волнового сопротивления [45], а также критерия Маха

$$\alpha = \frac{\rho c V}{P}, \quad M = \frac{V}{c}. \quad (1.88)$$

После преобразований получим выражение (черточки в дальнейшем отбрасываем)

$$\text{Sh} M \frac{\partial p}{\partial t} + \chi \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \chi M v \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (1.89)$$

Сделаем оценку порядка величин членов уравнения (1.89). Учитывая, что  $\chi < 1$ ,  $M \ll 1$ ,  $\alpha \gg 1$ , третьим членом уравнения пренебрегаем. Окончательно уравнение непрерывности в безразмерном виде имеет вид

$$\text{Sh} M \frac{\partial p}{\partial t} + \chi \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0. \quad (1.90)$$

Таким образом, для определения закона течения сжимаемой жидкости имеем уравнения (1.84) и (1.89). Принимая за масштаб времени

$$T = \frac{l_p}{c}, \quad (1.91)$$

из (1.82) следует в нашем конкретном случае

$$\text{Sh} = \frac{1}{M}. \quad (1.92)$$

Подставив выражение (1.92) в уравнения (1.84) и (1.89), получим систему уравнений для вывода скорости течения сжимаемой среды во вращающемся канале ротора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \chi \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \chi M v \frac{\partial v}{\partial r} = \chi M K_K^2 r - \chi M \text{Eu} \frac{\partial p}{\partial r}. \end{array} \right. \quad (1.93)$$

Учитывая, что  $\chi M \text{Eu} = \chi / \alpha$ ,  $K_K > 1$  и вышеизложенные условия для  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $M$ , проведем оценку порядка величин в уравнении (1.94). В результате, пренебрегая конвективным членом, получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \chi M K_K^2 r - \frac{\chi}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.95)$$

Исключим из уравнений (1.93) и (1.94) члены, оценивающие давление. Для наглядности представим уравнения (1.93) и (1.94) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\chi \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right); \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \alpha M K_K^2 r - \frac{\alpha}{\chi} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1.97)$$

Продифференцируем уравнение (1.96) по  $r$ , а уравнение (1.97) по  $t$ . После преобразований получим уравнение гиперболического типа для течения сжимаемой среды в канале ротора

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \chi^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (1.98)$$

Для аналитического решения введем новую функцию, которую считаем неизвестной:

$$W = v \frac{r_1}{r} - v_1 \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (1.99)$$

Относительно этой функции получим уравнение

$$\frac{1}{\chi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (1.100)$$

Для решения уравнения (1.100) применим метод разделения переменных (метод Фурье) [54]:

$$W(r, t) = T(t)R(r). \quad (1.101)$$

Граничные условия для функции  $R(r)$  определим следующим образом.

При значении  $r = r_1$  функция  $W$  имеет вид

$$T(t)R(r_1) = v_1 \frac{r_1}{r_1} - v_1 \frac{r_1^2}{r_1^2} = 0.$$

Функция  $T(t)$  не может тождественно равняться нулю, таким образом первое граничное условие имеет вид

$$R(r_1) = 0.$$

Возьмем производную от функции (1.99) при  $r = r_2$ :

$$\frac{\partial W(r_2)}{\partial r} = \frac{\partial v(r_2)}{\partial r} \frac{r_1}{r} - \frac{v(r_2)r_1}{r^2} + \frac{2v_1 r_1^2}{r^3}. \quad (1.102)$$

Из уравнения (1.96) в начальный момент времени имеем ( $r = r_2$ )

$$\frac{\partial v(r_2)}{\partial r} = -\frac{v(r_2)}{r}. \quad (1.103)$$

Подставим (1.103) в (1.102) и получим

$$\frac{\partial W(r_2)}{\partial r} = \frac{2v_1 r_1^2}{r^3} - \frac{2v(r_2)r_1}{r_2^2}. \quad (1.104)$$

Из выражения (1.99) имеем

$$v(r_2) = W(r_2) + v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.105)$$

Подставим (1.105) в (1.104), после преобразований получим

$$\frac{\partial W}{\partial r}(r_2) = -\frac{2}{r_2} W(r_2). \quad (1.106)$$

Учитывая (1.101), выражение (1.106) примет вид

$$T(t)R'(r_2) = -\frac{2}{r_2} T(t)R(r_2).$$

Таким образом, второе граничное условие запишется следующим образом:

$$R'(r_2) + \frac{2}{r_2} R(r_2) = 0.$$

Окончательно граничные условия для функции  $R(r)$  имеют вид

$$R(r_1) = 0, \quad R'(r_2) + \frac{2}{r_2} R(r_2) = 0. \quad (1.107)$$

Относительно функции  $R(r)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R'' + \frac{3}{r} R' + \lambda^2 R = 0. \quad (1.108)$$

Введем новую переменную  $r_* = r\lambda$ , в результате уравнение (1.108) примет вид

$$R'' + \frac{3}{r_*} R' + R = 0. \quad (1.109)$$

Решением уравнения (1.109) является выражение

$$R(r_*) = \frac{1}{r_*} [C_1 J_1(r_*) + C_2 Y_1(r_*)]. \quad (1.110)$$

Граничные условия (1.107) позволяют записать следующую систему уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 J_1(r_1 \lambda) + C_2 Y_1(r_1 \lambda) &= 0; \\ C_1 J_0(r_2 \lambda) + C_2 Y_0(r_2 \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.111)$$

Отсюда получим уравнение для определения собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ , исследуемой задачи

$$J_1(r_1 \lambda) Y_0(r_2 \lambda) - J_0(r_2 \lambda) Y_1(r_1 \lambda) = 0. \quad (1.112)$$

Собственные функции имеют вид

$$R_m(r \lambda_m) = \frac{1}{r \lambda_m} [J_1(r \lambda_m) Y_1(r_1 \lambda_m) - Y_1(r \lambda_m) J_1(r_1 \lambda_m)]. \quad (1.113)$$

и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r^3 R_m(r \lambda_m) R_n(r \lambda_n) dr &= 0, \text{ где } m \neq n; \\ \int_{r_1}^{r_2} r^3 [R_m(r \lambda_m)]^2 dr &= \frac{r_2^4 [R_m(r_2 \lambda_m)]^2 - r_1^4 [R_m(r_1 \lambda_m)]^2}{2}, \text{ где } m = n. \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

Относительно функции  $T(t)$  получим уравнение

$$T'' + \chi^2 \lambda_m^2 T = 0$$

и его решение в виде

$$T_m = A_m \cos(\chi \lambda_m t) + B_m \sin(\chi \lambda_m t). \quad (1.115)$$

Общее решение уравнения (1.101) имеет вид

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(\chi \lambda_m t) + B_m \sin(\chi \lambda_m t)] R_m(r \lambda_m). \quad (1.116)$$

Определим начальные условия. Первое начальное условие получаем из уравнения (1.96). Это уравнение должно выполняться при всех значениях  $t$ , в частности и в начальный момент времени  $t = 0$ , когда  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ . Таким образом из (1.96) при  $r = r_1$  получим выражение для первого начального условия

$$v|_{t=0} = \frac{v_1 r_1}{r}. \quad (1.117)$$

Второе начальное условие определим, используя уравнение Бернулли в начальный момент времени, для двух сечений канала ротора – на входе в канал и текущего. Местными гидравлическими потерями пренебрегаем. На характер зависимости это не влияет. При необходимости гидравлические потери легко учесть, считая коэффициенты гидравлического сопротивления квазистационарными [55, 56]. Используя выражение (1.117), получим

$$p = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_1^2 r_1^2}{2r^2}.$$

Статическое давление и скорость на входе в канал ротора являются постоянными величинами, так как определяются характеристиками насоса и конструкцией роторного аппарата. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{t=0} = \frac{\rho v_1^2 r_1^2}{r^3}.$$

Используя подстановки (1.81), получим выражения для градиента давления в безразмерном виде (черточки отбрасываем):

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{t=0} = \frac{M^2 v_1^2 r_1^2}{r^3}. \quad (1.118)$$

Подставляя (1.118) в уравнение (1.97), после преобразований получим второе начальное условие в виде

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi M K_K^2 r - \frac{\chi M v_1 r_1^2}{r^3}. \quad (1.119)$$

Для функции  $W(r, t)$  начальные условия следующие:

$$\left. \begin{aligned} W(r, 0) &= 0; \\ W'(r, 0) &= \chi M K_K^2 r_1 - \frac{\chi M v_1^2 r_1^3}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

В соответствии с первым начальным условием (1.119) для решения (1.116) получим

$$A_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} [B_m \sin(\chi \lambda_m t) R_m(r \lambda_m)]. \quad (1.121)$$

Из выражения (1.121) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} [B_m \cos(\chi \lambda_m t) \chi \lambda_m R_m(r \lambda_m)]. \quad (1.122)$$

Используя первое из условий (1.114), второе начальное условие (1.120) для функции  $W$  для определения постоянной  $B_m$ , получим следующее выражение:

$$B_m = \frac{M}{\lambda_m} \left[ \frac{K_K^2 r_1}{\eta} \int_{\eta}^{r_2} r^3 R_m(r \lambda_m) dr - v_1^2 r_1^3 \int_{\eta}^{r_2} \frac{R_m(r \lambda_m)}{r} dr \right] \frac{1}{\int_{\eta}^{r_2} r^3 [R_m(r \lambda_m)]^2 dr}. \quad (1.123)$$

Решение уравнения (1.98) с учетом начальных и граничных условий для функции  $v(r, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} v = \frac{v_1 r_1}{r} + M K_K^2 r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\eta}^{r_2} r^3 R_m(r \lambda_m) dr}{\lambda_m \int_{\eta}^{r_2} r^3 [R_m(r \lambda_m)]^2 dr} \sin(\chi \lambda_m t) R_m(r \lambda_m) - \\ - M v_1^2 r_1^2 r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\eta}^{r_2} \frac{R_m(r \lambda_m)}{r} dr}{\lambda_m \int_{\eta}^{r_2} r^3 [R_m(r \lambda_m)]^2 dr} \sin(\chi \lambda_m t) R_m(r \lambda_m). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Отметим, что, как и ранее в п.1.1.3, например  $l$  в (1.82)–(1.83) определяется выражением (1.33). В случае, когда каналы ротора наклонные, выражение (1.79) запишется в виде (1.50), что, однако, не влияет на выражения, полученные в результате решения поставленной задачи. Для определения величины  $l_p$ , при выполнении каналов ротора наклонными, нужно использовать выражения (1.54) и (1.55).

В заключение оценим условия, в которых действуют принятые оценки малости членов уравнений (1.84) и (1.88). Согласно этим оценкам принято, что

$$\chi M E u \ll 1; \quad (1.125)$$

$$\chi M v \ll 1. \quad (1.126)$$

Так как обычно число Маха является определяющим при оценке сжимаемости среды, то преобразуем эти выражения к виду

$$M \ll (\chi E u)^{-1}; \quad (1.127)$$

$$M \ll (\chi v)^{-1}. \quad (1.128)$$

Как будет показано далее для реальных режимных и конструктивных параметров, реализуемых в промышленных аппаратах, это соотношение выполняется.

## 1.2.2. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ В КАНАЛАХ СТАТОРА

Закономерности течения жидкости в каналах статора определим, используя предложенный в п. 1.1.1 зонный подход. Поэтому выражение для  $v_c$  в относительных величинах имеет вид (черточки отбрасываем)

$$v_c = v_p \Big|_{r=r_2} S(t). \quad (1.129)$$

Правомерность использования этого выражения, полученного из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, определяется тем, что рассматривается поведение капельной жидкости при условии ( $M < 0,02$ ), а также вследствие малости расстояния, на котором рассматривается выражение (1.129), так как величина радиального зазора много меньше длин каналов ротора и статора. На основании этих соображений считаем, что плотность среды изменяется незначительно и этим изменением можно пренебречь [45]. Таким образом, имеем

$$v_p|_{r=r_2} = v_1 r_1 + MK_K^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{r_1}^1 R_m(\lambda_m) dr}{\lambda_m \int_{r_1}^1 [R_m(\lambda_m)]^2 dr} \sin(\chi \lambda_m t) R_m(\lambda_m) -$$

$$- M v_1^2 r_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{r_1}^1 R_m(\lambda_m) dr}{\lambda_m \int_{r_1}^1 [R_m(\lambda_m)]^2 dr} \sin(\chi \lambda_m t) R_m(\lambda_m). \quad (1.130)$$

Уравнения для определения изменения площади поперечного сечения модулятора определяются выражением (1.22).

### 1.2.3. Компьютерное моделирование течения сжимаемой среды в каналах статора

Для компьютерного моделирования процесса изменения скорости и ускорения потока сжимаемой жидкости в канале статора использовались уравнения (1.129) – (1.130) и (1.22). Для моделирования использовалось компьютерное обеспечение MAPLE-9.5.

Границы изменения величины критериев и параметров, входящих в исследуемые уравнения, определялись изменением конструктивных и режимных параметров, чья величина соответствует реальным размерам существующих роторных аппаратов.

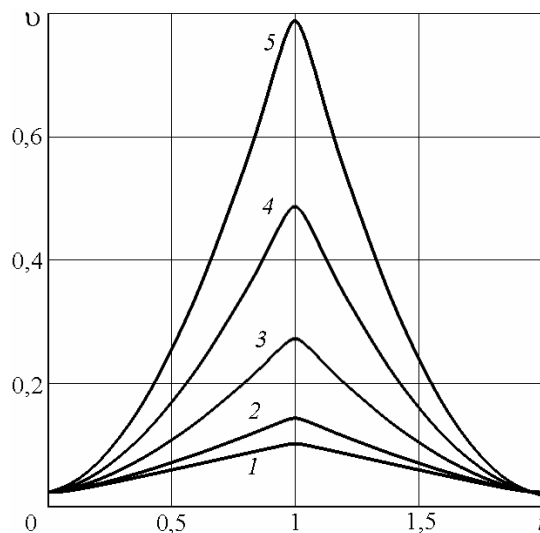
Параметры изменялись в следующих пределах:

$$10^{-3} \leq a \leq 10^{-2} \text{ м}; \quad 10 < \omega \leq 600 \text{ с}^{-1}; \quad 5 \cdot 10^{-2} \leq R_2 \leq 2 \cdot 10^{-1} \text{ м}; \quad 3 < V \leq 15 \text{ м/с}; \quad 10^{-3} \leq l_p \leq 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad 10^{-4} \leq \delta \leq 10^{-3} \text{ м};$$

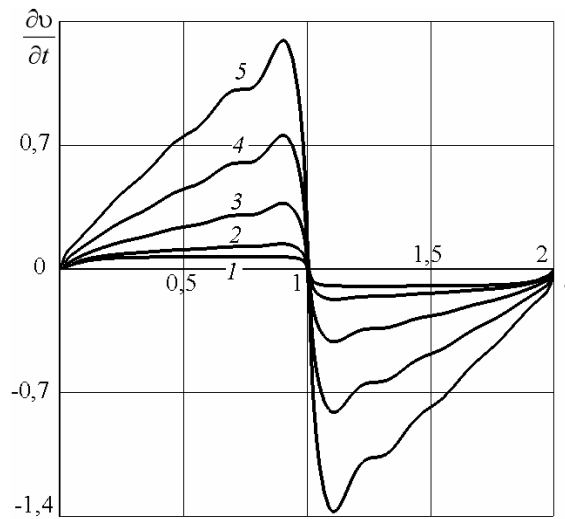
$$10^{-3} \leq M \leq 2 \cdot 10^{-2}.$$

На рис. 1.29 представлены некоторые характерные графики изменения скорости движения сжимаемой среды в канале статора от критерия  $K_K$ , характеризующего соотношение центробежных и кориолисовых сил.

Из графиков следует, что с увеличением  $K_K$  скорость потока сжимаемой среды возрастает.



**Рис. 1.29. Зависимость скорости течения сжимаемой среды в канале статора от критерия  $K_K$  при  $\chi = 0,1$ ,  $M = 0,02$ :**  
 1 —  $K_K = 1$ ; 2 —  $K_K = 5$ ; 3 —  $K_K = 10$ ; 4 —  $K_K = 15$ ; 5 —  $K_K = 20$



**Рис. 1.30. Зависимость ускорения течения сжимаемой среды в канале статора от критерия  $K_K$  при  $\chi = 0,1$ ,  $M = 0,02$ :  
1 –  $K_K = 1$ ; 2 –  $K_K = 5$ ; 3 –  $K_K = 10$ ; 4 –  $K_K = 15$ ; 5 –  $K_K = 20$**

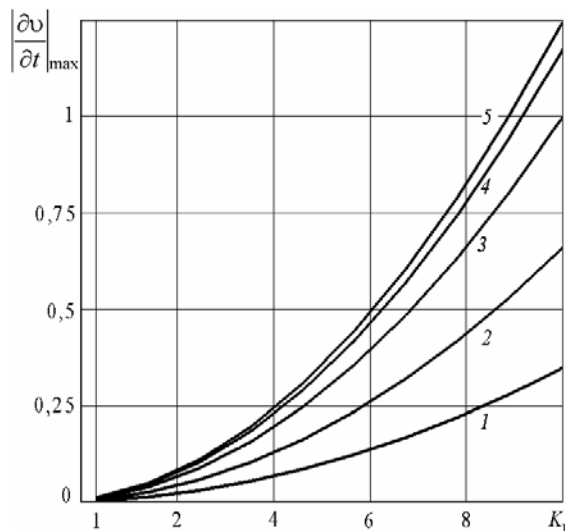
На рис. 1.30 приведены графики ускорения потока сжимаемой среды. Значения параметров, характеризующих течение, такие же, как на рис. 1.29.

Из графиков следует, что при увеличении значений  $K_K$  и  $\chi$  величина амплитуды отрицательной части ускорения также возрастает.

На рис. 1.31 показано изменение величины модуля амплитуды отрицательной части ускорения в зависимости от величины критерия  $K_K$  и симплекса  $\chi$ . При увеличении  $K_K$  и  $\chi$  величина  $\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max}$  возрастает.

При увеличении  $\chi > 0,3$  видно, что значение  $\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max}$  изменяется значительно меньше (при  $K_K = \text{const}$ ), чем при  $\chi < 0,3$ . Таким образом, из этого следует, что при учете сжимаемости среды увеличение  $\chi > 0,3$  нецелесообразно.

Увеличение  $\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max}$  при этом незначительно, а увеличение  $\chi$  вызывает увеличение металлоемкости ротора, т.е. удорожает роторный аппарат.



**Рис. 1.31. Зависимость амплитуды отрицательного ускорения от критерия  $K_K$  и симплекса  $\chi$ :  
1 –  $\chi = 0,1$ ; 2 –  $\chi = 0,2$ ; 3 –  $\chi = 0,3$ ; 4 –  $\chi = 0,4$ ; 5 –  $\chi = 0,5$**

Сравнивая полученный результат с анализом течения несжимаемой жидкости, сделанным ранее в п. 1.1.5, можно сделать вывод, что влияние параметра  $\chi$  одинаково, т.е. при увеличении  $\chi$  возрастает максимум модуля амплитуды отрицательного ускорения течения жидкости.

Следовательно, можно утверждать, что предложенная модель течения жидкой среды с учетом сжимаемости не противоречит физическим представлениям гидромеханики.

На рис. 1.32 показано изменение максимума модуля отрицательной амплитуды ускорения движения сжимаемой среды при изменении  $K_K$  и  $\chi$ . Увеличение  $\chi$  вызывает возрастание  $\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max}$ , однако это увеличение значительно только при  $K_K \geq 10$ . Например, при  $K_K = 1$  график практически совпадает с осью абсцисс.

Таким образом, на основании анализа полученных результатов можно рекомендовать рассчитывать параметры роторного аппарата при условиях  $K_K \geq 10$  и  $\chi \leq 0,3$ .

Исходя из того, что в критерии  $K_K$  масштаб радиальной скорости определяется в конечном итоге заданной производительностью аппарата, то необходимо увеличивать частоту вращения ротора. С другой стороны, необходимо учитывать, что при этом возрастает потребляемая мощность.

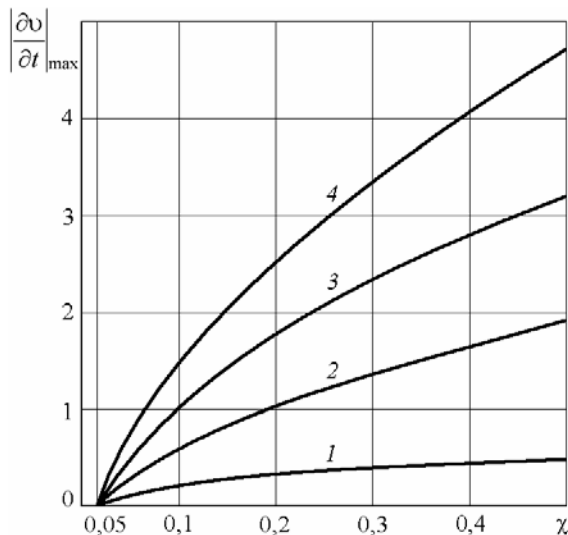


Рис. 1.32. Зависимость максимального модуля отрицательной амплитуды ускорения от  $\chi$  и  $K_K$ :  
 1 –  $K_K = 5$ ; 2 –  $K_K = 10$ ; 3 –  $K_K = 15$ ; 4 –  $K_K = 20$

Следует отметить, что при возрастании  $\chi$  в три раза, с 0,1 до 0,3 ( $K_K = 10$ ) максимальное значение модуля отрицательной амплитуды ускорения возрастает в три-четыре раза, т.е. почти прямо пропорционально.

При возрастании  $K_K$  в два раза, с 10 до 20 ( $\chi = 0,3$ ) максимальное значение модуля отрицательной амплитуды ускорения возрастает в четыре раза. Следовательно, критерий  $K_K$  оказывает большее влияние на процесс течения среды, что объясняется параметрами, входящими в него.

Таким образом, при расчете роторного аппарата, работающего в условиях гидравлического удара, т.е. когда необходимо учитывать сжимаемость жидкости, для достижения наибольшей эффективности следует стремиться к увеличению частоты вращения ротора. Конечно, при этом необходимо учитывать всю совокупность режимных и конструктивных параметров и учитывать, например, резонансные явления.

#### 1.2.4. Границы применимости модели течения сжимаемой жидкости

Как отмечалось выше, при определенных режимных и конструктивных параметрах роторного аппарата в нем возникает гидравлический удар. При этом необходимо переходить к модели, учитывающей сжимаемость среды. Таким образом, границей между моделями течения являются соотношения режимных и конструктивных параметров, полученные из условий возникновения гидравлического удара [40–41]:

$$\theta \leq t_3. \quad (1.131)$$

Время процесса закрывания канала статора промежутком между каналами ротора определяется выражением (1.61). Величина фазы гидравлического удара определяется как

$$\theta = \frac{2l_p}{c}. \quad (1.132)$$

Однако возможен случай, когда за время фазы гидравлического удара с отверстием статора совпадает следующее отверстие ротора. Это дает второе условие для определения границы применимости полученного уравнения течения среды с учетом ее сжимаемости:

$$\frac{b - a_p}{\omega R_2} \leq \theta \leq \frac{b + a_p}{\omega R_2}. \quad (1.133)$$



Проведена проверка возможности осуществления случая, определяемого выражением (1.133) для изменения параметров роторного аппарата в следующих пределах:  $R_2 = 0,07 \dots 0,2$  м,  $z_p = z_c = 20 \dots 80$ . В результате показано, что условие (1.133) реализуется в реальных роторных аппаратах практически всегда. Его необходимо учитывать только, начиная с  $z > 75$ , при скорости ротора  $> 300 \text{ с}^{-1}$ . Причем эти значения  $z$  и  $\omega$  должны иметь место одновременно.

Таким образом, можно сделать вывод, что для определения границы применимости модели течения сжимаемой среды в каналах роторного аппарата, можно ограничиться выражениями (1.61), (1.131), (1.132).

Из выражения (1.130) следует, что нам необходимо знать величину критериев  $K_K$  и  $\chi$ . Следовательно, порядок определяемости границы применимости уравнения (1.130) следующий.

После определения конструктивных и режимных параметров  $a_c$ ,  $l_c$ ,  $R_2$  и  $c$  определяют  $K_K$  и  $\chi$ . Эти критерии и определяют нижнюю границу применимости предложенных зависимостей для определения закономерностей течения сжимаемой среды и, одновременно, верхнюю границу для уравнения течения несжимаемой среды (1.73) – (1.75).

Верхняя граница использования модели течения жидкости, описываемой выражениями (1.129)–(1.130), ограничивалась рассмотрением реальных параметров реализуемых в промышленных роторных аппаратах. Экспериментальные исследования ограничены параметрами  $K_K \leq 10$ ;  $0,05 \leq \chi \leq 0,2$ .

В заключение отметим, что в исследуемых границах изменений параметров, влияющих на газо- и гидромеханические процессы в каналах роторного аппарата, предложенная модель удовлетворительно подтверждается экспериментальными данными.

### 1.3. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ СРЕДЫ В РАДИАЛЬНОМ ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ РОТОРОМ И СТАТОРОМ

#### 1.3.1. МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РАДИАЛЬНОМ ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ РОТОРОМ И СТАТОРОМ

Течение между вращающимися и неподвижными проницаемыми цилиндрическими поверхностями часто определяет эффективность работы циклонов и гидроциклонов [57], фильтрующих центрифуг [58], центробежных грануляторов [59], роторно-пульсационных аппаратов [1, 5, 23, 34, 60].

В научной литературе известно точное решение задачи течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися непроницаемыми коаксиальными цилиндрами [61]. Имеется ряд работ, посвященных исследованию движения сплошной среды в зазоре между проницаемыми цилиндрами [60, 62 – 65]. В этих работах величина зазора и частота вращения цилиндров принимается постоянной, поэтому течение в зазоре рассматривается как установившееся. Однако в работах [66, 67] показано, что в жидкостных центробежных экстракторах, вращающихся с переменной угловой скоростью, производительность сопел возрастает на 50 % по сравнению с производительностью при равномерном вращении.

В данном исследовании сделана попытка смоделировать протекание процесса течения среды в зазоре во время разгона ротора до рабочей частоты вращения [68]. Это позволит определить закономерности периода установления стационарного течения и рассмотреть возможность использования режима "ускорение – торможение" ротора для повышения эффективности работы роторного аппарата. Кроме того, эта задача представляет определенный научный интерес.

Рассмотрим симметричное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между проницаемыми коаксиальными цилиндрами – вращающимся (ротором) и неподвижным (статором). Сделаем следующие допущения: течение жидкости, ввиду малого радиального зазора ( $\delta \approx 10^{-4}$  м), полагаем ламинарным; составляющая скорости по оси  $z$  равна нулю; вдув жидкости в радиальном направлении равномерный;

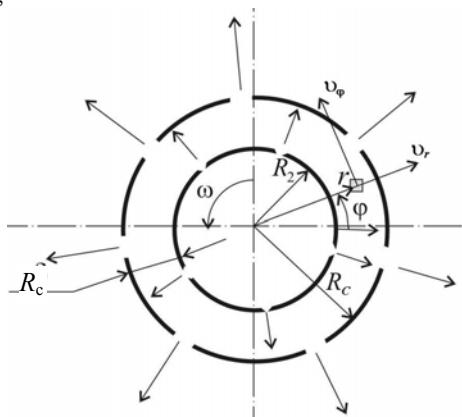


Рис. 1.33. Схема движения частицы среды в зазоре

массовыми силами пренебрегаем. Систему цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$  свяжем с осью вращения ротора (рис. 1.33).

С учетом принятых допущений дифференциальные уравнения Навье-Стокса и неразрывности в цилиндрических координатах (1.24), (1.25), (1.27) принимают вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right); \quad (1.134)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = v \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right); \quad (1.135)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (1.136)$$

При решении уравнения (1.135) используются граничные условия в общем виде (вращаются оба цилиндра):

$$v_\varphi|_{r=R_2} = u_1; \quad v_\varphi|_{r=R_c} = u_2. \quad (1.137)$$

При постоянном расходе жидкости через роторный аппарат граничное условие для уравнения (1.134) имеет вид

$$v_r|_{r=R_2} = v_2. \quad (1.138)$$

За начальное условие примем закон распределения азимутального компонента скорости в начальной момент времени  $v_\varphi(r, 0)$ .

Подставив (1.136) в уравнение (1.134), после несложных преобразований [43], получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - \left( \frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.139)$$

Из уравнения неразрывности (1.136), используя граничное условие (1.138), получим

$$v_r = v_2 \frac{R_2}{r}. \quad (1.140)$$

Подставим в уравнение (1.135) и получаем уравнение движения для окружной составляющей скорости

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} (v_2 R_2 - v) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (v_2 R_2 + v) v_\varphi. \quad (1.141)$$

Для приведения уравнения (1.141) к безразмерному виду введем следующие подстановки:

$$r = R_2 \bar{r}; \quad v_\varphi = U \bar{v}_\varphi; \quad t = T \bar{t}. \quad (1.142)$$

Используем критерии подобия:

- критерий Рейнольдса, характеризующий интенсивность движения в азимутальном направлении:

$$Re_\varphi = \frac{UR_2}{v} = \beta; \quad (1.143)$$

- критерий Рейнольдса, характеризующий интенсивность движения в радиальном направлении:

$$Re_r = \frac{v_2 R_2}{v} = \beta_1; \quad (1.144)$$

- критерий Струхала, характеризующий инерционность жидкости в зазоре в азимутальном направлении:

$$Sh_\varphi = \frac{R_2}{TU} = \alpha. \quad (1.145)$$

После преобразований уравнения движения в относительных величинах в азимутальном направлении принимает вид (черточки для удобства отбрасываем)

$$Sh_\varphi Re_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} (Re_r - 1) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (Re_r + 1) v_\varphi. \quad (1.146)$$

Для удобства решения, учитывая (1.143) – (1.145), уравнение (1.146) представим в другой записи:

$$\alpha \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} (\beta_1 - 1) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (\beta_1 + 1) v_\varphi. \quad (1.147)$$

Ищем решение уравнения (1.147) в виде

$$v_\varphi(r, t) = \zeta(r, t) + v_\varphi(r), \quad (1.148)$$

где  $v_\varphi(r)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} (\beta_1 - 1) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (\beta_1 + 1) v_\varphi = 0, \quad (1.149)$$

удовлетворяющему условиям:

$$v_\varphi|_{r=R_2} = u_1; \quad v_\varphi|_{r=R_c} = u_2.$$

Это решение имеет вид [61]:

$$v_\varphi(r) = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r^{\beta_1+1}, \quad (1.150)$$

$$\text{где } C_1 = \frac{(u_1 r_c^{\beta_1+1} - u_2 r_2^{\beta_1+1}) r_c r_2}{r_c^{\beta_1+2} - r_2^{\beta_1+2}}; \quad C_2 = \frac{u_2 r_c - u_1 r_2}{r_c^{\beta_1+2} - r_2^{\beta_1+2}}.$$

Относительно функции  $\zeta(r, t)$  получается уравнение в частных производных вида (1.147), с заменой  $v_\varphi(r, t)$  на  $\zeta(r, t)$ :

$$\alpha\beta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1) \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)\zeta. \quad (1.151)$$

Для функции  $\zeta(r, t)$  граничные условия имеют вид:

$$\zeta|_{r=r_2} = 0; \quad \zeta|_{r=r_c} = 0. \quad (1.152)$$

Решение уравнения (1.151) ищем методом разделения переменных [54]:

$$\zeta(r, t) = T(t)R(r). \quad (1.153)$$

Функция  $R(r)$  удовлетворяет граничным условиям

$$R|_{r=r_2} = 0; \quad R|_{r=r_c} = 0. \quad (1.154)$$

Подставляя (1.153) в уравнение (1.151), получаем

$$\frac{\alpha\beta T''}{T} = \frac{R'' - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)R' - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1)R}{R} = -\lambda^2. \quad (1.155)$$

Для функции  $R(r)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R'' - \frac{1}{r}(\beta_1 - 1)R' + \left[ \lambda^2 - \frac{1}{r^2}(\beta_1 + 1) \right] R = 0. \quad (1.156)$$

Вместо переменной  $r$  введем переменную  $r_* = r\lambda$ , тогда уравнение (1.156) примет вид

$$r_*^2 R'' - (\beta_1 - 1) r_* R' + [r_*^2 - (\beta_1 + 1)] R = 0. \quad (1.157)$$

Решение уравнения (1.157) может быть представлено в форме

$$R(r) = (r\lambda)^{\frac{\beta_1}{2}} \left[ C_1^* J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r\lambda) \right]. \quad (1.158)$$

В соответствии с граничными условиями (1.154), для определения постоянных  $C_1^*$  и  $C_2^*$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1^* J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda) = 0; \\ C_1^* J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_2\lambda) + C_2^* Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_2\lambda) = 0. \end{cases} \quad (1.159)$$

Так как  $C_1^*$  и  $C_2^*$  одновременно не равны нулю, то получаем уравнение

$$J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda) Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_2\lambda) - J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_2\lambda) Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda) = 0. \quad (1.160)$$

Из уравнения (1.160) определяем собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  рассматриваемой задачи. Собственные значения функций имеют вид

$$R_m(r\lambda_m) = (\lambda_m r)^{\beta/2} \left[ J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r\lambda_m) Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda_m) - J_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r_1\lambda_m) Y_{\frac{\beta_1+1}{2}}(r\lambda_m) \right] \quad (1.161)$$

и удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_{r_2}^{r_c} r^{1-\beta_1} R_m(r\lambda_m) R_n(r\lambda_n) dr = 0, \quad \text{если } m \neq n; \quad (1.162)$$

$$\int_{r_2}^{r_c} r^{1-\beta_1} [R_m(r\lambda_m)]^2 dr = \frac{1}{2} \left\{ r_2^{2-\beta_1} [R'_m(r_2\lambda_m)]^2 - r_1^{2-\beta_1} [R'_m(r_1\lambda_m)]^2 \right\},$$

если  $m = n$ . (1.163)

Для функции  $T(t)$  из уравнения (1.155) получается дифференциальное уравнение

$$\alpha\beta T' + \lambda_m^2 T = 0. \quad (1.164)$$

Решением уравнения (1.162), соответствующим собственным значениям  $\lambda_m (m = 1, 2, 3, \dots)$ , являются выражения

$$T_m = A_m e^{-\frac{\lambda_m^2 t}{\alpha\beta}}. \quad (1.165)$$

В результате общее решение дифференциального уравнения (1.147) запишется в виде

$$v_\varphi(r, t) = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r^{\beta_1+1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{\lambda_m^2 t}{\alpha\beta}} R_m(r\lambda_m). \quad (1.166)$$

Постоянные  $A_m$  определяются по начальному условию

$$v_\varphi|_{t=0} = v_\varphi(r, 0). \quad (1.167)$$

Тогда

$$A_m = \frac{\int_{r_2}^{r_c} [r^{1-\beta_1} v_\varphi(r, 0) - C_1 r^{-\beta_1} - C_2 r^2] R_m(\lambda_m r) dr}{\int_{r_1}^{r_2} r^{1-\beta_1} [R_m(\lambda_m r)]^2 dr}. \quad (1.168)$$

Анализируя (1.166) можно сделать вывод: из-за множителей  $e^{-\frac{\lambda_m^2 t}{\alpha\beta}}$  распределение азимутальных скоростей достаточно быстро приближается к известному профилю скорости для установившегося течения (1.150).

### 1.3.2. Компьютерное моделирование течения среды в радиальном зазоре

Для компьютерного моделирования течения жидкости в радиальном зазоре в роторном аппарате преобразуем уравнения (1.150), (1.168) и (1.166) при граничных условиях (1.137), примем  $\bar{r}_2 = 1$  и  $u_2 = 0$ .

Уравнение течения стационарной среды в безразмерном виде выражается следующим образом:

$$v_\varphi(r) = \frac{u_1 r_c^{\beta_1+2}}{r(r_c^{\beta_1+2} - 1)} + \frac{u_1 r^{\beta_1+1}}{1 - r_c^{\beta_1+2}}. \quad (1.169)$$

Общее решение для течения жидкости в радиальном зазоре примет вид

$$v_\varphi(r, t) = v_\varphi(r) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{\lambda_m^2 t}{\alpha\beta}} R_m(r\lambda_m). \quad (1.170)$$

Выражение для  $A_m$  запишется как

$$A_m = \frac{\int_1^{r_c} [r^{1-\beta_1} v_\varphi(r, 0) - C_1 r^{-\beta_1} - C_2 r^2] R_m(\lambda_m r) dr}{\int_1^{r_c} r^{1-\beta_1} [R_m(\lambda_m r)]^2 dr}, \quad (1.171)$$

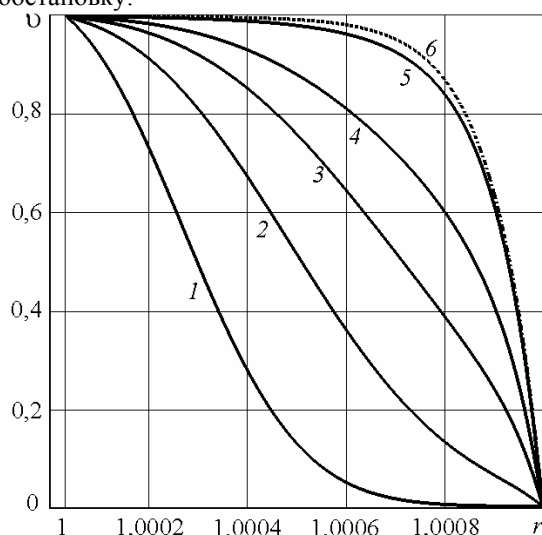
где  $C_1 = \frac{u_1 r_c^{\beta_1+2}}{r_c^{\beta_1+2} - 1}$ ,  $C_2 = -\frac{u_1}{1 - r_c^{\beta_1+2}}$ .

Значения критерия подобия изменялись в следующих интервалах:  $Re_\varphi = \beta = (10^5 \dots 10^6)$ ;  $Re_r = \beta_1 = (10^2 \dots 10^5)$ ;  $Sh_\varphi = \alpha = (10^{-1} \dots 10)$ .

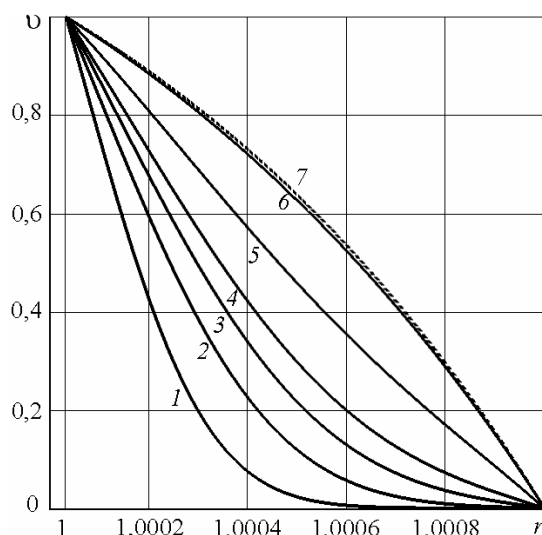
С использованием программного обеспечения MAPLE-8 построены графики изменения азимутального компонента скорости в радиальном зазоре в зависимости от радиуса и времени. Некоторые результаты приведены на рисунках.

На рис. 1.34 показано как изменяется профиль скорости в радиальном зазоре между ротором и статором от начального момента вращения до установления стационарного течения при  $t \rightarrow \infty$ . Видно как постепенно вовлекаются во вращение

слои жидкости по направлению к статору. Через некоторое время устанавливается стационарное течение, определяемое выражением (1.169). Все это позволяет считать, что полученное решение для нестационарного течения жидкости в зазоре адекватно описывает гидродинамическую обстановку.



**Рис. 1.34. Профили азимутального компонента скорости в зависимости от времени при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_\phi = 3 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^4$ ,  $\delta = 0,001$ :**  
 $1 - t = 0,001$ ;  $2 - t = 0,002$ ;  $3 - t = 0,003$ ;  $4 - t = 0,004$ ;  $5 - t = 0,007$ ;  $6 - t \rightarrow \infty$



**Рис. 1.35. Профили азимутального компонента скорости в зависимости от времени при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_\phi = 3 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^3$ ,  $\delta = 0,001$ :**  
 $1 - t = 0,001$ ;  $2 - t = 0,002$ ;  $3 - t = 0,003$ ;  $4 - t = 0,004$ ;  
 $5 - t = 0,007$ ;  $6 - t = 0,02$ ;  $7 - t \rightarrow \infty$

На рис. 1.35 по сравнению с предыдущим рисунком величина  $Re_r$  в десять раз меньше, т.е. уменьшается критерий Рейнольдса, характеризующий течение в зазоре в радиальном направлении. Видно, что стационарный профиль азимутального компонента скорости имеет более пологий характер. Это хорошо объясняется уменьшением возмущающего действия радиального течения.

На рис. 1.36 показано как влияет критерий  $Re_r$  на профили скорости в определенный момент времени. С увеличением  $Re_r$  профиль скорости меняет профиль с вогнутого на выпуклый. Это показывает как влияет радиальный поток на профиль окружной скорости.

На рис. 1.37 показано как влияет критерий Рейнольдса в окружном направлении на профиль скорости в определенный момент времени. С увеличением  $Re_\phi$  профиль скорости изменяется с выпуклой формы на вогнутую, т.е. влияние  $Re_\phi$  при его увеличении обратно влиянию  $Re_r$  при его увеличении.

На рис. 1.38 показано влияние критерия Струхала в окружном направлении на профиль скорости в определенный момент времени. С увеличением критерия  $Sh_\phi$  профиль скорости в определенный момент времени. При увеличении критерия Струхала профиль скорости значительно меняет свою форму – с выпуклой на вогнутую.

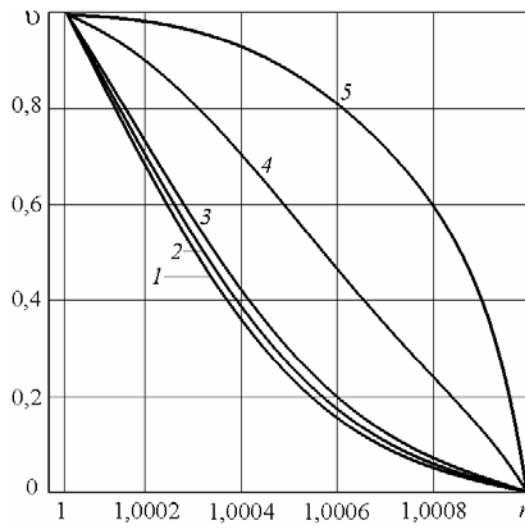


Рис. 1.36. Влияние критерия  $Re_r$  на профиль азимутального компонента скорости в момент времени  $t = 0,004$  при  $Sh_\varphi = 0,159$ ,  $Re_\varphi = 3 \cdot 10^5$ ,  $\delta = 0,001$ :

1 –  $Re_r = 10^2$ ; 2 –  $Re_r = 5 \cdot 10^2$ ; 3 –  $Re_r = 10^3$ ; 4 –  $Re_r = 5 \cdot 10^3$ ; 5 –  $Re_r = 10^4$

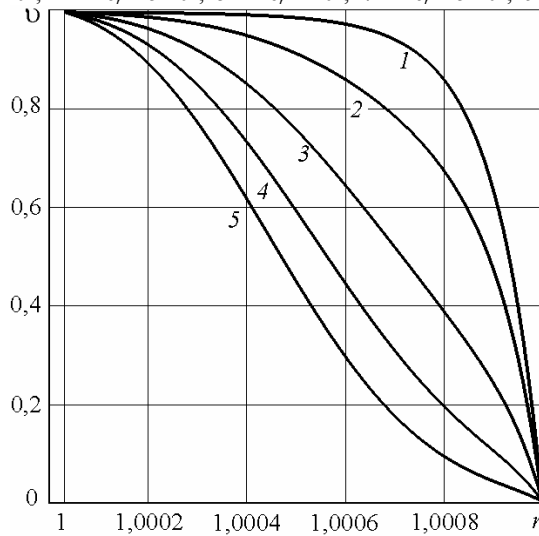


Рис. 1.37. Влияние критерия  $Re_\varphi$  на профиль азимутального компонента скорости в момент времени  $t = 0,003$  при  $Sh_\varphi = 0,159$ ,  $Re_r = 10^4$ ,  $\delta = 0,001$ :

1 –  $Re_\varphi = 10^5$ ; 2 –  $Re_\varphi = 2 \cdot 10^5$ ; 3 –  $Re_\varphi = 3 \cdot 10^5$ ; 4 –  $Re_\varphi = 4 \cdot 10^5$ ; 5 –  $Re_\varphi = 5 \cdot 10^5$

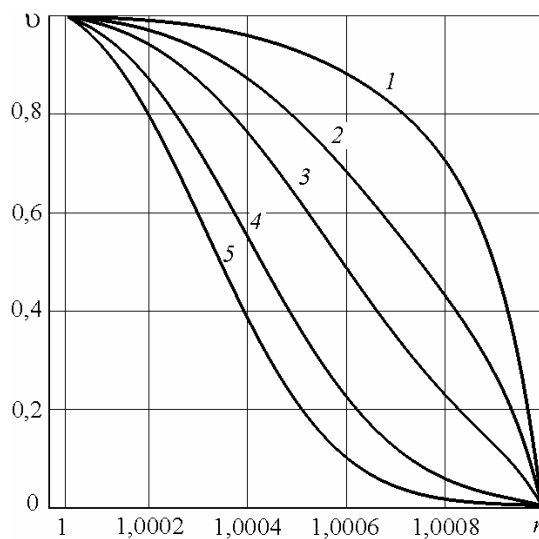


Рис. 1.38. Влияние критерия Струхали на профиль азимутального компонента скорости в момент времени  $t = 0,003$  при  $Re_\varphi = 3 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^4$ ,  $\delta = 0,001$ :

1 –  $Sh_\varphi = 0,1$ ; 2 –  $Sh_\varphi = 0,15$ ; 3 –  $Sh_\varphi = 0,2$ ; 4 –  $Sh_\varphi = 0,3$ ; 5 –  $Sh_\varphi = 0,4$

Анализируя графики на рис. 1.34 – 1.38, можно сделать вывод, что предложенная модель нестационарного течения жидкости в радиальном зазоре и полученное аналитическое решение адекватно описывают гидродинамику потока и влияние на его характер полученных критериев подобия.

## 1.4. Течение среды в радиальном зазоре между коническими ротором и статором

### 1.4.1. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ КОНИЧЕСКИМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В ряде случаев рабочие поверхности рабочих частей химических аппаратов представляют собой конические коаксиальные поверхности. Например, в роторных аппаратах для регулирования величины радиального зазора между ротором и статором они выполняются коническими [1, 23, 34]. Имеется ряд работ, в которых рассматривается течение пленки жидкости по коническому непроницаемому вращающемуся конусу [68, 69]. Поэтому практический интерес представляет теоретическое исследование закономерностей движения обрабатываемой среды в зазоре между проницаемыми коническими ротором и статором.

Рассмотрена трехмерная осесимметричная относительно оси  $z$  задача течения вязкой жидкости, т.е.  $\partial/\partial\varphi = \partial^2/\partial\varphi^2 = 0$ .

Дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса и неразрывности представим в конической системе координат  $\rho, \varphi, x$  (рис. 1.39). Причем ось  $\rho$  начинается на пересечении ее с осью  $z$ .

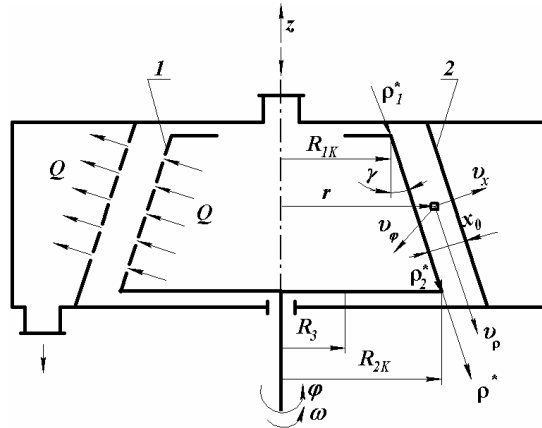


Рис. 1.39. Конструктивная схема роторного аппарата:  
1 – ротор; 2 – статор

Данная система координат ортогональна. Коэффициенты Ламэ для нее соответственно равны:  $H_p = 1$ ;  $H_\varphi = x \cos \gamma + \rho^* \sin \gamma$ ;  $H_x = 1$  [61].

Уравнения движения в абсолютной системе координат принимают вид:

$$\begin{aligned}
 & v_\rho^* \frac{\partial v_\rho^*}{\partial \rho^*} + v_x \frac{\partial v_\rho^*}{\partial x} - \frac{v_\varphi^2 \sin \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho^*} + \\
 & + v \left[ \frac{\partial^2 v_\rho^*}{\partial \rho^{*2}} + \frac{\partial^2 v_\rho^*}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial v_\rho^*}{\partial \rho^*} \sin \gamma + \frac{\partial v_\rho^*}{\partial x} \cos \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} - \frac{v_\rho^* \sin^2 \gamma + v_x \sin \gamma \cos \gamma}{(\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma)^2} \right]; \\
 & v_\rho^* \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho^*} + v_x \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - \frac{v_\rho^* v_\varphi (\sin \gamma + \cos \gamma)}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} = \\
 & = v \left[ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \rho^{*2}} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho^*} \sin \gamma + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \cos \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} - \frac{v_\varphi}{(\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma)^2} \right]; \\
 & v_\rho^* \frac{\partial v_x}{\partial \rho^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\varphi^2 \cos \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\
 & + v \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial \rho^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial v_x}{\partial \rho^*} \sin \gamma + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} - \frac{v_\rho^* \sin \gamma \cos \gamma + v_x \cos^2 \gamma}{(\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma)^2} \right].
 \end{aligned}$$

(1.172)

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_{\rho^*}}{\partial \rho^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_{\rho^*} \sin \gamma + v_x \cos \gamma}{\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma} = 0. \quad (1.173)$$

При решении поставленной задачи приняты следующие допущения: течение установившееся ламинарное; силами тяжести пренебрегаем из-за их малости по сравнению с центробежными силами; толщина зазора  $x_0$  мала по сравнению с изменением координаты  $\rho$ , поэтому в коэффициенте Ламе для  $H_\varphi$  и в уравнениях (1.172) и (1.173) с достаточной степенью точности принимаем

$$\rho^* \sin \gamma + x \cos \gamma \approx \rho^* \sin \gamma. \quad (1.174)$$

Для решения уравнений (1.172)–(1.173) удобно привести их к безразмерному виду с помощью следующих подстановок [71]:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \omega \rho^* \sin \gamma H'(\xi); \\ v_\varphi &= -\omega \rho^* \sin \gamma G(\xi); \\ v_x &= -2\sqrt{\omega v \sin \gamma} H(\xi); \\ p &= -2\rho^* \omega v P(\xi) - C\omega^2 \rho^{*2} \rho \sin^2 \gamma / 2. \end{aligned} \quad (1.175)$$

Относительная координата  $\xi$  определяется как

$$\xi = x \sqrt{\frac{\omega \sin \gamma}{v}}. \quad (1.176)$$

Безразмерные составляющие скорости  $H'$ ;  $G$  и  $H$  являются функциями только  $\xi$ , причем  $H' = \partial H / \partial \xi$ .

Подставим (1.175) и (1.176) в систему (1.172) и, учитывая (1.174), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений движения жидкости в зазоре

$$\begin{aligned} H''' &= H'^2 - 2HH'' - G^2 + C; \\ G'' &= 2H'G - 2HG'; \\ P' &= H'' + 2HH'. \end{aligned} \quad (1.177)$$

При выводе уравнений (1.177) проведена оценка значимости их членов с учетом численных значений параметров реальных роторных аппаратов ( $x_0 \approx 10^{-4}$  м;  $\gamma < \pi/18$ ;  $v = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\omega = 150 \dots 300$  с<sup>-1</sup>). Проверка показывает, что условие неразрывности (1.173) выполняется с большой точностью.

Граничные условия принимают вид:

а) на наружной поверхности ротора при  $x = 0$ ;  $\xi = 0$

$$H' = 0, \quad G = 1, \quad H = W, \quad (1.178)$$

б) на внутренней поверхности ротора при  $x = x_0$ ;  $\xi = \xi_0$

$$H' = 0, \quad G = 0, \quad H = W. \quad (1.179)$$

В граничных условиях (1.178) и (1.179) пренебрегаем расходом через зазор ввиду его малости, т.е. считаем, что весь поток среды проходит через каналы ротора и статора. Поэтому принимаем

$$W = -\frac{v|_{x=0}}{2\sqrt{\omega v \sin \gamma}} = -\frac{v|_{x=x_0}}{2\sqrt{\omega v \sin \gamma}}, \quad (1.180)$$

причем  $v|_{x=0} = v|_{x=x_0} = Q/S$ .

Боковые поверхности конического ротора и статора ввиду малости радиального зазора определяются из выражения

$$S = \pi(\rho_2^{*2} - \rho_1^{*2}) \sin \gamma.$$

Система уравнений (1.177) не имеет решения в замкнутой форме. Для решения представим функции  $H$  и  $G$  разложенными в степенные ряды вблизи  $\xi = 0$ , т.е. в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} H &= H + \frac{H'}{1!} \xi + \frac{H''}{2!} \xi^2 + \frac{H'''}{3!} \xi^3 + \dots; \\ G &= G + \frac{G'}{1!} \xi + \frac{G''}{2!} \xi^2 + \frac{G'''}{3!} \xi^3 + \dots. \end{aligned} \quad (1.181)$$

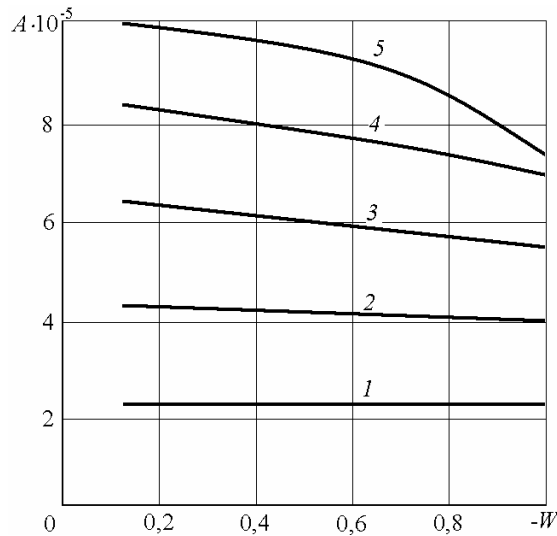


Для определения значений всех производных и самих функций при  $\xi = 0$ , обозначив  $H''(0) = A$  и  $G'(0) = B$ , используем дифференциальные уравнения (1.177). Чтобы определить величины  $A$ ,  $B$  и  $C$ , используем граничные условия (1.178) и после некоторых преобразований получаем систему уравнений:

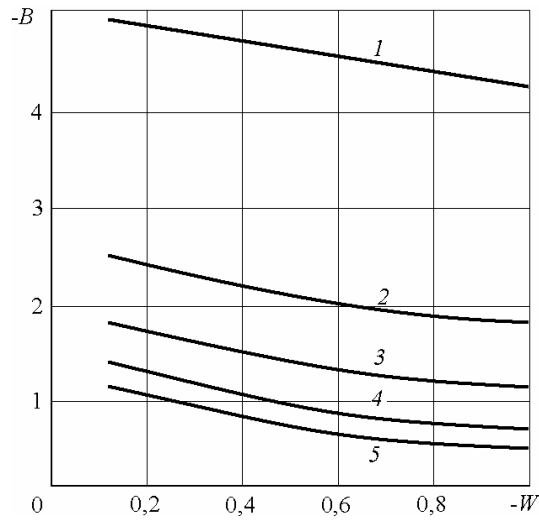
$$\begin{aligned}
 H(\xi_0) &= \frac{A}{2!}\xi^2 + \frac{C-1-2WA}{3!}\xi^3 + \frac{-2B-2S(C-1-2WA)}{4!}\xi^4 + \\
 &+ \frac{-2B^2+8WB+4W^2(C-1-2WA)}{5!}\xi^5 \dots = 0; \\
 H'(\xi_0) &= A\xi + \frac{C-1-2WA}{2!}\xi^2 + \frac{-2B-2W(C-1-2WA)}{3!}\xi^3 + \\
 &+ \frac{-2B^2+8WB+4W^2(C-1-2WA)}{4!}\xi^4 \dots = 0; \\
 G(\xi_0) &= 1+B\xi - \frac{2WB}{2!}\xi^2 + \frac{2A+4W^2B}{3!}\xi^3 + \frac{1(C-1-4WA)+2AB-8W^3B}{4!}\xi^4 + \\
 &+ \frac{-4B+4B(C-1-2WA)-8W(C-1-3WA)-4WB(A-4W^3)}{5!}\xi^5 + \dots = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.182}$$

#### 1.4.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Для определения зависимостей  $A$ ,  $B$  и  $C$  от  $\xi_0$  и  $W$  был использован численный метод решения уравнений (1.182). Отметим, что численные значения пределов изменения  $\xi_0$  и  $W$  выбраны исходя из реальных величин геометрических и режимных параметров роторного аппарата и физико-химических свойств обрабатываемой среды. На рис. 1.40 – 1.42 представлены некоторые результаты численного расчета. Из анализа графиков на рис. 1.40 и 1.42 можно сделать вывод, что влияние безразмерной нормальной к поверхности конуса на входе в зазор  $W$ , а значит, и расхода обрабатываемой среды через аппарат на величину  $A$  и  $C$  возрастает с увеличением относительного зазора  $\xi_0$ .



**Рис. 1.40. Зависимость безразмерной второй производной от нормального компонента скорости к поверхности конуса ( $A = G''$ ) от безразмерной координаты  $\xi$  и безразмерной нормальной к поверхности конуса составляющей скорости на входе и выходе из зазора  $W$ :**  
 $1 - \xi = 0,2$ ;  $2 - \xi = 0,4$ ;  $3 - \xi = 0,6$ ;  $4 - \xi = 0,8$ ;  $5 - \xi = 1$

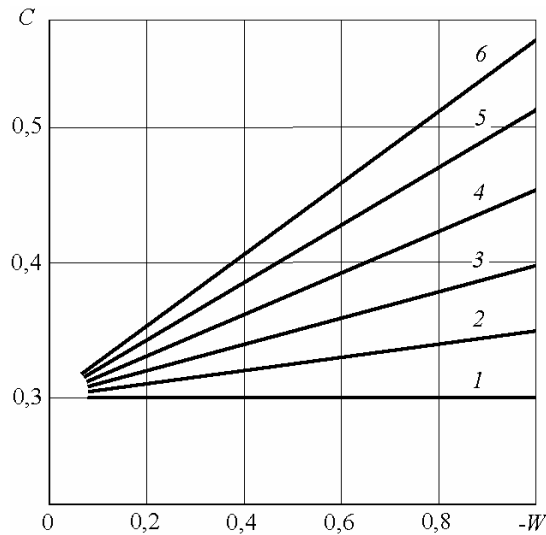


**Рис. 1.41.** Зависимость первой производной от безразмерного азимутального компонента скорости ( $B = G'$ ) от безразмерной координаты  $\xi$  и безразмерного нормального к поверхности конуса компонента скорости на входе и выходе из зазора  $W$ :  
 $1 - \xi = 0,2$ ;  $2 - \xi = 0,4$ ;  $3 - \xi = 0,6$ ;  $4 - \xi = 0,8$ ;  $5 - \xi = 1$

Кривые на графике рис. 1.41 свидетельствуют о том, что влияние  $W$  на производную от азимутального компонента скорости  $G'(\xi)$  одинаково при всех значениях безразмерного радиального зазора. Отметим, что на рис. 1.40 при  $\xi_0 = 0,01$ ;  $A \approx 10^{-3}$ , а на рис. 1.41 при  $\xi_0 = 0,01$ ;  $B \approx -10$ . Эти значения на рисунках не показаны.

На рис. 1.43 и 1.44 представлены результаты определения зависимости меридиональной  $H'$ , окружной  $G$  и нормальной к поверхности конуса  $H$  составляющих скорости от безразмерного зазора  $\xi_0$  и нормальной к поверхности конуса составляющей скорости на входе и выходе из зазора  $W$ .

Как и следует из физических представлений о гидромеханических закономерностях процесса течения в зазоре, характер изменения зависимости  $H(\xi)$  имеет экстремум примерно в середине зазора между ротором и статором. Это логично объяснить влиянием меридионального компонента скорости. Однако при малых радиальных зазорах изменение численных значений  $H$  невелико. Отметим, что с увеличением зазора численное изменение величины  $H$  значительно возрастает. Характер изменения зависимости  $H'(\xi)$  свидетельствует о том, что направление течения меридионального компонента возле статора и ротора противоположное.



**Рис. 1.42.** Зависимость постоянной интегрирования  $C$  от безразмерной координаты  $\xi$  и безразмерного нормального к поверхности конуса компонента скорости на входе и выходе из зазора  $W$ :  
 $1 - \xi = 0,01$ ;  $2 - \xi = 0,2$ ;  $3 - \xi = 0,4$ ;  $4 - \xi = 0,6$ ;  $5 - \xi = 0,8$ ;  $6 - \xi = 1$

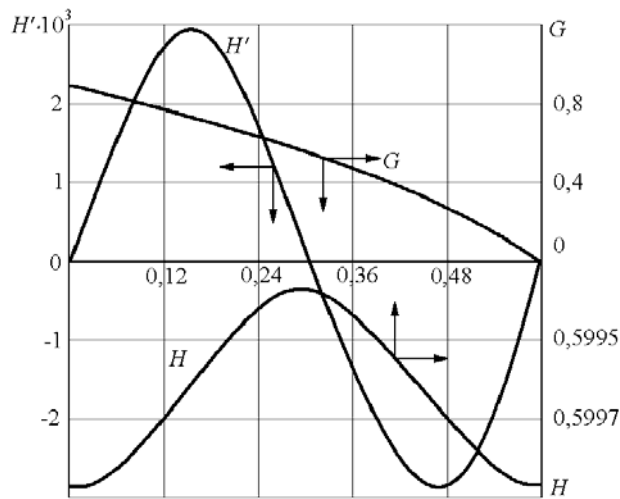


Рис. 1.43. Зависимость безразмерного нормального к поверхности конуса  $H$ , меридионального  $H'$  и азимутального компонентом скорости  $G$  от безразмерной координаты  $\xi$  ( $\xi_0 = 0,6$ ,  $W = -0,6$ )

Возле вращающегося ротора происходит отток жидкости из зазора вдоль образующей ротора, примерно до середины зазора, а возле статора осуществляется подсос среды в зазор. С увеличением величины зазора численные значения  $H'$  существенно возрастают. Характер изменения азимутального компонента скорости  $G$  одинаков при всех значениях  $\xi_0$ , однако с увеличением зазора кривая зависимости  $G(\xi)$  имеет более выпуклый, относительно оси  $\xi$  характер (рис. 1.44), что вполне соответствует физическим представлениям о течении жидкости в зазоре между неподвижной и вращающейся поверхностями.

Определив поля скоростей из совместного решения первых двух уравнений (1.177), из третьего уравнения системы (1.177) определим производную давления  $P'(\xi)$  и после его интегрирования получим выражение

$$P - P(0) = H' + H^2, \quad (1.183)$$

которое при необходимости позволяет найти изменение давления в зазоре между ротором и статором.

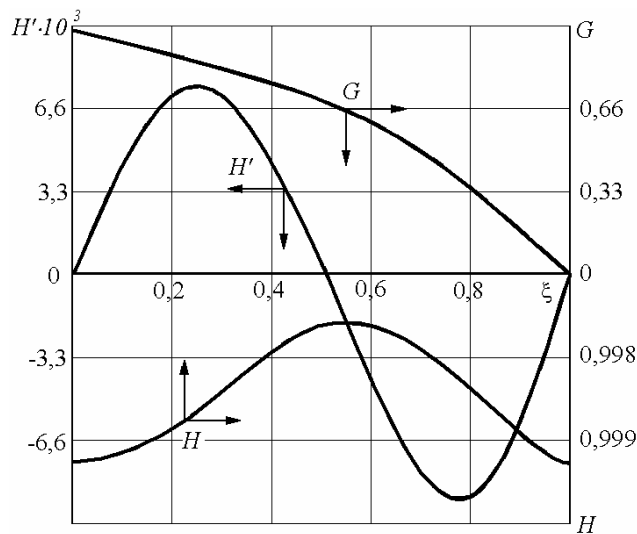


Рис. 1.44. Зависимость безразмерного нормального к поверхности конуса  $H$ , меридионального  $H'$  и азимутального компонентом скорости  $G$  от безразмерной координаты  $\xi$  ( $\xi_0 = 1$ ,  $W = -1$ )

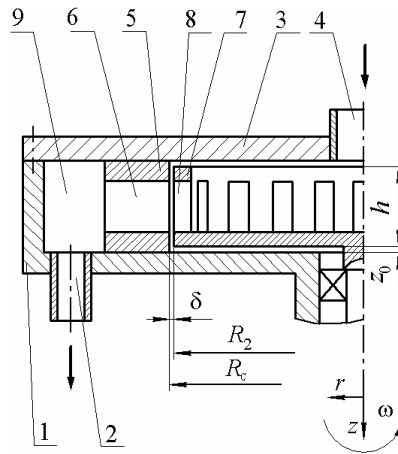
Проведенные теоретические исследования позволяют перейти к более обоснованному определению потерь мощности в зазоре между коническим ротором и статором. Актуальность этого вопроса вызвана тем, что основные потери энергии в аппаратах, содержащих вращающийся ротор и неподвижный статор, происходят в зазоре между ними.

К преимуществам предложенной модели течения следует отнести то, что выражения (1.177) можно использовать для определения закономерностей течения вязкой жидкости в зазоре между неподвижным и вращающимся дисками. Для этого необходимо принять в подстановках (1.175) и (1.176) полуконусность  $\gamma = \pi/2$ .

## 1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОЗАТРАТ В РОТОРНОМ АППАРАТЕ

### 1.5.1. ПОТРЕБЛЯЕМАЯ МОЩНОСТЬ РОТОРНЫМ АППАРАТОМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ РОТОРОМ И СТАТОРОМ

Конструктивно роторный аппарат представляет собой два коаксиальных цилиндра – неподвижного статора и вращающегося ротора с радиальными каналами в боковых стенках различного поперечного сечения (рис. 1.45). Обрабатываемая среда обычно подается в полость ротора, через каналы проходит в камеру озвучивания и выводится из аппарата.



**Рис. 1.45. Конструктивная схема роторного аппарата:**  
 1 – корпус; 2 – выходной патрубкок; 3 – крышка; 4 – входной патрубкок;  
 5 – статор; 6 – каналы в статоре; 7 – ротор; 8 – каналы в роторе;  
 9 – камера озвучивания

В радиальном зазоре между ротором и статором  $\delta$ , осевом зазоре между торцом ротора и корпусом аппарата  $z_0$  возникают значительные сдвиговые напряжения, вызывающие диссипацию энергии и приводящие к нагреву потока жидкости, что позволяет снизить энергозатраты на нагревание среды, если это необходимо для проведения ХТП.

Эффективность применяемого оборудования определяется величиной удельных энергозатрат на проведение ХТП. Следовательно, расчет мощности, потребляемой роторным аппаратом, является важнейшей частью методики его расчета.

Известно достаточное количество работ, посвященных расчету потребляемой мощности роторными аппаратами. В работе [72] приведена зависимость критерия мощности от критерия Рейнольдса и геометрических симплексов подобия, полученная на основании экспериментальных исследований. В работах [73, 74] получены выражения для критерия мощности, учитывающие влияние геометрических и режимных параметров роторного аппарата. Коэффициенты и показатели степени в уравнениях получены экспериментально. В исследовании [23] продолжена работа по совершенствованию методики определения критерия мощности. Общим недостатком этих работ является необходимость проведения экспериментальных исследований для определения показателей степени при членах уравнений, кроме того, расчет мощности возможен только после окончательного определения всех конструктивных и режимных параметров роторного аппарата. Этим недостатком частично лишены работы [60, 74]. В [60] на основании уравнения Навье-Стокса определены потери мощности в радиальном зазоре. Для определения энергозатрат в аппарате, идущих на преодоление сил сопротивления вращающийся цилиндр, рассматривается плоское течение, образованное наложением вихревого течения и течения за счет источника. В работе [74] расчет энергопотребления в радиальном зазоре основывается на гидродинамической модели Куэтта, осложненной радиальным вдувом. Расчет мощности выполнен методом диссипативных потерь при различных режимах течения в радиальном зазоре. В монографии [5] расчет энергозатрат также ограничивается определением диссипативных потерь в радиальном зазоре на основании достаточно сложной структуры потока, используя плоскую модель турбулентного течения.

Важное значение для выбора необходимого оборудования при проведении конкретного ХТП имеет наличие методики определения удельных энергозатрат, содержащей минимальное количество конструктивных размеров и отсутствие эмпирических коэффициентов. В большей степени этим требованиям отвечает методика расчета, изложенная в работе [1].

Для определения энергозатрат при работе роторного аппарата, был использован подход, предложенный в этом исследовании [75].

Расчет потребляемой мощности основан на общих физических представлениях о закономерностях гидромеханических процессов, имеющих место в роторных аппаратах. Основное положение – кинетическая энергия, приобретаемая потоком жидкости во вращающемся роторе, затем диссипируется в радиальном зазоре между ротором и статором, в осевом зазоре между торцом ротора и корпусом, теряется в механизме аппарата. Акустической мощностью пренебрегаем. Энергетический баланс для определения мощности имеет вид

$$N = N_{к.э} + N_{т1} + N_{т2} + N_m. \quad (1.184)$$

Выражение для  $N_{к.э}$  запишем в виде

$$N_{к.э} = 0,5\rho Q(\omega^2 R_2^2 + v^2). \quad (1.185)$$

В существующих конструкциях аппаратов обычно  $\omega^2 R_2^2 \gg v^2$ , поэтому (1.185) преобразуется к выражению

$$N_{к.э} = 0,5\rho Q\omega^2 R_2^2. \quad (1.186)$$

Как отмечают авторы приведенных работ, значительная часть энергии диссипируется, в основном, в тепло в радиальном зазоре между ротором и статором. Мощность, расходуемая на преодоление трения в зазоре, определяется следующим образом. Сила внутреннего трения в радиальном зазоре согласно закону Ньютона равна

$$T = \mu S \left. \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right|_{r=R_2}. \quad (1.187)$$

Момент сил сопротивления определяется как

$$M = TR_2. \quad (1.188)$$

Тогда диссипируемая мощность равна

$$N_{т1} = M\omega. \quad (1.189)$$

Градиент скорости  $\left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|$  определяем, используя уравнение Навье-Стокса и неразрывности для плоского течения несжимаемой ньютоновской жидкости, в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , согласно работам [63, 68]. Уравнение для определения окружной составляющей скорости для стационарного течения при граничных условиях

$$v_\varphi|_{r=R_2} = \omega R_2$$

имеет следующий вид

$$v_\varphi = \frac{\omega R_2^2 R_c^{Re+2}}{R_c^{Re+2} - R_2^{Re+2}} \frac{1}{r} - \frac{\omega R_2^2}{R_c^{Re+2} - R_2^{Re+2}} r^{Re+1}, \quad (1.190)$$

где  $Re$  – критерий Рейнольдса, определяемый выражением  $Re = VR_2/\nu$ .

Градиент азимутального компонента скорости получается дифференцированием уравнения (1.190)

$$\left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \frac{\omega R_2^2 R_c^{Re} (Re+2)}{R_c^{Re+2} - R_2^{Re+2}}. \quad (1.191)$$

Подставив (1.187), (1.188), (1.191) в выражение (1.189), учитывая, что  $S = 2\pi R_2 H_p^*$  получаем

$$N_{т1} = \frac{2(Re+2)\pi H_p^* \mu \omega^2 R_2^2 R_c^{Re+2}}{R_c^{Re+2} - R_2^{Re+2}}. \quad (1.192)$$

Для определения потерь мощности в зазоре между торцом ротора и корпусом использована следующая последовательность расчета.

Определяем элементарную силу сопротивления согласно закону Ньютона

$$dT = \mu \left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} 2\pi r dr. \quad (1.193)$$

Используя результаты решения задачи Кармана-Кохрена [70] и уточненные в [76], азимутальный компонент скорости в осевом зазоре запишется в виде

$$v_\varphi = \omega r G(\varepsilon). \quad (1.194)$$

Безразмерная осевая координата, определяемая выражением

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (1.195)$$

Преобразуем (1.193) к виду

$$dT = \mu \frac{dv_\varphi}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} 2\pi r dr. \quad (1.196)$$

Продифференцируем (1.195) по  $z$ , а (1.194) по  $\varepsilon$  и подставим в (1.196), учитывая, что  $\mu = \nu\rho$ , получаем

$$dT = 2\pi\omega^{3/2}\nu^{1/2}\rho r^2 G' \Big|_{\varepsilon=0} dr. \quad (1.197)$$

Используя (1.188), получаем момент сил сопротивления в осевом зазоре

$$M = \int_{R_3}^{R_2} 2\pi\omega^{3/2}\nu^{1/2}\rho r^3 G' \Big|_{\varepsilon=0} dr, \quad (1.198)$$

где  $R_3$  – конструктивный радиус, м.

В работах [71, 76] аналитически определена величина производной безразмерного азимутального компонента скорости на непроницаемом вращающемся диске

$$G' \Big|_{\varepsilon=0} = 0,616. \quad (1.199)$$

Вычислив интеграл (1.198), подставим его и значение (1.199) в выражение, аналогичное (1.189), и после преобразований получаем зависимость для определения потерь мощности в осевом зазоре:

$$N_{т2} = 0,308\pi\omega^{5/2}\nu^{1/2}\rho(R_2^4 - R_3^4). \quad (1.200)$$

Последняя составляющая уравнения (1.200) фактически характеризует механический к.п.д. роторного аппарата. Анализируя существующие конструкции,  $N_M$  можно ориентировочно определить как

$$N_M = (0,05...0,07) (N_{к.э} + N_{т1} + N_{т2}). \quad (1.201)$$

Полученные зависимости (1.186), (1.192), (1.200) содержат минимальное количество конструктивных и режимных параметров роторного аппарата. Причем,  $Q$ ,  $v$ ,  $\rho$  задаются техническим заданием на конкретный ХТП. В существующих конструкциях  $R_2 = 0,07...0,15$  м. Радиальный зазор принимают минимально возможным, его величина зависит от технических возможностей изготовителя. Обычное значение  $\delta \approx 0,1$  мм. Критерий Рейнольдса для течения в зазоре можно принять  $Re \approx 10^6$ . Частота вращения ротора принимается равной частоте вращения имеющегося стандартного электродвигателя переменного тока  $\omega = 100, 150, 300$  с<sup>-1</sup>. Высота ротора в современных конструкциях равна  $H_p^* = 0,02...0,04$  м.

Предлагаемую методику расчета энергозатрат рекомендуется использовать на стадии технического проектирования аппаратного оформления ХТП. Это позволяет определить удельные затраты мощности роторного аппарата и определить эффективность его применения, по сравнению с другим оборудованием, используемым для проведения конкретного процесса.

## 1.5.2. Потребляемая мощность роторным аппаратом с коническими ротором и статором

Методика определения энергозатрат в роторном аппарате с коническими ротором и статором аналогична использованной в разделе 1.5.1. При этом учитываются особенности течения жидкости в зазоре между коническими ротором и статором, рассмотренные в разделе 1.4.1 и используется расчетная схема, изображенная на рис. 1.39.

Вначале найдем мощность, теряемую в радиальном зазоре между ротором и статором. Определим единичный момент сил сопротивления в зазоре в азимутальном направлении

$$dM = \rho^* \sin \gamma dT. \quad (1.202)$$

Согласно закону Ньютона единичная сила сопротивления определится как

$$dT = \mu \left| \frac{\partial v_\phi}{\partial x} \right| dS. \quad (1.203)$$

Элементарная площадь действия силы сопротивления

$$dS = 2\pi r^* \sin \gamma dr^*. \quad (1.204)$$

Для нахождения производной от азимутального компонента скорости используем выражения для  $v_\phi$  (вторая строка (1.175) и выражение (1.176), решенное относительно  $x$ ). Продифференцировав полученные выражения, имеем:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial x} = \omega \rho^* \sin^{1/2} \gamma \omega^{1/2} v^{-1/2} G'(\zeta_0). \quad (1.205)$$

Выразив коэффициент динамической вязкости через кинематический  $\mu = \nu \rho$ , подставив (1.203), (1.204) и (1.205) в (1.192), получим выражение в виде

$$dM = 2\pi \rho \omega^{3/2} \sin^{7/2} \gamma \rho^{*3} G'(\zeta_0) dr^*. \quad (1.206)$$

Проинтегрировав его в пределах от  $\rho_1^*$  до  $\rho_2^*$  учитывая, что  $r = \rho^* \sin \gamma$ , получаем выражение для момента сил вязкого сопротивления

$$M = \frac{\pi}{2} (R_{2к}^4 - R_{1к}^4) \omega^{3/2} \nu^{1/2} \rho \sin^{-1/2} \gamma G'(\zeta_0). \quad (1.207)$$

Мощность, диссипируемая в радиальном зазоре между коническими ротором и статором, определяется по выражению

$$N_{з.р} = M\omega. \quad (1.208)$$

Подставив (1.207) в (1.208), окончательно имеем

$$N_{з.р} = \frac{\pi}{2} (R_{2к}^4 - R_{1к}^4) \omega^{5/2} \nu^{1/2} \rho \sin^{-1/2} \gamma G'(\zeta_0). \quad (1.209)$$

Величина производной скорости  $G'(\zeta_0)$  согласно ранее принятым обозначениям равна  $B$  и определяется по графикам, аналогичным рис. 1.41, или рассчитывается для каждого конкретно случая (см. пункт 1.4.1). Ранее отмечалось (1.4.1), что модель течения среды между коническими поверхностями можно применить для движения жидкости между плоскими поверхностями с соответствующими граничными условиями. Воспользуемся этим для определения диссипации энергии в осевом зазоре между днищем ротора и камерой (рис. 1.39). При этом выражение (1.209) запишется в виде

$$N_{3.0} = \frac{\pi}{2} (R_{2r}^4 - R_3^4) \omega^{5/2} v^{1/2} \rho G'(\zeta_0). \quad (1.210)$$

В формуле (1.210) значение  $G'(\zeta_0)$  принимаем согласно работе [71, 76], в которой оно определено на поверхности вращающегося непроницаемого диска

$$G'(\zeta_0) = 0,616. \quad (1.211)$$

Таким образом, выражение (1.210) с учетом (1.211) имеет вид

$$N_{3.0} = 0,308\pi\omega^{5/2}v^{1/2}\rho(R_{2r}^4 - R_3^4). \quad (1.212)$$

Выражение (1.212) естественно получилось аналогичным (1.200). В роторном аппарате мощность расходуется также на сообщение кинетической энергии жидкости, находящейся во вращающемся роторе

$$N_{к.э} = 0,5\rho Q \left( \omega^2 R_{cp}^2 + v^2 \Big|_{x=x_0} \right), \quad (1.213)$$

причем средний радиус конического ротора определяется как

$$R_{cp} = (R_{1к} + R_{2к})/2. \quad (1.214)$$

В существующих конструкциях роторных аппаратов обычно

$$N_{к.э} = 0,5\rho Q \omega^2 R_{cp}^2. \quad (1.215)$$

При вычислении мощности, потребляемой роторным аппаратом, учтем потери на трение во вращающихся частях конструкции, фактически они определяются механическим к.п.д.

$$N_M = (0,05 - 0,07) (N_{к.э} + N_{3.p} + N_{3.0}). \quad (1.216)$$

Окончательные энергозатраты роторного аппарата определяются в следующем виде

$$N = N_{к.э} + N_{3.0} + N_{3.p} + N_M. \quad (1.217)$$

Для проверки адекватности предложенной модели течения среды в зазоре между коническим ротором и статором, т.е. фактически выражения (1.217), должны быть использованы экспериментальные данные по определению мощности, потребляемой роторным аппаратом.

Отметим, что выражения (1.209), (1.212), (1.215) не содержат экспериментальных коэффициентов и показателей степени, как например, в [5, 34], а величины, используемые в этих выражениях, обычно задаются техническим заданием на проектирование технологического оборудования. Таким образом, предложенная методика определения мощности может быть использована для предварительной оценки энергоемкости (удельных энергозатрат) используемого оборудования, содержащего проницаемые конические и плоские поверхности.

Представленная трехмерная модель течения вязкой ньютоновской жидкости в зазоре между коническими проницаемыми поверхностями позволяет повысить точность расчетов и учесть важнейшие особенности реальных аппаратов: влияние величины зазора и граничных потоков. Модель может быть обобщена на течение неньютоновской жидкости.

### 1.5.3. ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В РАДИАЛЬНОМ ЗАЗОРЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

При эксплуатации любого электропривода важное значение имеет пусковое значение потребляемой мощности в начальный момент времени. По величине пускового момента, а следовательно, и мощности подбирают тип электродвигателя. В полной мере это относится и к приводам роторных аппаратов.

Мощность, диссипируемая в радиальном зазоре между ротором и статором, составляет значительную часть мощности, потребляемой роторным аппаратом. Представляет интерес, как изменится диссипируемая в зазоре мощность в начальный момент времени после приведения ротора во вращение. Кроме того, характер изменения затрачиваемой мощности может служить подтверждением адекватности предложенной в пункте 1.3 математической модели нестационарного течения жидкости в радиальном зазоре между ротором и статором, реальным гидромеханическим процессам, протекающим в роторном аппарате в момент пуска электродвигателя.

Мощность, затрачиваемая в радиальном зазоре, определяется исходя из закона Ньютона для сил сопротивления между слоями движущейся вязкой жидкости в виде

$$T = \mu S \left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|_{r=R_2}. \quad (1.218)$$

Градиент  $\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}$  определяется дифференцированием уравнения (1.166) на поверхности вращающегося ротора. Кроме того, можно использовать численные методы с применением программного обеспечения MAPLE-8 и более поздних версий. В результате градиент  $\partial v / \partial r$  получается в безразмерном виде и для получения результата в размерном выражении его необходимо умножить на  $U$ , учитывая, что масштаб линейной скорости поверхности ротора определяется как

$$U = \omega r.$$

Таким образом, (1.218) запишется в виде

$$T = \mu S \omega \left. \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_2} . \quad (1.219)$$

Момент сил сопротивления определяется выражением

$$M_{з,р} = TR_2 .$$

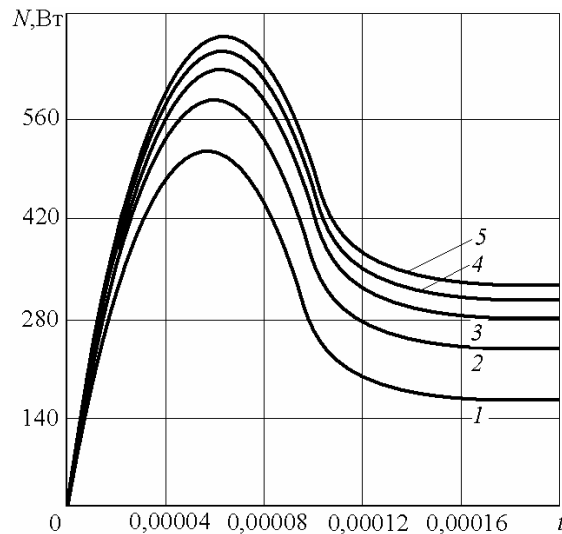
Мощность, затрачиваемая на преодоление сил сопротивления в зазоре

$$N_{з,р} = TR_2 \omega .$$

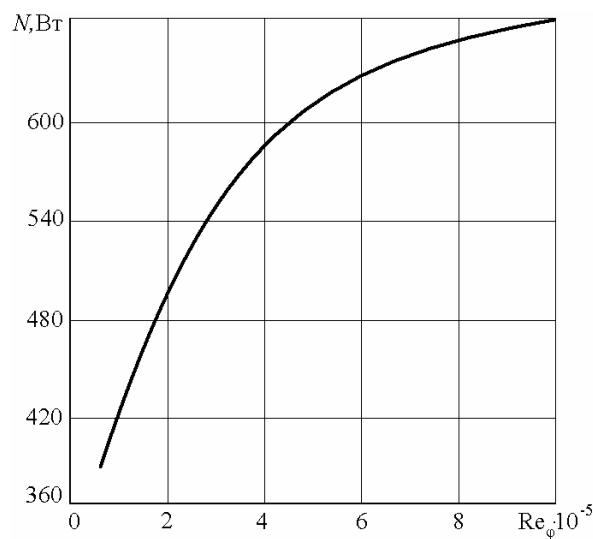
Некоторые результаты, полученные после вычислений, представлены на рис. 1.45 – 1.50.

Из анализа рис. 1.45 и 1.46 следует, что при увеличении критерия  $Re_\varphi$  диссипируемая в зазоре мощность возрастает.

Пиковая мощность возрастает неравномерно. Примерно с  $Re_\varphi > 7 \cdot 10^5$  пиковая мощность увеличивается значительно медленнее. Например, при увеличении  $Re_\varphi$  на ~67 % (с  $6 \cdot 10^5$  до  $10^6$ ) пиковая мощность возрастает на ~7 % (с 615 до 660 Вт), а при увеличении  $Re_\varphi$  с  $3,6 \cdot 10^5$  до  $6 \cdot 10^5$ , т.е. на те же 67 %, мощность возрастает на 14 % (с 550 до 630 Вт). При значении  $Re_\varphi < 3,6 \cdot 10^5$  кривая мощности падает еще более круто.

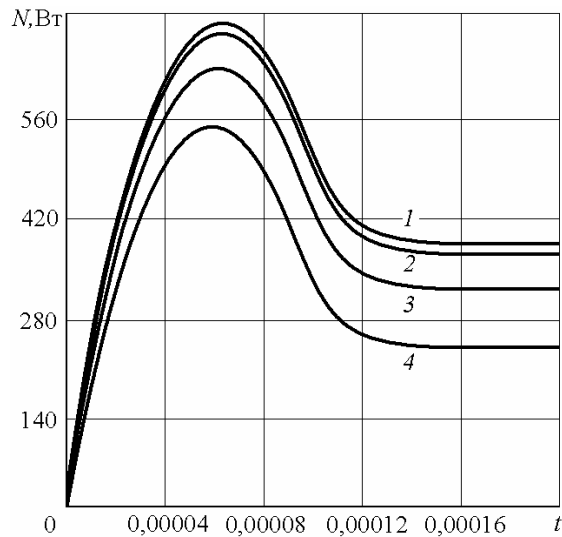


**Рис. 1.45. Зависимость мощности диссипируемой в радиальном зазоре от критерия Рейнольдса в азимутальном направлении при  $Sh_\varphi = 0,159$ ,  $Re_r = 10^3$ ,  $\delta = 0,001$ :**  
 1 –  $Re_\varphi = 2 \cdot 10^5$ ; 2 –  $Re_\varphi = 4 \cdot 10^5$ ; 3 –  $Re_\varphi = 6 \cdot 10^5$ ; 4 –  $Re_\varphi = 8 \cdot 10^5$ ; 5 –  $Re_\varphi = 10^6$



**Рис. 1.46. Влияние  $Re_\varphi$  на величину пиковой затрачиваемой мощности в зазоре при  $Sh_\varphi = 0,159$ ,  $Re_r = 10^3$ ,  $\delta = 0,001$**





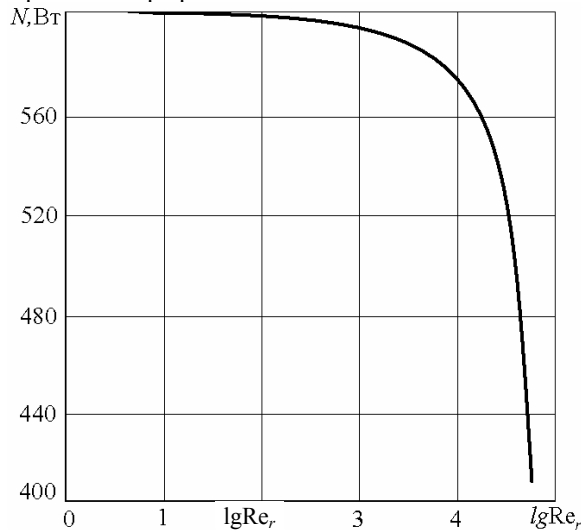
**Рис. 1.47. Зависимость мощности диссипируемой в радиальном зазоре от критерия Рейнольдса в радиальном направлении при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_\phi = 5 \cdot 10^5$ ,  $\delta = 0,001$ :  
1 –  $Re_r = 10^2$ ; 2 –  $Re_r = 10^3$ ; 3 –  $Re_r = 10^4$ ; 4 –  $Re_r = 10^5$**

На рис. 1.47 показано, что при увеличении критерия Рейнольдса в радиальном направлении до значения  $\sim 3 \cdot 10^3$  мощность уменьшается незначительно, т.е. практически не изменяется. Затем происходит резкое падение затрачиваемой мощности при значениях  $Re_r \geq 5 \cdot 10^3$ .

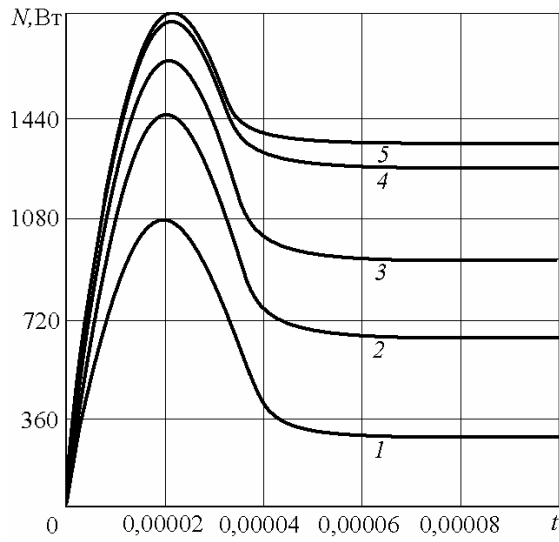
Аналогичный характер носит кривая, изображенная на рис. 1.48, которая описывает характер изменения пиковой затрачиваемой мощности в зазоре.

Из анализа рис. 1.49 следует, что при увеличении критерия Струхали диссипируемая мощность возрастает неравномерно, это наглядно представлено на рис. 1.50. Пиковая мощность при значении  $Sh_\phi \geq 10$  остается практически неизменной. Это следует объяснить физическим смыслом критерия Струхали, характеризующего нестационарность потоков среды. Следует отметить, что при увеличении  $Sh_\phi$  уменьшается разница между пиковой и мощностью, диссипируемой в зазоре, при стационарном течении.

Например, из графиков на рис. 1.49 следует, что при  $Sh_\phi = 10$  эта разница составляет  $\approx 23\%$ , а при  $Sh_\phi = 0,1$  пиковая мощность больше стационарной примерно в четыре раза.

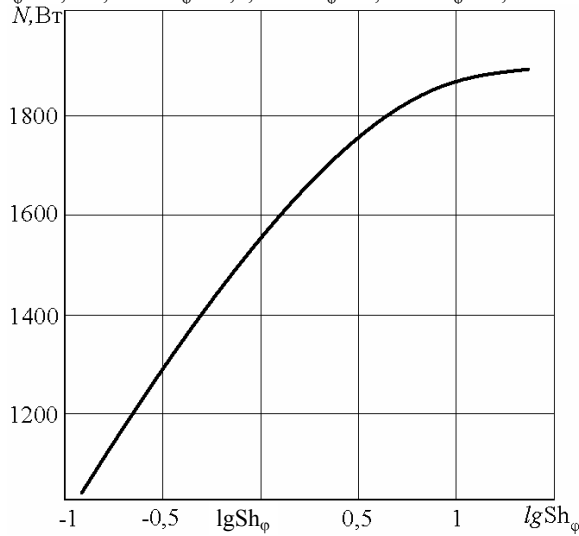


**Рис. 1.48. Влияние  $Re_r$  на величину пиковой затрачиваемой мощности в зазоре при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_\phi = 5 \cdot 10^5$ ,  $\delta = 0,001$**

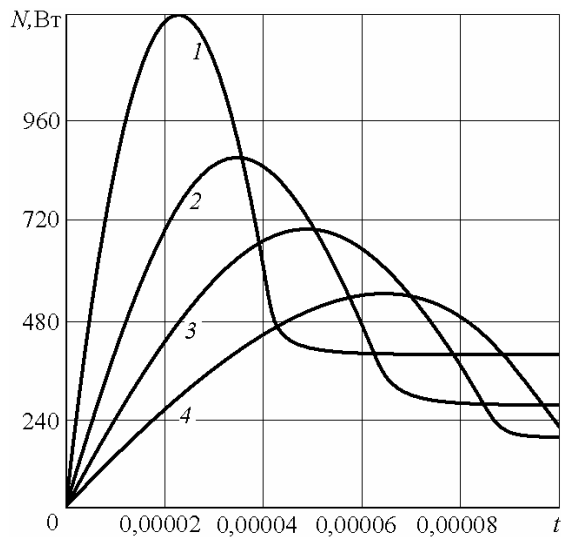


**Рис. 1.49. Зависимость мощности диссипируемой в радиальном зазоре от критерия Струхаля в окружном направлении при  $Re_\phi = 3 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^3$ ,  $\delta = 0,0004$ :**

1 –  $Sh_\phi = 0,159$ ; 2 –  $Sh_\phi = 0,5$ ; 3 –  $Sh_\phi = 1$ ; 4 –  $Sh_\phi = 5$ ; 5 –  $Sh_\phi = 10$

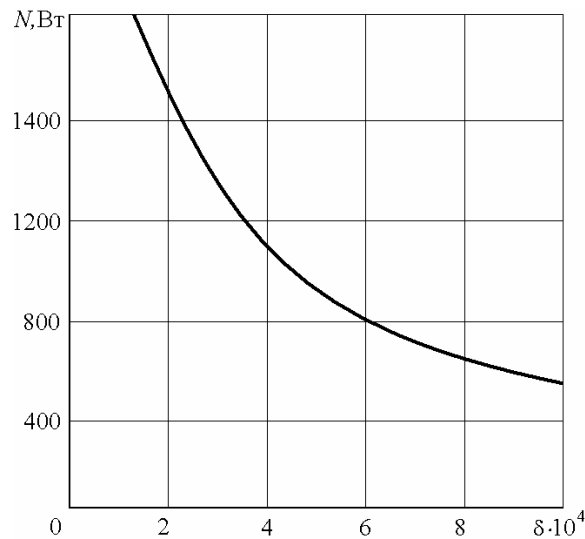


**Рис. 1.50. Влияние  $Sh_\phi$  на величину пиковой затрачиваемой мощности в зазоре при  $Re_\phi = 3 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^3$**



**Рис. 1.51. Зависимость мощности диссипируемой в радиальном зазоре от его величины при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_\phi = 5 \cdot 10^5$ ,  $Re_r = 10^4$ :**

1 –  $\delta = 0,0004$ ; 2 –  $\delta = 0,0006$ ; 3 –  $\delta = 0,0008$ ; 4 –  $\delta = 0,001$



**Рис. 1.52. Влияние величины радиального зазора на величину пиковой затрачиваемой мощности в зазоре при  $Sh_\phi = 0,159$ ,  $Re_r = 10^4$ ,  $Re_\phi = 5 \cdot 10^5$**

Таким образом, влияние критерия Струхалия на характер изменения диссипируемой в радиальном зазоре мощности отличается от влияния критериев  $Re_\phi$  и  $Re_r$ , что видно из сравнения рис. 1.49 с рис. 1.45 и 1.46.

На рис. 1.50 показано влияние величины радиального зазора на затрачиваемую в нем мощность. При уменьшении зазора затрачиваемая пиковая мощность, как и следовало ожидать, возрастает (рис. 1.52).

Однако отношение пиковой и мощности, диссипируемой при стационарном течении, уменьшается с увеличением зазора. Например, при  $\delta = 0,0004$  это отношение равно  $\approx 2,5$ , то при  $\delta = 0,001$  оно снижается до  $\approx 1,8$ . При этом, в отличие от предыдущих графиков (рис. 1.45, 1.47, 1.49), время достижения наибольшей потребляемой мощности увеличивается значительно. Все эти особенности хорошо объясняются инерционными свойствами жидкости, находящейся в зазоре между ротором и статором.

На основании проведенного анализа полученных результатов можно сделать вывод, что предложенная модель нестационарного течения в радиальном зазоре между ротором и статором не противоречит физическим законам и адекватно описывает гидромеханические закономерности поведения вязкой ньютоновской жидкости.

## 2. Кавитационные явления в роторных аппаратах

### 2.1. ДИНАМИКА КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ГАЗСОДЕРЖАНИЯ НА СЖИМАЕМОСТЬ СРЕДЫ

#### 2.1.1. ВЛИЯНИЕ СОДЕРЖАНИЯ СВОБОДНОГО ГАЗА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ КАВИТАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Под кавитацией обычно понимают образование в жидкости пульсирующих пузырей, заполненных паром, газом или их смесью [77]. Кавитация известна, главным образом, своими вредными последствиями такими, как ухудшение характеристик гидромашин, эрозия и шум. Имеется целый ряд исследований, посвященных кавитационной эрозии. В ряде работ доказываются наличие тесной связи между кавитационной эрозией и интенсивностью кавитации, например в [78 – 80]. Показано, что максимальная эрозия и максимум кавитационного шума находятся в одной и той же узкой полосе чисел кавитации. В целях борьбы с этими вредными явлениями принимают конструктивные меры по ограничению режимов работы, которые позволяют избежать возникновения кавитационных явлений. Однако, в настоящее время все чаще специально возбуждают кавитацию для тех или иных полезных целей.

Кавитация является одним из важнейших факторов, способствующих интенсификации различных химико-технологических процессов, например диспергирования, растворения, получения тонкодисперсных пигментов, в фармацевтической и пищевой промышленности и т.п. [1, 5, 34, 81].

Различают кавитацию акустическую, возникающую в жидкой среде при прохождении звуковой волны большой интенсивности, и гидродинамическую, обусловленную резким локальным понижением давления в жидкости вследствие больших скоростей течения жидкости.

Акустическая кавитация представляет собой эффективный механизм концентрации энергии. Во время кавитации относительно низкая средняя плотность энергии звукового поля трансформируется в очень высокую плотность энергии, связанную с радиально пульсирующим пузырем. Концентрация энергии в очень малых объемах и объясняет высокую эффективность применения акустической кавитации для интенсификации процессов химической технологии [28].

Гидродинамическая кавитация менее эффективна при воздействии на обрабатываемую среду, однако устройства для ее искусственного возбуждения отличаются простотой и надежностью.

Момент возникновения, процесс развития акустической и гидродинамической кавитации характеризуется критериями акустической и гидродинамической кавитации соответственно. Обе эти величины зависят от многих параметров, характеризующих как состояние жидкости – свободное газосодержание, наличие зародышей кавитации, температуры, так и внешние условия – гидростатическое давление, скорость потока, частота звукового поля и т.д.

Свободное газосодержание является одним из важнейших свойств жидкости, сильно влияющее на кавитационные явления. С увеличением газосодержания время запаздывания кавитации, характеризующее кавитационный гистерезис, имеет тенденцию к уменьшению. Данные, полученные в других условиях, прямо противоположны [83]. Влияние свободного газосодержания на критическое число кавитации, характеризующее момент начала кавитационного процесса, исследовалось в работах [84, 85]. На основании экспериментов установлено, что с увеличением содержания газа увеличивается число кавитации, она становится более обильной. Однако, присоединенная кавитация, в форме неподвижного пятна, с ростом содержания газа уменьшается. В работе [86] для интенсификации кавитационных эффектов рекомендуется добавлять газ в жидкость. Интересна работа [82], в которой высказывается предположение, что в жидкости существует оптимальное значение газосодержания, при котором наступает максимум кавитации. Это объясняется тем, что при понижении газосодержания интенсивность кавитационных событий увеличивается, но число этих событий уменьшается. В результате кавитационная активность должна проходить через максимум. Однако, в исследовании отмечается, что оптимальное значение газосодержания трудно установить. Таким образом, все работы, посвященные влиянию газосодержания жидкой среды на кавитационные эффекты, экспериментальные и содержат достаточно противоречивые данные. Наиболее полно данные вопрос рассмотрен в теоретической работе [28]. Настоящее исследование является продолжением этой теоретической работы.

Следует отметить, что результаты теоретического исследования влияния свойств жидкости на кавитационное воздействие на обрабатываемую среду представляет собой большой интерес еще и потому, что экспериментальное изучение влияния газосодержания жидкости на динамику кавитационных пузырей весьма затруднено, так как при изменении одного из свойств изменяются и остальные. В связи с этим теоретические методы исследования с использованием численных расчетов на вычислительной технике, позволяют изучить динамику кавитационного пузыря с учетом изменения свойств жидкости.

### **2.1.2. Уравнение динамики кавитационного пузыря применительно к условиям работы роторного аппарата**

Цель исследования – определить зависимость критерия акустической кавитации, соответствующего режиму наиболее интенсивной кавитации, от содержания свободного газа в жидкости.

Теоретические и экспериментальные данные, проводившиеся по исследованию взаимодействия и излучения сферических пузырей [87], свидетельствуют, что два колеблющихся пузыря на расстоянии  $2,5 R_{\max}$  излучают такую же акустическую энергию, как и одиночный пузырь. Уже при расстоянии между пузырями  $4 R_{\max}$  их можно рассматривать как одиночные (6 % газосодержания), поэтому предполагаем, что расстояние на которых параметры газожидкостной смеси меняются существенно больше расстояния между пузырями, которое, в свою очередь, больше размеров пузырей.

Слабое взаимодействие пузырей на расстоянии больше  $2,5 R_{\max}$  позволяет не решать задачу поведения кавитационной области, а исследовать динамику одиночного кавитационного пузыря.

Отметим, что взаимодействие пузырей изучалось в работе [5], однако это изменило конечный результат не более чем на 10 %.

Существуют несколько типов аппроксимации движения пузыря в звуковом поле. Все они приводят к определенным дифференциальным уравнениям движения границы раздела пузыря.

Аппроксимации разделяют на четыре группы [82].

1. Аппроксимация, предполагающая несжимаемость жидкости, при которой плотность жидкости предполагается постоянной, а скорость звука – бесконечно большой.

2. Акустическая аппроксимация предполагает, что скорость звука конечная величина, но не учитывается закон сохранения энергии при сжатии жидкостей.

3. Аппроксимация Херринга принимает, что скорость звука конечна и учитывает закон сохранения энергии при описании движения кавитационных пузырей, радиусы которых увеличиваются всего в несколько раз по сравнению с начальными радиусами.

4. Аппроксимация Кирквуда–Бете, при которой скорость звука является функцией скорости. Она представляет наибольший интерес с точки зрения описания последней стадии сжатия сферически симметричного пузыря, радиус которого увеличивается во много раз по сравнению с начальным радиусом.

Отметим, что перечисленные аппроксимации приводят к различным дифференциальным уравнениям внутри каждой.

Как показывают экспериментальные данные [88 – 90] максимальный радиус пузыря обычно больше начального в 3 – 5 раз. Аппроксимация Кирквуда–Бете не учитывает эффекты теплопроводности, вязкости и поверхностного натяжения. Поэтому для проведения исследования использована аппроксимация Херринга с соответствующими допущениями и уточнениями.

При рассмотрении уравнения динамики кавитационного пузыря сделаны следующие допущения.

Пузырь наполнен смесью пара и неконденсирующегося газа и давление во всем его объеме постоянно. Распределение температуры в полости пузыря однородно и внутренним давлением смеси пренебрегаем. Перенос массы за счет диффузии, парообразования и конденсации медленный процесс по сравнению с процессами кавитационной динамики, поэтому принимается, что газосодержание пузыря остается постоянным. Граница раздела между жидкостью и содержимым пузыря имеет

сферическую поверхность и она остается такой во время всего движения пузыря. Предполагается, что отсутствуют процессы зарождения, дробления и коагуляции пузырей.

Уравнения динамики кавитационных пузырей было получено Херрингом [82, 91 – 94] в виде

$$(1 - 2\text{Ma})RR'' + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\text{Ma}\right)R'^2 + \frac{1}{\rho_L}[P_\infty - P_V - |P_m|]f(t) + \frac{2\sigma}{R} - \left(P_\infty + \frac{2\sigma}{R}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n} + \frac{R}{\rho_{ж}}\text{Ma}(1 - \text{Ma})\frac{dP(R)}{dR} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\text{Ma} = \frac{R'}{C_L}$  – критерий Маха.

Давление в жидкости на границе с пузырем можно записать в виде [94]

$$P(R) = P_S\beta\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n}\frac{T_n}{T_\infty} + P_n - \frac{2\sigma}{R} - 4\nu\rho_L\frac{R'}{R}, \quad (2.2)$$

где  $R$ ;  $R_0$ ;  $R' = \frac{dR}{dt}$ ;  $R'' = \frac{d^2R}{dt^2}$  – текущий, начальный радиусы, скорость и ускорение границы раздела пузыря;  $P_{V_0}$  – начальное давление пара в пузыре в начальный момент;  $P_V$  – однородное давление пара в пузыре при температуре  $T_n$ ;  $n$  – показатель политропы газа в пузыре;  $4\nu\rho_L\frac{R'}{R}$  – дополнительное давление, возникающее вследствие вязких касательных напряжений на границе пузыря при изменении его радиуса;  $\beta = \frac{P_{V_0}}{P_S}$  – начальное содержание газа в пузыре;  $P_S = P_\infty - P_V - 2\sigma/R_0$  – давление на границе раздела пузыря в невозмущенной жидкости.

Производная выражения (2.2) равна

$$\frac{dP(R)}{dR} = -P_S\beta\frac{T_n}{R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3n}\left[\frac{1}{R} + \frac{2\sigma}{R^2} + \frac{4\nu\rho_L}{R}\left(\frac{R'}{R} - \frac{R''}{R'}\right)\right]. \quad (2.3)$$

Одной из характеристик газожидкостной смеси является индекс кавитации, введенный Розенбергом [91]:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_{\text{KB}}}. \quad (2.4)$$

где  $\Delta V$  – объем всех кавитационных пузырей в фазе их наибольшего расширения;  $V_{\text{KB}} = V_L + \Delta V$  – объем кавитационной области;  $V_L$  – объем жидкости в кавитационной области.

Содержание свободного газа равно

$$\alpha(R) = \Delta V(R)/V, \quad (2.5)$$

где  $\Delta V(R) = 4\pi\sum_{i=1}^N R_i^3(t)/3$  – переменный объем всех  $N$  кавитационных пузырей;  $R_i(t)$  – радиус  $i$  пузыря в момент времени  $t$ .

Считая распределение пузырей равномерным и моно дисперсным, переменный объем парогазовых пузырей в кавитационной области равен

$$\Delta V = N4\pi R^3/3. \quad (2.6)$$

В предположении, что капельная жидкость при изменении объема дисперсной фазы не меняет своего объема, найдем объем жидкости отнесенной к одному пузырю  $V_{L1}$  из начальной концентрации газа

$$\alpha_0 = \frac{4\pi R_0^3/3}{V_{L1} + 4\pi R_0^3/3}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) имеем

$$V_L = 4\pi R_0^3(1 - \alpha_0)/3\alpha_0.$$

Следовательно, содержание свободного газа имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 R^{-3}/[1 - \alpha_0(1 - R^{-3})]. \quad (2.8)$$

Для приведения уравнения динамики кавитационного пузыря к безразмерному виду введем безразмерные величины:

$$\bar{R} = R/R_0; \quad \bar{t} = t/t_M. \quad (2.9)$$

В качестве масштаба времени взята обратная величина собственной круговой частоты колебаний пузыря. Круговая частота определяется по Миннерту [82]:

$$t_M = 2\pi R_0 \sqrt{\rho_L / (P_\infty + 2\sigma / R_0 - P_V)}. \quad (2.10)$$

Возмущающее переменное давление имеет вид

$$P(t) = P_m f(t).$$

где  $P_m$  – амплитуда переменного давления, изменяющегося по закону  $f(t)$ .

Давление вдали от пузыря

$$P_\infty = P - P_V + P(t) = \left[ P - P_\infty - \frac{2\sigma}{R_0} \right] + \left[ P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} - P_V \right] - [P_V - P_{V0}] + P(t). \quad (2.11)$$

Введем критерии подобия:

– критерий Вебера  $We = 2\sigma / P_S R_0$ ;

– критерий Рейнольдса  $Re_{кв} = R_0 \sqrt{P_S / \rho_L} / \nu$ ;

– критерий гидродинамической кавитации  $\chi_r = 2P_S / \rho_L v_{\max}^2$ ;

– критерий акустической кавитации  $\chi_a = P_S / |P_m|$ .

В результате алгебраических преобразований с учетом сжимаемости кавитационной области из (2.1) В.Ф. Юдаевым получено уравнение динамики кавитационного пузыря, позволяющее учесть влияние содержания свободного газа в среде на интенсивность кавитации.

Применительно к условиям работы роторных аппаратов проходного типа сделано следующее допущение. Пренебрегаем тепловыми процессами, так как обработка жидких сред производится при температурах значительно ниже температуры кипения.

Уравнение динамики газовой области применительно к работе роторного аппарата принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{R}(1 - Ma) \bar{R}'' + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} Ma \right) (\bar{R}')^2 = [1 + Ma(1 - Ma)] \beta(\bar{R})^{-3n_v} + \\ + \left( We - \frac{4\bar{R}'}{Re_{кв} \bar{R}} \right) [1 - Ma(1 - Ma)] - \frac{4Ma}{Re} (1 - Ma) \frac{\bar{R}''}{\bar{R}'} - \chi_r^{-1} \vartheta(t) - \chi_a^{-1} f(\bar{t}) - 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Скорость звука  $c$  в газожидкостной смеси определяется по выражению, предложенному в [95]:

$$c = \left[ \left( \frac{\alpha}{c_V'} \right)^2 + \frac{1 - \alpha}{c_L'^2} \left( 1 - \alpha \left( 1 - \frac{\rho_V}{\rho_L} \right) \right) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{nP_S} \left( 1 - \frac{\rho_V}{\rho_L} \right) \right]^{-1/2}. \quad (2.13)$$

Критерий Маха при  $\rho_L \gg \rho_V$  имеет вид

$$Ma = \frac{\bar{R}}{2\pi} \left[ \frac{\alpha^2}{(c_V')^2} + \frac{(1 - \alpha)^2}{(c_L')^2} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{n} \right]^{-1/2}, \quad (2.14)$$

где  $(c_V')^2 = \rho_L c_V P_S^{-1}$ ;  $(c_L')^2 = \rho_L c_L P_S^{-1}$ .

Начальные условия для уравнения (2.13) имеют вид

$$\bar{R}_0 = 0, 2, \dots, 5, \quad \bar{R}'_0 = 0. \quad (2.15)$$

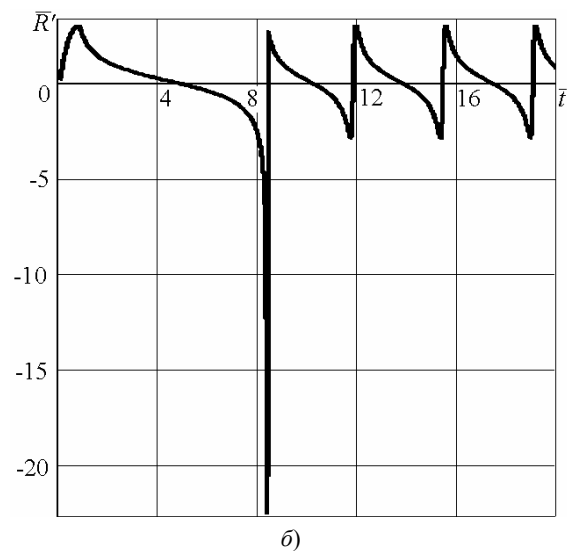
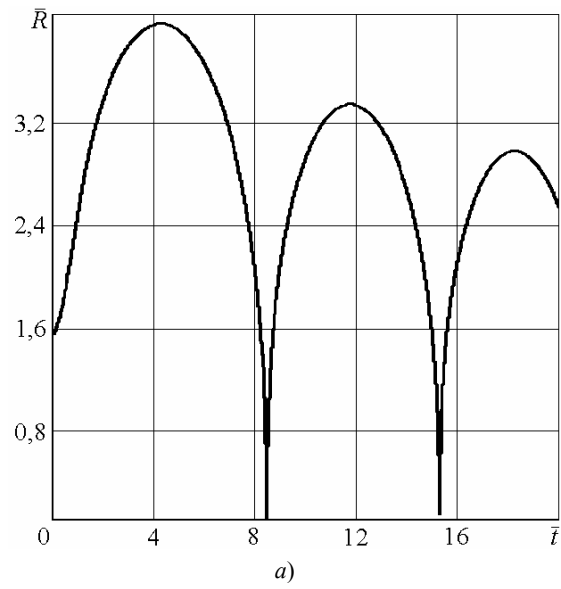
Для определения закона изменения внешнего давления  $f(t)$  используется решение уравнения течения жидкости в модуляторе роторного аппарата с учетом и без учета сжимаемости на участке  $1 \leq \bar{t} \leq 2$  [42, 43].

Известно, что динамическое уравнение пропорционально производной скорости в модуляторе [1, 5, 34]

$$P \sim \frac{d v_c}{dt}. \quad (2.16)$$

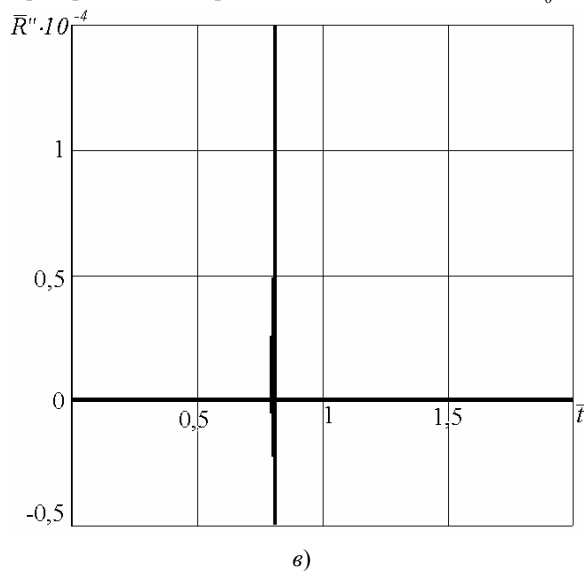
Таким образом, функция  $f(\bar{t})$  в нашем случае будет описываться видом отрицательной части зависимости  $d\bar{v}/d\bar{t}$  на участке  $1 \leq \bar{t} \leq 2$ , изображенной, например, на рис. 1.10. Преимуществом данной постановки задачи является то, что можно учесть влияние режимных и конструктивных параметров роторного аппарата на закономерности кавитационных процессов.

Для решения системы уравнений (2.8), (2.12) – (2.15) необходимо взять производную от уравнения (1.72) с учетом (1.73) – (1.75) – в случае несжимаемой среды, (1.126) – в случае сжимаемой среды и выражения (1.22) была разработана программа, позволяющая определять зависимости  $\bar{R}(t)$ ,  $\bar{R}'(\bar{t})$ ,  $\bar{R}''(\bar{t})$ ,  $Ma(\bar{t})$ ,  $P_{кв}(\chi_a)$ ,  $P_{кв}(\alpha_0)$ ,  $\chi_{a\max}(\bar{R}_0)$ ,  $\chi_{a\max}(Re_{кв})$ ,  $\chi_{a\max}(We)$  и т.д. Эта программа зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентами и товарным знаком под № 2005610721 "Программное обеспечение для определения параметров, характеризующих режим наиболее интенсивной кавитации в газожидкостной среде".



**Рис. 2.1. Характерные зависимости:**

$a$  – радиуса пузыря;  $b$  – скорости границы пузыря;  $v$  – ускорения границы пузыря;  $z$  – критерия Маха от времени:  $We = 0,15$ ,  $Re_{KB} = 10^6$ ,  $\bar{R}_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = 2 \cdot 10^{-1}$



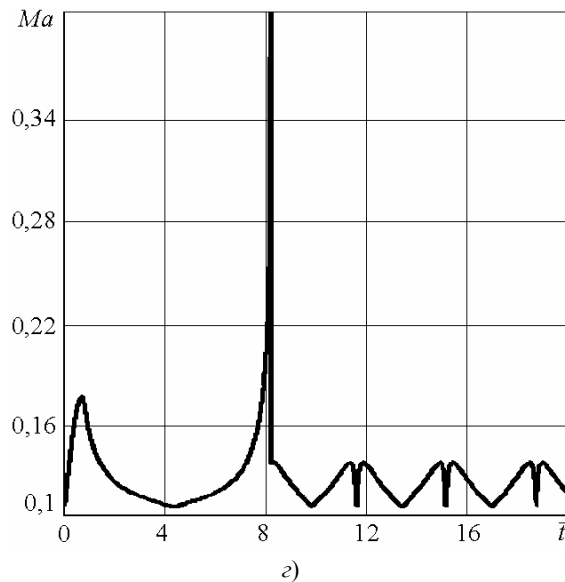


Рис. 2.1. Окончание

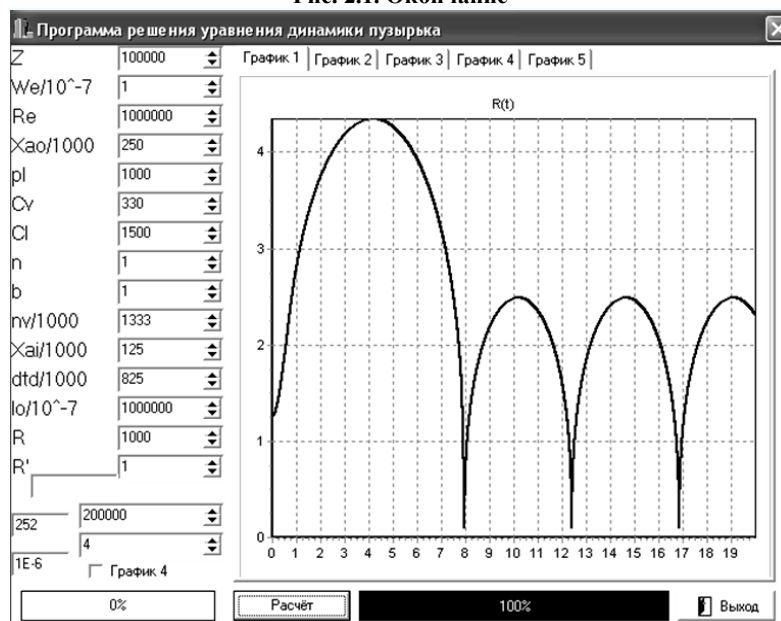


Рис. 2.2. Интерфейс программы для определения характеристик поведения кавитационного пузырька

На рис. 2.1 показаны характерные графики изменения радиуса пульсирующего пузырька, скорости и ускорения границы раздела пузыря и вторая производная по времени от  $\bar{R}(t)$ , критерия Маха, а на рис. 2.2 – интерфейс программы для определения этих параметров.

## 2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЯ

### 2.2.1. ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА АКУСТИЧЕСКОЙ КАВИТАЦИИ, ГАЗСОДЕРЖАНИЯ И НАЧАЛЬНОГО РАДИУСА ПУЗЫРЯ НА АМПЛИТУДУ КАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ ДАВЛЕНИЯ

Сферический симметрично пульсирующий пузырь создает давление в волне, которое определяется зависимостью [96]:

$$P_{\text{кв}} = \frac{S}{4\pi r_{\text{п}}} Q' \left( t - \frac{r_{\text{п}}}{c} \right) \approx \frac{S}{4\pi r_{\text{п}}} Q'(t) - \frac{S}{4\pi c} Q''(t), \quad (2.17)$$

где  $r_{\text{п}}$  – расстояние от центра пузырька до точки наблюдения.

Так как пульсирующий пузырь является монополем, что доказано в [26], то объемная скорость монополя равна

$$Q'(t) \approx 4\pi R^2 R'. \quad (2.18)$$

Подставив (2.18) в (2.17), получим

$$P_{\text{кв}} = \frac{S}{p_{\text{п}}} (2R'R + R^2 R') - \frac{S}{4\pi c} (2R'^2 + 6RR'R'' + R^2 R'''). \quad (2.19)$$



Условием малости акустического модуля является выражение [96]:

$$\frac{\bar{R}_0}{\bar{c}\bar{T}} \ll 1. \quad (2.20)$$

Если принять  $\bar{R}_0 \approx 1$ ;  $\bar{c} \approx 140$ ;  $\bar{T} = 20$ , то получим в нашем случае

$$\frac{1}{2800} \ll 1,$$

т.е. условие (2.20) хорошо удовлетворяет условию малости радиуса монополя. Это позволяет вторым слагаемым (2.19) пренебречь.

Для определения влияния статического давления в аппарате на амплитуду кавитационных импульсов давления, уравнения (2.12) и (2.19) решались при различных числах акустической кавитации, начальных объемных газосодержания и начальных радиусах пузырька.

При небольших температурах относительно температуры кипения жидкости, т.е. при которых обычно проводят химико-технологические процессы в роторном аппарате, давлением пара и силами поверхностного натяжения можно пренебречь. Тогда число акустической кавитации имеет вид [28, 97]:

$$\chi_{a,0} = \frac{P_\infty}{|P_{\max}|}. \quad (2.21)$$

Принимаем, что газ в пузырьке удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Тогда, принимая, что объем жидкости не изменяется при  $i$ -м изменении статического давления от  $P_\infty$  до  $P_{S_i}$ , получим выражение для изменения начального ( $i$ -го) содержания свободного газа в жидкости от исходного газосодержания [26]:

$$\alpha_{0i} = \alpha_0 \frac{\chi_{a,0}}{\chi_{a,i} E1 \left( \frac{\chi_{a,0}}{\chi_{a,i}} - 1 \right) \alpha_0}. \quad (2.22)$$

В соответствии с уравнением Бойля–Мариотта изменение начального радиуса пузырька определяется как

$$\bar{R}_{0,i} = \bar{R}_0 (\chi_{a,0} / \chi_{a,i})^{1/3}. \quad (2.23)$$

Тогда амплитуда импульса кавитационного давления определяется выражением [26, 97]:

$$\bar{P}_{\text{кв}i} = \frac{\chi_{a,i}}{\chi_{a,0}} (2\bar{R}'^2 + \bar{R}\bar{R}^n). \quad (2.24)$$

В выражении (2.24) учтено, что

$$R_0 = \frac{t_M}{2\pi} \sqrt{\frac{\chi_{a,0} |\bar{P}_m|}{\rho_L}}.$$

Масштаб времени изменяется согласно выражению

$$t_{M,i} = t_{M0} \left( \frac{\chi_{a,i}}{\chi_{a,0}} \right)^{5/6}. \quad (2.25)$$

Таким образом, для решения уравнения (2.24) использовалась система уравнений (2.12) – (2.15), (2.8), (1.72) – (1.75), (1.126) и условие (1.127).

При каждом шаге вычислений  $i$  определялись значения  $\chi_{a,0}$  и начальные условия  $\alpha_{0i}$ ,  $\bar{R}_{0i}$ , связанных соотношениями (2.22), (2.23) с учетом (2.25).

Численные значения параметров принимались следующими  $\beta = 0 \dots 1$ ;  $\chi_a = 10^{-3} \dots 1$ ;  $c_V = 330$  м/с;  $c_L = 1500$  м/с;  $P_S = (0,1 \dots 1)$  Па;  $\rho_L = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $We = 0 \dots 0,15$ ;  $Re_{\text{кв}} = 10 \dots 10^6$ ;  $n_V = \frac{4}{3}$ ;  $n = 1$ .

Проведены серии вычислений для определения величины импульса кавитационного давления  $\bar{P}_{\text{кв}}$  при изменении акустического числа кавитации. В каждой серии объемное газосодержание  $\alpha_0$  оставалось постоянным.

На рис. 2.3 изображен характерный график изменения кавитационного давления возникающего при радиально-сферических нелинейных колебаниях парогазовых пузырей при прохождении через них отрицательных импульсов давления источником которых является нестационарные или неустановившиеся течения.

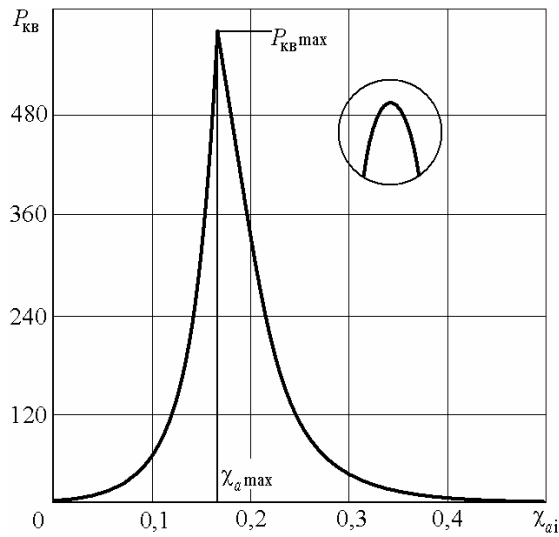


Рис. 2.3. Зависимость амплитуды кавитационного импульса давления от критерия акустической кавитации при  $\alpha_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;  $Re_{kv} = 10^6$

На графике имеется резко выраженный максимум величины кавитационного давления  $P_{kv \max}$  при определенной величине критерия акустической кавитации  $\chi_{a \max}$ . Эти результаты подтверждаются экспериментальными данными, приведенными в работах [98 – 100]. Таким образом, можно сделать вывод – используемая математическая модель динамики кавитационного пузыря, с учетом сжимаемости газожидкостной смеси, адекватно описывает реальный процесс акустической кавитации.

На основании вычислений определены зависимости максимального кавитационного давления от объемного начального газосодержания  $\alpha_0$ . Один из графиков приведен на рис. 2.4.

Зависимость  $P_{kv \max}(\alpha_0)$  показывает, что при уменьшении газосодержания свободного газа величина импульса кавитационного давления резко возрастает, что подтверждают экспериментальные работы [26, 81, 100] и теоретическое исследование [28].

Из работ [28, 82] известно, что на интенсивность кавитационных эффектов должен оказывать влияние начальный радиус пузыря  $\bar{R}_0$ . Зависимость на рис. 2.3 показывает, как влияет начальный радиус пузыря на величину кавитационных импульсов давления  $P_{kv \max}$ .

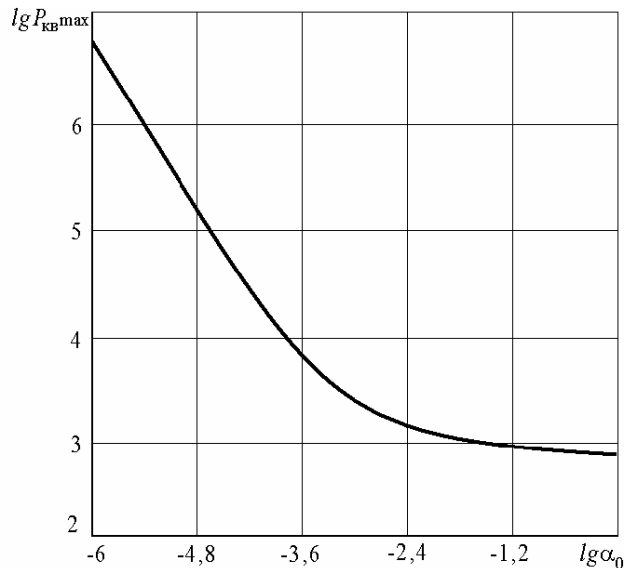


Рис. 2.4. Зависимость амплитуды импульса давления от газосодержания при  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;  $Re_{kv} = 10^6$

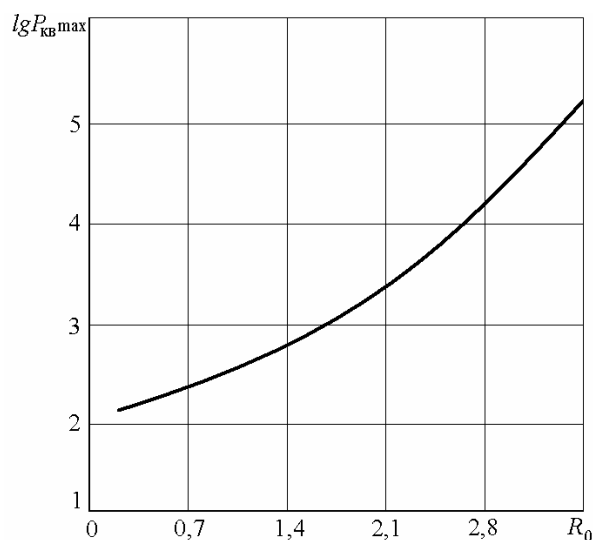


Рис. 2.5. Зависимость амплитуды импульса кавитационного давления от начального радиуса пузыря при  $We = 0,15$ ;  $Re_{kb} = 10^6$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$

Из графика (рис. 2.5) следует, что с увеличением  $\bar{R}_0$  кавитационное давление резко возрастает. Это полностью соответствует существующим теориям динамики кавитационных пузырьков [28].

Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенная модель динамики кавитационного пузыря не противоречит существующим моделям.

### 2.2.2. ВЛИЯНИЕ СОДЕРЖАНИЯ СВОБОДНОГО ГАЗА В ЖИДКОСТИ, КРИТЕРИЕВ ВЕБЕРА, РЕЙНОЛЬДСА И НАЧАЛЬНОГО РАДИУСА ПУЗЫРЯ НА КРИТЕРИЙ АКУСТИЧЕСКОЙ КАВИТАЦИИ

Используя результаты численного решения уравнения радиальносферических колебаний пузыря [97] впервые определена зависимость критерия акустической кавитации, при котором интенсивность акустической кавитации будет максимальной, от содержания свободного газа в газожидкостной среде (рис. 2.6).

Полученные результаты аппроксимированы методом наименьших квадратов выражением

$$\chi_{a\max} = 0,205 + 0,0075 \lg \alpha_0 + 0,0075 (\lg \alpha_0)^2. \quad (2.26)$$

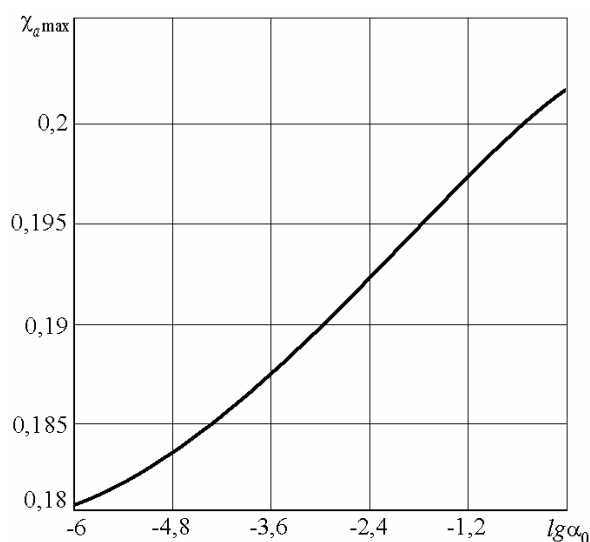


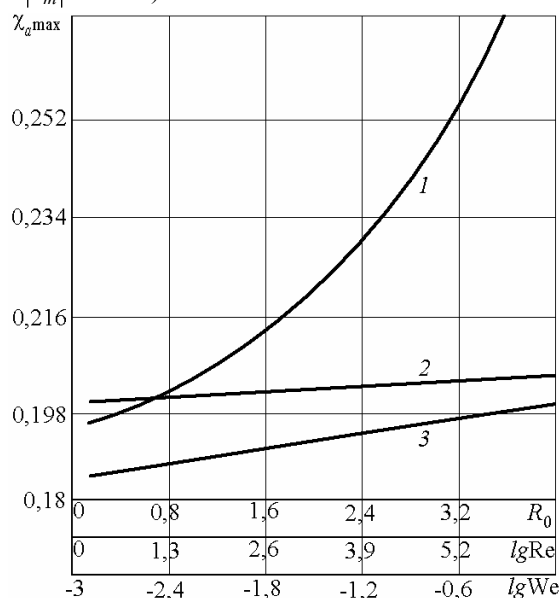
Рис. 2.6. Зависимость критерия акустической кавитации от газосодержания при  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;  $Re_{kb} = 10^6$

Зависимость  $\chi_{a\max}$  от  $\alpha_0$  определяет условия, при которых кавитационное воздействие на обрабатываемую среду будет наибольшим. Таким образом, появляется возможность производить расчет технологического оборудования, использующего для интенсификации химико-технологических процессов акустическую кавитацию, с большей достоверностью и эффективностью.

Отметим, что в некоторых существующих методиках [28, 101] величина  $\chi_{a\max}$  задается в начале расчета, исходя из содержания свободного газа в водопроводной воде.

В результате исследования установлено, что начальный радиус кавитационного пузыря оказывает существенное влияние на критерий акустической кавитации  $\chi_{a\max}$  (рис. 2.7). Анализ зависимости (рис. 2.7) показывает, что при увеличении  $\bar{R}_0$

для достижения оптимального режима работы оборудования, с точки зрения наиболее интенсивной кавитации, необходимо повышать статическое давление  $P_\infty$  (при  $|P_m| = \text{const}$ ).



**Рис. 2.7.** Зависимость критерия акустической кавитации  $\chi_{a \max}$  :

1 – от начального радиуса пузырька при  $We = 0,15$ ;  $Re_{kv} = 10^6$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$ ;

2 – от критерия Рейнольдса при  $\alpha_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;

3 – от критерия Вебера при  $Re_{kv} = 10^6$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$ ;  $\bar{R}_0 = 1$

Таким образом, изменяя давление в среде, при постоянном свободном содержании газа, можно получить наилучшие условия для усиления кавитационного воздействия на обрабатываемую среду. При этом надо учитывать, что величина кавитационных импульсов давления достигает максимума при вполне определенном значении статического давления ( $\chi_{a \max}$  на рис. 2.7).

Представляет определенный интерес влияние критериев Рейнольдса и Вебера на величину критерия акустической кавитации, т.е. влияние вязких сил и сил поверхностного натяжения.

График влияния критерия  $Re_{kv}$  на  $\chi_{a \max}$  представляет собой прямую линию в полулогарифмических координатах (рис. 2.7, прямая 2). При этом  $\chi_{a \max}$  возрастает не более чем на 7 % при увеличении  $Re_{kv}$  с 10 до  $10^6$ . Например, в роторных аппаратах с модуляцией проходного сечения  $Re_{kv} \approx 10^4 \dots 10^6$ , т.е. можно утверждать, что оптимальное число акустической кавитации остается практически постоянным, с учетом погрешности вычислений, и не зависит от критерия Рейнольдса.

Влияние сил поверхностного натяжения оценивается критерием Вебера. График зависимости критерия кавитации от критерия Вебера (рис. 2.7, прямая 3) позволяет сделать вывод, что силы поверхностного натяжения ( $We = 0,0015 \dots 0,15$ ) практически не влияют на процесс акустической кавитации при сделанных допущениях.

### 2.2.3. ВЛИЯНИЕ РЕЖИМНЫХ И КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ РОТОРНОГО АППАРАТА НА КРИТЕРИЙ АКУСТИЧЕСКОЙ КАВИТАЦИИ

В первой главе работы получены результаты, позволяющие определить режимные и конструктивные параметры роторных аппаратов, обеспечивающие режим наиболее интенсивной акустической кавитации. Этот режим работы определяется значениями критерия  $K_K$ , симплексов  $l/a_p$  и  $\chi$ . Поэтому представляет научный и, особенно, практический интерес изучения их влияния на величину  $\chi_{a \max}$ .

Полученные результаты представлены на рис. 2.8.

Из графика на рис. 2.8 следует, что при увеличении критерия  $K_K$  примерно в 10 раз величина критерия  $\chi_{a \max}$  возрастает всего на 2,2 %. Таким образом можно сделать вывод, что влияние  $K_K$  на  $\chi_{a \max}$  незначительно.

При увеличении симплекса  $\chi$  с 0,05 до 0,5 (рис. 2.9), т.е. в 10 раз  $\chi_{a \max}$  увеличивается на  $\sim 2$  %, а это также очень незначительно.

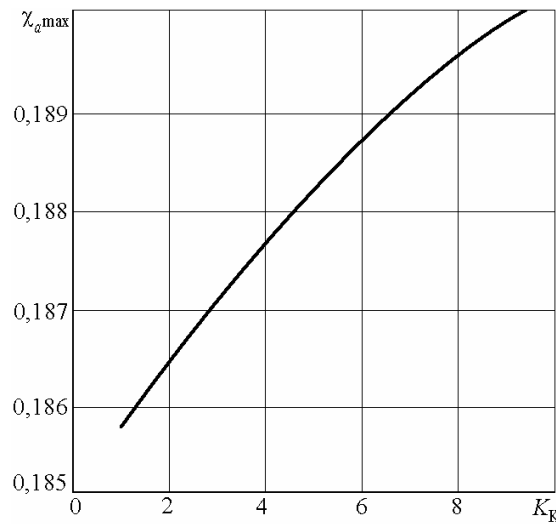


Рис. 2.8. Влияние критерия  $K_K$  на  $\chi_{a\max}$  при  $l/a_p = 5$ ;  $\chi = 0,1$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$

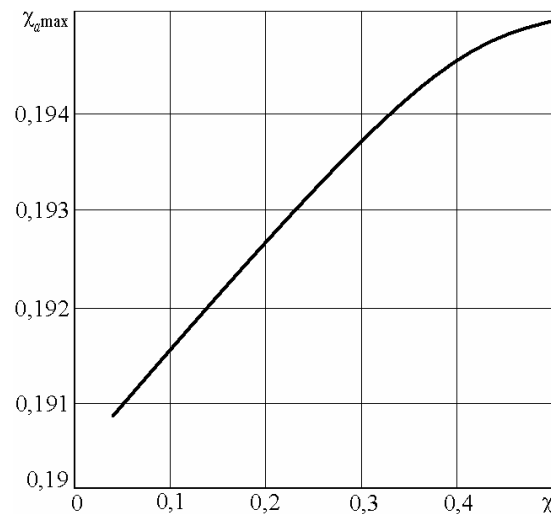


Рис. 2.9. Влияние симплекса  $\chi$  на  $\chi_{a\max}$  при  $l/a_p = 5$ ;  $K_K = 1$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$

Влияние симплекса  $l/a_p$  на критерий акустической кавитации  $\chi_{a\max}$  не выявлено.

Аналогичные результаты получены при исследовании влияния  $K_K$ ,  $l/a_p$  и  $\chi$  на критерий акустической кавитации  $\chi_{a\max}$  при изменении содержания свободного газа в жидкости в интервале  $\alpha_0 = 10^{-5} \dots 3 \cdot 10^{-1}$ .

Таким образом, на основании проведенного исследования можно сделать вывод – уравнение ( $\chi_a = f(\alpha_0)$ ) можно использовать при изменении конструктивных и режимных параметров в исследованных границах.

Полученный результат подтверждает особое значение содержания свободного газа в жидкости при определении режима наиболее интенсивной кавитации, т.е. наиболее эффективного режима работы роторного аппарата.

#### 2.2.4. ВЛИЯНИЕ РЕЖИМНЫХ И КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ РОТОРНОГО АППАРАТА НА ВЕЛИЧИНУ КАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ ДАВЛЕНИЯ

На основании уравнения динамики кавитационного пузыря изучено влияние критерия  $K_K$ , симплексов  $l/a_p$  и  $\chi$  на величину  $P_{\text{кв max}}$ . Некоторые результаты представлены на рис. 2.10.

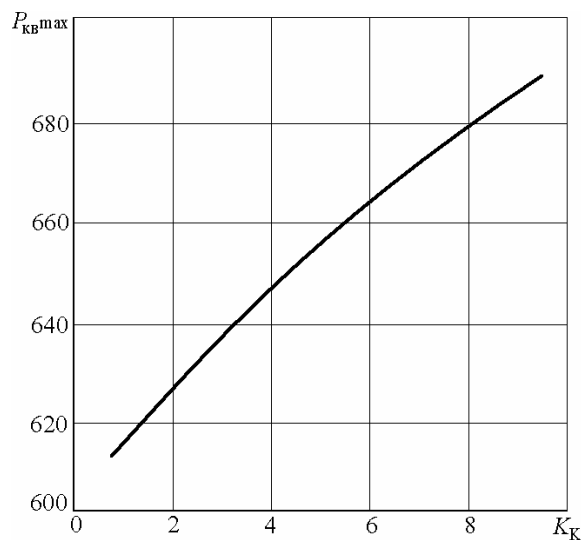


Рис. 2.10. Зависимость амплитуды кавитационного импульса давления от критерия  $K_K$  при  $l/a_p = 5$ ;  $\chi = 0,1$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$

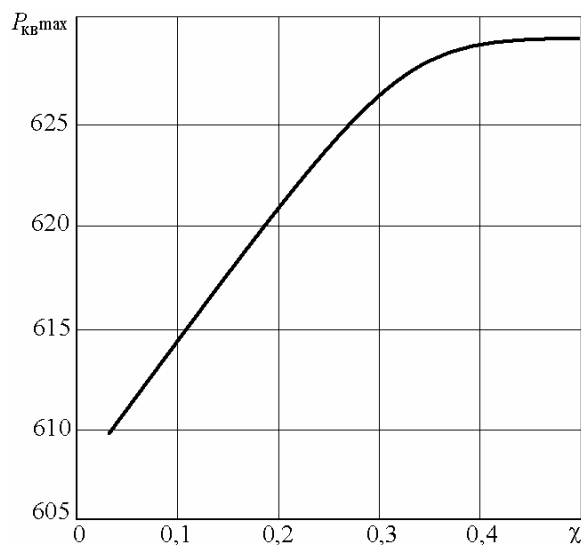


Рис. 2.11. Зависимость амплитуды кавитационного импульса давления от симплекса  $\chi$  при  $l/a_p = 5$ ;  $K_K = 1$ ;  $\alpha_0 = 10^{-3}$

Анализ графика на рис. 2.10 показывает, что при увеличении критерия  $K_K$  с 1 до 9 величина кавитационных импульсов давления возрастает на  $\sim 15\%$ .

На рис. 2.11 показано, как влияет критерий  $\chi$  на величину кавитационного импульса давления.

Анализируя график зависимости  $P_{кв max}$  от  $\chi$  можно сделать вывод, что увеличение  $\chi > 3,5$  вызывает очень незначительное возрастание  $P_{кв max}$ . В целом увеличение величины давления составляет  $\sim 3\%$ , т.е. влияние симплекса  $\chi$  на интенсивность кавитации менее значительно, чем влияние критерия  $K_K$ .

Влияние симплекса  $l/a_p$  на  $P_{кв max}$  не выявлено.

Таким образом характер графиков на рис. 2.10 и 2.11 соответствует закономерностям изменения величины возбуждающих импульсов динамического давления  $P(t) \sim dv/dt$ , изложенных в первой главе и изображенных на рис. 1.14 (первая часть), рис. 1.18 – 1.22 – для несжимаемой жидкости и рис. 1.30 и 1.31 – для сжимаемой.

## 2.2.5. ВЛИЯНИЕ ГАЗОСОДЕРЖАНИЯ НА ЗАТУХАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЯ И КРИТЕРИЙ МАХА

Исследовано влияние содержания свободного газа в жидкости на затухание амплитуды изменения радиуса кавитационного пузыря от времени. Характерный график изменения  $\bar{R}$  от времени приведен на рис. 2.1, а.

Количественной характеристикой скорости затухания колебаний является декремент затухания, равный натуральному логарифму отношения двух последующих максимальных отклонений колеблющейся величины в одну и ту же сторону [53]. В нашем случае декремент затухания определяется по величине амплитуд двух первых пульсаций кавитационного пузыря

$$\Delta = \ln \frac{\bar{R}_{1кв}}{\bar{R}_{2кв}}.$$

В результате обработки результатов компьютерного моделирования получены результаты, изображенные на рис. 2.12.

Отметим, что, начиная с  $\alpha_0 = 10^{-4}$  до  $10^{-7}$ , декремент затухания практически не изменяется и равен  $\Delta = 0,025$  (на рис. 2.12 эти значения не показаны).

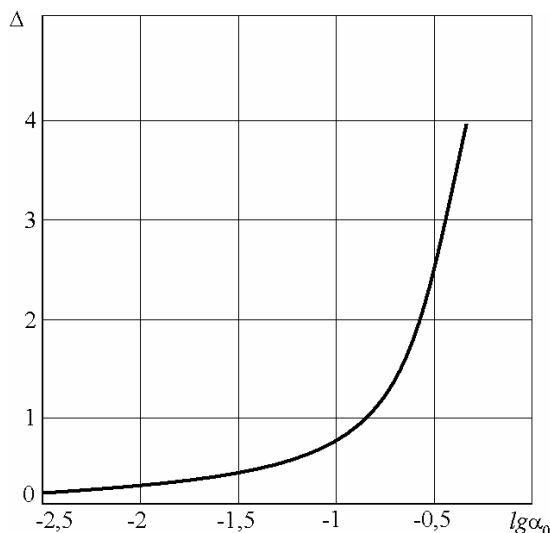


Рис. 2.12. Зависимость декремента затухания пульсаций кавитационного пузыря от газосодержания при  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;  $Re_{kv} = 10^6$

Как следует из физических соображений и, соответственно, предложенной модели динамики газового пузыря, затухание пульсаций радиуса кавитационного пузыря возрастает с увеличением газосодержания в жидкости. Начиная с  $\alpha_0 \approx 10^{-1}$ , декремент затухания возрастает очень резко.

В этих пределах изменения газосодержания ( $10^{-7} \leq \alpha_0 \leq 0,6$ ) было исследовано изменение максимального критерия Маха. Характерный вид графика изменения критерия Маха от времени приведен на рис. 2.1, з.

Полученные результаты изображены на рис. 2.13.

На рис. 2.13, начиная с  $\alpha_0 \approx 10^{-4}$ , величина максимального критерия Маха практически постоянна и равна  $\approx 0,009$ .

Таким образом, на основании проведенных исследований можно заключить, что увеличение газосодержания приводит к увеличению нелинейности колебаний пузыря и сопровождающих это характеристик, описывающих нелинейную колебательную систему [26, 97, 100], какой является ансамбль кавитационных пузырей в газожидкостной среде.

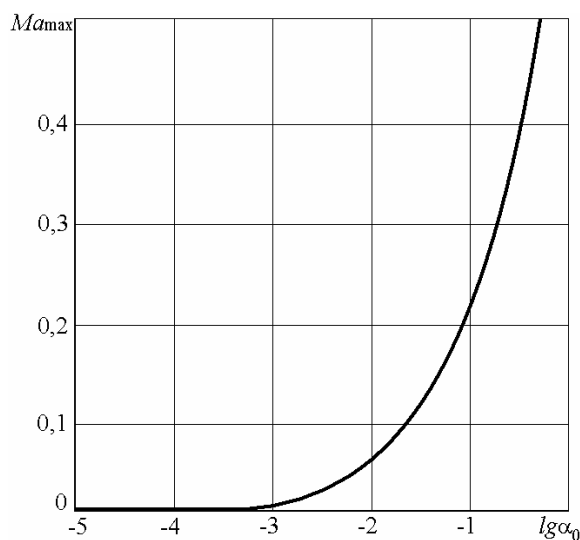


Рис. 2.13. Зависимость максимального критерия Маха от газосодержания при  $\bar{R}_0 = 1$ ;  $We = 0,15$ ;  $Re_{kv} = 10^6$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабышко, А.М. Роторные аппараты с модуляцией потока и их применение в промышленности / А.М. Балабышко, В.Ф. Юдаев. – М. : Недра, 1992. – 176 с.
2. Зимин, А.И. Прикладная механика прерывистых течений / А.И. Зимин. – М. : Фолиант, 1997. – 308 с.
3. Звездин, А.К. Возбуждение импульсной акустической кавитации / А.К. Звездин, А.И. Зимин // Гидродинамика и акустика одно- и двухфазных потоков : сб. науч. тр. / СОАН СССР, ин-т теплофизики. – Новосибирск, 1983. – С. 92 – 97.
4. Долинский, А.А. Роторно-импульсный аппарат. 1. Импульсные эффекты локального адиабатического вскипания и кавитации в жидкости / А.А. Долинский, Б.И. Басок // Промышленная теплотехника. – 1998. – Т. 20. – № 6. – С. 7 – 10.
5. Промтов, М.А. Пульсационные аппараты роторного типа: теория и практика : монография / М.А. Промтов – М. : Машиностроение-1, 2001. – 260 с.
6. Карепанов, С.К. Математическая модель течения рабочей жидкости в каналах ротора и статора гидромеханического диспергатора / С.К. Карепанов // Применение роторных гидромеханических диспергаторов в горнодобывающей промышленности: теория и практика : сб. докл. Междунар. науч.-практ. семинара. – Минск : Беларус. АН БЖ, 1998. – С. 57 – 67.
7. Кафаров, В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии / В.В. Кафаров. – М. : Химия, 1985. – 448 с.
8. Кафаров, В.В. Математическое моделирование основных процессов химической технологии / В.В. Кафаров, Н.В. Глебов. – М. : Высшая школа, 1991. – 400 с.
9. Кафаров, В.В. Моделирование биохимических реакторов / В.В. Кафаров, А.Ю. Гордеев. – М. : Лесная промышленность, 1979. – 342 с.
10. Кафаров, В.В. Основы массопередачи / В.В. Кафаров. – М. : Высш. шк., 1979. – 439 с.
11. Konovalov, V.I. Drying of Solids. Part: Modelling of Dryings of Fibrou Materials / V.I. Konovalov, E.N Tugolukov. – New York : Int. Sci. Publ, 1993. – 536 p.
12. Konovalov, V.I. Modelling of Drying with the Application of Temperature – Time and Temperature – Moisture Relationships / V.I. Konovalov, E.N Tugolukov, N.Z. Gatapova // Int. Drying Symp. IDS'94. – Gold Coast, Australia. – P. 291 – 306.
13. Туголуков, Е.Н. Методика моделирования полей определяющих параметров производственного оборудования химической промышленности / Е.Н. Туголуков // Химическая промышленность. – 2004. – Т. 81. – № 3. – С. 157 – 164.
14. Туголуков, Е.Н. Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств / Е.Н. Туголуков. – М. : Машиностроение, 2004. – 100 с.
15. Зональный метод определения зависимости коэффициента массопроводности от концентрации / Э.Н. Очнев и [др.] // Теоретические основы химической технологии. – 1975. – Т. 9. – № 4. – С. 491 – 495.
16. Рудобашта, С.П. Аналитический расчет процесса глубокой сушки гранулированных полимерных материалов в шахтных сушилках / С.П. Рудобашта, В.М. Дмитриев // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1979. – № 4. – С. 14 – 16.
17. Optimal designing of the process and apparatus with flowing streams for the granular materials drying / S.I. Dvoretzky [et al.] // 11-th international Drying Symposiym (IDS-98). – Halkidiki, Greece, 1998. – Vol. A. – P. 464 – 471.
18. Mathematical modeling and apparatus of deep drying process polymers / S.P. Rudobashta [et al.] // Drying Technology – An international Journal. New York, Dekker. – 1998. – V. 16. – N 7. – P. 1471 – 1485.
19. Рудобашта, С.П. Тепломассообмен в аппарате с кольцевым слоем зернистого материала / С.П. Рудобашта, В.М. Дмитриев, Э.М. Карташов // Теоретические основы химической технологии. – 2002. – Т. 36. – № 5. – С. 1 – 6.
20. Зонная модель процесса центробежной сепарации пен / А.М. Кутепов [и др.] // Повышение эффективности тепломассообменных и гидродинамических процессов в текстильной промышленности и производства химических волокон : материалы 2 Всесоюз. науч.-техн. конф. – М., 1985. – С. 30 – 32.
21. Белявский, И.Ф. Теоретические основы интенсификации процесса разрушения при очистке сточных вод текстильных комбинатов / И.Ф. Белявский, А.Г. Ветошкин, А.М. Кутепов // Повышение эффективности тепломассообменных и гидромеханических процессов в текстильной промышленности и производстве химических волокон : материалы 2 Всесоюз. науч.-техн. конф. – М., 1985. – С. 120.
22. Балабудкин, М.А. О закономерностях гидромеханических явлений в роторно-пульсационных аппаратах / М.А. Балабудкин // Теоретические основы химической технологии. – 1975. – Т. 9. – № 5. – С. 738 – 788.
23. Балабудкин, М.А. Роторно-пульсационные аппараты в химико-фармацевтической промышленности / М.А. Балабудкин. – М. : Медицина, 1983. – 160 с.
24. Балабудкин, М.А. Исследования частотно-амплитудного сектора динамического давления в роторно-пульсационных аппаратах / М.А. Балабудкин, М.А. Барам // Теоретические основы химической технологии. – 1968. – Т. 2. – № 4. – С. 606 – 614.
25. Юдаев, В.Ф. Исследование гидродинамической сирены / В.Ф. Юдаев, Д.Т. Кокорев // Известия вузов. Машиностроение. – 1969. – № 10. – С. 72 – 77.
26. Юдаев, В.Ф. Роторные аппараты с модуляцией потока и импульсным возбуждением кавитации для интенсификации процессов химической технологии : дис. ... д-ра техн. наук : 05.17.08 / Юдаев Василий Федорович. – М., 1984. – 454 с.
27. Юдаев, В.Ф. Методы расчета гидравлических и динамических характеристик модулятора роторного аппарата / В.Ф. Юдаев, А.И. Зимин, Л.Г. Базадзе // Известия вузов. Машиностроение. – 1985. – № 1. – С. 65 – 70.
28. Юдаев, В.Ф. Гидромеханические процессы в роторных аппаратах с модуляцией проходного сечения потока обрабатываемой среды / В.Ф. Юдаев // Теоретические основы химической технологии. – 1994. – Т. 28. – № 6. – С. 581 – 590.
29. Биглер, В.И. Исследование динамики сирены : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / В.И. Биглер. – М., 1975. – 15 с.
30. Звездин, А.К. Использование аппаратов типа РАМП для получения высокодисперсных эмульсий в режиме акустической кавитации : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / А.К. Звездин. – М., 1983. – 16 с.
31. Карепанов, С.К. К вопросу о нестационарных гидромеханических процессов в аппаратах химической технологии / С.К. Карепанов, В.Ф. Юдаев // Приложение физических и физико-химических методов в технологических процессах. – М. : Металлургия, 1990. – С. 60 – 66.
32. Промтов, М.А. Пульсационные аппараты роторного типа: теория и практика : монография / М.А. Промтов. – М. : Машиностроение-1, 2001. – 260 с.



33. Зимин, А.И. Расчет фермы поперечного сечения каналов ротора и статора гидромеханического диспергатора / А.И. Зимин // Теоретические основы химической технологии. – 1999. – Т. 33. – № 4. – С. 432 – 434.
34. Балабышко, А.М. Гидромеханическое диспергирование / А.М. Балабышко, А.И. Зимин, В.П. Ружицкий. – М. : Наука, 1998. – 331 с.
35. Накорчевский, А.И. Гидродинамика роторно-пульсационного аппарата / А.И. Накорчевский, Б.И. Басок, Т.С. Рыжкова // Инженерно- физический журнал. – 2002. – Т. 75. – № 2. – С. 58 – 68.
36. Чичева-Филатова, Л.В. Научные основы интенсификации физико-химических процессов в роторных аппаратах с модуляцией потока и их применение в пищевом производстве / Л.В. Чичева-Филатова ; под ред. д-ра техн. наук, проф. В.Ф. Юдаева. – М. : Пищевая промышленность, 2005. – 208 с.
37. Титов, В.В. Влияние длины участков прерывателя импульсационного аппарата роторного типа на его гидравлическое сопротивление / В.В. Титов, М.А. Промтов, В.М. Червяков // Труды ТГТУ : сб. науч. ст. / Тамб. гос. техн. ун-т. – Тамбов, 2000. – Вып. 6. – С. 150 – 160.
38. Червяков, В.М. Изменение площади проходного сечения модулятора роторного аппарата // В.М. Червяков, А.В. Вахлис // Труды ТГТУ : сб. науч. ст. / Тамб. гос. техн. ун-т. – Тамбов, 2001. – Вып. 8. – С. 84 – 89.
39. Червяков, В.М. Проходное сечение модулятора роторного аппарата при малых зазорах между ротором и статором / В.М. Червяков, А.В. Вахлис, Д.В. Глазатов // Труды ТГТУ : сб. науч. ст. / Тамб. гос. техн. ун-т. – Тамбов, 2002. – Вып. 11. – С. 21 – 24.
40. Емцев, Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1987. – 440 с.
41. Повх, И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Машиностроение, 1976. – 502 с.
42. Червяков, В.М. Нестационарное течение жидкости во вращающихся каналах роторного аппарата / В.М. Червяков, В.И. Галаев, А.А. Коптев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2000. – Т. 6. – № 4. – С. 611 – 616.
43. Червяков, В.М. Нестационарное течение идеальной сжимаемой среды в каналах роторного аппарата / В.М. Червяков, Ю.В. Воробьев // Теоретические основы химической технологии. – 2005. – Т. 39. – № 1. – С. 65 – 71.
44. Червяков, В.М. Подобие процессов нестационарного течения жидкости в модуляторе роторного аппарата / В.М. Червяков, Ю.В. Воробьев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2002. – Т. 8. – № 4. – С. 618 – 622.
45. Гликман, Б.Ф. Нестационарные течения в пневмогидравлических цепях / Б.Ф. Гликман. – М. : Машиностроение, 1979. – 256 с.
46. Нарик, В.Х. Кавитация в отверстиях и ее влияние на смешение распыляемых струй / В.Х. Нарик // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1979. – Т. 98. – № 4. – С. 195 – 203.
47. Функ, Ж.Е. Неустановившиеся процессы в отверстиях и очень коротких трубках / Ж.Е. Функ, Д.Ж. Вуд, С.П. Чжао // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1972. – Т. 94. – № 2. – С. 245 – 253.
48. Щукин, В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил / В.К. Щукин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1980. – 240 с.
49. Зимин, А.И. О бифуркационных явлениях в нестационарных гидромеханических процессах / А.И. Зимин // Теоретические основы химической технологии. – 1997. – Т. 31. – № 3. – С. 238 – 242.
50. Коновер, Р.А. Ламинарное течение между вращающимся диском и параллельной неподвижной стенкой при наличии расхода в направлении от периферии к центру и без него / Р.А. Коновер // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1968. – Т. 90. – № 4. – С. 8 – 16.
51. Борисенко, А.И. Потери давления при течении жидкости во вращающемся канале, ось которого перпендикулярна оси вращения / А.И. Борисенко, О.Н. Костиков, В.И. Чумаченко // Инженерно-физический журнал. – 1975. – Т. 29. – № 6. – С. 1024 – 1030.
52. Перельман, Р.Г. Гидравлическое сопротивление прямолинейных каналов в поле центробежных сил // Р.Г. Перельман, В.И. Поликовский // Известия АН СССР, ОТН. – 1956. – № 10. – С. 150 – 153.
53. Лепендин, Л.Ф. Акустика / Л.Ф. Лепендин. – М. : Высшая школа, 1978. – 448 с.
54. Годунов, С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М. : Наука, 1971. – 416 с.
55. Чугаев, Р.Р. Гидравлика (техническая механика жидкости) / Р.Р. Чугаев. – Л. : Энергоиздат, 1982. – 672 с.
56. Попов, Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы / Д.Н. Попов. – М. : Машиностроение, 1982. – 240 с.
57. Баранов, Д.А. Расчет сепарационных процессов в гидроциклонах / Д.А. Баранов, А.М. Кутепов, М.Г. Лагуткин // Теоретические основы химической технологии. – 1996. – Т. 30. – № 2. – С. 117 – 123.
58. Соколов, В.И. Центрифугирование / В.И. Соколов. – М. : Химия, 1976. – 182 с.
59. Холин, Б.А. Центробежные и вибрационные грануляторы плавов и распылителей жидкости / Б.А. Холин. – М. : Машиностроение, 1977. – 182 с.
60. Богданов, В.В. Эффективные малообъемные смесители / В.В. Богданов, Е.И. Христофорв, Б.А. Клоцунг. – Л. : Химия, 1989. – 224 с.
61. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1978. – 736 с.
62. Плотников, В.А. Вихревой поток между пористыми цилиндрами / В.А. Плотников, О.А. Трошкин // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2000. – № 6. – С. 16 – 19.
63. Волк, А.М. Трение вязкой жидкости в пространстве между движущимися проницаемыми поверхностями / А.М. Волк // Инженерно-физический журнал. – 1993. – Т. 65. – № 2. – С. 152 – 158.
64. Di Prima, R.C. Flow between rotating cylinders / R.C. Di Prima, I.T. Stuart // Trans. ASME. – 1972. – Vol. 94. – N 3. – P. 266 – 274.
65. Gupta, M. Unsteady flow of viscous incompressible fluid between two porous coaxial rotating cylinders / M. Gupta, M. Goyai // Ing. Journal Pure Appl. Meth. – 1972. – Vol. 3. – N 4. – P. 547 – 555.
66. Поникаров, С.И. Истечение жидкости из сопел во вращающуюся среду другой плотности / С.И. Поникаров, В.В. Кафаров // Теоретические основы химической технологии. – 1997. – Т. 31. – № 5. – С. 453 – 457.
67. Weinman, P.D. On the spin – up and spin – down of a rotating fluid / P.D. Weinman // J. Fluid Mech. – 1976. – Vol. 77. – № 5. – P. 685 – 694.
68. Червяков, В.М. Нестационарное течение жидкости в зазоре между ротором и статором / В.М. Червяков, В.И. Галаев, А.А. Коптев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2003. – Т. 9. – № 4. – С. 649 – 652.
69. Юрченко, А.В. Определение производительности рабочего элемента механического абсорбера с вращающимися конусами / В.А. Юрченко, А.А. Коптев, Г.С. Погосов // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1966. – № 12. – С. 14 – 15.

70. Червяков, В.М. Течение ньютоновской жидкости в зазоре между коническими проницаемыми поверхностями / В.М. Червяков, А.А. Коптев // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79. – № 2. – С. 92–98.
71. Karman, Th. Uber lamunare und turbulente Reibung / Th. Karman // Zamm. – 1921. – № 1. – P. 233–252.
72. Кокушкин, О.А. О расчете мощности ротационных аппаратов / О.А. Кокушкин, А.А. Барам, И.С. Павлушенко // Журнал прикладной химии. – 1969. – Т. 42. – № 8. – С. 1793–1798.
73. О гидромеханических закономерностях работы роторно-пульсационных аппаратов / П.П. Дерко [и др.] // Теоретические основы химической технологии. – 1973. – Т. 7. – № 1. – С. 123–125.
74. Иванец, Г.Е. Энергетическая характеристика роторно-пульсационного аппарата / Г.Е. Иванец, В.А. Плотников, П.В. Плотников // Журнал прикладной химии. – 2000. – Т. 73. – № 9. – С. 1511–1514.
75. Червяков, В.М. Определение энергозатрат в роторных аппаратах / В.М. Червяков, А.А. Коптев // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 4. – С. 10–12.
76. Koptev, A.A. Flussigkeitsstromung in den zentrifugalfeldern unter Wirkung der sich drehenden Scheiben. Problem von Th. Karman / A.A. Koptev // Transaction of TSTU. – Vol. 1. – N 1-2. – P. 65–74.
77. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / гл. ред. И.П. Гальямина. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.
78. Рамамурти, А.С. Степенная зависимость кавитационной эрозии и шума от скорости потока / А.С. Рамамурти, П. Бхаскаран // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1979. – Т. 101. – № 1. – С. 188–195.
79. Шаин, Д.Л. Шум и эрозионное действие авторезанансных кавитационных струй / Д.Л. Шаин, П. Курбьер // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – Т. 110. – № 3. – С. 317–328.
80. Ильичев, В.И. О соотношении акустических шумов и эрозии в гидромеханической кавитации / В.И. Ильичев, Г.Н. Кузнецов // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179, В.4. – С. 809–812.
81. Cavitating and Structured Jets for Mechanical Bits to Increase Drilling Rate / V.E. Johnson [et al.] // ASME, Journal of Energy Resources Tehology. – 1984. – Vol. 106. – P. 282–294.
82. Флинн, Г. Физика акустической кавитации / Г. Флинн // Физическая акустика. – М. : Мир, 1967. – Т. 1, Ч. Б. – С. 7–138.
83. Холл, Ж.В. Кавитационный гистерезис / Ж.В. Холл, А.Л. Тристар // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1966. – Т. 88. – № 1. – С. 159–171.
84. Холл, Ж.В. Кавитационное исследование различных типов ограниченной кавитации при обтекании несжимаемых тел / Ж.В. Холл, Ж.А. Керрол // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1981. – Т. 103. – № 3. – С. 108–119.
85. Холл, Ж.В. Зародыши и возникновение кавитации / Ж.В. Холл // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1970. – Т. 92. – № 4. – С. 12–22.
86. Смородов, Б.А. Экспериментальное исследование кавитации в вязких жидкостях : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук // Б.А. Смородов. – М., 2003. – 19 с.
87. Драпезо, Б.Н. Взаимодействие и изучение сферических пульсирующих пузырьков в жидкости / Б.Н. Драпезо, А.Н. Иоффе // Симпозиум по физической акустике гидравлических явлений : тр. симп. / Сухум. гос. ун-т. – Сухуми, 1977. – С. 126–132.
88. Козырев, С.П. О захлопывании кавитационных каверн, образованных электрическим разрядом в жидкости / С.П. Козырев // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 3. – С. 568–571.
89. Козырев, С.П. Гидроабразивный износ металлов при кавитации / С.П. Козырев. – М. : Машиностроение, 1971. – 240 с.
90. Немчин, А.Ф. Новые технологические эффекты теплопереноса при использовании кавитации / А.Ф. Немчин // Промышленная теплотехника. – 1997. – Т. 19. – № 6. – С. 39–47.
91. Акуличев, В.А. Пульсация кавитационных полостей / В.А. Акуличев // Физика и техника мощного ультразвука. Мощные ультразвуковые поля. – М. : Наука, 1968. – С. 129–166.
92. Flynn, H.G. Cavitation Dynamics. 1. A mathematic formulation / H.G. Flynn // J/ Accust. Soc. Am. – 1975. – Vol. 57. – N 6. – P. 1. – P. 1379–1396.
93. Flynn, H.G. Cavitation Dynamics. 2. Free publications and modeles for cavitation bubbles / H.G. Flynn // J. Accust. Soc. Am. – 1975. – Vol. 58. – N 6, P. 1. – P. 1160–1170.
94. Neppairas, E.A. Accustic Cavitation / E.A. Neppairas // Physycs Reports. – 1980. – Vol. 61. – N 3. – P. 159–251.
95. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1973. – 847 с.
96. Исакович, М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 459 с.
97. Червяков, В.М. Кавитационные явления в газожидкостной среде / В.М. Червяков, В.Ф. Юдаев // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2004. – № 4. – С. 73–77.
98. Червяков, В.М. Растворение твердого в жидкости и диспергировании жидкости в длинноканальном роторном аппарате с модуляцией потока : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / В.М. Червяков. – М., 1982. – 16 с.
99. Биглер, В.И. Влияние величины зазора на гидроакустические характеристики гидросирены // В.И. Биглер, В.Н. Лаврентчик, В.Ф. Юдаев // Акустический журнал. – 1977. – Т. 23. – № 3. – С. 356–362.
100. Юдаев, В.Ф. Об акустической кавитации в гидродинамических сиренах / В.Ф. Юдаев // Акустика и ультразвуковая техника. – Киев : Техника, 1983. – С. 13–18.
101. Серова, М.А. Методика расчета роторного аппарата с модуляцией потока / М.А. Серова, В.Ф. Юдаев // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2003. – № 6. – С. 3–7.
102. Юдаев, В.Ф. Площадь проходного сечения диафрагмы модулятора роторного аппарата / В.Ф. Юдаев, Л.В. Чичева-Филатова, В.А. Алексеев // Известия вузов. Машиностроение. – 2004. – № 11. – С. 35–39.