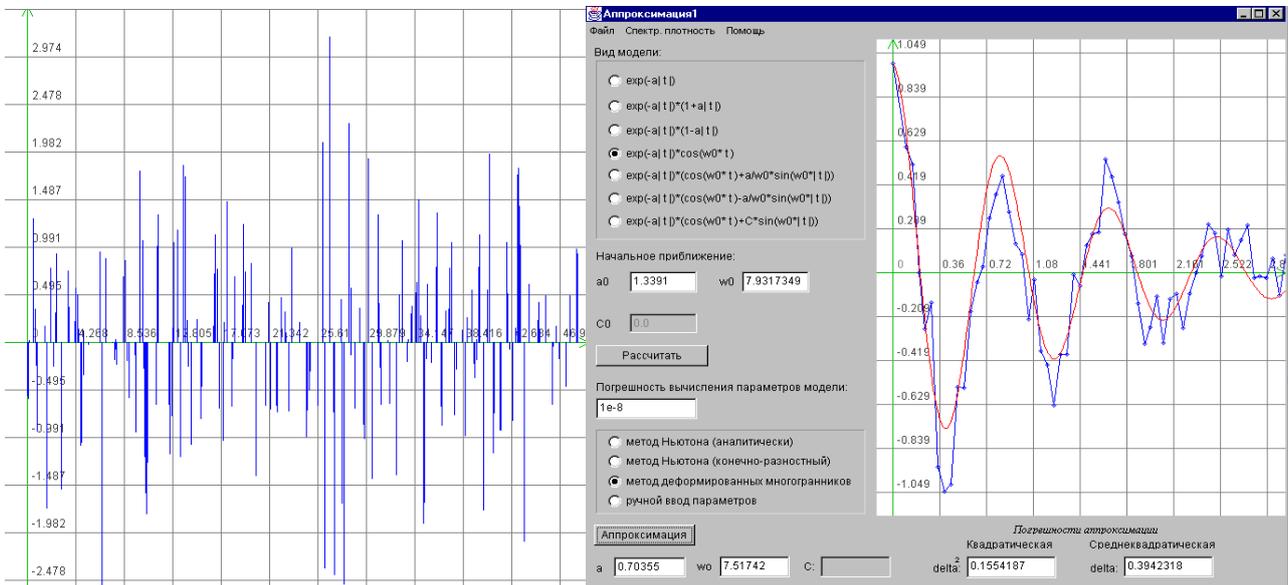


С.А. Прохоров

ПРИКЛАДНОЙ АНАЛИЗ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ



Самара 2001

Об авторе



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 183 научных трудах, в том числе, 10 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

ББК 32.965

П 3

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор Сойфер В.А.;

д.ф.-м.н., профессор Жданов А.И.

Прохоров С.А.

П 3 Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов

Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001, 375 с.

ISBN 9965-01-959-2

Рассматриваются методы и алгоритмы, описания неэквидистантных временных рядов, случайных потоков событий.

Анализируются методы, алгоритмы анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов и потоков событий, основанные на применении классического, аппроксимативного подходов, а также с использованием интервальной корреляционной функции.

Рассматриваются задачи вторичной обработки неэквидистантных временных рядов, включающие: идентификацию случайных процессов по виду функциональной характеристики, аппроксимацию законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями, представляющими собой как функции заданного вида, так и ортогональные функции Лагерра.

Рассматриваются вопросы аппаратурной, аппаратно-программной и программной реализации разработанных алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов, а также аппроксимации функциональных характеристик, даются рекомендации по расчёту параметров разработанных средств и программного обеспечения.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для аппроксимативного анализа функциональных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Рассматриваются особенности имитационного моделирования неэквидистантных временных рядов и алгоритмов оценивания их вероятностных характеристик.

Предназначена для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по основам прикладного анализа неэквидистантных временных рядов.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары».

ББК 32.965

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П 2402000000
00 (05) – 01

ISBN 9965-01-959-2

© Самарский научный центр Российской

академии наук, 2001

© Самарский государственный
аэрокосмический университет

© Прохоров С.А., 2001

СОДЕРЖАНИЕ	Стр.
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	7
ПРЕДИСЛОВИЕ	9
ВВЕДЕНИЕ	11
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	18
1.1. Основные понятия и определения	18
1.2. Математическое описание случайных потоков событий	23
1.3. Типовые модели неэквидистантных временных рядов	36
2. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	53
2.1. Основные понятия и определения	53
2.2. Применение классических алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов	61
2.2.1. Оценка вероятностных характеристик без восстановления пропущенных отсчётов в промежуточных точках	61
2.2.2. Оценка вероятностных характеристик с восстановлением пропущенных отсчётов в промежуточных точках	62
2.2.3. Оценка вероятностных характеристик с автоматическим восстановлением пропущенных отсчётов в промежуточных точках	64
2.3. Метод и алгоритмы корреляционного анализа неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции	69
2.4. Аппроксимативный метод и алгоритмы измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов	79
2.5. Дескрипторный метод анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов	86
3. АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	90
3.1. Основные понятия и определения	90
3.2. Анализ погрешностей неадекватности результатов измерений	95
3.3. Статистические погрешности	102
3.4. Погрешность от конечности числа каналов	108
3.5. Погрешность дискретизации	109
3.6. Погрешность квантования	110
3.7. Погрешность конечной разрядности процессорного статистического анализатора	113
4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗАТОРЫ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	115
4.1. Особенности проектирования статистических анализаторов	115
4.2. Аппроксимативные статистические анализаторы	123
4.2.1. Аппроксимативный коррелометр	123
4.2.2. Коррелометр с автоматическим восстановлением промежуточных отсчётов и сдвиговой организации памяти	126
4.2.3. Аппроксимативный полярный коррелометр	132

4.3.	Интервальные коррелометры	136
4.3.1.	Интервальный коррелометр с усреднением по времени	136
4.3.2.	Взаимный интервальный коррелометр с усреднением по времени	139
4.3.3.	Взаимный интервальный коррелометр с усреднением по множеству реализаций	142
4.4.	Коррелометр на базе интервального коррелометра со сдвиговой организации памяти	146
4.5.	Многофункциональный коррелометр со сдвиговой организацией памяти	148
4.6.	Коррелометр на базе интервальной корреляционной функции с циркуляционной организацией памяти	151
4.7.	Коррелометр на базе интервальной корреляции с циркуляционной организацией памяти с кратным интервалом дискретизации	155
4.8.	Многофункциональный структурный анализатор	159
4.9.	Многофункциональный полярный коррелометр на базе интервальной корреляционной функции	164
4.10.	Устройство для определения моментов k -го порядка	169
5.	ПРОЦЕССОРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗАТОРЫ	172
5.1.	Интервальный коррелометр	172
5.2.	Взаимный интервальный коррелометр	174
5.3.	Многофункциональный коррелометр	176
5.4.	Многофункциональный структурный анализатор	179
5.5.	Полярный коррелометр	181
5.6.	Программное обеспечение процессорных статистических анализаторов	181
5.7.	Обобщенная методика инженерного расчёта статистических анализаторов	186
6.	АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕ-ЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	187
6.1.	Основные понятия и определения	187
6.2.	Аппроксимация законов распределения	190
6.2.1.	Критерии согласия	193
6.2.2.	Идентификация законов распределения	196
6.2.3.	Метод моментов	200
6.2.4.	Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями	203
6.2.5.	Аппроксимация функций распределения вероятностей параметрическими моделями	207
6.3.	Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов	211
6.3.1.	Идентификация корреляционных функций	214
6.3.2.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона	217
6.3.3.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)	228

6.3.4.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника	232
6.3.5.	Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра	237
6.3.6.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями	247
6.3.7.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра	250
6.4.	Аппроксимация спектральных плотностей мощности	253
7.	АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО–СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	263
7.1.	Оценка обобщенных корреляционных характеристик	263
7.1.1.	Оценка показателя колебательности	263
7.1.2.	Оценка интервала корреляции	265
7.1.3.	Оценка моментов корреляционных функций	270
7.1.4.	Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции	271
7.2.	Оценка обобщенных спектральных характеристик	272
8.	АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	276
8.1.	АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	276
8.1.1.	Описание подсистем	276
8.1.2.	Описание интерфейса системы	279
8.1.3.	Порядок работы с системой	288
8.2.	Аппроксимативный анализ авто корреляционно-спектральных характеристик	290
8.2.1.	Программная реализация	292
8.3.	Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик	308
8.4.	Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря	316
8.5.	Корреляционный анализ параметров течения	325
9.	ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	327
9.1.	Основные понятия и определения	327
9.2.	Исследование характеристик неэквидистантных временных рядов	330
9.3.	Анализ составляющих методической погрешности, образующих полную группу	333
9.4.	Анализ составляющей погрешности, обусловленной конечной разрядностью процессорного статистического анализатора	339
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	343
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	345
	ПРИЛОЖЕНИЯ	355
П. 1.	Типовые законы распределения	355
П. 2.	Характеристические функции	361
П. 3.	Характеристики типовых законов распределения ($P_d=0,999$)	363

П. 4.	Таблица χ^2 распределения	366
П. 5.	Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова	366
П. 6.	Параметрические модели корреляционных функций	367
П. 7.	Ортогональные функции Лагерра	370
П. 8.	Обобщенные спектральные характеристики	371
П. 9.	Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.	373

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
ИП - измерительный преобразователь (датчик);
К - коммутатор;
КФ- корреляционная функция;
М - количество дифференциальных коридоров;
МУ - масштабирующее устройство;
МУ - множительное устройство;
НКФ - нормированная корреляционная функция;
ПО - процессор обработки;
УУ - усредняющее устройство;
 $C_x(J)$ - интервальная корреляционная функция;
d - параметр усреднения (время T, совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 $\hat{\sigma}_x$ - оценка дисперсии;
ent[] - операция взятия целой части числа;
 $F\{ \}$ - функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;
 $|F''(x)|_{\max}$ - максимум модуля второй производной функции распределения;
 $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение плотности распределения вероятностей;
 $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение функции распределения вероятностей;
 $f_x(x)$ - плотность распределения вероятностей;
 $F_x(x)$ - функция распределения вероятностей;
g[] - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;
 $K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 K_a - коэффициент асимметрии;
 K_ε - коэффициент эксцесса;
 K_ϕ - коэффициент формы;
 $K_x(t, t)$ - корреляционная функция случайного процесса;
 $K_x(\tau)$ - корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K_{xy}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция;
 K_{xy} - корреляционный момент;
 $L_k(\tau, \alpha)$ - ортогональная функция Лагерра k-го порядка;
 $M[]$ - оценка математического ожидания;
 M_e - медиана;
 M_o - мода;
 $\hat{\mu}_x$ - оценка математического ожидания;
 \hat{f}_j - частота попадания анализируемой случайной величины в j-ый дифференциальный коридор;
 $P_x(\tau)$ - полярная (знаковая) корреляционная функция;
 $R_x(\tau)$ - релейная корреляционная функция;
 S_d – оператор усреднения;
Sign u - знаковая функция.

$S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{xH}(\omega)$ - нормированная спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_{xy}(\omega)$ - взаимная спектральная плотность мощности;
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$ - реализация случайного процесса;
 $x_j(t)$ - j-ая реализация случайного процесса;
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - параметры аппроксимирующего выражения;
 α_k - начальный момент k-го порядка;
 β_k - коэффициент разложения ортогонального ряда;
 χ - коэффициент вариации;
 Δ - погрешность аппроксимации;
 δ - погрешность аппроксимации;
 δ_{ji} - индикатор состояния;
 $\delta(t)$ - δ -функция Дирака;
 Δt_{ji} - интервал дискретизации;
 Δu - шаг квантования по уровню;
 $\Delta \omega_\phi$ - полоса пропускания фильтра;
 $\Delta \omega_c$ - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 Δx - ширина дифференциального коридора;
 $\gamma_{см}$ - погрешность от смещенности оценки;
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$ - допустимые значения погрешностей;
 γ_m - методическая статистическая погрешность;
 η - пикфактор;
 μ - показатель колебательности;
 μ_k - центральный момент k-го порядка;
 $\bar{\Theta}$ - вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\Theta[X(t)]$, Θ - измеряемая вероятностная характеристика;
 $\mathfrak{E}_{cp}[X(t)]$ - средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\mathfrak{E}_j[X(t)]$ - j-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\mathfrak{E}_t[X(t)]$ - t-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\mathfrak{E}[X(t)]$ - оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\rho_x(t, t')$ - нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_x(\tau)$ - нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ - взаимная нормированная корреляционная функция;
 ρ_{xy} - коэффициент корреляции;
 τ_k - интервал корреляции;
 $\tau_{k max}$ - максимальный интервал корреляции;
 $\bar{\Omega}$ - вектор информативных параметров объекта исследований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография написана для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по методам, алгоритмам и аппаратно-программным средствам анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии автора.

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГТУ, СГАУ, а также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович», на математическом факультете Загребского университета, международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете.

Первый раздел, посвящен математическому описанию случайных потоков событий, неэквидистантных временных рядов. В нём приводятся основные модели неэквидистантных временных рядов и их характеристики, используемые в дальнейших разделах.

Во втором разделе рассматриваются методы и алгоритмы статистических измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. Анализируются возможности применения классических алгоритмов оценивания, как без учёта восстановления промежуточных отсчётов, так и с их восстановлением. Особое внимание уделяется специальным алгоритмам, оперирующим лишь существенными отсчётами и соответствующими им меткам времени.

В третьем разделе анализируются методические погрешности результатов оценивания и их составляющие, образующие полную группу погрешностей.

Принципы построения и особенности проектирования специализированных статистических анализаторов рассматриваются **в четвертом разделе**. В нём же приводятся описания статистических анализаторов для оценивания разнообразных вероятностных характеристик, реализующих разработанные методы и алгоритмы, рассмотренные во втором разделе.

В пятом разделе анализируются особенности построения процессорных статистических анализаторов, приводится обобщенная методика инженерного расчёта статистических анализаторов.

В шестом разделе рассматриваются вопросы аппроксимации функциональных характеристик неэквидистантных временных рядов: законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности.

Седьмой раздел посвящен аппроксимативному анализу обобщенных корреляционно-спектральных характеристик.

В восьмом разделе описываются автоматизированные информационные системы для аппроксимативного анализа вероятностных характеристик временных рядов, включая неэквидистантных.

В девятом разделе рассматриваются вопросы применения имитационного моделирования для исследования неэквидистантных временных рядов и алгоритмов оценивания их вероятностных характеристик.

В разработке и моделировании аппаратно-программных средств на разных этапах работы принимали участие аспиранты и студенты указанных кафедр, выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Батищев В.И., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г., Зеленко Л.С., Дмитриева Е.В., Крупец Н.Г., Кудрин К.Е., Мирзоев Р.К., Снигерева-Давыденко Л.Б., Сухинин В.П., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д., Иващенко А.В. и многие другие.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, критические замечания, которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает своим соавторам, а также академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Виттиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф Вайде (Венгрия)- за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И, профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту д.ф-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании монографии оказала инженер кафедры «Информационные системы и технологии» СГАУ Муравьева Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

Большую благодарность автор выражает директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание монографии в Казахстане.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационных систем и технологий», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp @ smr. ru

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов.

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

Для проведения экспериментов применяются разнообразные технические средства, построенные, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Современные динамические системы, технологические процессы описываются большим количеством разнообразных параметров, измерение и обработка которых невозможны без применения статистических методов исследования.

Основой для построения модели объекта исследования является измерительная информация. Под измерительной информацией понимается совокупность сведений о физической величине, полученной в результате измерения.

Стремление к простоте математического описания и технической реализации средств для получения и обработки измерительной информации приводит к необходимости представления исследуемых процессов в виде регулярных временных рядов, отсчеты которых следуют через равные интервалы времени, т.е. $\Delta t_0 = t_{i+1} - t_i = \text{const}$.

Однако при решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэвидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji} (t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j} \quad (\text{B.1})$$

где $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \mathbf{random}$;

j – номер реализации случайного процесса.

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэвидистантных временных рядов приведены на рис. В.1.

Приведем, например характерные задачи инженерно-гидрометеорологических изысканий, целью которых является обеспечение необходимой гидрометеорологической информацией и расчетными параметрами проектирования и строительства нефтегазопромысловых гидротехнических сооружений, в том числе - поисково-разведочных работ [67].



Рисунок В.1. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов

там наблюдений со специализированных судов.

Для обработки и анализа данных измерений исследуемых параметров применяются разнообразные методики, описанные, например, в [90], предполагающие наличие качественных исходных данных в виде регулярных временных рядов измеренных значений. Однако по ряду причин данные измерений имеют следующие особенности.

Так, при установлении закономерностей вертикальной структуры скоростей течений и оценки ее временной изменчивости, проводимых с помощью АЦИТТ (автономный цифровой измеритель течения, температуры, электропроводности воды, глубины погружения [83]) на АБС, установленных на полигоне в тропической зоне Тихого океана во время экспедиционных работ НИС «Профессор Храмов» (4 рейс), «Океан» (39 рейс), «Академик Королев» (40, 42 рейсы), НИСП «Георгий Ушаков» (44 рейс) обнаружено [89]:

- при заданной дискретности измерений (например, через 15 мин.) результаты перфорации данных содержат пропуски. В качестве примера в таблице В.1 приведены количественные характеристики длины регистрации и пропусков, из которой видно, что эта погрешность измерений приводит к потере от 1 до 40% исходной информации. Кроме того, из-за стохастичности времени пропусков в данных ряд измеренных значений становится неэквидистантным;
- из-за технических причин регистрации исходных данных во временном ряду наблюдаются выбросы. Статистические данные о количестве выбросов в исходных данных приводятся в таблице В.2;

В состав морских инженерно-гидрометеорологических изысканий, представляющих собой сложную комплексную проблему, входят ряд этапов, требующих привлечения специалистов в области статистических измерений, автоматизации научных исследований [67]:

- сбор и обработка имеющейся информации: гидрометеорологических справочников, ежегодников и ежемесячников, атласов, материалов аэрофотосъемок, топографических съемок и промерных работ, отчетов и других материалов;
- обработка данных наблюдений и расчета характеристик режима.

Основными источниками информации при наблюдениях являются береговые посты, гидрологические разрезы, рейдовые станции, а также данные, получаемые с помощью автоматических буйковых станций (АБС) и дистанционных методов, уточняемых по результа-

- ряды исходных данных содержат значительную шумовую составляющую, уровень которой может существенно затушевывать закономерности пространственной и временной изменчивости скоростей течений.

При определении сезонной изменчивости гидрологических параметров: кислорода (O_2), температуры (t°), солености (S), плотности (σ), - полученных с помощью буйковой станции ВУ-5, расположенной в Балтийском море, исходные данные являются неэквидистантными временными рядами, представляющими собой результаты измерений параметров на различных глубинах (0-90 м) с 1909 по 1983г. (таблица В.3). Следует отметить, что минимальный интервал дискретизации равен одному дню. Из анализа таблицы В.3 видно, что большая часть информации (99%) об измеряемых параметрах безвозвратно потеряна.

Рассмотренные случаи не являются единственными. Неэквидистантными временными рядами представляются результаты измерений при решении разнообразных задач. К ним относятся, например [4, 24, 37, 52, 69, 104-105, 125-126]:

- статистические измерения с применением адаптивных систем сбора и обработки информации;

- учет «дрожания» при датировании;
- неточность датирования в многоканальных системах;
- дискретизация с пропусками, сбоями наблюдений;
- стохастическое и квазистохастическое кодирование;
- потоки отсчетов в цифровых системах передачи информации, использующих коды с обнаружением ошибок, в синхронных многоканальных системах передачи информации с временным уплотнением, в асинхронно-адресных системах связи, в системах передачи информации с многостанционным доступом, в спутниковых системах связи;

- передача информации по каналу объект-ЭВМ;
- принципиальная невозможность получения равномерных отсчетов в ходе проведения эксперимента при теплофизических, океанологических и океанографических исследованиях и т.д.

Часто нерегулярность вносится в процесс дискретизации **неумышленно**, независимо от желания исследователя, например, при нарушении условий нормального функционирования системы, при использовании методов импульсной модуляции, приводящих к флуктуации интервала дискретизации, но может вводиться и **преднамеренно** с целью получения новых эффектов, ценных для практических приложений.

К ним относятся [4, 24, 29, 108]:

- расширение области применения знаковых методов;
- применение метода статистических испытаний в аппаратном анализе;
- измерение временных интервалов в наносекундном диапазоне;
- упрощение технической реализации;
- уменьшение ошибок вероятностного округления чисел при выполнении вторых арифметических операций;
- рандомизация квантования и фазовых сдвигов;
- нерегулярная дискретизация исследуемых случайных процессов, приводящая к сокращению объема измерительной информации, достаточной для его восстановления, в случае необходимости, с заданной погрешностью.

Характеристика информации о скоростях течений (по данным АЦИТТ)

Таблица В.1

Научно-исследовательское судно	Год	№ АБС	Горизонт . м	Количество циклов измерений N	Общее количество пропущенных данных (циклов)	
					n	%
«Океан»	1985	1	50	1094	57	5,2
			200	1094	74	7,2
			500	1094	35	3,3
			1000	1094	4	0,4
			2000	1094	72	6,6
			3000	970	14	1,4
			4800	1094	196	17,7
		2	50	984	186	18,9
			200	1143	71	6,2
			500	1143	27	2,4
			1000	1143	8	0,7
			2000	1142	82	7,2
			4800	1143	143	12,5
		3	50	806	4	0,5
			100	807	109	13,5
			200	806	57	7,1
			500	806	283	35,1
			2000	806	437	54,2

Характеристики выбросов в измерениях скорости течений АЦИТТ

Таблица В.2

Научно-исследовательское судно	Год	АБС	Горизонт м.	Количество циклов измерений N	Количество выбросов (вверх) n ₁	Количество выбросов (вниз) n ₂
«Академик Королев»	1985	1	200	1199	3	2
			1000	2472	14	4
		2	200	2297	14	2
			300	2297	1	0
			500	2297	16	4
			1000	2297	11	4
			2000	2297	5	4
4000	2297	2	0			

Объём выборки и время измерения гидрологических параметров станции ВУ-5

Таблица В.3

Глубина параметр	0	10	20	40	50	60	70	80	90	Время измерения
O ₂	340	308	319	284	327	329	295	337	349	07.04.25 05.12.83
t ⁰ С	464	419	427	430	441	423	401	433	423	01.04.09 05.12.83
S	464	410	419	426	459	431	398	432	419	01.04.09 05.12.83
σ	257	240	253	261	264	263	241	262	243	01.04.09 27.09.83

Последний эффект особенно важен, так как приводит к [4, 37]:

- сокращению времени сеансов связи в адаптивных телеметрических системах;
- сокращению объема данных, подлежащих последующей обработке;
- уменьшению времени обработки данных;
- энергетическим выигрышам;
- уменьшению весов и габаритов аппаратуры сбора и передачи информации;
- возможности работы в реальном масштабе времени и т.д.

При таком способе представления информации исследователь, независимо от способа нерегулярной дискретизации, получает два массива выборочных данных: значений случайного процесса (существенных отсчетов) - $x_j(t_i)$ и соответствующих им меток или интервалов времени между существенными отсчетами - $t_{ji} / \Delta t_{ji}$.

В большинстве случаев это обстоятельство не позволяет применять классические алгоритмы оценивания и соответствующие им технические средства, принципиально ориентированные на обработку регулярных временных рядов.

С учетом особенностей представления данных, участвующих в формировании оценки измеряемой случайной величины, сформировались три основных направления статистических измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов:

- оценка вероятностной характеристики без учета нерегулярности временного ряда;
- оценка измеряемой величины с предварительным восстановлением неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках (точках регулярной дискретизации) с учетом модели и критерия восстановления;
- оценка измеряемой величины без восстановления неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках и с использованием только существенных отсчетов или соответствующих им меток времени.

Первые два направления ориентированы на применение классической теории оценивания и соответствующих ей классических алгоритмов и аппаратно-программных средств.

Третье - требует разработки новой теории описания неэквидистантных временных рядов, оценки их вероятностных характеристик, а также принципов построения и проектирования видов обеспечения и всего комплекса аппаратно-программных средств в целом.

Следует отметить, что различным вопросам статистических измерений неэквидистантных временных рядов посвящено большое количество публикаций как отечественных, так и зарубежных исследователей, в которых для частных моделей неравномерной дискретизации случайных процессов предлагаются и исследуются методы, алгоритмы и статистические анализаторы, построенные на базе средств вычислительной техники, для измерения (оценки) значений :

- моментных характеристик [147, 170];
- корреляционных функций [26, 147, 177];
- спектральных плотностей мощности [177, 187];
- функций и плотностей распределения вероятностей [147].

Однако учет индивидуальных особенностей измеряемой вероятностной характеристики, принятой модели неравномерной дискретизации, ограничивает область

применения результата, носит фрагментарный характер и не позволяет считать работу в этой области завершенной.

К сожалению, следует отметить, что в настоящее время отсутствует теоретический анализ методов статистических измерений вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации случайных процессов, методы синтеза алгоритмов, специализированных и процессорных аппаратно-программных средств, методика расчета их параметров, а также соответствующего программного обеспечения.

Таким образом, целью настоящей монографии является разработка основ теории, принципов построения и проектирования аппаратных, аппаратно-программных и программных средств статистических измерений неэквидистантных временных рядов (в дальнейшем средств).

Для достижения поставленной цели необходимо:

- исследовать математические модели неэквидистантных временных рядов и определить их характеристики;
- разработать классификацию, методы синтеза и алгоритмы оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов
- разработать методику и исследовать методические погрешности результатов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов;
- разработать принципы построения и методики расчета параметров средств оценки вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов;
- разработать программное обеспечение обработки неэквидистантных временных рядов, включая аппроксимативные методы анализа функциональных характеристик;
- провести экспериментальные исследования средств, с целью проверки основных положений теоретических исследований;
- разработать принципы и программные средства имитационного моделирования средств оценки вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов;
- разработать рекомендации по применению методов, алгоритмов и средств для решения различных прикладных задач, связанных с измерением и анализом неэквидистантных временных рядов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1.1. Основные понятия и определения

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$ с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:
 $\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta})$, используемое для построения искомой модели объекта;
5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а задачу 3 - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации: автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), информационно-измерительных систем (ИИС), процессорных измерительных систем (ПРИС), - является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений

соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

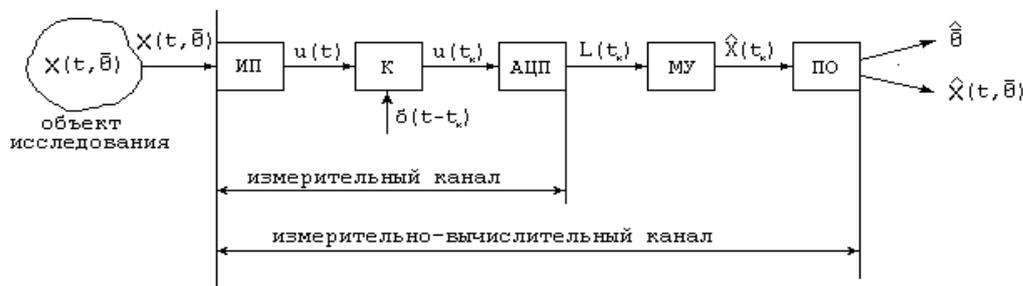


Рисунок 1.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. 1.1 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ставится в соответствие вполне определенное значение электрической величины: $x(t, \vec{\Theta}) \rightarrow u(t)$.

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \vec{\Theta}), \quad (1.1)$$

где $k = \text{const}$ - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между $u(t)$ и $x(t, \vec{\Theta})$ нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [33].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал $u(t)$ преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t-t_i) dt, \quad (1.2)$$

$$\text{где } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases} \text{ - } \delta\text{-функция Дирака.} \quad (1.3)$$

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = \text{const}$ - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = \text{random}$ - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровое преобразование, где последовательно подвергается процедурам **квантования** и **кодирования**.

Квантование - процедура отнесения непрерывного значения процесса $u(t_i)$ к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{ent} \left[\frac{|u(t_i)|}{\Delta u} + \lambda \right] \text{sign } u(t_i), \quad (1.4)$$

где $\text{ent}[\]$ - операция взятия целой части числа;

Δu - шаг квантования по уровню;

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении} \\ 0,5, & \text{при округлении} \end{cases}.$$

$$\text{sign } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0. \end{cases} \quad \text{- знаковая функция.} \quad (1.5)$$

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления $L(t_i)$ определяется выражением:

$$n = \log_2 \max |L(t_i)|. \quad (1.6)$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\epsilon(t_k) = \frac{L(t_k) \Delta u}{k}. \quad (1.7)$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса $x(t, \vec{\Theta})$. При этом возможны два подхода к решению задачи оценки $\vec{\Theta}$:

- в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_{Θ} оценивают вектор неизвестных параметров $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$;

- в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\epsilon(t, \vec{\Theta}) = A_s \{ \epsilon(t_k) \}$, записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$.

Основой для оценки любой вероятностной характеристики являются результаты измерения мгновенных значений реализации случайного процесса $x_j(t_i)$. Применяя последовательно к j -ой реализации случайного процесса две процедуры: дискретизацию по времени и квантование по уровню, - получим временной ряд мгновенных значений, подлежащий дальнейшим преобразованиям. Как правило, с целью упрощения процедуры обработки интервал дискретизации выбирают постоянным, т.е. $\Delta t_{ji} = \text{const}$.

Если $\Delta t_{ji} = \text{random}$, то временной ряд будет неэквидистантным. Отметим, что к неэквидистантным временным рядам приводит и «некачественная» регулярная дискретизация:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений [52];
- регулярная дискретизация с «дрожанием» [178].

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: массива мгновенных значений $\{x_{ji}\}$ и соответствующих им массива меток времени $\{t_{ji}\}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений $\{x_{ji}\}$ использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности $\{t_{ji}\}$ - математический аппарат теории потоков событий. Кроме того, это обстоятельство позволяет иногда рассматривать модели случайных процессов и потоков автономно.

Следует подчеркнуть, что независимо от формы представления результатов измерения, конечной целью исследований является получение требуемой оценки вероятностной характеристики исследуемого процесса. При этом неважно, как он представлен: регулярно или неэквидистантно.

Обозначим j -ую реализацию неэквидистантного временного ряда $x_j(t_i) = \{x_{ji}, t_{ji}\}$. Независимо от особенностей математического описания $\{x_{ji}\}$ и $\{t_{ji}\}$ неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

* характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.2);

* характеристики потока событий $\{t_{ji}\}$ полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.3).

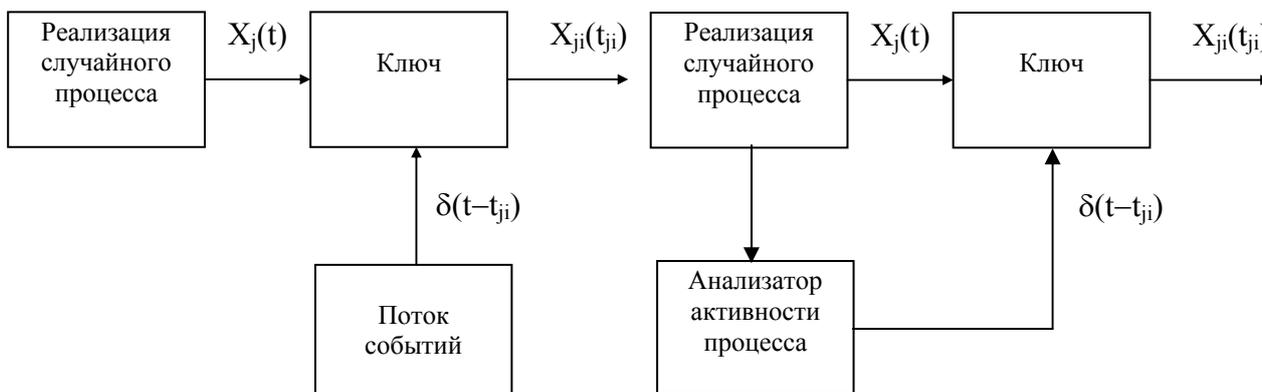


Рисунок 1.2. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 1.3. Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, независящая от желания исследователя, например, при океанологических исследованиях. Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя.

Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизацией располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так например, если $\Delta x_{ji} = \text{const}$, а $t_{ji} = \text{random}$, - то такая дискретизация называется спорадической [78]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Таким образом, математическое описание потоков событий, его характеристики зависят от способа нерегулярной дискретизации, особенно при преднамеренной дискретизации. К сожалению, этого нельзя сказать о непреднамеренной случайной дискретизации, характеристики которой зависят от особенностей проведения эксперимента. Единственным разумным выходом в сложившейся ситуации при построении модели является использование накопленной информации, полученной при решении других задач в данной предметной области.

В настоящее время известно большое количество работ, посвященных различным аспектам дискретного представления при неравномерной дискретизации случайных процессов [4, 37, 52, 150-203], в которых предложены различные классификации методов дискретизации, учитывающие модели входных сигналов, критерии приближения, способы введения неравномерности в дискретизацию и т.д.

Основным недостатком предложенных классификаций является отсутствие классификационного признака, указывающего на модель потока событий. Классификация, позволяющая выделить модели потоков событий при неравномерной дискретизации, представлена на рис.1.4.

Случайные потоки после дискретизации можно разбить на три группы:

$$1. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$2. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{const}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}; \end{cases} \quad (1.9)$$

$$3. \begin{cases} \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = \text{random}; \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}. \end{cases} \quad (1.10)$$

К первой группе относится равномерная дискретизация, ко второй - преднамеренная неравномерная дискретизация: идеальная спорадическая, адаптивно-временная полиномиальная дискретизация ($n=0$) (учет этого обстоятельства позволяет в ряде случаев упростить алгоритмы статистических измерений [26, 45, 108, 147,]). К третьей группе относится как преднамеренная неравномерная дискретизация: адаптивно-временная дискретизация и коммутация, стохастическая дискретизация, реальная спорадическая, так и непреднамеренная неравномерная дискретизация: пропуски, сбои, определяемая характером эксперимента и т.д.

Разнообразие способов неравномерной дискретизации, приводящее к этой группе моделей, позволяет считать этот способ представления наиболее общим и требующим наибольшего внимания.

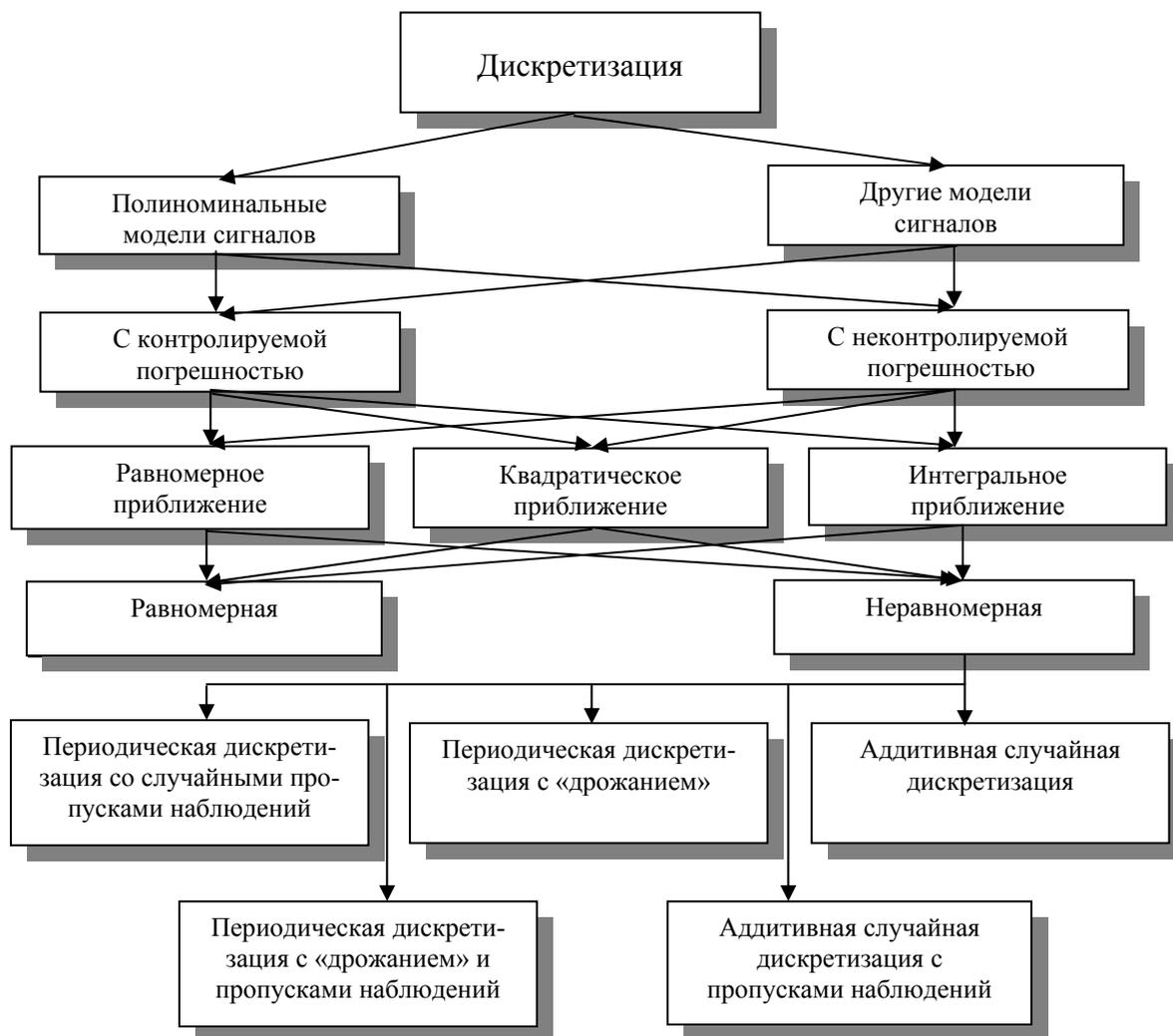


Рисунок 1.4. Классификация методов дискретизации

1.2. Математическое описание случайных потоков событий

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [52].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [52].

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(1-t, 1)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(1-t, 1)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.

Ординарным называется поток, для которого вероятность появления на малом участке δt , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

Последствием потока заключается в зависимости вероятности $P_k(1-t, 1)$ от распределения событий на оси времени вне интервала $(1-t, 1)$. Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [52], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [5, 15]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением посредством p -преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью p остается в потоке, а с вероятностью $q=1-p$ выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [52]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчётами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов $f_{\Delta t}(\Delta t)$ и функция распределения вероятностей интервалов $F_{\Delta t}(\Delta t)$ являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характе-

ристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [33, 114, 115].

Плотности распределения прямого V и обратного U времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [24, 52]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda[1 - F(t)], \quad (1.11)$$

где $F(t)$ - функция распределения интервала дискретизации;

λ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [3, 24, 34, 49, 52, 76-77, 82, 204, 206-207]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

Автокорреляция $C_x(t)$ определяет вероятность появления события в потоке X как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.12)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

Взаимная корреляция $C_{xy}(t)$ применяется в случае двух потоков событий X и Y и определяет вероятность наблюдения события в потоке Y как функцию времени после данного события в потоке X , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.13)$$

Функцию $C_{xy}(t)$ по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом, автокорреляция и взаимная корреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Определим ИКФ событий для конкретных практических случаев. При этом начнем со случайной последовательности, описываемой распределением Пуассона - простейшего потока. Корреляция событий в этом случае будет использована для распознавания системы и определения ее основных свойств.

Практическими интересными случаями являются [206]:

- системы с встроенными генераторами повторяющихся событий;
- системы с задержкой;
- системы с «мертвым» временем;

- периодические события, смещенные случайной девиацией;
- системы с буфером для одного и более событий;
- двойные стохастические пуассоновские процессы;
- разветвляющиеся стохастические процессы.

а) Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс описывает вероятность появления числа событий r в произвольном интервале длиной t :

$$P(r, t) = \left[(\lambda t)^r / r! \right] \exp(-\lambda t), \quad (r = 0, 1, \dots). \quad (1.14)$$

Пуассоновский процесс также дает распределение вероятностей интервалов t между событиями:

$$f(t) = P(r = 0, t) = \exp(-\lambda t).$$

ИКФ событий, основанная на определении (1.12) для пуассоновского процесса, равна среднему числу событий в dt :

$$\begin{cases} C_x(0) = 1; \\ C_x(0) = \lambda, \end{cases} \quad (1.15)$$

представлена на рис. 1.5 а).

б) Периодические события.

Для периодических событий выражение (1.12) приводит к:

$$\begin{cases} C_x(t) = 1, \text{ для } t = kT; \\ C_x(t) = 0, \text{ для } t \neq kT. \end{cases} \quad (1.16)$$

Результат представлен на рис. 1.5 б).

в) Периодические события, смещенные случайной девиацией («дрожание»).

В этой модели события должны появляться через регулярные интервалы, т.е. периодически, но они смещены относительно требуемого момента появления случайным образом.

Из выражения (1.12) следует, что

$$C_x(t + kT) = g(t) * g(t), \quad (1.17)$$

где $g(t)$ - плотность распределения вероятностей t («дрожание»);

*- операция нахождения композиции законов распределения.

Результат представлен на рис. 1.5 в).

г) Системы с «мертвым» временем.

Модель имеет соответствующее «мертвое» время [129]. После прихода входного события система пропускает это событие на выход и затем закрывается на фиксированное «мертвое» время T , например, на время обработки информации на ЭВМ. ИКФ выходного процесса может быть определена следующим образом [206].

Для $d < t < 2d$, используя выражения (1.12), (1.14), получим:

$$C_x(t)dt = P(1, dt)P(0, t-d) = f(t)P(0, t-d). \quad (1.18)$$

Для $2d < t < 3d$ интервал t может быть сформирован двумя способами.

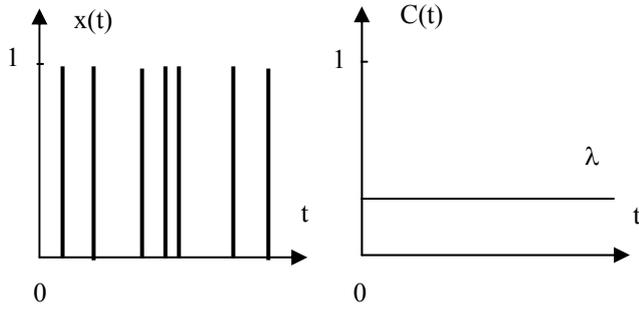
Первый способ:

$t = d + t_1$ с плотностью распределения вероятностей

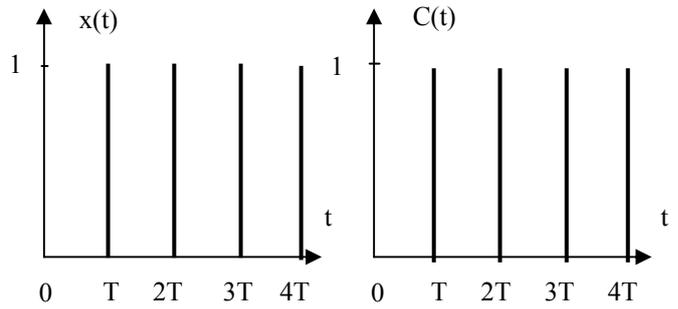
$$\varphi_1(t-d) = f(t). \quad (1.19)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(0, t-d)$.

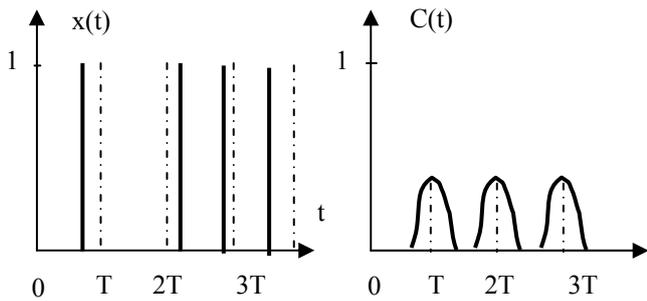
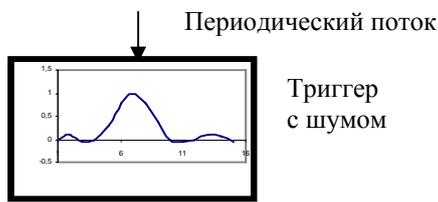
а) Пуассоновский поток



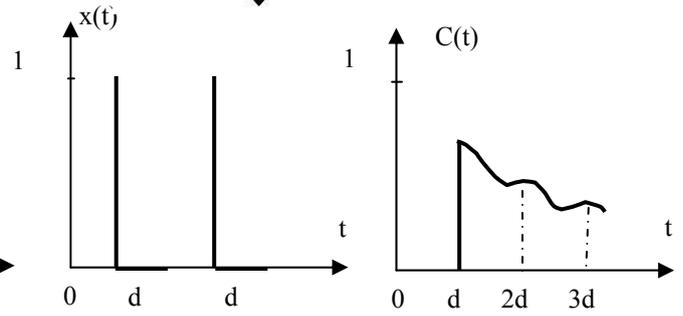
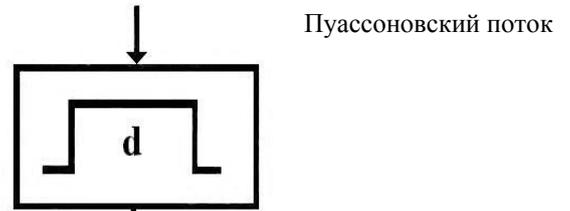
б) Периодический поток



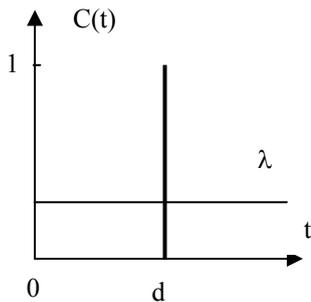
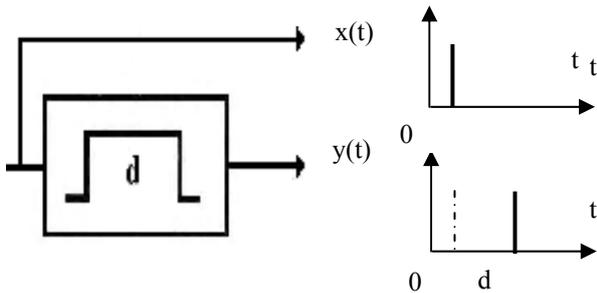
в) Периодический поток с «дрожанием»



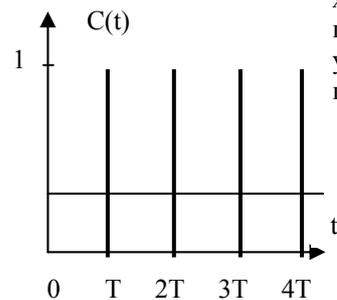
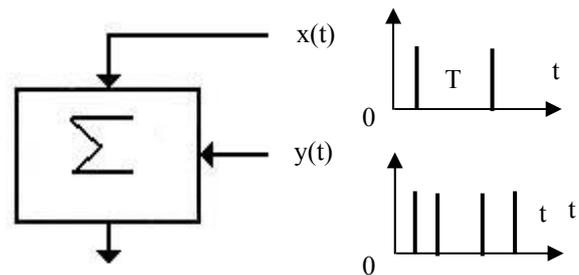
г) Система с «мертвым» временем



д) Взаимная корреляция



е) Суперпозиция



$x(t)$ – Пуассоновский поток;
 $y(t)$ – периодический поток.

Рисунок 1.5. Интервальные корреляционные функции

Второй способ:

$t = 2d + t_1 + t_2$ с плотностью

$$\varphi_2(t - 2d) = f(t) * f(t). \quad (1.20)$$

Вероятность такого способа формирования t равна $P(1, t - 2d)$.

Таким образом:

$$C_x(t)dt = P(0, t - d)f(t) + P(1, t - 2d)f(t) * f(t). \quad (1.21)$$

Обобщая выражение (1.21) для k способов формирования интервалов, получим:

$$C_x(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} P[k, t - (k + 1)d] [f(t) * * * \dots * f(t)]. \quad (1.22)$$

Следует отметить, что многократная композиция законов распределения Пуассона приводит к распределению Эрланга [52]. Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого случая представлена на рис. 1.5 г)

Аналогичным образом можно привести дополнительные примеры взаимодействия случайных последовательностей и систем.

Взаимная корреляция.

Более общим применением корреляционного анализа потоков событий являются случаи с несколькими потоками событий в системе. Случайные потоки могут наблюдаться в различных точках системы и не взаимодействовать друг с другом. В других случаях потоки «перемешиваются». Это явление получило название суперпозиции потоков [206].

В первом случае ВИКФ позволяет определить степень взаимозависимости потоков. На рис. 1.5 д) приведен пример системы с постоянной задержкой d в обработке информации при подаче на вход простейшего потока. Выражение (1.92) для рассматриваемого примера позволяет определить ВИКФ входного и выходного потоков в виде:

$$\begin{cases} C_{xy}(t) = 1, & \text{для } t = d; \\ C_{xy}(t) = \lambda, & \text{для } t \neq d, \end{cases} \quad (1.23)$$

что позволяет в случае необходимости величину задержки d .

Суперпозиция случайных потоков.

Во многих физических и инженерных случаях потоки событий представляют собой суперпозицию некоторых других потоков событий. Например, поток случайных прерываний, приходящий в процессор от нескольких источников. Если поток событий представляет собой смесь двух или нескольких потоков событий, его ИКФ будет равна сумме ИКФ индивидуальных потоков. Так на рис. 1.5 е) показана суперпозиция Пуассоновского и периодического потоков вместе с результирующей ИКФ. Если в ходе проведения эксперимента будет получена похожая ИКФ, то сравнив её с результатами рис. 1.5 е), можно сделать вывод о том, что периодический поток «погружен» в случайный поток.

Для потоков, рассмотренных в примерах 1.5 а) – 1.5 г), можно представить различные суперпозиции. ИКФ в этих случаях поможет различить составляющие потоки, их интенсивность и скорость. Кроме того, ИКФ может быть использована при моде-

лировании и измерении характеристик случайных потоков и процессов с нерегулярным интервалом дискретизации.

Приведем несколько примеров, связанных с функционированием вычислительных систем реального времени.

Сканирование

В вычислительных системах реального времени, основанных на сканировании, программа вычислений определяет время и порядок выполнения операций. Из-за того, что для обработки могут применяться различные алгоритмы, сканирование может представлять процесс, в котором появление событий планируется через регулярные интервалы времени, но благодаря различному времени обработки они будут смещены от времени расписаний. Следовательно, ИКФ процесса сканирования будет похожа на функцию, представленную на рис. 1.5 в). ИКФ в рассматриваемом примере отражает степень нерегулярности процесса сканирования.

Мультиплексирование.

При подключения множества источников информации к мультиплексору его выходной поток будет определяться суперпозицией входных потоков. В этом случае его ИКФ будет являться суммой составляющих ИКФ, как показано на рис. 1.5 е). Даже если составляющие потоки событий являются достаточно периодическими, результирующий поток может быть случайным. Был отмечен интересный факт для нервных клеток, когда нервные импульсы приходят по множеству волокон [64]. Последовательность нервных импульсов, формируемая в результате суперпозиции значительного числа довольно регулярных последовательностей, представляет собой случайную последовательность. ИКФ в этом случае определяет степень регулярности потока.

«Мертвое время».

Если время обработки события T имеет тот же порядок, что и средний интервал между событиями $1/n$, значительное число выходных событий будет потеряно. Потери за счет «мертвого» времени для многих практических случаев найдены Соучеком Б. [129]. Так, например, если «мертвое» время постоянно и равно T , то потери определяются выражением

$$g(T) = nT. \quad (1.24)$$

Выходная последовательность и его ИКФ представлены на рис. 1.5 г).

В измерительных системах реального времени, предназначенных для построения гистограммы исследуемого сигнала, потери «мертвого» времени не вносят искажения в гистограмму. Это объясняется тем, что при кодировании информации применяется импульсная модуляция и импульсы приходят случайным образом, а временные зависимости не учитываются. Ситуация значительно ухудшается при построении гистограмм временных интервалов. В таких системах «мертвое» время должно быть значительно меньше, чем среднее время между событиями потока.

Буферизация.

Если интервал между событиями короче, чем время обработки T , буфер запомнит второе событие, что, в свою очередь, уменьшит потерю событий [129]:

$$g_1(T) = nT - [1 - \exp(-nT)]. \quad (1.25)$$

Событие, запомненное в буфере, обрабатывается сразу после «мертвого» времени. Таким образом, буфер «сдвигает» события вдоль временной оси, формируя более регулярные интервалы. ИКФ в этом случае позволяет измерить степень регулярности временных интервалов.

Нейронные импульсы.

Поток нейронных импульсов записывается с помощью микроэлектродов [204]. Результатом анализа потока является ИКФ (корреляционная гистограмма), которая сравнивается с ранее полученными результатами, например, представленными на рис. 1.5, с целью построения наиболее адекватной модели потока. Как показали исследования, наиболее адекватной моделью потока нейронных импульсов является суперпозиция (см. рис. 1.5 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.5 а) и смещенного регулярного потока (см. рис. 1.5 в) [206]. ИКФ в этом случае помогла определить свойства модели рассматриваемой системы.

Коммуникация насекомых.

В работе [204] приведен интересный пример из жизни насекомых-сверчков. В спокойном состоянии периодичность посылок сообщений сверчка случайна. Но стоит их потревожить, как картина резко меняется- появляется некоторая закономерность в посылки их сообщений. Была проанализирована импульсная последовательность сигналов насекомых, используемая ими для коммуникации, и определена ИКФ интервалов между посылками сообщений этих насекомых. Экспериментальные результаты были сравнены затем с результатами, представленными на рис. 1.5. Адекватной моделью для этого случая является суперпозиция (см. рис. 1.5 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.5 а) и потока на выходе системы с фиксированным временем обработки, т. е. системы с «мертвым» временем (см. рис. 1.5 г). ИКФ, как и в предыдущем случае использовалась для построения модели системы.

Таким образом, в рассмотренных примерах для вычислительных систем реального времени и их основных функциональных блоков: сканеров, мультиплексоров, элементов задержки, процессоров обработки («мертвое» время), буферов и т. д.,- по результатам оценки ИКФ определялась модель неизвестного потока событий и строилась соответствующая вероятностная модель системы, через которую эти события прошли. Кроме того, ИКФ применялась для анализа и сравнения потоков событий в нейронных сетях и система поведения.

Было показано, что суперпозиция почти периодических потоков событий (мультиплексирование) приводит к появлению на выходе случайного потока. С другой стороны, процесс обработки, буферизация «сглаживают» случайный поток, преобразуя его в почти периодическую последовательность. Следует отметить, что интервальная корреляционная функция позволяет определить и скрытые модели в экспериментальных данных, а взаимная интервальная корреляционная функция - степень зависимости двух потоков событий.

Это важное обстоятельство: возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные функции, - позволяет применять их и для анализа неэквидистантных временных рядов.

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных:

$[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$ - массива мгновенных значений x_{ji} и соответствующих им моментов или интервалов времени $t_{ji} / \Delta t_{ji}$, фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений x_{ji} использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности t_{ji} - математический аппарат теории потоков событий [52].

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации (см. подраздел 3.2);
- закона распределения сумм интервалов, требуемые для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик (см. подраздел 3.2);
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности (см. подраздел 2.3);
- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;

- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия $k_{сж}$, характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ (см. например, [94]). Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с n -мерным интегрированием n -мерной плотности вероятности процессов при $n \rightarrow \infty$, может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [94]. В остальных же случаях авторы для конкретных способов неравномерной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения $f_{\Delta t}(\Delta t)$, $F_{\Delta t}(\Delta t)$.

Так, в [4] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля $n+1$ производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального $n+1$ раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля $n+1$ производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [4, 52, 69] в результате обработки большого экспериментального материала авторы делают вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.26)$$

где λ - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент λ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при $\alpha = 1$ распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda\Delta t), \quad (1.27)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [52].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [4, 69, 185].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями [110, 195].

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [33].

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов $\varphi_{\Delta t}(u)$ [114].

В этом случае характеристическая функция $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (1.28)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для $\varphi_{\Theta_s}(u)$, определим $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$ и $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$ [32].

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм L интервалов дискретизации на заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции $\tau_{k\max}$ [108].

$$\begin{aligned} P(L, \tau_{k\max}) &= P(\tau_{k\max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k\max}) = \\ &= F_{L-1}(\tau_{k\max}) - F_L(\tau_{k\max}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Значение L_{\max} , обеспечивающего выполнение условия (1.108) с вероятностью P_d , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k\max}) = 1 - P_d. \quad (1.30)$$

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$ без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме k интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (1.31)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина Θ_{jk} находится в диапазоне

$$J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2} :$$

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (1.32)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из k отсчетов, равна:

$$\begin{aligned} C_{xj}(J) &= C_{xj}(J\Delta\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.33)$$

В соответствии с определением (1.12) это и есть интервальная корреляционная функция.

При **преднамеренной неравномерной дискретизации** с целью упрощения аппаратной реализации сжатия данных используются полиномиальные модели восстановления нулевого и первого порядка (см. таблицу 1.1), требующие для реализации сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн - аппроксимации.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 1.1

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	Δt_0	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

В рассматриваемых полиномиальных моделях при $n = 0$ и $n = 1$ модели j -ой реализации случайного процесса на i -ом интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(m)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta_{ji}^* ; \tag{1.34}$$

$$x_{ji}^{(m)}(t) = \left(a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)} t \right) \delta_{ji}^* , \tag{1.35}$$

где $\delta_{ji}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. (1.36)

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:

$$a_{ji}^{(0)} = x_{ji} ; \tag{1.37}$$

2. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji} ; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji} , \end{cases} \tag{1.38}$$

где $\Delta_{ji} = \frac{x_{j1} - x_{ji}}{t_{j1} - t_{ji}}$, а $t_{j1} = t_{ji} + \Delta t_0$, $x_{j1} = x_{j1}(t_{j1})$, Δt_0 - интервал дискретизации процесса;

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \end{array} \right. \quad (1.39)$$

4. для «вверного» интерполятора первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}. \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Следующей важной характеристикой является минимальный интервал дискретизации, позволяющий восстановить случайный процесс по существенным отсчётам.

Эту характеристику необходимо определять в случаях, когда характеристики потока зависят от характеристик процесса: при адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации и т.д.

Если значение интервала принудительной дискретизации превышает минимальный, то возможны пропуски отсчетов, что, в свою очередь, приводит к увеличению методической погрешности оценки значений вероятностных характеристик.

Существуют различные приближенные методы определения минимального интервала дискретизации, требующие ту или иную априорную информацию о свойствах процесса, модели процесса на интервале дискретизации и ее параметрах, способе неравномерной дискретизации и т.д.

Так для АВД, использующих полиномиальные модели, как правило, низких порядков ($n=0, n=1$), необходимо знание максимального значения модуля $n+1$ производной μ_{n+1} на интервале дискретизации. Аналитически эта задача может быть решена только для дифференцируемых процессов с $2(n+1)$ раз дифференцируемой корреляционной функцией, т.е. в ограниченных случаях [4]. В остальных же - возможно применение неравенства Бернштейна, которое справедливо для функций, ограниченных по модулю и имеющих финитную спектральную плотность мощности [98]:

$$\mu_{n+1} = \max |x^{(n+1)}(t)| \leq \omega_c^{n+1} \max |x(t)|, \quad (1.41)$$

где ω_c - верхняя граничная частота спектра входного процесса.

Из выражения (1.41) видно, что для оценки μ_{n+1} необходима информация о законе распределения модуля и спектральной плотности мощности входного процесса.

Воспользовавшись этим выражением, определим минимальный интервал дискретизации [4]:

$$\Delta t_{\min} = n+1 \sqrt{\frac{\varepsilon k}{\mu_{n+1}}}, \quad (1.42)$$

где ε - погрешность аппроксимации; коэффициент, зависящий от вида, степени аппроксимирующего полинома и критерия приближения (см. табл. 1.1).

Следует отметить, что неравенство Бернштейна дает сильно завышенное значение μ_{n+1} . Скорректировать это завышение возможно подбором множителя R в уравнении определения ω_c

$$\int_0^{\omega_c} S_x(\omega) d\omega = R\sigma_x^2. \quad (1.43)$$

Так для нормального входного процесса с КФ $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$
 $\omega_c = \alpha \operatorname{tg} R\pi.$ (1.44)

В таблице 1.2 приведены результаты определения Δt_{\min} в соответствии с выражением (1.121) для предсказателей нулевого порядка с плавающей апертурой для различных R и результаты имитационного моделирования [108]. Отсюда видно, что хорошее совпадение наблюдается при $R=0.4$.

Минимальный интервал дискретизации

Таблица 1.2

$\gamma = \varepsilon/\sigma_x$	0,25	0,5	0,75	1,0
$R = 0,320$	0,0529	0,1058	0,1587	0,2115
$R = 0,400$	0,0271	0,0542	0,0812	0,1083
$R = 0,475$	0,0066	0,0131	0,0197	0,0262
Результаты имитационного моделирования	0,0288	0,0579	0,0977	0,1465

Аналогичным образом возможно определение Δt_{\min} и для других моделей КФ входного процесса.

Интенсивность потока λ - величина, обратная математическому ожиданию интервала дискретизации, как параметр закона распределения используется при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определении коэффициента сжатия.

Существуют различные способы определения коэффициента сжатия [4, 37]. Учитывая, что эта характеристика в дальнейшем будет использоваться при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определим ее в виде:

$$k_{сж} = \frac{N}{M}, \quad (1.45)$$

где N - число отсчетов при равномерной дискретизации;

M - число отсчетов при неравномерной дискретизации при той же длительности реализации и погрешности восстановления.

При известных характеристиках потока выражение (1.45) удобно представить в виде:

$$k_{сж} = \frac{m_{\Delta t}}{\Delta t_{\min}} = \frac{1}{\lambda \Delta t_{\min}}. \quad (1.46)$$

1.3. Типовые модели неэквидистантных временных рядов

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных

рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [4, 24, 52]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений интервал дискретизации $\Delta t_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$ определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (1.47)$$

где Δt_0 - интервал принудительной дискретизации;

Y -случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p [11]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.48)$$

В соответствии с выражением (1.47) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left(\Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (1.49)$$

Плотность и функция распределения вероятностей интервала дискретизации соответственно имеют вид [34]:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \delta[\Delta t - i\Delta t_0]; \quad (1.50)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0], \quad (1.51)$$

где $1[\Delta t] = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}$ - единичная функция.

Для определения моментных характеристик, законов распределения сумм интервалов удобнее воспользоваться характеристической функцией [114]:

$$\varphi_{\Theta}(u) = \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)}. \quad (1.52)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\begin{cases} m_{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\Delta t_0^2 q}{p^2}, \end{cases} \quad (1.53)$$

а плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0]. \quad (1.54)$$

С учетом выражения (1.52) характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ равна

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \left[\frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)} \right]^n. \quad (1.55)$$

Откуда плотность и функция распределения Z_{nj} определяется в виде:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} = k\Delta t_0) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \delta[Z_{nj} - k\Delta t_0] \quad (1.56)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} \leq k\Delta t_0) = \sum_{r=n}^k C_{r-1}^{n-1} p^r q^{r-n} 1[Z_{nj} - r\Delta t_0] \quad (1.57)$$

С учетом выражения (1.57) L_{\max} , обеспечивающее выполнение условия (1.29), находится из уравнения

$$p^{L_{\max}} \sum_{r=L_{\max}}^m C_{r-1}^{L_{\max}-1} q^{r-L_{\max}} 1[\tau_{k \max} - r\Delta t_0] = 1 - P_d, \quad (1.58)$$

где $m = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta t_0} \right] + 1$.

Плотность распределения
 $\Delta t = 0,4 \quad \tau_{k \max} = 3$

Функция распределения
 $\Delta t = 0,4 \quad \tau_{k \max} = 3$

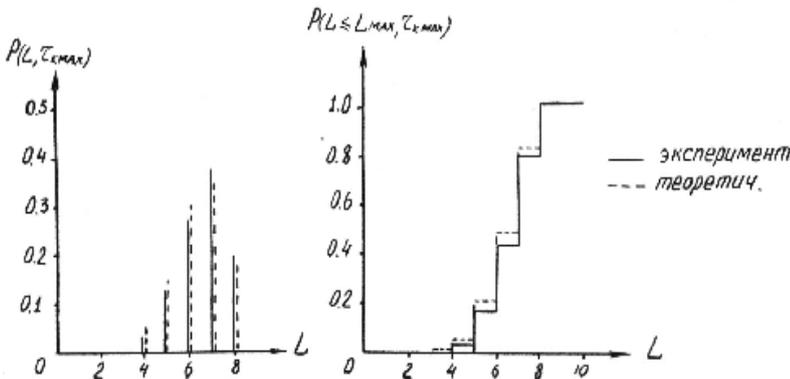


Рисунок 1.6. Плотность и функция распределения суммы интервалов на $\tau_{k \max}$

На рис. 1.6 приведены результаты расчета плотностей и функций распределения вероятностей в соответствии с выражениями (1.56), (1.57) для $p=0,8$, $\Delta t_0=0,4$, $\tau_{k \max}=3$ и результаты имитационного моделирования, подтверждающие правильность расчетов. Из рис. 1.6 видно, что для $p=0,8$ $L_{\max}=m$.

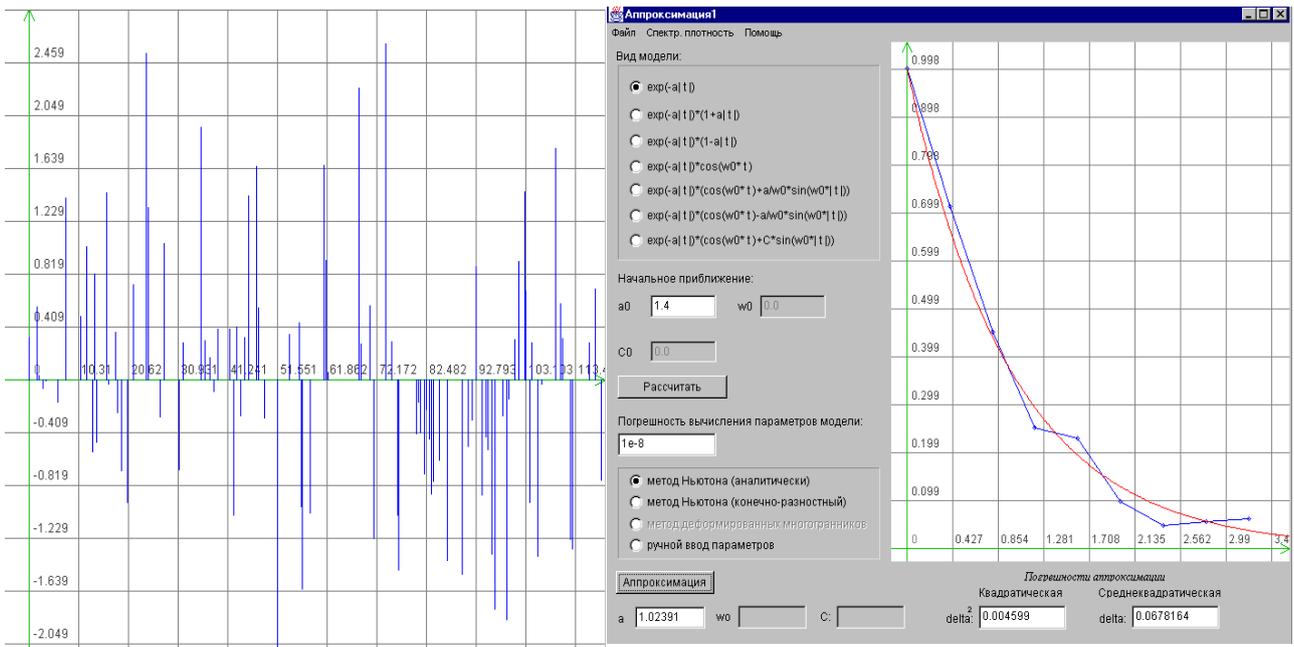
Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого потока равна

$$C_x(J) = p, \quad (1.59)$$

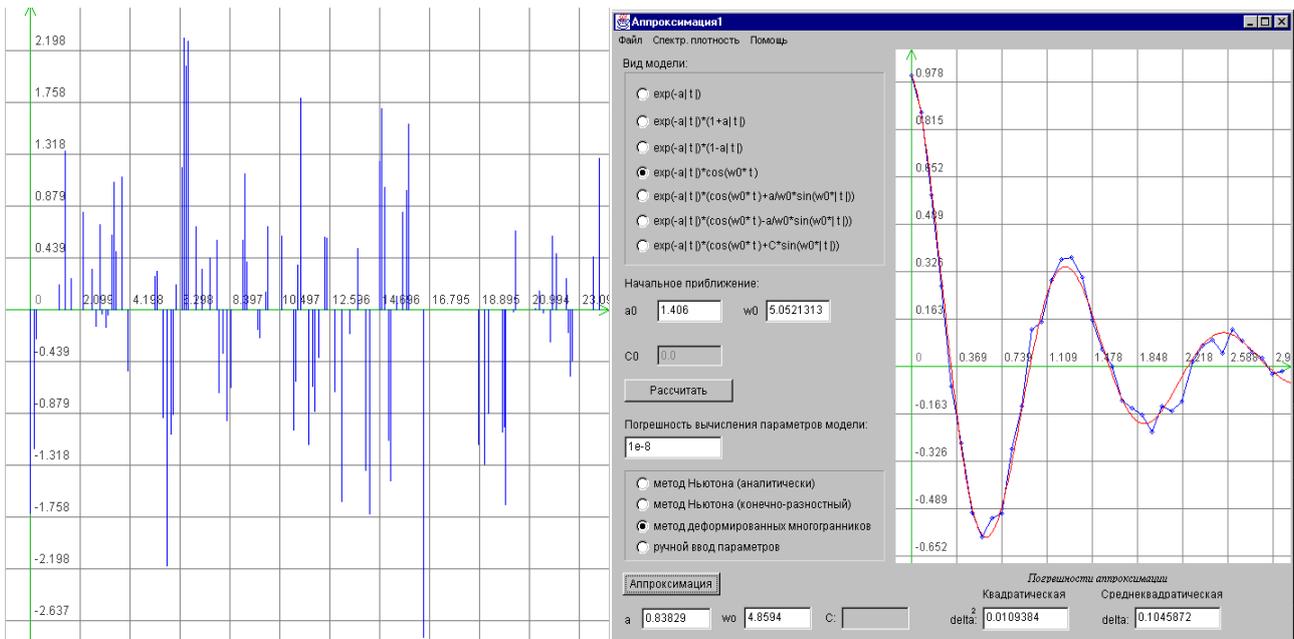
а минимальный интервал дискретизации и коэффициент сжатия соответственно равны:

$$\begin{cases} \Delta t_{\min} = \Delta t_0; \\ k_{сж} = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.60)$$

Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда, полученного в результате p -преобразования регулярного ряда с различными видами корреляционной функции, представлены на рис. 1.7.



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4, p = 0,3, N = 5000$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, p = 0,3, N = 5000$$

Рисунок 1.7. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда (p-преобразование)

Для периодической дискретизации с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}) \end{cases} \quad (1.61)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$, а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (1.62)$$

Характеристики потока будут зависеть от $f_{\xi}(\xi)$. Рассмотрим пример, когда ξ распределена по нормальному закону с $m_{\xi} = 0$ и $D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2$.

Тогда плотность, функция распределения вероятностей и характеристическая функция соответственно равны:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(\Delta t - \Delta t_0)}{4\sigma_{\xi}^2}\right); \quad (1.63)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = \Phi^*\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right), \quad (1.64)$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ [12];

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \exp\left(-u^2 \sigma_x^2 + iu\Delta t_0\right). \quad (1.65)$$

Откуда $m_{\Delta t} = \Delta t_0$, а $D_{\Delta t} = 2\sigma_{\xi}^2$.

Плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta t_0} \Phi^*\left(\frac{t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}\right). \quad (1.66)$$

Характеристическая функция суммы n независимых интервалов $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ с

учетом выражения (1.65) запишется в виде

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \exp\left(-n\left(u^2 \sigma_{\xi}^2 - iu\Delta t_0\right)\right), \quad (1.67)$$

а соответствующие ей плотность и функция распределения вероятностей равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(Z_{nj} - n\Delta t_0)}{4n\sigma_{\xi}^2}\right), \quad (1.68)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \Phi^*\left(\frac{Z_{nj} - n\Delta t_0}{\sqrt{2n}\sigma_{\xi}}\right). \quad (1.69)$$

Для нормального закона распределения ξ L_{\max} определяется из уравнения

$$\Phi^*\left(\frac{\tau_{k\max} - L_{\max}\Delta t_0}{\sqrt{2L_{\max}}\sigma_{\xi}}\right) = 1 - P_d, \quad (1.70)$$

которое с учетом свойств $\Phi^*(x)$ приведем к виду:

$$\Phi * \left(\frac{L_{\max} \Delta t_0 - \tau_{k \max}}{\sqrt{2L_{\max}} \sigma_{\xi}} \right) = P_d. \quad (1.71)$$

Отсюда, после преобразований получим следующее уравнение:

$$L_{\max}^2 - \frac{2L_{\max} (\Delta t_0 \tau_{k \max} + A^2 \sigma_{\xi}^2)}{\Delta t_0} - \frac{\tau_{k \max}^2}{\Delta t_0^2} = 0, \quad (1.72)$$

где $A = \arg \Phi^*(P_d)$.

Решение этого уравнения, например, для случайного процесса с нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\Delta t_0 = 0.4/\alpha$, $\tau_{k \max} = 3/\alpha$, $P_d = 0.99$, $A = 2,3$ дает $L_{\max} = 9$.

Заметим, что при равномерной дискретизации $L_{\max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k \max}}{\Delta t_0} + 0,5 \right] = 8$.

Интервальная корреляционная функция равна

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2} \sigma_{\xi}} \right] - \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2} \sigma_{\xi}} \right] \right\}. \quad (1.73)$$

Если $\sigma_{\xi} = \frac{\Delta t_0}{6}$ и $\Delta = \Delta t_0$, то после промежуточных преобразований получим

$$C_x(J) = \Phi * \left[\frac{3(2J-1)}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow 1. \quad (1.74)$$

Заметим, что для рассматриваемой модели при заданном значении Δt_0 минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, но коэффициент сжатия $k_{\text{сж}} = 1$.

На рис. 1.8 приведены результаты генерирования неэквилидистантного временного ряда, полученного в результате «дрожания» регулярного ряда с различными видами корреляционных функций.

Для аддитивной случайной дискретизации

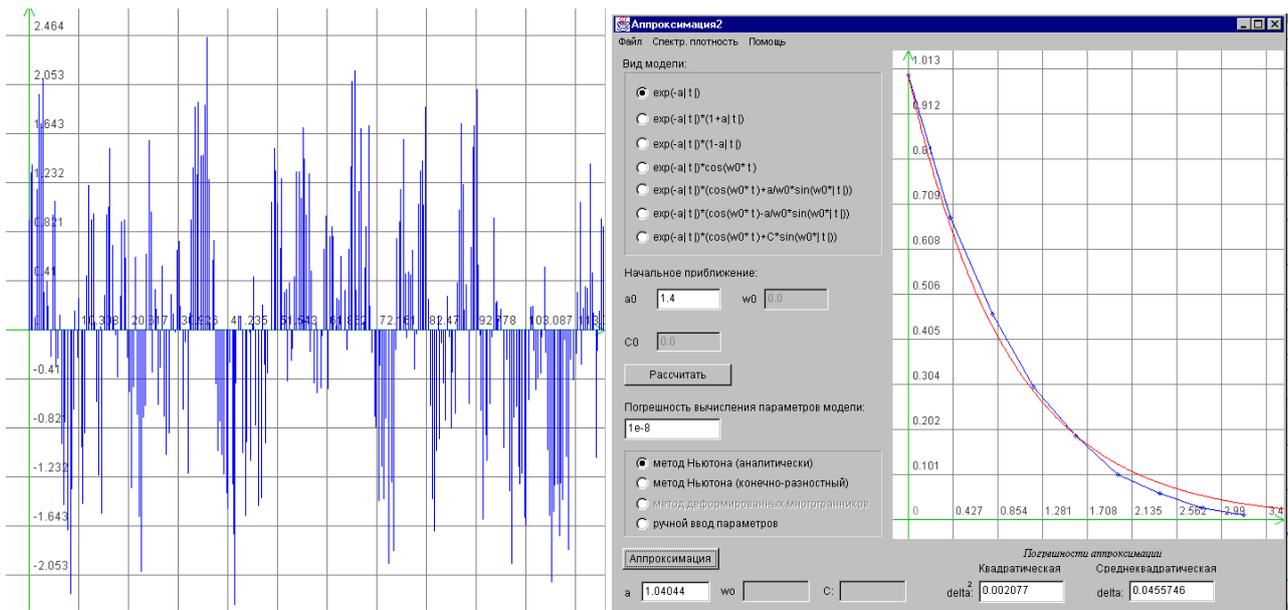
$$\begin{cases} t_{ji} = t_{j,i+1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.75)$$

где ξ_{ji} - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f_{\xi}(\xi)$, каждая из которых расположена в диапазоне $(0, \infty)$.

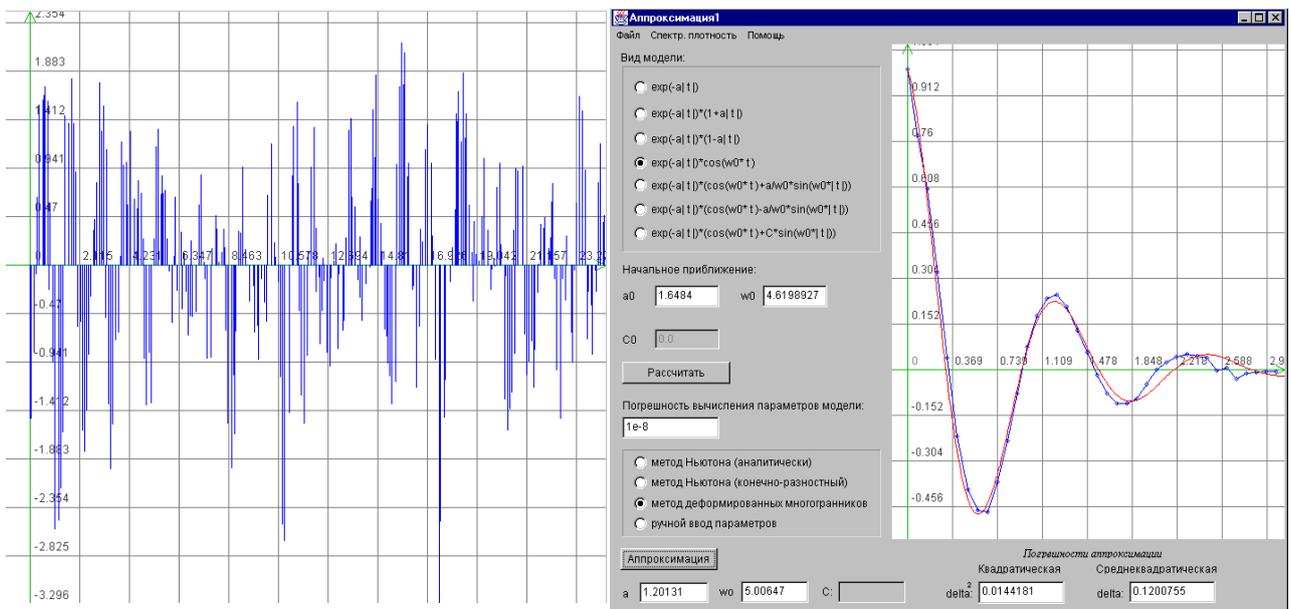
Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (1.76)$$

Наиболее полно вероятностные характеристики этой модели исследованы в [4, 15]. Учитывая, что в практике широко применяется модель простейшего потока и по тока с распределением интервалов, подчиненного гамма-распределению, частным случаем которого являются законы Эрланга, экспоненциальное, вырожденное причинное, показательное степенное, Пирсона и т.д. [52], определим их характеристики.



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha = 1, \Delta\tau = 0,4, N = 5000$$



$$б) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \alpha = 1, \omega_0 = 5, \Delta\tau = 0,082, N = 5000.$$

Рисунок 1.8. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда («дрожание»)

Для гамма-распределения длительности интервалов

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.77)$$

характеристическая функция равна:

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha}{(\alpha\lambda - iu)^\alpha} \quad (1.78)$$

Отсюда характеристическая функция $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$ определяется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha n}}, \quad (1.79)$$

а плотность и функция распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n} Z_{nj}^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha\lambda Z_{nj}), \quad (1.80)$$

$$F_{Z_n}(Z_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} v[\alpha n, \alpha\lambda Z_n] \quad (1.81)$$

где $v[\alpha, x] = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ - неполная гамма-функция [53].

Моментные характеристики интервалов равны: $m_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}$, $D_{\Delta t} = \frac{1}{\alpha\lambda^2}$, а коэффициент формы

$$k_{\phi} = \frac{2\alpha^{\alpha-1} e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.82)$$

Вероятностные характеристики для простейшего потока можно получить из выражений (1.77)-(1.82), положив $\alpha = 1$.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t); \\ F_{\Delta t}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda \Delta t); \\ \varphi_{\Delta t}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}; \\ \varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu)^n} \\ \\ f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{\lambda^n Z_{nj}^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda Z_{nj}); \\ F_{Z_{nj}} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k Z_{nj}^k}{k!} \exp(-\lambda Z_{nj}) \end{array} \right. \quad (1.83)$$

При целочисленных значениях $\alpha = k+1 = 1, 2, 3$ гамма-распределение вырождается в распределение Эрланга [52].

Для простейшего потока, как следует из выражения (1.29), плотность распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ имеет вид

$$f(L, \tau_{k \max}) = P(L, \tau_{k \max}) = \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}), \quad (1.84)$$

а $L_{k \max}$ находится из уравнения

$$\sum_{L=1}^{L_{k \max}} \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}) = P_d \quad (1.85)$$

Решение уравнения для $L_{k \max} = 6,7766$ и $P_d = 0,99$ дает $L_{k \max} = 14$.

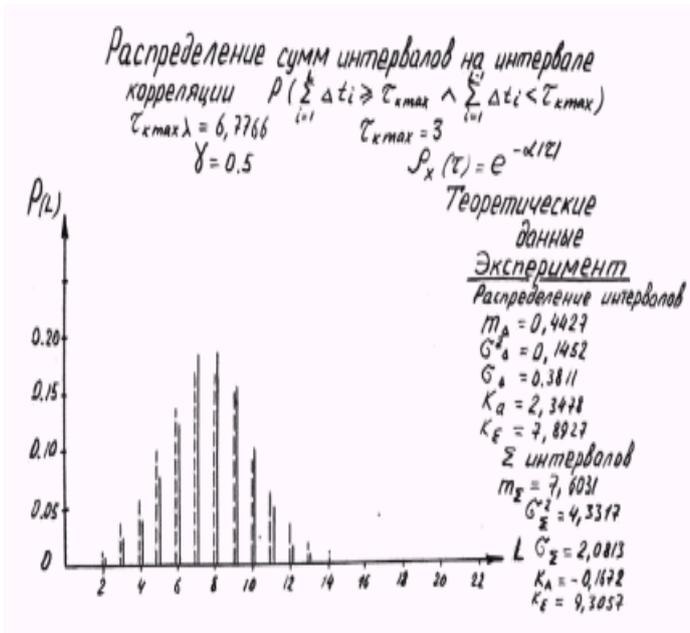


Рисунок 1.9. Распределение сумм интервалов на максимальном интервале корреляции

На рис. 1.9 приведены для примера законы распределения сумм интервалов на $\tau_{k \max}$ для АД с предсказателем нулевого порядка с плавающей апертурой (ПНП ПА), полученные методом имитационного моделирования, и результаты определения $L_{k \max}$ из уравнения (1.85). Результаты анализа еще раз подтверждают, что для АД ПНП ПА возможно применение модели простейшего потока.

Для гамма-распределения $L_{k \max}$ определяется из уравнения

$$\frac{v[L_{\max} \alpha, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{\Gamma(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d \quad (1.86)$$

решение которого возможно только численными методами [60].

Интервальная корреляционная функция для простейшего потока примет вид

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \frac{\lambda^r \exp(-J \lambda \Delta t_0)}{r!} \left[\exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^r - \exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^r \right] \right\}, \quad (1.87)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{D(\alpha k)} \left\{ v\left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\right] - v\left[\alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)\right] \right\}. \quad (1.88)$$

Результаты определения $C_x(J)$ для АД ПНП ПА для модели КФ входного процесса $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ представлены на рис. 1.10.

Плотность распределения времени возвращения для простейшего потока

$$\varphi(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (1.89)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} v[\alpha, \alpha \lambda t]. \quad (1.90)$$

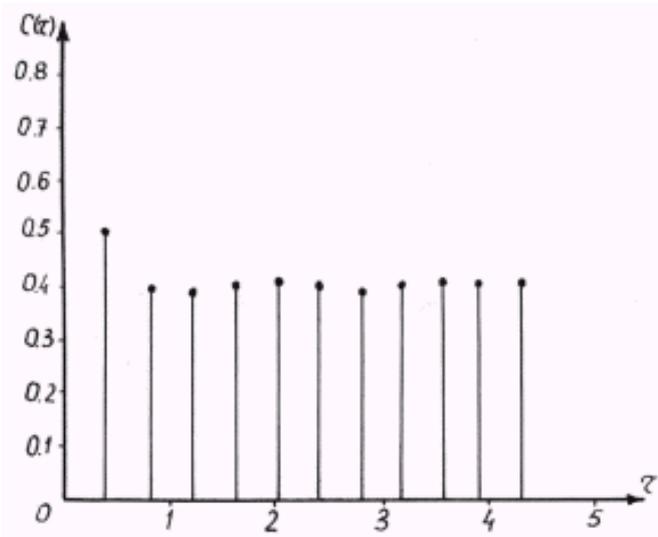


Рисунок 1.10. Интервальная корреляционная функция

Минимальный интервал дискретизации для полиномиальной модели процесса на интервале дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.42) с учетом (1.41).

Следует отметить, что если массивы $\{x_i, \Delta t_i\}_{i=1}^M$ записаны в память ЭВМ, то задачи определения Δt_{\min} и λ тривиальны.

Аналитическое же определение интенсивности потока для произвольного вида неравномерной дискретизации, особенно для не дифференцируемых процессов с законами распределения, отличными от нормального, встречает определенные трудности. Следовательно, интенсивность потока необходимо

определять для конкретного вида неравномерной дискретизации.

Так, например, для спорадической дискретизации при числе уровней квантования $6 \leq r \leq 300$, как показано в [68] на обработке большого экспериментального материала, удовлетворительная аппроксимация достигается с интенсивностью λ , определяемой выражением

$$\lambda = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{\pi} \sum_{i=1}^r \exp \left[-0,5 \left(\frac{iq - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (1.91)$$

q - шаг квантования.

Для АВД ПНП с фиксированной апертурой (ФА) поток является простейшим [4] с интенсивностью

$$\lambda = \frac{M \left[\overset{\circ}{x'} \right]}{\varepsilon} = \frac{k_\phi \sigma_{x'}}{\varepsilon}, \quad (1.92)$$

где k_ϕ - коэффициент формы производной процесса;

$\sigma_{x'}$ - СКО производной процесса.

Из анализа выражения (1.92) видно, что интенсивность при заданном значении уставки ε определяется, в основном, значением $\sigma_{x'}$, т.к. значения k_ϕ для произвольных законов изменяются в небольших пределах (см. таблицу 1.3) [108].

Таблица коэффициентов формы и пикфактора
для типовых законов распределения

Таблица 1.3

№	Наименование закона	$k_\phi = M \left[\left \overset{\circ}{x}' \right \right] / \sigma_x$	$\eta = x_{\max} / \sigma_x$	P_d
1	Нормальный	0,7979	3	0,9973
2	Равномерный	0,8660	1,7320	1
3	Треугольный	0,8165	2,4495	1
4	Антимодальный I	0,9428	1,4142	1
5	Антимодальный II	0,9802	1,2603	1
6	Трапецевидный	0,8391	2,3238	1
7	Рэля	1	2,9735	0,995
8	Экспоненциальный	0,7358	5,2983	0,995
9	Лапласа	0,7071	3,7465	0,995

Выражения $\sigma_{x'}$ для типовых дифференцируемых моделей КФ приведены в таблице 1.4.

СКО дифференцируемых процессов

Таблица 1.4

N	$K(\tau)$	$\sigma_{x'}$
1	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\alpha \sigma_x$
2	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{3} / 3$
3	$\sigma_x \exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{2}$
4	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\sigma_x \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$

Для недифференцируемых случайных процессов в явном виде значение $\sigma_{x'}$ определить нельзя.

Однако, воспользовавшись аппроксимативным подходом, возможно определение параметров аппроксимирующего выражения $K_a(\tau)$, удовлетворяющего, например, минимуму квадратической погрешности аппроксимации [107, 108], а затем по параметрам модели определение $\sigma_{x'}$.

Так, например, при аппроксимации $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ моделью вида $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$ связь параметров имеет вид

$$\beta = 0,935 \alpha \quad (1.93)$$

Результаты теоретического определения интенсивности для адаптивно-временной дискретизации предсказателем пулевого порядка с плавающей апертурой (АВД ПНП ПА) λ_T , экспериментального, полученного методом имитационного моделирования λ_M , а также погрешности оценки λ приведены в таблице 1.5.

Интенсивность потока АВД ПНП ПА для случайного процесса

$$с K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ для } \gamma = \varepsilon/\sigma_x = 0,5$$

Таблица 1.5

№	k_ϕ	λ_T	λ_M	$\delta = (\lambda_M - \lambda_T)/\lambda_T$
1	0,7979	2,1101	2,1778	0,0705
2	0,8148	2,1547	2,1589	0,0019
3	0,8283	2,1747	2,2124	0,0173
4	0,8225	2,1752	2,2247	0,0228
5	0,7954	2,1035	2,1673	0,0303
6	0,7489	1,9805	1,9324	0,0243

Из анализа результатов видно, что независимо от вида закона распределения входного процесса, задаваемого k_ϕ , погрешность оценки λ находится в допустимых пределах.

Аналогичным образом, воспользовавшись подпрограммами аппроксимации КФ параметрическими моделями [107], возможно определение и других моделей КФ.

На рис. 1.11 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, полученного в результате адаптивно-временной дискретизацией регулярного ряда с различными значениями уставки γ .

Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Delta t}(\Delta t)$, разряжены р-преобразованием [108].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}) \end{cases} \quad (1.94)$$

где Y_i - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром p в соответствии с выражением (1.48), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i} \quad (1.95)$$

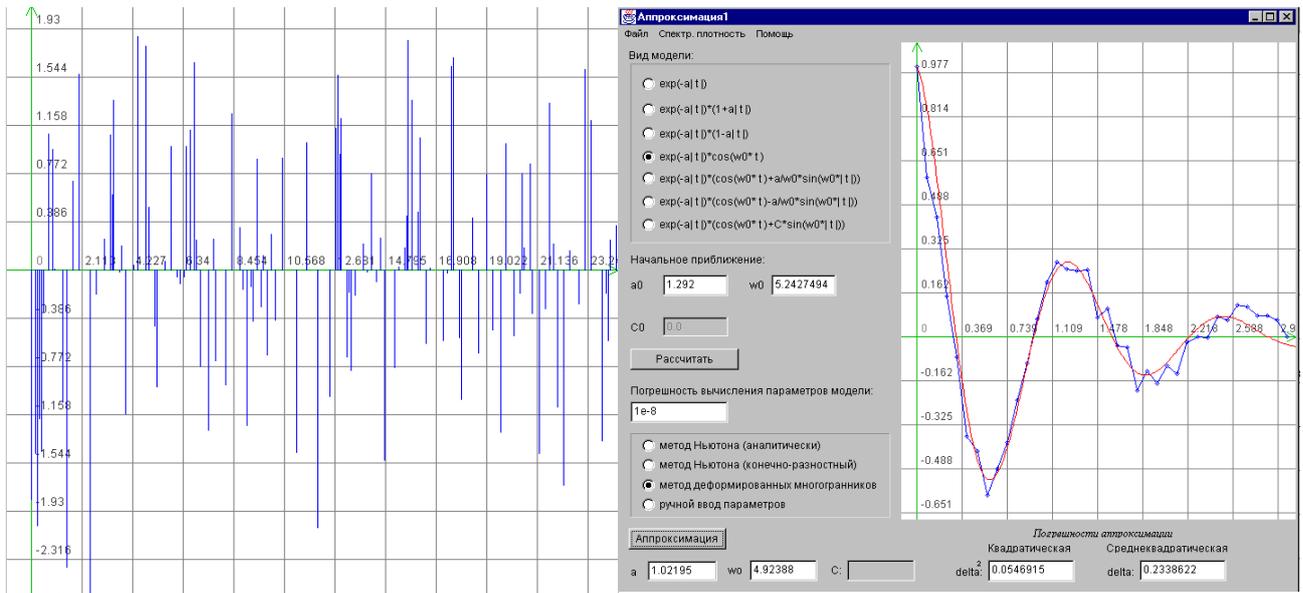
Плотность распределения вероятностей величины Z находится по формуле полной вероятности с гипотезами $H_n(Y=n)$ в виде [34]

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_z^{(n)}(z) p q^{n-1}, \quad (1.96)$$

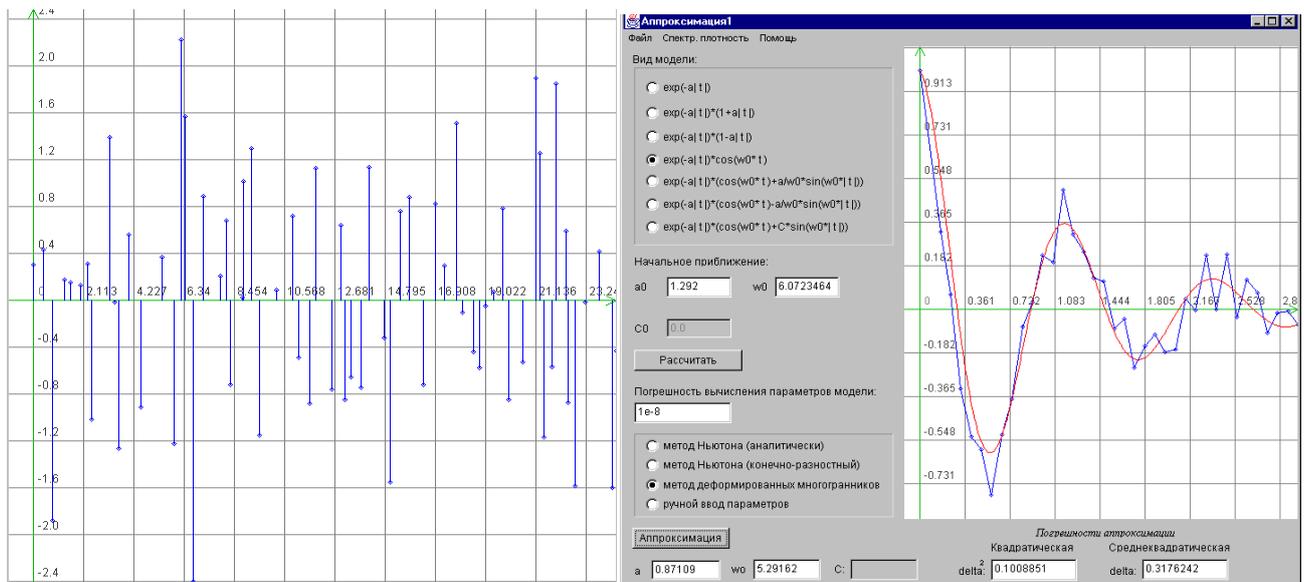
где $f_z^{(n)}(z)$ - плотность распределения суммы n независимых величин Δt_{ji} .

Пусть ξ распределена по нормальному закону $m_\xi = 0$ и $D_\xi = \sigma_x^2$. Тогда выражение (1.96) примет вид:

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n} \sigma_{\xi}} \exp\left(-\frac{(z - n \Delta t_0)}{4n \sigma_{\xi}^2}\right) p q^{n-1}, \quad (1.97)$$



а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 5$, $\Delta\tau = 0,4$, $\gamma = 0,5$, $N=5000$



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 5$, $\Delta\tau = 0,4$, $\gamma = 0,75$, $N=5000$

Рисунок 1.11. Результаты генерирования неэквидистантного временного ряда с адаптивно-временной дискретизацией

соответствующая функция распределения -

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi \left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_{\xi}} \right), \quad (1.98)$$

а математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\begin{cases} m_z = \frac{\Delta t_0}{p}, \\ \sigma_z^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{p} + \frac{\Delta t_0}{p^2}. \end{cases} \quad (1.99)$$

Плотность распределения времени возвращения определяется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi * \left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_\xi} \right). \quad (1.100)$$

Найдем законы распределения $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$, воспользовавшись ее характеристической функцией

$$\varphi_{\zeta_n}(u) = \left[\frac{p \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)}{1 - q \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)} \right]^n \quad (1.101)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k} \sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(\zeta_n - k \Delta t_0)^2}{4k \sigma_\xi^2}\right) C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad (1.102)$$

а функция распределения примет вид:

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \Phi * \left(\frac{\zeta_n - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi} \right). \quad (1.103)$$

В соответствии с выражением (1.29) L_{\max} определяется из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \Phi * \left(\frac{\tau_{k \max} - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi} \right) = 1 - P_d. \quad (1.104)$$

Интервальная корреляционная функция с учетом выражения (1.33) примет вид:

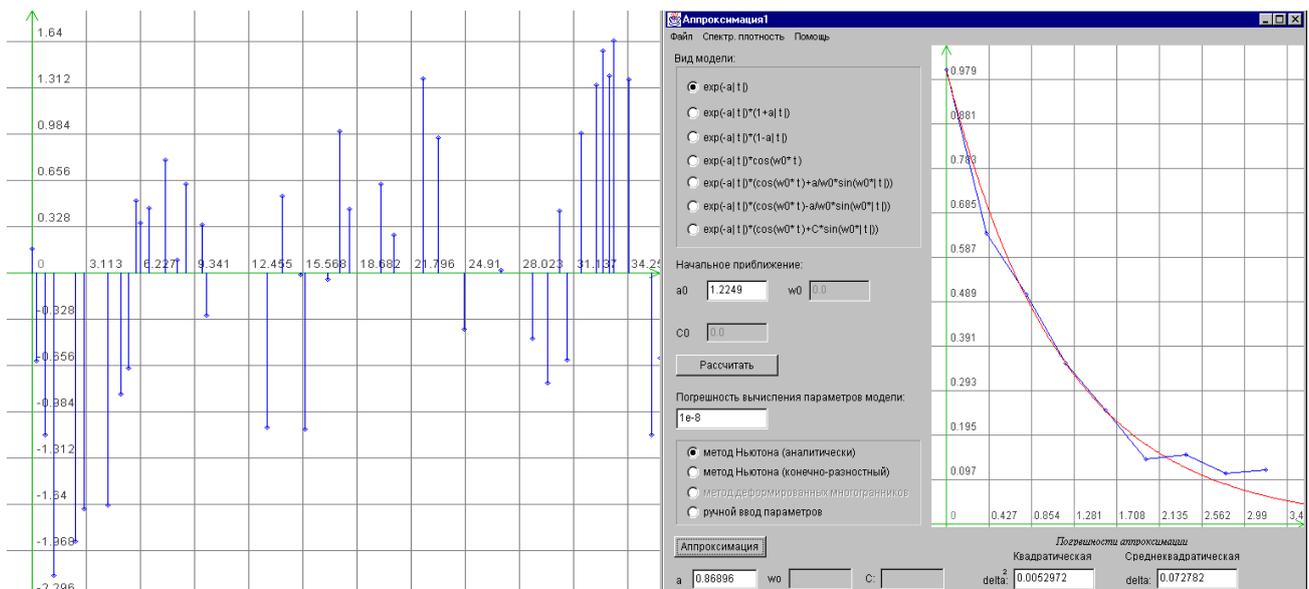
$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_\xi} \right] - \Phi * \left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_\xi} \right] \right\}. \quad (1.105)$$

Если $\Delta = \Delta t_0$, то $C_x(J) = p$.

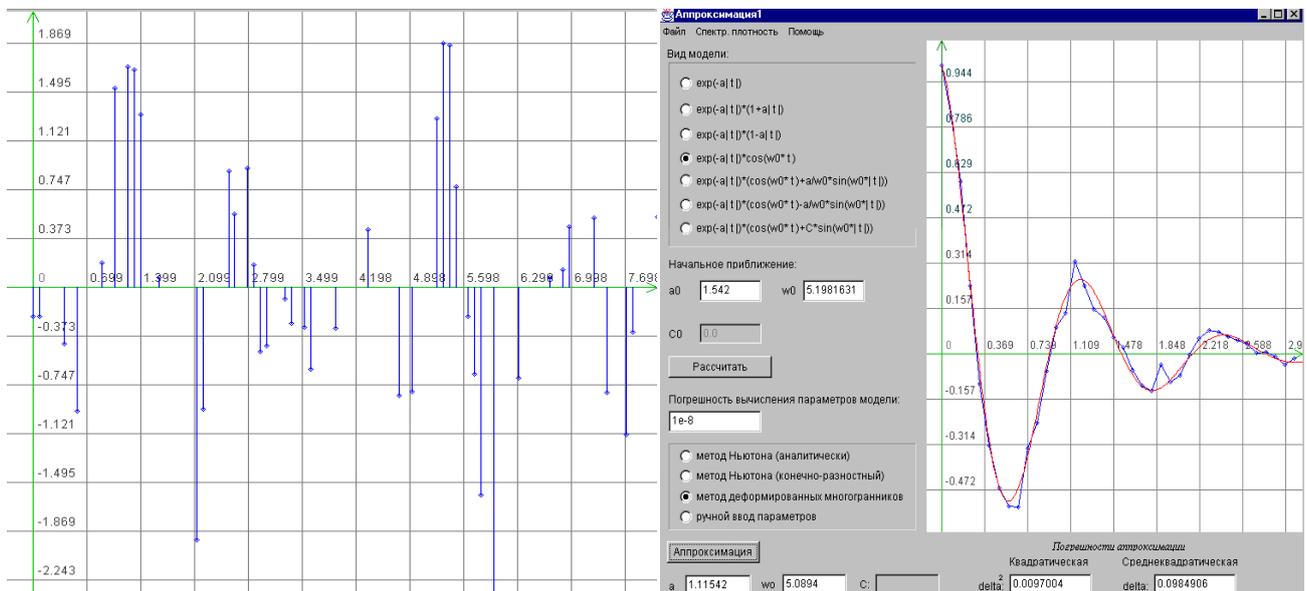
Минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, а коэффициент сжатия равен

$$k_{сж} = \frac{1}{p}. \quad (1.106)$$

На рис. 1.12 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда для периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений.



a) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha = 1$, $\Delta\tau = 0,4$, $N = 5000$, $p = 0,4$



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 5$, $\Delta\tau = 0,4$, $N = 5000$, $p = 0,4$,
 Рисунок 1.12. Дискретизация с «дрожанием» и пропусками наблюдений

Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой $\Theta_i = \xi_i$ с плотностью распределения вероятностей $f_{\Theta}(\Theta)$ разряжены p -преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (1.107)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (1.108)$$

Плотность распределения вероятностей Z определяется в соответствии с выражением (1.96).

Пусть ξ распределена по экспоненциальному закону. Тогда $f_z(z)$ с учетом (1.83) примет вид

$$f_z(z) = p \lambda \exp(-\lambda p z). \quad (1.109)$$

Из этого выражения видно, что все вероятностные характеристики аналогичны характеристикам простейшего потока с параметром λp для аддитивной случайной дискретизации (см. выражения (1.83), (1.85), (1.87), (1.89)).

Для гамма-распределения длительности интервалов Θ (см. (1.26)) плотность распределения

$$f_z(z) = p \alpha \lambda \exp(-\alpha \lambda z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha \lambda q z)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.110)$$

функция распределения

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{v[n \alpha, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.111)$$

математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{cases} m_z = \frac{1}{p\lambda}; \\ \sigma_z^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{p} + \frac{q}{\lambda^2 p^2}, \end{cases} \quad (1.112)$$

плотность распределения времени возвращения

$$\varphi(t) = \lambda p^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.113)$$

Плотность и функция распределения вероятностей суммы n интервалов $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ соответственно равны:

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{(\alpha \lambda)^{\alpha n} \zeta_n^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha \lambda \zeta_n) \quad (1.114)$$

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda \zeta_n]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.115)$$

С учетом выражений (1.29) и (1.116) L_{\max} находится из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \frac{v[\alpha L_{\max}, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{d(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d \quad (1.116)$$

с использованием одного из численных методов [60].

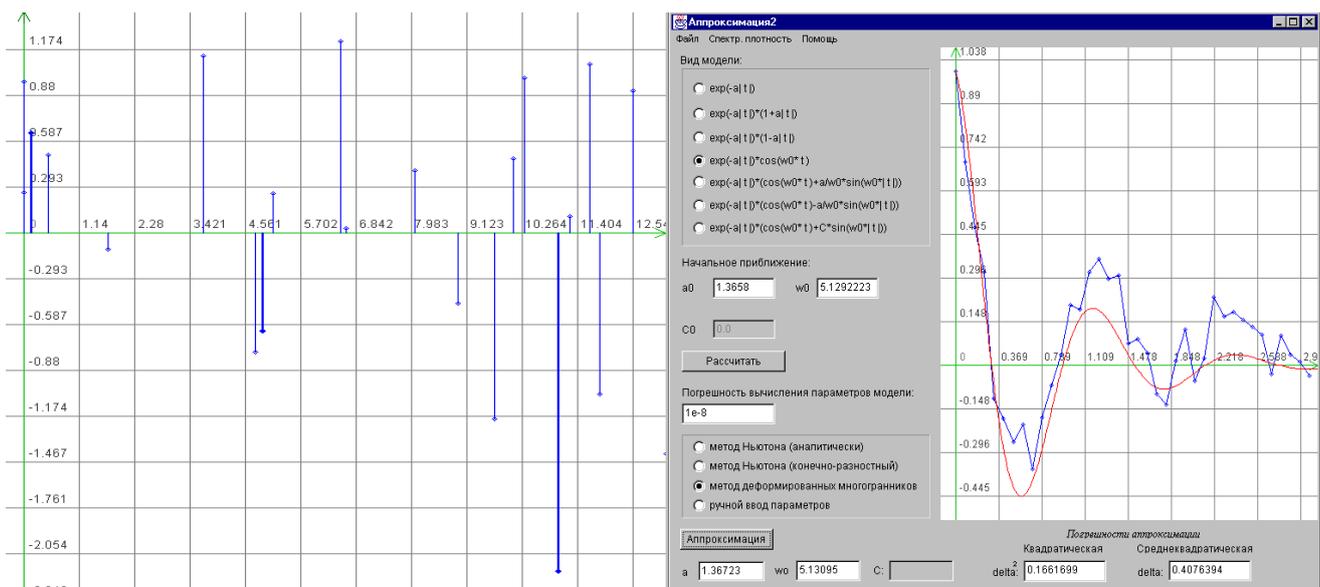
Интервальная корреляционная функция определяется в виде:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \frac{v \left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2} \right) \right]}{\Gamma(\alpha r)} - \frac{v \left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2} \right) \right]}{\Gamma(\alpha r)} \right\} \quad (1.116)$$

Интенсивность и минимальный интервал дискретизации определяются аналогично как и для модели аддитивной случайной дискретизации, а коэффициент сжатия для рассматриваемых законов равен:

$$k_{сж} = \frac{1}{p\lambda\Delta t_0} \quad (1.118)$$

На рис. 1.13 приведены результаты генерирования неэквидистантного временного ряда для аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.



б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 5$, $\Delta\tau = 0,082$, $N=10000$, $p=0,8$, $\lambda = 2$

Рисунок 1.13. Аддитивная случайная дискретизация с p-преобразованием

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они перекрывают широкий класс практических задач.

2. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

2.1. Основные понятия и определения

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса $\bar{\Theta}$, дающие его исчерпывающее описание.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. 2.1).

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.



Рисунок 2.1. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

На основании общей теории статистических измерений [103, 139] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)] \quad (2.1)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (2.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (2.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (2.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\mathcal{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (2.5)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\mathcal{G}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (2.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\mathcal{G}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (2.7)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [33, 114].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (2.2) - (2.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\Theta_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (2.8)$$

- при усреднении по времени

$$\Theta_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (2.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\Theta_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (2.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой Θ_t [139]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой Θ_j . При усреднении и по времени и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - Θ_{cp} .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = \text{const}$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = \text{const}$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

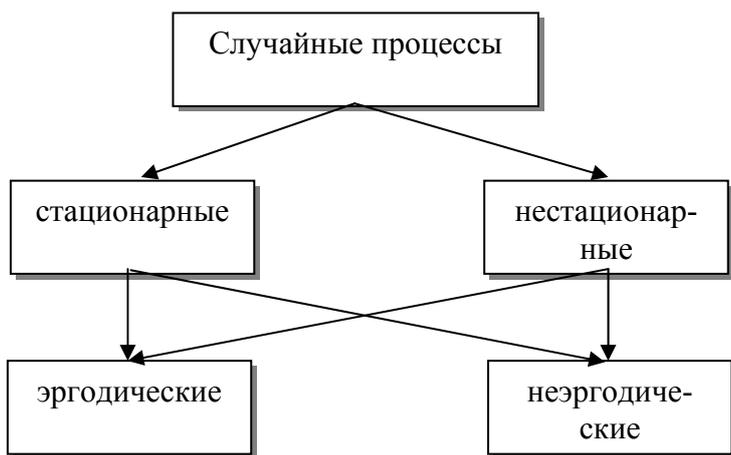


Рисунок 2.2. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.2.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное

описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} , - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии. Отметим, что существенные результаты по классификации случайных процессов получены в работах [122, 103, 139]. В некоторых из них разработано программное обеспечение, позволяющее решить вопрос о стационарности и эргодичности практически, например в [127].

В [139] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [139]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (2. 1).

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\left\{S_{d1}g_x[x_j(t^{(x)})], S_{d2}g_y[y_1(t^{(y)})]..\right\} \quad (2. 11)$$

где $F\{ \}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\Theta[x(t)]$ и $\Theta[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\Theta[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t^{(m)})] \right\} = 0. \quad (2. 12)$$

$$\Xi_i \left\{ F^{(1)} \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t^{(1)})] \right\}, \dots, F^{(m)} \left\{ S_{dm}g[x_j^{(m)}(t^{(m)})] \right\} \right\} = 0. \quad (2. 13)$$

Применение измерительно-вычислительного канала в качестве устройства получения, преобразования и обработки информации даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

В этом случае выражения (2.2)-(2.4) при представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (2.21)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (2.22)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (2.23)$$

где t_i - i -ый отсчёт j -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (2.5) примет вид:

$$\Theta[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N ; i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.24)$$

Выражения (2.8)-(2.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (2.25)$$

- при усреднении по времени

$$\mathfrak{G}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (2.26)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\mathfrak{G}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (2.27)$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстрдействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстрдействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможность получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколько угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

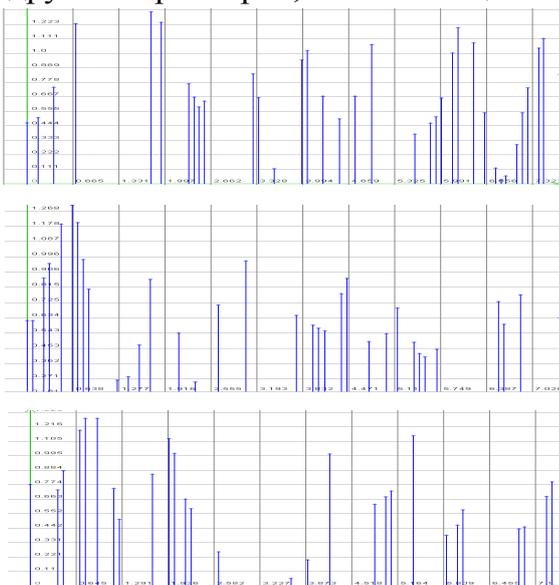


Рисунок 2.3. Примеры реализаций неэквидистантных временных рядов

Специфика представления неэквидистантных временных рядов, полученных в ходе эксперимента, проявляется в следующем:

- в общем случае в формировании оценки вероятностной характеристики участвуют два массива выборочных данных $\{x_{ji}, t_{ji}\}_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$;
- даже при постоянной длительности эксперимента $T = \text{const}$ и постоянном числе реализаций $N = \text{const}$ объем выборки для j -ой реализации случаен - $M_j = \text{random}$ (см. рис. 2.3).

Это, в свою очередь, приводит к необходимости:

- для каждой вероятностной характе-

ристики определить вид функционального преобразования $g[]$, учитывающего совместную обработку массивов значений x_{ji} и соответствующих ему меток времени t_{ji} ;

- для каждой реализации случайной последовательности определить объем выборки, участвующий в формировании оценки.

Таким образом, выражение (2.1) в случае определения вероятностной характеристики неэквидистантного временного ряда преобразуется к виду:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_{ji}, t_{ji}], \quad (2.28)$$

а соответствующие ему выражения (2.24)-(2.27) для оценки вероятностных характеристик равны:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_{ji}, t_{ji}] \quad (2.29)$$

($j = 1, 2 \dots N, i = 1, 2, \dots M_j$).

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_{ji}, t_{ji}]; \quad (2.30)$$

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} g[x_{ji}, t_{ji}] \quad (2.31)$$

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} g[x_{ji}, t_{ji}]. \quad (2.32)$$

Выражения (2.30)-(2.32) позволяют синтезировать алгоритмы измерения требуемых вероятностных характеристик и провести их метрологический анализ.

Следует отметить, что формирование массивов существенных значений x_{ji} и соответствующих им меток времени t_{ji} при неравномерной дискретизации случайных процессов происходит аналогично, как и в случае регулярной дискретизации.

В зависимости от типа анализируемого случайного процесса, измеряемой вероятностной характеристики, вида усреднения классификацию методов измерения значений вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации случайных процессов можно представить в следующем виде (см. рис. 2.4).

Основными классификационными признаками являются:

- тип входных процессов;
- возможность восстановления пропущенных отсчетов в промежуточных точках;
- методы измерения;
- способ преобразования массивов выборочных данных;
- тип измеряемой вероятностной характеристики;
- возможность измерения в в любой точке диапазона измерения;
- возможность работы в реальном масштабе времени;
- способ реализации алгоритма измерения;
- класс измеряемой вероятностной характеристики.

При формировании оценок возможны четыре основных способа преобразования входных массивов выборочных данных, подлежащих усреднению:

1. классический способ преобразования, не учитывающий специфику представления входных данных и оперирующий лишь существенными отсчетами;

2. классический способ преобразования с учетом восстановленных пропущенных отсчетов;
3. способ прямого преобразования параметров модели случайного процесса на интервале дискретизации;
4. способ раздельного преобразования массивов значений и времен.

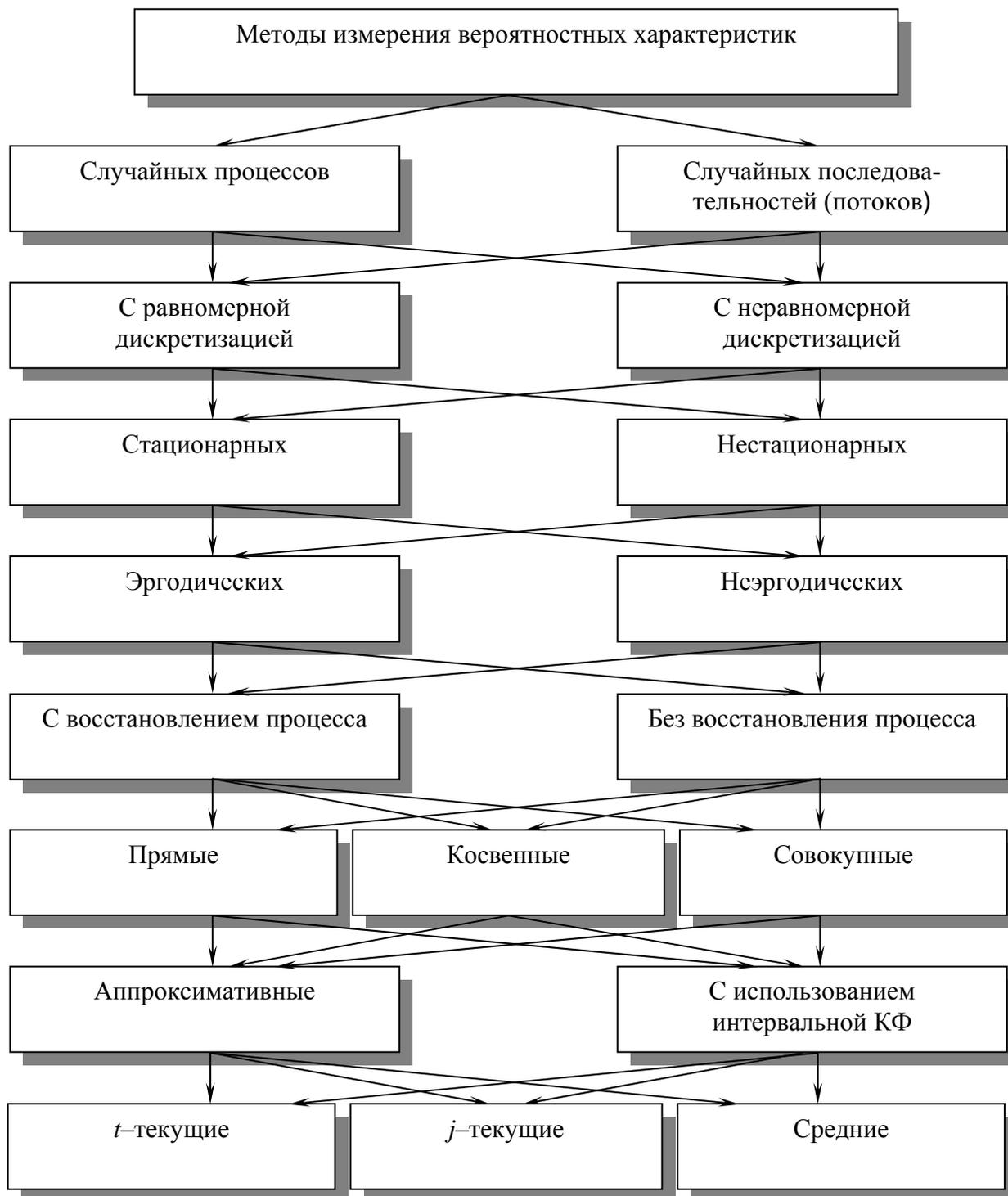


Рисунок 2.4. Классификация методов измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов

2.2. Применение классических алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов

Следует отметить, что классические алгоритмы оперируют лишь массивом измеренных значений x_{ji} . Отсюда ясно, что применение классических алгоритмов оценивания возможно лишь в двух случаях:

- при игнорировании полученной временной последовательности t_{ji} и использовании при формировании оценок только лишь массива существенных значений x_{ji} ;
- при использовании для оценки вероятностной характеристики регулярного временного ряда, полученного путём восстановления пропущенных отсчетов в промежуточных точках.

2.2.1. Оценка вероятностных характеристик без восстановления отсчетов в промежуточных точках

В ряде случаев возможна оценка вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов с применением классических алгоритмов. Это утверждение относится к оценке вероятностных характеристик, аргументом которых не является время (временной интервал) - т.е. к законам распределения и числовым характеристикам стационарных, эргодических неэквидистантных временных рядов. В этом случае полученная временная последовательность существенных отсчетов $\{t_{ji}\}_{j=1,2,..N}^{i=1,2,..M_j}$ игнорируется. При этом необходимо и достаточно определить лишь j - текущие характеристики неэквидистантного временного ряда (см. выражение (2.26)).

Приведем алгоритмы оценивания широко распространенных j -текущих вероятностных характеристик, которые в дальнейшем будут использоваться при сравнении статистических алгоритмов методом имитационного моделирования (см. раздел 9):

- начальных моментов:

$$\hat{\alpha}_{kj} = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji}^k; \quad (2.33)$$

- центральных моментов:

$$\hat{\mu}_{kj} = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left(x_{ji} - \hat{m}_{xj} \right)^k, \quad (2.34)$$

где \hat{m}_{xj} - оценка математического ожидания;

- плотностей распределения вероятностей:

$$\hat{f}_{xj}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (-\infty < x < x_{\min}); \\ \frac{1}{\Delta x M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{ji}, & \text{если } (x_{\min} \leq x_{ji} \leq x_{\max}); \\ 0, & \text{если } (x_{\max} < x < \infty), \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\text{где } \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{x_{ji} - x_{\min}}{\Delta x} \right] = J; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Δx - ширина дифференциального коридора;

$$x_{ji} \in [x_{\min}, x_{\max}];$$

$$J = 0, 1, \dots, J_{\max} \text{ ж}$$

$$J_{\max} = \text{ent} \left[\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x} \right].$$

- функций распределения:

$$\begin{cases} \hat{F}_{xj}(x) = 0, \text{ если } (-\infty < x < x_{\min} + 0,5\Delta x); \\ \hat{F}_{xj}[x_{\min} + (J+1)\Delta x] = \hat{F}_{xj}[x_{\min} + J\Delta x] + \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{ji}, \text{ если } (x_{\min} \leq x_{ji} \leq x_{\max}); \\ \hat{F}_{xj}(x) = 1, \text{ если } (x_{\max} < x < \infty). \end{cases} \quad (2.36)$$

По найденным оценкам возможно определение и других числовых характеристик неэквидистантного временного ряда.

Следует подчеркнуть, что найденные оценки плотности и функции распределения вероятности в дальнейшем подвергаются процедуре выравнивания, которая заключается в теоретическом подборе кривой распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение [33].

2.2.2. Оценка вероятностных характеристик с восстановлением отсчетов в промежуточных точках

Если известна модель восстановления случайной последовательности на интервале наблюдения, то после её восстановления в пропущенных точках возможно применение классических алгоритмов оценивания любой вероятностной характеристики.

Для восстановления пропущенных отсчетов случайной последовательности воспользуемся выражением:

$$x_{jl}^{(B)} = x_j^{(B)}[(1-1)\Delta t_0] = \sum_{i=1}^{M_j} \left\{ x_j[(1-1)\Delta t_0] \delta_{ji} [(1-1)\Delta t_0 - t_{ji}] + x_j^{(M)}[(1-1)\Delta t_0] [1 - \delta_{ji} [(1-1)\Delta t_0 - t_{ji}]] \right\}, \quad (2.37)$$

$$(l = 1, 2, \dots, M)$$

где $x_j[(1-1)\Delta t_0] = x_j(t_{ji})$ - значение существенного отсчета в точке $(1-1)\Delta t_0 = t_{ji}$;

$x_j^{(M)}[(1-1)\Delta t_0]$ - модельное (восстановленное) значение случайной последовательности в точке $(1-1)\Delta t_0$,

$$\delta_{ji} [(1-1)\Delta t_0 - t_i] = \begin{cases} 1, & \text{если } (1-1)\Delta t_0 = t_i; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$M = \text{ent} \left[\frac{t_{Mj}}{\Delta t_0} \right] + 1.$$

Коэффициент сжатия неэквидистантного временного ряда равен

$$k_{\text{сж}} = \frac{M}{M_j}.$$

Следует подчеркнуть, что для восстановления пропущенных отсчетов временной последовательности, как правило, применяются модели восстановления в виде степенного ряда нулевого или первого порядков (см. таблицу 1.1). Основными причинами, ограничивающими порядок полинома, являются следующие:

- техническая сложность устройств передачи и обработки сигналов;
- несущественное увеличение $k_{\text{сж}}$ при использовании моделей высокого порядка;
- уменьшение помехоустойчивости систем обработки данных;
- увеличение времени запаздывания в получении оценок при увеличении порядка модели восстановления сигнала.

Если по окончании эксперимента исследователь обладает совокупностью N реализаций на интервале наблюдения $T = M\Delta t_0$, то для оценки $\hat{\Theta}_t, \hat{\Theta}_j, \hat{\Theta}_{\text{ср}}$ вероятностных характеристик можно воспользоваться выражениями (2.25) - (2.27).

Таким образом, формулы (2.33) - (2.36) с учетом замены x_{ji} на $x_{jl}^{(B)}$ примут вид:

$$\hat{\alpha}_{kj} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M x_{jl}^{(B)2}; \quad (2.38)$$

$$\hat{\mu}_{kj} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \left(x_{jl}^{(B)} - \hat{m}_{xj} \right)^k; \quad (2.39)$$

$$\hat{f}_{xj}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (-\infty < x < x_{\min}); \\ \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=1}^M \delta_{jl}, & \text{если } (x_{\min} \leq x_{jl}^{(B)} \leq x_{\max}); \\ 0, & \text{если } (x_{\max} < x < \infty), \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\text{где } \delta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{x_{jl}^{(B)} - x_{\min}}{\Delta x} \right] = J; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

- функций распределения:

$$\hat{F}_{xj}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (-\infty < x < x_{\min} + 0,5\Delta x); \\ \sum_{l=1}^M \delta_{jl}, & \text{если } (x_{\min} \leq x_{jl}^{(B)} \leq x_{\max}); \\ 1, & \text{если } (x_{\max} < x < \infty). \end{cases} \quad (2.41)$$

Подход с восстановлением пропущенных отсчетов дает возможность оценивать и функциональные вероятностные характеристики.

В качестве примера приведем алгоритм оценки j -текущей корреляционной функции:

$$\hat{K}_{xj} = \frac{1}{M-J-1} \sum_{l=1}^{M-J} x_{jl}^{(B)} x_{j,l+J}^{(B)} \quad (2.42)$$

где $J = 0, 1, \dots, J_{\max}$.

Как видно из приведенных примеров, применение классических алгоритмов для оценки вероятностных характеристик восстановленной временной последовательности ничем не отличается от соответствующих оценок регулярной временной последовательности. Отличие проявляется лишь при анализе погрешностей оценивания. Это отличие объясняется тем, что при формировании оценок вероятностных характеристик используются **восстановленные** значения временной последовательности в промежуточных точках, отличающиеся от действительных значений. Количество таких значений равно $(M - M_j)$.

2.2.3. Оценка вероятностных характеристик с автоматическим восстановлением пропущенных отсчетов в промежуточных точках

Применение метода возможно при преднамеренной неравномерной дискретизации с известным алгоритмом восстановления информации на интервале дискретизации, например, адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации. Как правило, при этом используются полиномиальные модели нулевого и первого порядка (см. табл.1.1), требующие для реализации устройств сжатия данных сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью [4, 37], хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн-аппроксимация.

Следует подчеркнуть, что для синтеза алгоритмов измерения практически не имеет значения вид модели, критерии, по которым определяются ее параметры, влияющие только на сложность алгоритма и его метрологические характеристики, поэтому представляется целесообразным рассмотреть синтез аппроксимативных алгоритмов статистических измерений (ААСИ) с использованием полиномиальных моделей нулевого и первого порядка.

Сущность метода, как следует из его определения, заключается в замене участка реализации случайного процесса на интервале дискретизации его моделью и выполнении необходимых преобразований над ее параметрами в соответствии с выражениями (2.2)-(2.4), определяемыми видом оператора усреднения.

ААСИ с усреднением по совокупности, соответствующие выражению (2.2), для измерения t -текущих значений типовых вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации нестационарных случайных процессов приведены в таблице 2.1.

ААСИ с усреднением по времени, соответствующие выражению (2.3), для измерения j -текущих оценок математического ожидания, второго начального момента (дисперсии при центрированной входной последовательности) и спектральной плотности рассмотрены в [147], а в [147] приведены упрощенные алгоритмы оценки мате-

математического ожидания, дисперсии и эксцесса для идеальной АВД нулевого порядка, использующие условие фиксации i -го существенного отсчета:

$$|x_{j,i-1} - x_{ji}| = \varepsilon. \quad (2.43)$$

Аппроксимативные алгоритмы t -текущей оценки вероятностных характеристик

Таблица 2.1

№	Алгоритм измерения
1	$\hat{\alpha}_{mt}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji}^m \delta_{ji}, \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1}; \\ 0, & \text{если нет;} \end{cases} (n=0)$
2	$\hat{\alpha}_{mt}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^m C_m^s a_{j0i}^{m-s} a_{jli} t^s \delta_{ji}; (n=1)$
3	$\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{ji} \sum_{l=0}^L x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}$
4	$\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} [a_{j0i} + a_{jli} t] \delta_{ji} \sum_{l=0}^L [a_{j0,i+l} + a_{jl,i+l}(t + \tau)] \delta_{j,i+l}$
5	$\begin{cases} \hat{K}_{xyt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jx}} x_{ji} \delta_{ji}^x \sum_{l=0}^L y_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^y \\ \hat{K}_{yxt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jy}} y_{ji} \delta_{ji}^y \sum_{l=0}^L x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^x \end{cases}$
6	$\hat{R}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{ji} \sum_{l=0}^L \text{sign } x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}$
7	$\begin{cases} \hat{R}_{xyt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jx}} x_{ji} \delta_{ji}^x \sum_{l=0}^L \text{sign } y_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^y \\ \hat{R}_{yxt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jy}} y_{ji} \delta_{ji}^y \sum_{l=0}^L \text{sign } x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^x \end{cases}$
8	$\hat{P}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \delta_{ji} \sum_{l=0}^L \text{sign } x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}$
9	$\begin{cases} \hat{P}_{xyt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jx}} \text{sign } x_{ji} \delta_{ji}^x \sum_{l=0}^L \text{sign } y_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^y \\ \hat{P}_{yxt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{jy}} \text{sign } y_{ji} \delta_{ji}^y \sum_{l=0}^L \text{sign } x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^x \end{cases}$
10	$\hat{G}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{ji} - \sum_{l=0}^L x_{j,i+l} \delta_{j,i+l} \right $
11	$\hat{S}_{xt}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{ji} - \sum_{l=0}^L x_{j,i+l} \delta_{j,i+l} \right]^2$

В работе [147] предлагается устройство для измерения плотности распределения мгновенных значений сигнала, представленного адаптивной выборкой, без предварительного восстановления промежуточных значений сигнала, основанное на предположении близости к линейному характеру изменения сигнала между соседними существенными отсчетами, что выполняется с достаточной для практики точностью для малых значений ε .

Дальнейшее развитие этот метод получил в работах, выполненных под руководством и при участии автора, для измерения различных вероятностных характеристик [21,108] (см. табл.2.2).

В качестве примера рассмотрим синтез мультипликативного ААСИ взаимной корреляционной функции (ВКФ) для полиномиальных моделей нулевого порядка [108] (см. рис.2.5).

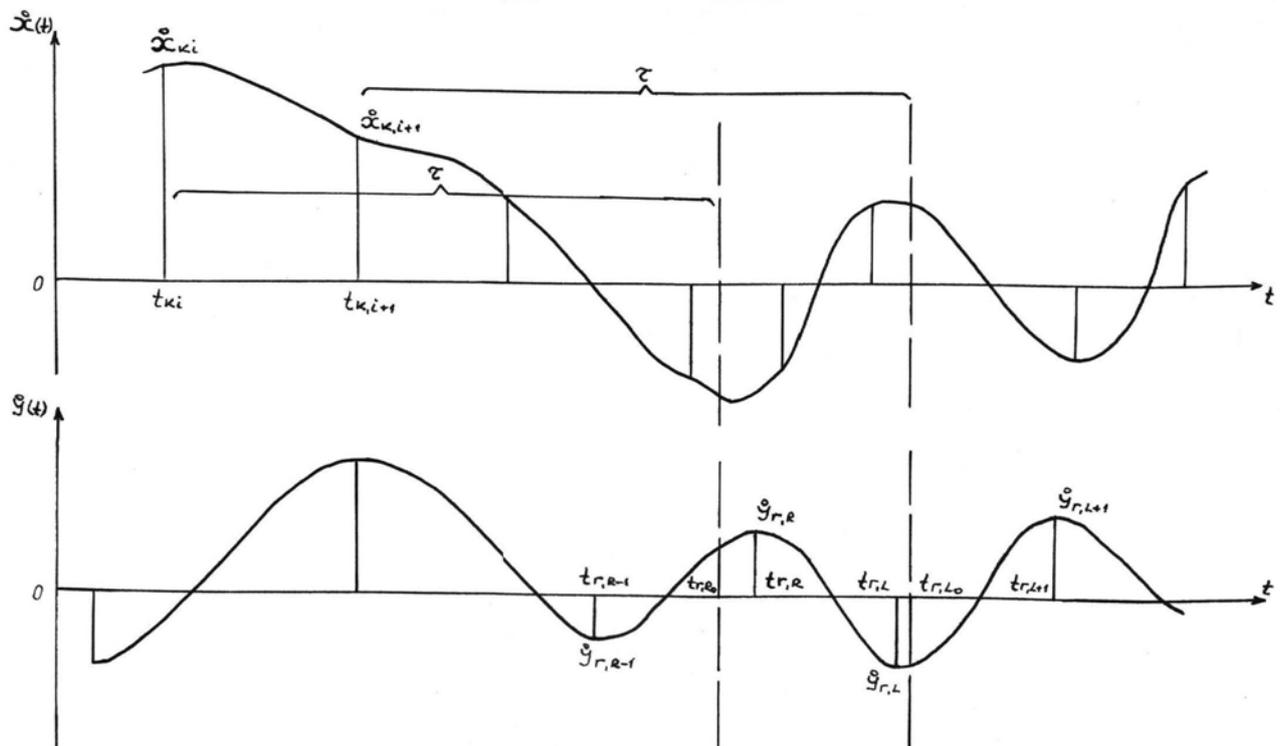


Рисунок 2.5. К синтезу ААСИ j -текущей взаимной корреляционной функции

В этом случае оценка правой ветви ВКФ с учетом выражения (2.3) определяется следующим образом

$$\hat{K}_{x_j y_r}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M_{xj}-1} \int_{t_{xji}}^{t_{xj,i+1}} x_j^{(M)}(t) y_r^{(M)}(t + \tau) dt, \quad (2.44)$$

где $T = \min\{T_k^{(x)}, T_r^{(y)}\}$.

$$\text{Для АД при } n=0 \begin{cases} x_j^{(M)}(t) = x_{ji} \delta_{ki}; \\ y_r^{(M)}(t) = y_{rm} \delta_{rm}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Аппроксимативные алгоритмы j-текущей оценки вероятностных характеристик
Таблица 2.2

№	Алгоритм измерения
1	$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m (t_{j,i+1} - t_{ji});$
2	$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{(m+1)T} \sum_{i=1}^{Mj-1} (t_{j,i+1} - t_{ji}) \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s;$
3	$\hat{K}_{xj}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} x_{jm} (t_{j,m+1} - t_{jm}),$ где $\left\{ \begin{array}{l} t_{j,R-1} \leq t_{ji} + \tau = t_{jR0} < t_{jR} \\ t_{jL} \leq t_{j,i+1} + \tau = t_{jL0} < t_{j,L+1} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} t_{j,R0+1} = t_{jR} \\ t_{j,L0-1} = t_{jL} \end{array} \right. ;$
4	$\hat{K}_{xjyr}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mxj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} y_{rm} (t_{r,m+1}^y - t_{rm}^y),$ где $\left\{ \begin{array}{l} t_{r,R-1}^y \leq t_{ji}^x + \tau = t_{rR0}^y < t_{jR}^y \\ t_{jL}^x \leq t_{j,i+1}^x + \tau = t_{jL0}^x < t_{j,L+1}^x \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} t_{r,R0+1}^y = t_{rR}^y \\ t_{r,L0-1}^y = t_{rL}^y \end{array} \right. ;$ $\hat{K}_{yrxj}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{Myr-1} y_{ri} \sum_{i=R0}^{L0-1} x_{im} (t_{j,i+1}^x - t_{ji}^x),$ где $\left\{ \begin{array}{l} t_{j,R-1}^x \leq t_{ri}^y + \tau = t_{jR0}^x < t_{jR}^x \\ t_{jL}^x \leq t_{j,i+1}^y + \tau = t_{jL0}^x < t_{j,L+1}^x \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} t_{j,R0+1}^x = t_{jR}^x \\ t_{j,L0-1}^x = t_{jL}^x \end{array} \right. ;$
5	$\hat{R}_{xj}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} \text{sign } x_{jm} (t_{j,m+1} - t_{jm})$
6	$\hat{P}_{xj}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mj-1} \text{sign } x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} \text{sign } x_{jm} (t_{j,m+1} - t_{jm})$

Тогда

$$\hat{K}_{xjyr}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mxj-1} x_{ji} \int_{t_{xji} + \tau}^{t_{xj,i+1} + \tau} y_r^{(m)}(t) dt. \quad (2.46)$$

Пусть пределы интегрирования в выражении (2.41) находятся в диапазонах

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{r,R-1}^y \leq t_{ji}^x + \tau = t_{rR0}^y < t_{jR}^y \\ t_{jL}^x \leq t_{j,i+1}^x + \tau = t_{jL0}^x < t_{j,L+1}^x \end{array} \right. \quad (2.47)$$

С учетом моделей процессов на интервале дискретизации (2.45) окончательно получим:

$$\hat{K}_{xjyr}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mxj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} y_{rm} (t_{r,m+1}^y - t_{rm}^y). \quad (2.48)$$

$$\text{Причем } \left\{ \begin{array}{l} t_{r,R0+1}^y = t_{rR}^y \\ t_{r,L0-1}^y = t_{rL}^y \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Аналогичным образом можно получить ААСИ для оценки левой ветви ВКФ:

$$\hat{K}_{y_{rxj}}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{M_{yr}-1} y_{ri} \sum_{i=R_0}^{L_0-1} x_{im} (t_{j,i+1}^x - t_{ji}^x), \quad (2.50)$$

где

$$\begin{cases} t_{j,R-1}^x \leq t_{ri}^y + \tau = t_{jR_0}^x < t_{jR}^x \\ t_{jL}^x \leq t_{j,i+1}^y + \tau = t_{jL_0}^x < t_{j,L+1}^x \end{cases}, \quad (2.51)$$

а

$$\begin{cases} t_{j,R_0+1}^x = t_{jR}^x \\ t_{j,L_0-1}^x = t_{jL}^x \end{cases}. \quad (2.52)$$

Следует отметить, что ААСИ для полиномиальных моделей первого порядка даже при измерении двухмерных характеристик громоздки и требуют при аппаратно - программной реализации значительных материальных средств [108], т.е. оказываются неконкурентноспособными по сравнению с другими алгоритмами, предназначенными для решения тех же задач.

ААСИ с усреднением по времени и совокупности для измерения средних значений вероятностных характеристик, как следует из выражений (2.3) и (2.4), могут быть получены из ААСИ при усреднении по времени.

Следует отметить, что отличительными особенностями ААСИ являются:

- использование для оценки вероятностных характеристик лишь существенных отсчетов и соответствующих меток времени;
- автоматическое восстановление пропущенных отсчетов неэквидистантного временного ряда за счет выполнения аналитических преобразований;
- возможность измерения значения функциональной вероятностной характеристики в произвольной точке.

На рис. 2.6 приведены необходимые пояснения к синтезу ААСИ для оценки j -текущей корреляционной функции.

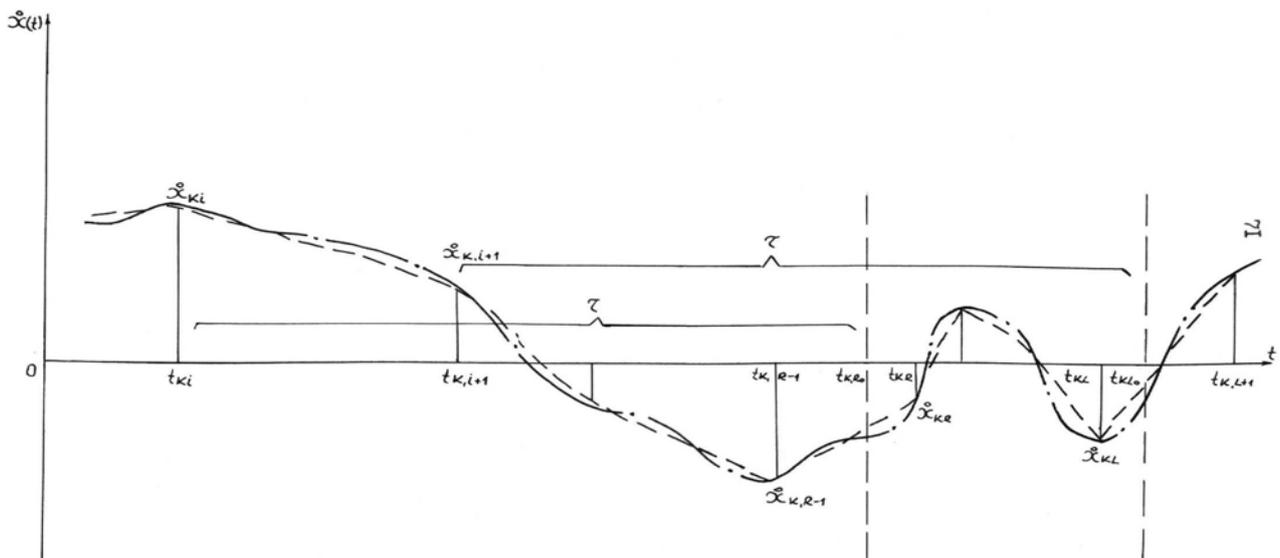


Рисунок 2.6. К синтезу ААСИ j -текущей корреляционной функции

2.3. Метод и алгоритмы корреляционного анализа неэквилидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции

В соответствии с общей теорией статистических измерений выражение для оценки вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов примет вид [76]:

$$\mathcal{G}[X(t)] = S_d g \left\{ x_{ji}(t_{ji}) \right\}_{j=1,2,\dots,N}^{i=1,2,\dots,M_j}$$

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов от классических алгоритмов:

1. x_{ji} , t_{ji} и M_j являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования $g[]$, учитывающий специфику представления входных данных x_{ji} , t_{ji} и M_j ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения S_d .

При оценке корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов, аргументом которых являются t , t' или τ , необходимо учитывать нерегулярность временного ряда, так как $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$. В этом случае применение классических алгоритмов корреляционного анализа без восстановления пропущенных отсчётов невозможно - получится неверный результат.

Предположим, что в результате эксперимента получена совокупность центрированных неэквилидистантных временных рядов (в противном случае ряды необходимо предварительно центрировать):

$$\left[\begin{array}{c} \circ \\ x_{ji}(t_{ji}) \end{array} \right]_{j=1,\dots,N}^{i=1,\dots,M_j} \quad (2.53)$$

Отметим, что длительность j -реализации ряда

$$T_j = \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \quad (2.54)$$

Восстановив пропущенные отсчёты по какому-либо алгоритму восстановления (пока неважно по какому), получим регулярный временной ряд с интервалом дискретизации $\Delta\tau$ между отсчётами:

$$\left[\begin{array}{c} \circ \\ x_{jn}^{(M)} \end{array} \right]_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M_j^*} \quad (2.55)$$

где $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau]$ - модельное значение регулярного временного ряда;

$M_j^* = \text{ent} \left[\frac{T_j}{\Delta\tau} \right]$ - объём выборки j -ой реализации восстановленного ряда.

В каждом j -ом ряду случайным образом будут расположены и существенные, и модельные отсчеты, причём, в ряде случаев модельные и существенные значения будут совпадать - $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau] = \overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$.

Пусть требуется найти **j -текущую** оценку корреляционной функции стационарного неэквилидистантного временного ряда с учетом восстановления пропущенных

отсчётов. В этом случае при оценке корреляционной функции возможны четыре варианта произведений существенных и модельных отсчётов. Для однозначности введем индикатор состояния $\delta_{jn,k}$, который в зависимости от выполнения некоторых условий принимает одно из двух значений: 0 или 1. Тогда

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[x_{jn}^{(M)} x_{j,n+J}^{(M)} \right] = M \left[x_{jn} x_{j,n+J} \delta_{jn,1} + x_{jn} x_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,2} + x_{jn}^{(M)} x_{j,n+J} \delta_{jn,3} + x_{jn}^{(M)} x_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,4} \right], \quad (2.56)$$

$$\text{где } \delta_{jn,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{jn} = x_{jn} \cap x_{j,n+J} = x_{j,n+J}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,2} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{jn}^{(M)} = x_{jn} \cap x_{j,n+J}^{(M)} = x_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,3} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{jn}^{(M)} = x_{jn}^{(M)} \cap x_{j,n+J}^{(M)} = x_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,4} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{jn}^{(M)} = x_{jn}^{(M)} \cap x_{j,n+J}^{(M)} = x_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В том случае, когда восстановление пропущенных отсчётов невозможно или алгоритм восстановления неизвестен, необходимо обрабатывать только существенные отсчёты неэквидистантного временного ряда. Тогда $\delta_{jn,1} = 1$, а $\delta_{jn,2} = \delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$, и корреляционная функция будет определяться выражением:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[x_{jn} x_{j,n+J} \right]. \quad (2.57)$$

Полученное выражение, из-за случайного характера расположения существенных отсчетов в восстановленном ряду, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как значение индекса n не определяет датирование отсчётов неэквидистантного временного ряда. Напомним, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса i не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке.

Заметим, что значение индикатора состояния $\delta_{jn,1} = 1$ только в том случае, когда на временном интервале $J\Delta t$ находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда $x_{ji}(t_{ji}) = x_{jn}$ и $x_{j,i+s}(t_{j,i+s}) = x_{j,n+J}$, где s - целая случайная величина, характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины s при оценке корреляционной функции находится в диапазоне $(0, L \leq J_{\max})$, при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

Таким образом, необходимо ввести новый индикатор состояния, который бы однозначно определял отсчёт $x_{j,i+s}(t_{j,i+s})$, отстоящий от отсчёта $x_{ji}(t_{ji})$ на временном интервале $J\Delta t$. Так как в общем случае t_{ji} являются действительными, а не це-

лыми числами, определим индикатор состояния с использованием оператора выделения целой части $\text{ent}[\]$ в виде:

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{ent}\left[\frac{t_{j,i+s} - t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5\right] = J \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.58)$$

Выражение для определения отсчёта ряда с учётом (2.8) и фильтрующего свойства индикатора состояния (аналогичного фильтрующему свойству δ -функции) примет вид:

$$\overset{\circ}{x}_{j,i}(t_{ji} + J\Delta\tau) = \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}, \quad (2.59)$$

С учётом (2.9) выражение (2.7) представим в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]. \quad (2.60)$$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (2.10) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \leq M_j \leq M_j^*. \quad (2.61)$$

Это значение d используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (2.31), и (2.61) выражение (2.60) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (2.62)$$

Разделив числитель и знаменатель в (2.62) на M_j , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (2.63)$$

Выражение

$$\mathbb{E}_{x_j}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}. \quad (2.64)$$

является **j -текущей оценкой интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$ [108, 206].

Отсюда видно, что выражение (2.62) отличается от классического алгоритма **j -текущей** оценки корреляционной функции:

1. видом функционального преобразования $g \left[\overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]$, учитываю-

щего специфику представления входных данных $\overset{\circ}{x}_{ji}$, $\overset{\circ}{t}_{ji}$, L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **новый класс – класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Таким образом, j -текущая оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции потока отсчётов неэквидистантного временного ряда. Назовем этот алгоритм **алгоритмом с использованием интервальной корреляционной функции (АИИКФ)**, а метод - **косвенным методом измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации $\Delta\tau$ $M_j = M$ и, как видно из выражения (2.58),

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{если } s \neq J \end{cases} \quad (2.65)$$

Из выражения (2.61) следует, что $d = M - J$ и

$$\overset{\circ}{\mathbb{E}}_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1 \quad (2.66)$$

Подставив выражение (2.65) в выражение (2.62), окончательно получим:

$$\overset{\circ}{\mathbb{K}}_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \overset{\circ}{x}_{ji} \overset{\circ}{x}_{j,i+J} \quad (2.67)$$

Отметим, выражения (2.67), является **частным случаем** выражения (2.62) или (2.63) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм j -текущей оценки корреляционной функции**.

При синтезе аппаратных, аппаратно-программных средств j -текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда или интервальной корреляционной функции потока отсчётов целесообразно использовать выражение (2.62). При теоретических же исследованиях, особенно при анализе погрешностей оценивания, - выражение (2.63), так как оно в явном виде содержит интервальную корреляционную функцию, что позволяет использовать при решении ряда задач математический аппарат, разработанный для анализа результатов косвенных измерений [107].

На основе выражения (2.62) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных. Следует заметить, что необходимо оценивать две ветви взаимных корреляционных функций. При оценке правой ветви $\overset{\circ}{x}_{j,i+s} = \overset{\circ}{y}_{j,i+s}$, а левой - $\overset{\circ}{x}_{ji} = \overset{\circ}{y}_{ji}$.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (2.62) к виду:

$$\mathfrak{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} g_1[x_{ji}] \sum_{s=0}^L g_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (2.68)$$

где $g_1[]$ и $g_2[]$ - функциональные преобразования x_{ji} и $x_{j,i+s}$ соответственно. Отметим, что в некоторых случаях функциональные преобразования могут совпадать.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции j -текущей оценки различных корреляционно-структурных функций, полученные на основе алгоритма (2.68), представлены в таблице 2.3.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции j -текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 2.3

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{F}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
3	$\mathfrak{C}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right }{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left[x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]^2}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
5	$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{xyj}(J) = \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{Mxj} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \quad \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \mathfrak{E}_{yxj}(J) = \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{Myj} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \quad \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \end{array} \right.$

6	$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{K}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^{L} x_{ji} y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^{L} \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathbb{K}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^{L} y_{ji} x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^{L} \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$
---	--

На основании общей теории оценивания определим **t-текущую** оценку корреляционной функции неэквилидистантного ряда с использованием только существенных отсчётов. С учетом принятых обозначений в (2.56) и (2.57) выражение представим в виде:

$$K_{xt}(\zeta, \zeta + J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \right], \quad (2.69)$$

где $t = \zeta \Delta \tau$

Полученное выражение, как и в случае j-текущей оценки, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как второй индекс не определяет датирование неэквилидистантного временного ряда, т.е. $t_{jn} \neq t_{ji}$ при $n=i$.

При анализе t-текущих оценок корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов, в первую очередь, необходимо в j-ой последовательности определить наличие существенного отсчета $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$ в точке $t = t_{ji} = \zeta \Delta \tau$. Для решения этой задачи введем индикатор состояния:

$$\delta_{\zeta, ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{t_{ji}}{\Delta \tau} + 0,5 \right] = \zeta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.70)$$

Только в случае, когда индикатор состояния $\delta_{\zeta, ji} = 1$, можно выполнять функциональное преобразование в (2.69) и искать отсчет, находящийся на временном интервале $J \Delta \tau$ от отсчёта $\overset{\circ}{x}_{ji}(\zeta \Delta \tau)$.

Так как выражение для определения отсчёта ряда $\overset{\circ}{x}_{j,i}(t_{ji} + J \Delta \tau)$, находящегося на временном интервале $J \Delta \tau$ от отсчёта $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$, определяется выражением (2.56), то выражение (2.69) с учётом (2.70) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = M \left[\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^{L} \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right], \quad (2.71)$$

а количество произведений существенных отсчётов в выражении (2.69) будет равно

$$d = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s} < N. \quad (2.72)$$

Это значение d , как и в случае j -текущих оценок, используется для усреднения при получении t -текущих оценок корреляционных функций. Тогда, с учётом выражения (2.29), (2.71) и (2.72) выражение для t -текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j, i+s} \delta_{j, i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}}. \quad (2.73)$$

Заметим, что выражение (2.73) отличается от классического алгоритма t -текущей оценки корреляционной функции и j -текущей оценки (2.62):

1. видом функционального преобразования $g \left[\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j, i+s} \delta_{j, i+s} \right]$, учитывающего специфику представления входных данных x_{ji} , t_{ji} , M_j , L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^N}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **новый класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Разделив числитель и знаменатель в (2.73) на N , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j, i+s} \delta_{j, i+s}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}}. \quad (2.74)$$

Знаменатель в выражении (2.74), представляющий собой функцию от $\zeta, \zeta + J$, характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$ от точки $t = \zeta\Delta\tau$, является t -текущей оценкой интервальной корреляционной функции [107. 108]:

$$\mathbb{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}. \quad (2.75)$$

Таким образом, алгоритм t текущей оценки корреляционной функции также относится классу алгоритмов с использованием интервальной корреляционной функции, синтезированных на основе косвенного метода измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.

На основе выражения (2.73) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (2.73) к виду:

$$\mathfrak{G}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} g_1[x_{ji} \delta_{\zeta,ji}] \sum_{s=0}^L g_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (2.76)$$

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки различных корреляционно-структурных функций, полученные на основе алгоритма (2.76), представлены в таблице 2.4.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 2.4

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{P}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \text{sign } x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
3	$\mathfrak{C}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta,ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} }{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{S}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} [x_{ji} \delta_{\zeta,ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
5	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta,ji}^x \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{xy}; & \delta_{j,i+s}^{xy} &= \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t_{j,i+s}^y - t_{ji}^x}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \mathfrak{E}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Myj} \delta_{\zeta,ji}^y \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{yx}; & \delta_{j,i+s}^{yx} &= \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t_{j,i+s}^x - t_{ji}^y}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$

№	Алгоритм измерения
6	$\begin{cases} \mathbb{K}_{xyj}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}} \\ \mathbb{K}_{yxj}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}} \end{cases}$

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации $\Delta\tau$, $M_j = M$,

$$\delta_{\zeta, ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \zeta; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.77)$$

а

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.78)$$

Из выражения (2.72) следует, что $d = N$ и

$$\mathbb{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1. \quad (2.79)$$

Окончательно получим

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{j\zeta} x_{j,\zeta+J}. \quad (2.80)$$

Отсюда видно, что выражение (2.80), является **частным случаем** выражения (2.73) или (2.74) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм t-текущей оценки корреляционной функции**.

При нахождения t-текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда из-за случайного характера объёма выборки j-реализации M_j необходимо иметь в виду, что для получения оценки по всей совокупности реализации, требуется выполнение условия:

$$(\zeta + J)\Delta\tau \leq \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji}. \quad (2.81)$$

Полученные результаты можно обобщить и для получения **средних** оценок корреляционных функций неэквидистантных временных рядов. Для этого необходимо полученные **j-текущие оценки усреднить по совокупности реализации**. Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции средней оценки корреляционно-структурных функций приведены в таблице 2.5.

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{E}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}$
3	$\mathfrak{F}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{G}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \left x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right }{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
5	$\mathfrak{S}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \left[x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]^2}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
6	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xycp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \quad \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \mathfrak{E}_{yxcp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \quad \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
7	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_{xycp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathfrak{K}_{yxcp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$

На основе косвенного метода оценивания с использованием интервальной корреляционной функции возможен синтез алгоритмов для оценки и других средних вероятностных характеристик [108].

2.4. Аппроксимативный метод и алгоритмы измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов

Сущность аппроксимативного метода, как следует из его определения, заключается в замене участка реализации случайного процесса на интервале дискретизации его моделью $x^{(M)}_{ji}(t_{ji})$ и выполнении необходимых функциональных преобразований над ее параметрами в соответствии с выражением:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g \left\{ x^{(M)}_{ji}(t_{ji}) \right\}_{j=1,2,\dots,N}^{i=1,2,\dots,M_j} \quad (2.82)$$

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов от классических алгоритмов:

1. x_{ji} , t_{ji} и M_j являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования $g[]$, учитывающий специфику представления входных данных $x^{(M)}_{ji}(t_{ji})$ и M_j ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения S_d .

Применение метода возможно при преднамеренной неравномерной дискретизации с известным алгоритмом восстановления информации на интервале дискретизации, например, адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации [108].

Предположим, что известна модель восстановления пропущенных отсчётов на i -интервале дискретизации j -ой реализации неэквидистантного временного ряда и требуется найти j -текущую оценку корреляционной функции. Положив в выражении (2.56) $\delta_{jn,1} = \delta_{jn,2} = 1$, а $\delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$, получим оценку корреляционной функции в виде:

$$\mathfrak{K}_{xj}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} + \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right] \quad (2.83)$$

Или

$$\mathfrak{K}_{xj}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right], \quad (2.84)$$

где $\overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \cup \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}$.

Заметим, что значение индикатора состояния $\delta_{jn,1} = \delta_{jn,2} = 1$ только в том случае, когда на временном интервале $J\Delta\tau$ находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji}) = \overset{\circ}{x}_{jn}$ и $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}(t_{j,i+s}) = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}$, где s - целая случайная величина, определяющая номер существенного отсчёта, для которого выполняется неравенство: $t_{j,i+s} \leq t_{ji} + J\Delta\tau < t_{j,s+i+1}$ и характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины s при оценке

корреляционной функции находится в диапазоне $(0, L \leq J_{\max})$, при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

В выражении (2.84) присутствует модельное значение, которое определяется, например, одним из выражений (1.34)-(1.40). В зависимости от сложности алгоритма восстановления процесса на интервале дискретизации можно получить алгоритм той или иной степени сложности. Наиболее простой алгоритм соответствует адаптивно-временной дискретизации при $n = 0$.

В этом случае

$$\overset{\circ}{x}_{j,i+s}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,i+s}, \text{ если } t_{j,i+s} \leq t_{ji} + J\Delta\tau < t_{j,s+i+1} \quad (2.85)$$

и выражение (2.84) приводится к виду

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{ji} \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \right]. \quad (2.86)$$

Для определения значения s воспользуемся фильтрующим свойством индикатора состояния. Тогда выражение (2.86) примет вид:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[\overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^* \right], \quad (2.87)$$

где $\delta_{j,i+s}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{j,i+s} \leq t_{ji} + J\Delta\tau < t_{j,i+s+1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (2.87) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^* < M_j. \quad (2.88)$$

Это значение d и используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (2.82), и (2.88) выражение (2.87) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}. \quad (2.89)$$

Разделив числитель и знаменатель в (2.89) на M_j , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}. \quad (2.90)$$

Выражение

$$\mathbb{E}_{xj}^*(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*. \quad (2.91)$$

является **j-текущей оценкой интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$.

Отсюда видно, что выражения (2.89) или (2.90) также отличаются от классического алгоритма **j-текущей** оценки корреляционной функции:

1. видом функционального преобразования $g \left[x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^* \right]$, учитываю-

щего специфику представления входных данных x_{ji} , t_{ji} , L и $\Delta\tau$;

2. видом оператора усреднения $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}$ и значением d ;

3. переходом алгоритма в **новый класс – класс косвенных алгоритмов**.

Так как j -текущая оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции, то этот алгоритм относится к классу **аппроксимативных алгоритмов с использованием интервальной корреляционной функции**, а метод – к **косвенным методам измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации $\Delta\tau$ $M_j = M$ и, как видно из выражения (2.88),

$$\delta_{j,i+s}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{если } s \neq J \end{cases} \quad (2.92)$$

Из выражения (2.61) следует, что $d = M - J$ и

$$\mathcal{E}_{xj}^*(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1. \quad (2.93)$$

Подставив выражение (2.93) в выражение (2.89), окончательно получим:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \quad (2.94)$$

Отметим, выражения (2.94), является **частным случаем** выражения (2.89) или (2.90) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм j-текущей оценки корреляционной функции**.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (2.89) к виду:

$$\mathcal{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} g_1[x_{ji}] \sum_{s=0}^L g_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*]}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}, \quad (2.95)$$

где $g_1[\]$ и $g_2[\]$ - функциональные преобразования x_{ji} и $x_{j,i+s}$ соответственно.

Заметим, что алгоритм (2.95), совпадая по структуре, отличается от косвенного алгоритма с использованием интервальной корреляционной функции j -текущей оценки корреляционной функции (2.68) лишь **индикатором состояния** $\delta_{j,i+s}^*$. Очевидно, что при оценке **t-текущей** и **средней** корреляционных функций, **отличие** аппроксимативных алгоритмов **при n=0** также будет заключаться лишь в **индикаторе**

состояния. Поэтому, для **аппроксимативных алгоритмов** справедливы все выражения, приведенные в таблицах 2.3-2.5, с учётом замены $\delta_{j,i+s}$ на $\delta_{j,i+s}^*$.

Заметим, что при формировании j -текущей оценки корреляционной функции используют, в соответствии с индикатором состояния (2.87), ближайший левый отсчет $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}$, попавший в коридор $t_{j,i+s} \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < t_{j,i+s+1}$. Это, в свою очередь, приводит к увеличению погрешности от смещенности оценки корреляционной функции. Для устранения этого недостатка введем индикаторы состояния, которые определим следующим образом:

$$\delta_{j,i+s}^{*(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{j,i+s} \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < (t_{j,i+s} + t_{j,i+s+1})/2; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad (2.96)$$

$$\delta_{j,i+s}^{*(2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (t_{j,i+s} + t_{j,i+s+1})/2 \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < t_{j,i+s+1}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.97)$$

С помощью введенных индикаторов состояния можно организовать процесс получения оценки корреляционной функции таким образом, чтобы в качестве множителя всегда выступал ближайший отсчет неэквидистантного временного ряда $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s})$ или $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s+1})$, отстоящий от отсчёта $\overset{\circ}{x}(t_{j_i})$ на временном интервале $J\Delta\tau$.

Алгоритм j -текущей оценки (2.90) в этом случае примет вид:

$$\hat{K}_{x_j}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{j_i} \left[\sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s+1} \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left[\sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]}. \quad (2.98)$$

Выражение

$$\mathcal{E}_{x_j}^{*(1)}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left[\sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right] \quad (2.99)$$

является **j -текущей оценкой интервальной корреляционной функции, но другой**, и также характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале $J\Delta\tau$.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (2.98) к виду:

$$\mathcal{G}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{g}_1[\overset{\circ}{x}_{j_i}] \left\{ \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{g}_2[\overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^{*(1)}] + \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{g}_2[\overset{\circ}{x}_{j,i+s+1} \delta_{j,i+s+1}^{*(2)}] \right\}}{\sum_{i=1}^{M_j} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s+1}^{*(2)} \right\}}. \quad (2.100)$$

Выражение (2.100) может быть положено в основу синтеза алгоритма любой j -текущей корреляционно-структурной характеристики, когда в формировании оценки возможно использование ближайшего отсчёта неэквидистантного временного ряда $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s})$ или $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s+1})$, отстоящего от отсчёта $\overset{\circ}{x}(t_{j_i})$ на временном интервале $J\Delta\tau$ (см. таблицу 2.6).

Аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции j-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 2.6

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
2	$\mathfrak{F}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \text{sign } x_{ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
3	$\mathfrak{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left x_{ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right }{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
4	$\mathfrak{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left[x_{ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
5	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyj}(J) &= \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \\ \mathfrak{E}_{yxj}(J) &= \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \end{aligned} \right.$ $\delta^{*xy(1)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } t^y_{j,i+s} \leq t^x_{ji} + J\Delta\tau < (t^y_{j,i+s} + t^y_{j,i+s+1})/2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\delta^{*xy(2)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } (t^y_{j,i+s} + t^y_{j,i+s+1})/2 \leq t^x_{ji} + J\Delta\tau < t^y_{j,i+s+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\delta^{*yx(1)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } t^x_{j,i+s} \leq t^y_{ji} + J\Delta\tau < (t^x_{j,i+s} + t^x_{j,i+s+1})/2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\delta^{*yx(2)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } t^x_{j,i+s} \leq t^y_{ji} + J\Delta\tau < (t^x_{j,i+s} + t^x_{j,i+s+1})/2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

6	$\mathfrak{K}_{xyj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mxj} x_{ji} \left[\sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s} \right]}{\sum_{i=1}^{Mxj} \left[\sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s} \right]}$ $\mathfrak{K}_{yxj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Myj} y_{ji} \left[\sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s} \right]}{\sum_{i=1}^{Myj} \left[\sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s} \right]}$
---	---

На основании результатов, полученных в подразделе 2.3, приведем аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции для оценки t-текущих корреляционно-структурных характеристик (см. таблицу 2.7).

Аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 2.7

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}$
2	$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
3	$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
4	$\mathfrak{F}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \text{sign} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
5	$\mathfrak{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \left x_{ji} \delta_{\zeta, ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right }{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$

5	$\mathfrak{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
6	$\mathfrak{F}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \left[x_{ji} \delta_{\zeta, ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
7	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta^x_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \\ \mathfrak{E}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta^y_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \end{aligned} \right.$
8	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \\ \mathfrak{K}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \end{aligned} \right.$
9	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \\ \mathfrak{R}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \end{aligned} \right.$

10	$\mathfrak{S}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{xj}} \left[x_{ji} \delta_{\zeta, ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$ $\mathfrak{S}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{yj}} \left[y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
----	---

2.5. Дескрипторный метод анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов

Из анализа аппроксимативных алгоритмов и алгоритмов с использованием интервальных корреляционных функций видно, что они сложнее классических алгоритмов, используемых для измерения аналогичных характеристик после восстановления промежуточных отсчетов, требуют большего времени на обработку одного отсчета. Правда, следует подчеркнуть, что применение классических алгоритмов возможно только при известной модели сигнала на интервале дискретизации, в то время как АИИКФ свободны от этого недостатка.

К современным статистическим анализаторам, реализующим разработанные алгоритмы, предъявляются повышенные требования по быстродействию, позволяющие расширить либо частотный диапазон, либо функциональные возможности. Особенно критичны по быстродействию алгоритмы, реализуемые с помощью аппаратно-программных средств, обладающих сравнительно низким быстродействием по сравнению со специализированными анализаторами, построенными на «жесткой» логике. Из разнообразных методов повышения быстродействия предпочтение следует отдать алгоритмическим методам, требующим при прочих равных условиях меньше материальных затрат [129].

Одним из таких методов является дескрипторный метод, суть которого заключается в следующем: при формировании оценки ААСИ интервал времени между существенными отсчетами используется для сортировки (адресации) преобразованных элементов массивов.

Применение этого метода возможно при усреднении по времени и по времени и совокупности.

Рассмотрим ААСИ при усреднении по времени $\hat{\alpha}_{mj}$ для полиномиальной модели нулевого порядка (см. табл. 2.2)

$$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m (t_{j,i+1} - t_{ji}). \quad (2.101)$$

При реализации алгоритма с помощью аппаратно-программных средств преобразуем i -ый временной интервал в соответствии с выражением:

$$l_{ji} = \text{ent} \left[\frac{t_{j,i+1} - t_{ji}}{\Delta t_0} + \lambda \right]. \quad (2.102)$$

Тогда с учетом (2.102) выражение для оценки $\hat{\alpha}_{mj}$ приведем к виду:

$$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m l_{ji}, \quad (2.103)$$

где $N = \text{ent} \left[\frac{T}{\Delta t_0} \right]$ - эквивалентное число отсчетов временного ряда при равномерной дискретизации с интервалом Δt_0 .

В выражении (2.103) сгруппируем множители, содержащие один и тот же временной интервал $l \in [1, L_{\max}]$, где L_{\max} - максимальное значение временного интервала:

$$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{L_{\max}} l \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \delta_{j,i+1}, \quad (2.104)$$

где $\delta_{j,i+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{j,i+1} = l; \\ 0, & \text{если } l_{j,i+1} \neq l. \end{cases}$

Из выражения (2.104) видно, что число операций умножения уменьшается в $\frac{M_k - 1}{L_{\max}}$ раз при тех же погрешностях оценки $\hat{\alpha}_{mj}$.

Достигается это за счет увеличения требуемого объема памяти на $(L_{\max}-1)$ ячейку для хранения промежуточных результатов. Следует подчеркнуть, что при этом уменьшается как время обработки одного отсчета, т.к. время выполнения операции косвенной адресации, как правило, меньше времени умножения, так и общее время решения задачи при предварительной буферизации входных данных без увеличения погрешностей. Численные значения L_{\max} зависят как от вида неравномерной дискретизации, закона распределения, КФ входного процесса, так и от погрешности восстановления.

Отметим, что дескрипторные алгоритмы относятся к классу параллельно-последовательных алгоритмов [108].

В табл. 2.8 приведены результаты определения L_{\max} методом имитационного моделирования для адаптивно-временной дискретизации предсказателем нулевого порядка с плавающей апертурой для случайных процессов с нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ и различных значениях k_a , k_ε и γ .

Дополнительное число ячеек памяти, необходимое для реализации дескрипторного ААСИ

Таблица 2.8

k_a/k_ε	$\gamma = \varepsilon/\sigma_x$	L_{\max}
0/0	0,25	49
	0,50	35
0,5940/0,1569	0,25	126
	0,50	70
0,1234/-0,5700	0,25	64
	0,50	48

Продолжение таблицы 2.8

0,4646/-0,5106	0,25 0,50	61 59
-0,9865/	0,25 0,50	133 125
-1,7652	0,25 0,50	298 161

Из анализа результатов таблицы 2.8 видно, что наибольший эффект достигается для процессов, близких к нормальным.

Дескрипторные ААСИ вероятностных характеристик при усреднении по времени приведены в табл. 2.9, а при усреднении по времени и по совокупности - в табл. 2.10.

Дескрипторные алгоритмы j-текущей оценки вероятностных характеристик

Таблица 2.9

№	Алгоритм измерения
1	$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji}^m \delta_{j,i+1};$
2	$\hat{\alpha}_{mj} = \frac{1}{(m+1)N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mj-1} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s \delta_{j,i+1};$
3	$\hat{K}_{xj}(J) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} x_{jm} \delta_{j,m,i+1},$ <p>где $\delta_{j,m,i+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{t_{k,m} - t_{k,i}}{\Delta t_0} + 0,5 \right] = 1; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$</p>
4	$\hat{K}_{xjy}(J) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mxj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} y_{rm} \delta_{j,m,i+1},$ $\hat{K}_{yrxj}(J) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{Myr-1} y_{ri} \sum_{i=R0}^{L0-1} x_{im} \delta_{j,m,i+1},$
5	$\hat{R}_{xj}(J) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} \text{sign } x_{jm} \delta_{j,m,i+1}$
6	$\hat{P}_{xj}(J) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{Mj-1} \text{sign } x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} \text{sign } x_{jm} \delta_{j,m,i+1}$

№	Алгоритм измерения
1	$\hat{\alpha}_{\text{мсп}} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \delta_{j,i+1} ;$
2	$\hat{\alpha}_{\text{мсп}} = \frac{1}{(m+1)K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s \delta_{j,i+1} ;$
3	$\hat{K}_{\text{хсп}}(J) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji} \sum_{m=R_0}^{L_0-1} x_{jm} \delta_{j,m,i+1} ,$
4	$\hat{R}_{\text{хсп}}(J) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji} \sum_{m=R_0}^{L_0-1} \text{sign} x_{jm} \delta_{j,m,i+1}$
5	$\hat{P}_{\text{хсп}}(J) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} \text{sign} x_{ji} \sum_{m=R_0}^{L_0-1} \text{sign} x_{jm} \delta_{j,m,i+1}$

3. АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

3.1. Основные понятия и определения

Определение погрешностей результатов измерения и их характеристик составляет важнейший раздел метрологии. Объектом исследования при этом являются методы описания и количественного анализа методических погрешностей, а также методы экспериментального определения инструментальных и результирующих погрешностей [137-139].

В соответствии с определением представим погрешность j -го измерения в виде

$$\Delta \Theta_j[\hat{X}(t)] = \Theta_j[\hat{X}(t)] - \Theta[X(t)]. \quad (3.1)$$

Это выражение для полной погрешности состоит из составляющих, зависящих от свойств объекта измерений - процесса $X(t)$ и измеряемой характеристики $\Theta[X(t)]$, вида алгоритма измерений и особенностей реализации этого алгоритма [137]. Для выделения составляющих погрешности применяются различные подходы. Один из них основан на выборе в качестве классификационных признаков факторов, обуславливающих появление погрешностей, например: методические, инструментальные, из-за конечности объема выборки и т.д. При втором подходе за классификационные признаки принимаются виды погрешности, характер их проявления: систематическая и случайная погрешности, абсолютная, относительная, приведенная и т.д.

Изучение составляющих погрешностей, вызванных той или иной причиной, позволяет определить пути их уменьшения.

Представим погрешность результата j -го измерения в виде суммы методической $\Delta_M \Theta_j[\hat{X}(t)]$ и инструментальной $\Delta_{ин} \Theta_j[\hat{X}(t)]$ составляющих

$$\Delta \Theta_j[\hat{X}(t)] = \Delta_M \Theta_j[\hat{X}(t)] + \Delta_{ин} \Theta_j[\hat{X}(t)]. \quad (3.2)$$

Содержательное определение этих составляющих сводится к следующему: методические погрешности обусловлены несовершенством метода измерений, а инструментальные - несовершенством технических средств [2]:

$$\Delta_M \Theta_j[\hat{X}(t)] = L_M[X(t)] - \Theta[X(t)]; \quad (3.3)$$

$$\Delta_{ин} \Theta_j[\hat{X}(t)] = L_{ин}[X(t)] - L_M[X(t)], \quad (3.4)$$

где

L_M - алгоритм, положенный в основу измерительной процедуры;

$L_{ин}$ - алгоритм, реализуемый техническими средствами.

Выделим составляющие методической погрешности, обусловленные:

1. неадекватностью (смещенностью) -

$$\Delta_{на} = \Theta_j^{(1)}[X_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty] - \Theta[X(t)]; \quad (3.5)$$

2. конечностью объема выборки d -

$$\Delta_{\text{КВ}} = \hat{\Theta}_j^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d] - \hat{\Theta}_j^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty] \quad ; \quad (3.6)$$

3. конечностью числа каналов L -

$$\Delta_{\text{КК}} = \hat{\Theta}_j^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L] - \hat{\Theta}_j^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d] \quad ; \quad (3.7)$$

4. дискретизацией -

$$\Delta_{\text{д}} = \hat{\Theta}_j^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L] - \hat{\Theta}_j^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]; \quad (3.8)$$

где

$$l_{ji} = \text{ent} \left[\frac{t_{ji}}{\Delta t_0} + \lambda \right];$$

Δt_0 - интервал дискретизации.

5. квантованием

$$\Delta_{\text{к}} = \hat{\Theta}_j^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L] - \hat{\Theta}_j^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]; \quad (3.9)$$

где

$$\eta_{ji} = \text{ent} \left[\frac{|x_{ji}|}{q} + \lambda \right] \text{sign } x_{ji};$$

q - величина кванта.

6. конечной разрядностью аппаратно - программных средств

$$\Delta_{\text{р}} = \hat{\Theta}_j^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R] - \hat{\Theta}_j^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L], - \quad (3.10)$$

образующие полную группу погрешностей [137]:

$$\Delta_{\text{м}} = \Delta_{\text{на}} + \Delta_{\text{КВ}} + \Delta_{\text{КК}} + \Delta_{\text{д}} + \Delta_{\text{к}} + \Delta_{\text{р}}. \quad (3.11)$$

Результат j-го измерительного эксперимента

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \hat{\Theta}_j^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R] \quad (3.12)$$

может рассматриваться как функционал j-го массива выборочных данных о преобразованных мгновенных значениях процесса при выбранных $\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R$.

Методическая погрешность и ее составляющие являются случайными величинами, поэтому они должны оцениваться с вероятностных позиций. В качестве характеристик исследуемых составляющих погрешности будем принимать математическое ожидание погрешности результата измерений (систематическая составляющая)

$$M \left[\Delta_{\text{н}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] \text{ и среднеквадратическое отклонение (случайная составляющая)}$$

$$\sigma \left[\Delta_{\text{н}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right].$$

Как правило, при исследовании погрешностей анализируют относительные или приведенные погрешности. В соответствии с определением погрешностей под отно-

сительными погрешностями от смещенности и статистическими погрешностями будем понимать:

$$\gamma_{\text{см}} \left[\hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{M \left[\Delta_n \hat{\Theta}_j [X(t)] \right]}{\Theta [X(t)]}, \quad (3.13)$$

$$\gamma_{\text{ст}} \left[\hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{\sigma \left[\Delta_n \hat{\Theta}_j [X(t)] \right]}{\Theta [X(t)]}, \quad (3.14)$$

а под соответствующими приведенными погрешностями -

$$\gamma_{\text{см.пр}} \left[\hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{M \left[\Delta_n \hat{\Theta}_j [X(t)] \right]}{\Theta [X(t)]_{\text{max}}}; \quad (3.15)$$

$$\gamma_{\text{ст.пр}} \left[\hat{\Theta}_n [X(t)] \right] = \frac{\sigma \left[\Delta_n \hat{\Theta}_j [X(t)] \right]}{\Theta [X(t)]_{\text{max}}}. \quad (3.16)$$

Следует подчеркнуть, что при статистической обработке, как правило, анализируют погрешности от неадекватности (смещенности) и конечности выборки. При проектировании же специализированных или универсальных аппаратно-программных средств реального времени необходимо определить конкретные значения Δt_0 , q , L , R . Для этого необходим анализ и остальных составляющих методической погрешности. Результатом анализа является выбор таких значений параметров измерительно-вычислительного канала, чтобы можно было бы пренебречь составляющими $\Delta_{\text{кк}}$, $\Delta_{\text{д}}$, $\Delta_{\text{к}}$ и $\Delta_{\text{р}}$.

Найденные соотношения для определения погрешностей и их составляющих справедливы лишь для прямых методов измерений вероятностных характеристик. Вид выражений для оценки погрешностей и их составляющих для косвенных методов измерений зависит от типа функционального преобразования $F\{ \}$. Рассмотрим выражения для оценки погрешностей косвенных методов измерения вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции (см. подраздел 2.3).

Для этого случая выражение для оценки вероятностной характеристики имеет вид:

$$\Theta [X(t)] = \frac{\Theta_1 [x_{ji}, t_{ji}]}{\Theta_2 [t_{ji}]} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}. \quad (3.17)$$

Разложим $\Theta [X(t)]$ в ряд Тейлора относительно $M[\Theta_1]$ и $M[\Theta_2]$, ограничившись линейными членами:

$$\Theta = \frac{M[\Theta_1]}{M[\Theta_2]} + \left\{ \Theta_1 - M[\Theta_1] \right\} \frac{1}{M[\Theta_2]} - \left\{ \Theta_2 - M[\Theta_2] \right\} \frac{M[\Theta_1]}{M^2[\Theta_2]}. \quad (3.18)$$

Введя обозначения $m_i = M[\Theta_i]$ и $\overset{\circ}{\Theta} = \Theta_i - M[\Theta_i]$, окончательно получим:

$$\mathfrak{G} = \frac{m_1}{m_2} + \overset{\circ}{\Theta}_1 \frac{1}{m_2} - \overset{\circ}{\Theta}_2 \frac{m_1}{m_2^2}. \quad (3.19)$$

Отсюда

$$M[\Theta] = \frac{m_1}{m_2}. \quad (3.20)$$

Абсолютная, относительная и приведенная погрешности от смещенности соответственно равны:

$$\Delta_{\text{см}} = M[\mathfrak{G}] - \Theta; \quad (5.62)$$

$$\gamma_{\text{см}} = \frac{\Delta_{\text{см}}}{\Theta}; \quad (3.21)$$

$$\gamma_{\text{см.пр}} = \frac{\Delta_{\text{см}}}{\Theta_{\text{max}}}. \quad (3.22)$$

Дисперсия оценки, \mathfrak{G} при условии некоррелированности $\overset{\circ}{\Theta}_1$ и $\overset{\circ}{\Theta}_2$, равна:

$$D[\mathfrak{G}] = \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_2^2} + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2] m_1^2}{m_2^4}. \quad (3.23)$$

Тогда относительные и приведенные статистические погрешности равны:

$$\gamma_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_1^2} + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2]}{m_2^2}} = \sqrt{\gamma_{\text{ст.1}}^2 + \gamma_{\text{ст.2}}^2}; \quad (3.24)$$

$$\gamma_{\text{ст.пр}} = \sqrt{\frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_2^2} \max\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right] + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2] m_1^2}{m_2^4} \max\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right]} = \sqrt{\gamma_{\text{ст.пр.1}}^2 + \gamma_{\text{ст.пр.2}}^2}. \quad (3.25)$$

Для косвенных методов оценки вероятностных характеристик, воспользовавшись методикой, описанной в [107, 108], также можно выделить составляющие методической погрешности, обусловленные:

1. неадекватностью -

$$\Delta_{\text{на}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty]}{\mathfrak{G}_2^{(1)}[t_{ji}, d \rightarrow \infty]} - \Theta[X(t)]; \quad (3.26)$$

2. конечностью объёма выборки -

$$\Delta_{\text{кв}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d]}{\mathfrak{G}_2^{(2)}[t_{ji}, d]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty]}{\mathfrak{G}_2^{(1)}[t_{ji}, d \rightarrow \infty]}, \quad (3.27)$$

3. конечностью каналов -

$$\Delta_{\text{кк}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(3)}[t_{ji}, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d]}{\mathfrak{G}_2^{(2)}[t_{ji}, d]}, \quad (3.28)$$

4. дискретизацией -

$$\Delta_d = \frac{\mathfrak{G}_1^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(4)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]}{\mathfrak{G}_2^3[t_{ji}, d, L]}, \quad (3.29)$$

где $l_{ji} = \text{ent} \left[\frac{t_{ji}}{\Delta t_0} + \lambda \right]$, Δt_0 - интервал дискретизации.

5. квантованием-

$$\Delta_k = \frac{\mathfrak{G}_1^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(5)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(4)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}, \quad (3.30)$$

где $\eta_{ji} = \text{ent} \left[\frac{|x_{ji}|}{q} + \lambda \right] \text{sign} x_{ji}$, q - величина кванта.

6. конечной разрядностью аппаратно-программных средств -

$$\Delta_p = \frac{\mathfrak{G}_1^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R]}{\mathfrak{G}_2^{(6)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(5)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}. \quad (3.31)$$

Методическая погрешность будет равна сумме её составляющих:

$$\Delta_m = \Delta_{на} + \Delta_{кв} + \Delta_{кк} + \Delta_d + \Delta_k + \Delta_p, \quad (3.32)$$

образующих полную группу погрешностей.

Найденные выражения используются как при аналитических методах исследования методических погрешностей и её составляющих, так и при применении метода имитационного моделирования [110, 195].

К сожалению, рассматриваемый подход к оценки погрешностей и их составляющих не применим к совокупным методам измерений. Это объясняется тем, что не удастся найти аналитическое решение системы уравнений

$$\Xi_1 \left\{ S_{d1} g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm} g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} = 0 \quad (3.33)$$

$$l = 1, 2, \dots$$

или

$$\Xi_1 \left\{ F^{(1)} \left\{ S_{d1} g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})] \right\}, \dots, F^{(m)} \left\{ S_{dm} g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} \right\} = 0, \quad (3.34)$$

$$l = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим в качестве примера решение задачи аппроксимации корреляционных функций параметрической моделью $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0)$. Параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений различными численными методами, например методом Ньютона [107]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (3.35)$$

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.36)$$

Представим погрешность оценки параметров аппроксимирующего выражения в виде

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha; \\ \Delta_{\omega} = \hat{\omega} - \omega_0, \end{cases} \quad (3.37)$$

где α и ω_0 - теоретические значения корреляционной функции случайного процесса.

Отсюда видно, что к оценке погрешностей параметров модели можно применить методику анализа методических погрешностей и её составляющих для косвенных методов измерения, но только к найденным параметрам модели.

В качестве общего подхода к оценке методических погрешностей можно предложить использование метода имитационного моделирования. [110].

3.2. Анализ погрешностей неадекватности результатов измерений

При статистических измерениях исследователь, как правило, стремится применять адекватные алгоритмы, результаты применения которых представляют собой несмещенные и состоятельные оценки. Адекватность алгоритма обеспечивается как выбором способа усреднения, так и правильным принципом формирования массива выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса.

При представлении случайного процесса ансамблем реализаций (используются в ААСИ и ДАСИ) адекватными будут следующие алгоритмы [139]:

- для t - текущих вероятностных характеристик:

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=k-N1}^{k+N2} g[x_j(t)]; \quad (3.38)$$

- для j - текущих вероятностных характеристик:

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_{t_j-T1}^{t_j+T2} g[x_j(t')] dt'; \quad (3.39)$$

- для средних вероятностных характеристик:

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{(N+1)T} \sum_{j=k-N1}^{k+N2} \int_{t_j-T1}^{t_j+T2} g[x_j(t')] dt', \quad (3.40)$$

где $\{k-N1, k-N2\}$ - различные совокупности реализаций ($N1+N2=N+1$);

$\{t_j-T1, t_j+T2\}$ - различные временные интервалы ($T1+T2=T$).

При представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей (используются в АИИКФ) аналоги соотношений (3.38) - (3.40) имеют вид:

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=k-N1}^{k+N2} g[x_j(t)]; \quad (3.41)$$

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{N5+1} \sum_{i=lj-N3}^{lj+N4} g[x_j(t_i)]; \quad (3.42)$$

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{(N+1)(N5+1)} \sum_{j=k-N1}^{k+N2} \sum_{li=lj-N3}^{lj+N4} g[x_j(t_i)], \quad (3.43)$$

где $\{t_{lj-N3}, t_{lj+N4}\}$ - различные временные интервалы ($t_{lj+N4} - t_{lj-N3} = (N5 + 1)\Delta t_0$).

Применение других принципов формирования массива выборочных данных для получения оценки при рассмотренных способах усреднения часто приводит к смещенным и несостоятельным оценкам.

Все сказанное относится к алгоритмам статистических измерений при равномерной дискретизации случайных процессов.

При неравномерной дискретизации случайных процессов даже при использовании адекватных алгоритмов измерения (3.13)-(3.17) может возникнуть погрешность неадекватности. Обусловлена она в ААСИ и ДАСИ тем, что в формировании оценок участвуют значения модели на интервале дискретизации. Источником погрешности неадекватности АИИКФ является дискретизация аргумента Δt функциональной вероятностной характеристики при $\Delta \tau \neq \Delta t_0$. При этом существенный отсчет может датироваться как по левому концу интервала дискретизации ($\lambda = 0$ - при усечении), так и по середине интервала ($\lambda = 0,5$ при округлении). Последнее обстоятельство

существенно влияет на значение $\Delta_{\text{на}} \left[\hat{\Theta}_j[X(t)] \right]$. Как правило, при реализации АИ-

ИКФ с помощью ПРИС применяют второй способ датирования - с округлением.

Математическое ожидание погрешности неадекватности результата измерения, определяемой с соответствием с (3.5), равно

$$M \left[\Delta_{\text{на}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = M[g[x_m(t)] - \Theta] = \Delta_{\text{см}} \hat{\Theta}_j[X(t)], \quad (3.44)$$

где $x_m(t)$ - модель процесса на интервале дискретизации, т.е. равно погрешности от смещенности.

Так при усреднении по совокупности погрешность неадекватности не равна нулю даже при оценке моментных характеристик с помощью ААСИ (см. алгоритм 1 табл. 2.1). С учетом алгоритма восстановления на интервале дискретизации алгоритм измерения $\alpha_m(t)$ представим в виде:

$$\hat{\alpha}_{mt} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [x_{mj}(t) + n_j(t)]^m. \quad (3.45)$$

Относительно шума $n_j(t)$ сделаем следующие предположения, что

$$M[n_j(t)] = 0, \quad M \left[x_{mj}(t) n_j(t) \right] = 0 \quad (3.46)$$

и закон распределения симметричен.

Тогда с учетом (3.46) математическое ожидание (3.45) равно

$$M \left[\hat{\alpha}_{mt}(t) \right] = \sum_{s=0}^m C_m^s \alpha_{xs}(t) \mu_{n,m-s}(t). \quad (3.47)$$

Отсюда получим, что

$$M \left[\hat{\alpha}_{1t}(t) \right] = m_{xt}, \quad \Delta_{\text{см}} \left[\hat{\alpha}_{1t}(t) \right] = 0; \quad (3.48)$$

$$M \left[\hat{\alpha}_{2t}(t) \right] = \alpha_{2t}(t) + D_n(t), \quad \Delta_{\text{см}} \left[\hat{\alpha}_{2t}(t) \right] = D_n(t); \quad (3.49)$$

$$M \left[\hat{\alpha}_{3t}(t) \right] = \alpha_{3t}(t) + 3m_x(t)D_n(t), \quad \Delta_{\text{см}} \left[\hat{\alpha}_{3t}(t) \right] = 3m_x(t)D_n(t); \quad (3.50)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M \left[\hat{\alpha}_{4t}(t) \right] &= \alpha_{4t}(t) + \mu_{n4}(t) + 6D_x(t)D_n(t); \\ \Delta_{\text{см}} \left[\hat{\alpha}_{4t}(t) \right] &= \mu_{n4}(t) + 6D_x(t)D_n(t). \end{aligned} \right. \quad (3.50)$$

При измерении корреляционных функций (см. алгоритм 3 табл.2.1), с учетом принятых допущений относительно шума $n_j(t)$ получим

$$M \left[\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) \right] = K_x(t, t + \tau) + K_n(t, t + \tau). \quad (3.51)$$

При адаптивной временной дискретизации полиномом нулевого порядка при заданной величине уставки ε $\sigma_n(t) = \frac{\varepsilon}{\eta}$ (см. табл. 1.3).

Отсюда

$$\gamma_{\text{см}} \left[\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) \right] = \frac{\Delta_{\text{см}} \left[\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) \right]}{D_{xt}(t)} \leq \frac{\gamma^2}{\eta^2}. \quad (3.52)$$

Так при $\gamma \leq 0,05$ и $\eta = 3$ (шум распределен по нормальному закону) $\gamma_{\text{см}} \leq 0,0003$ и этой составляющей можно пренебречь.

При измерении взаимных корреляционных функций (см. алгоритм 5 табл.2.1) погрешность от смещенности при независимости шумов $n_{xjj}(t)$ и $n_{yjj}(t)$ равна нулю.

При усреднении по времени в ААСИ погрешность от смещенности при измерении корреляционных функций (см. алгоритм 3 табл.2.2) отлична от нуля.

Для оценки погрешности от смещенности найдем математическое ожидание оценки

$$M \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = M \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{Mj-1} x_{ji} \sum_{m=R0}^{L0-1} x_{jm} (t_{j,m+1} - t_{jm}) \right]. \quad (3.53)$$

Преобразуем это выражение к виду

$$M \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = M \left[K_{xj}(\tau - \xi) \right], \quad (3.54)$$

где ξ - время возвращения с плотностью вероятностей $\varphi_\xi(\xi)$, определяемой плотностью распределения интервалов нерегулярной дискретизации [52].

Воспользовавшись теорией функции случайного аргумента [114],

$$M \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = \int_0^\tau K_{xj}(\tau - \xi) \varphi_\xi(\xi) d\xi. \quad (3.55)$$

Отсюда погрешность от смещенности равна

$$\Delta_{\text{на}} = \int_0^{\tau} K_{xj}(\tau - \xi) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi - K_{xj}(\tau). \quad (3.56)$$

Аналогично определяются погрешности от смещенности для аппроксимативного алгоритма оценки j -текущей корреляционной функции с использованием интервальной корреляции. В этом случае математическое ожидание оценки запишется в виде:

$$M \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = M \left[\frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*} \right]. \quad (3.57)$$

Воспользовавшись теорией функций случайного аргумента, определим

$$M \left[\hat{K}_{xj}(J\Delta\tau) \right] = \int_0^{J\Delta\tau} K_{xj}(J\Delta\tau - \xi) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi \quad (3.58)$$

и

$$\Delta_{\text{на}} = \int_0^{J\Delta\tau} K_{xj}(J\Delta\tau - \xi) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi - K_{xj}(J\Delta\tau). \quad (3.59)$$

Как видно из выражений (3.56) и (3.59), значение погрешности от смещенности зависит от вида корреляционных функций, вида нерегулярной дискретизации и плотности распределения вероятностей времен возвращения.

Как показали исследования, лучший результат дают аппроксимативные алгоритмы с датированием по ближайшему отсчёту неэквидистантного временного ряда. В этом случае оценка математического ожидания j -текущей оценки корреляционной функции равна

$$M \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = M \left[\frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \left[\sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left[\sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]} \right] \quad (3.60)$$

Однако из-за большого числа случайных величин, входящих в это выражение, аналитические исследования затруднены. Более целесообразно для решения этой задачи применить метод имитационного моделирования [110].

При применении АИИКФ погрешность неадекватности при $\Delta\tau = \Delta t_0$ независимо от способа усреднения равна нулю. Это объясняется тем, что в формировании оценки принимают участие существенные значения неэквидистантного временного ряда, а не модельные (восстановленные в промежуточных точках). Она появляется при $\Delta\tau > \Delta t_0$ и вызвана дополнительным усреднением оценки на интервале $[(J - 0,5)\Delta\tau, (J + 0,5)\Delta\tau]$.

$$\Delta_{\text{см}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = M[g[x(t), \Delta\tau]] - \bar{\Theta}[X(t)] - \Theta. \quad (3.61)$$

Результаты оценки корреляционных функций для различных типовых видов нерегулярной дискретизации приведены на рис. 3.1-3.3.

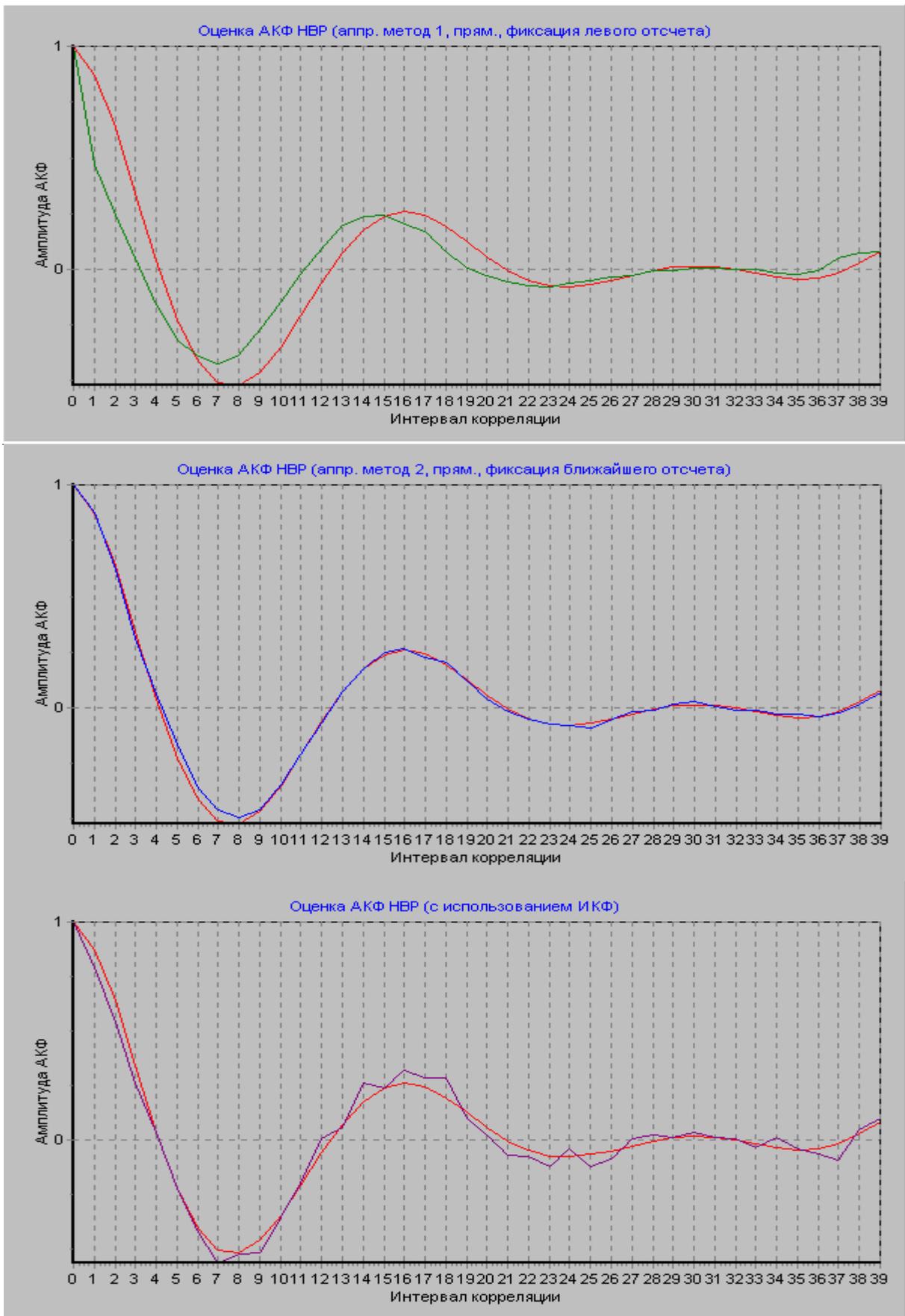


Рисунок 3.2. Результаты оценки корреляционной функции при АВД ($\varepsilon=0,5$)

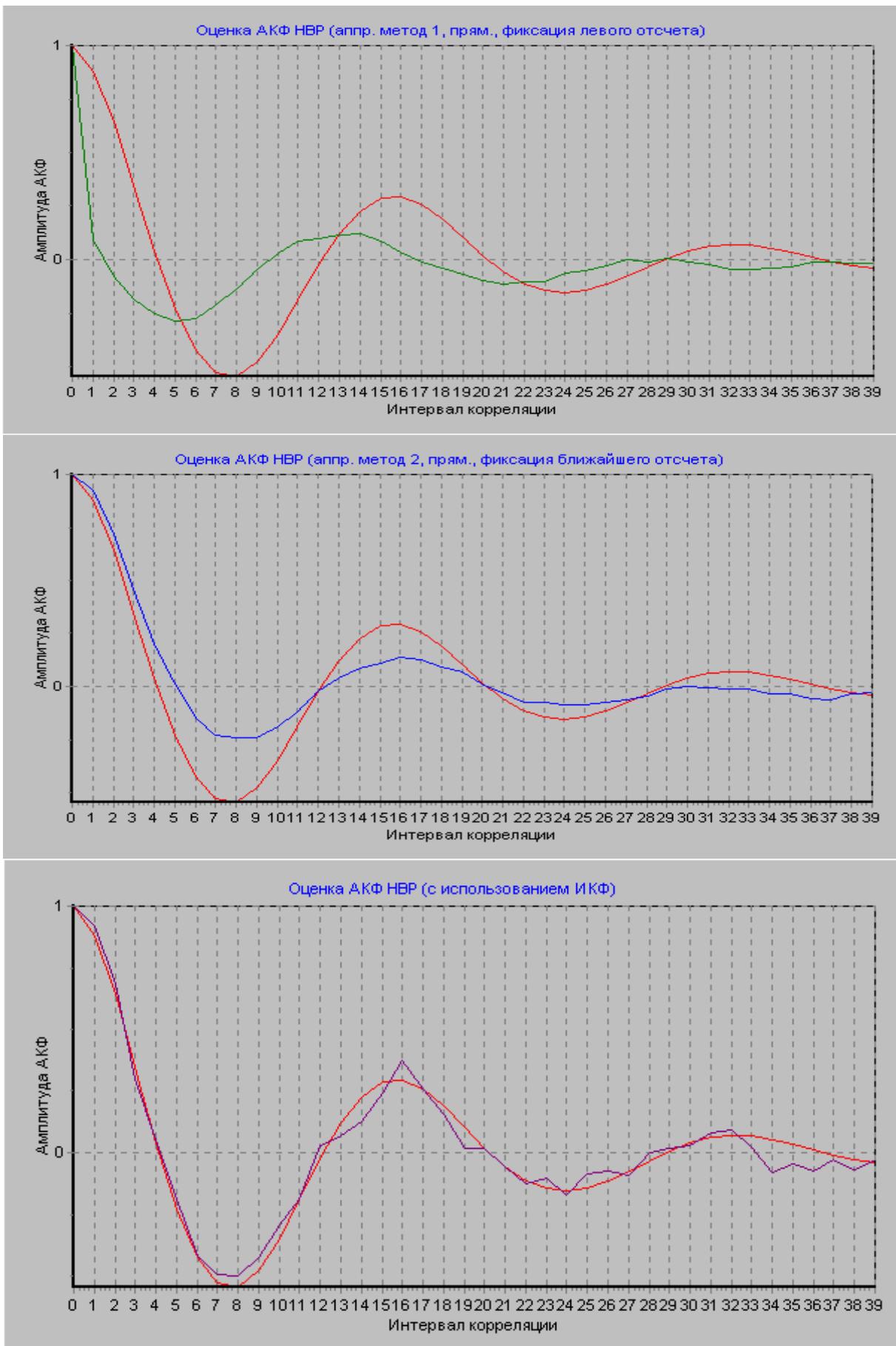


Рисунок 3.1. Результаты оценки корреляционной функции при r -преобразовании ($r=0,2$)

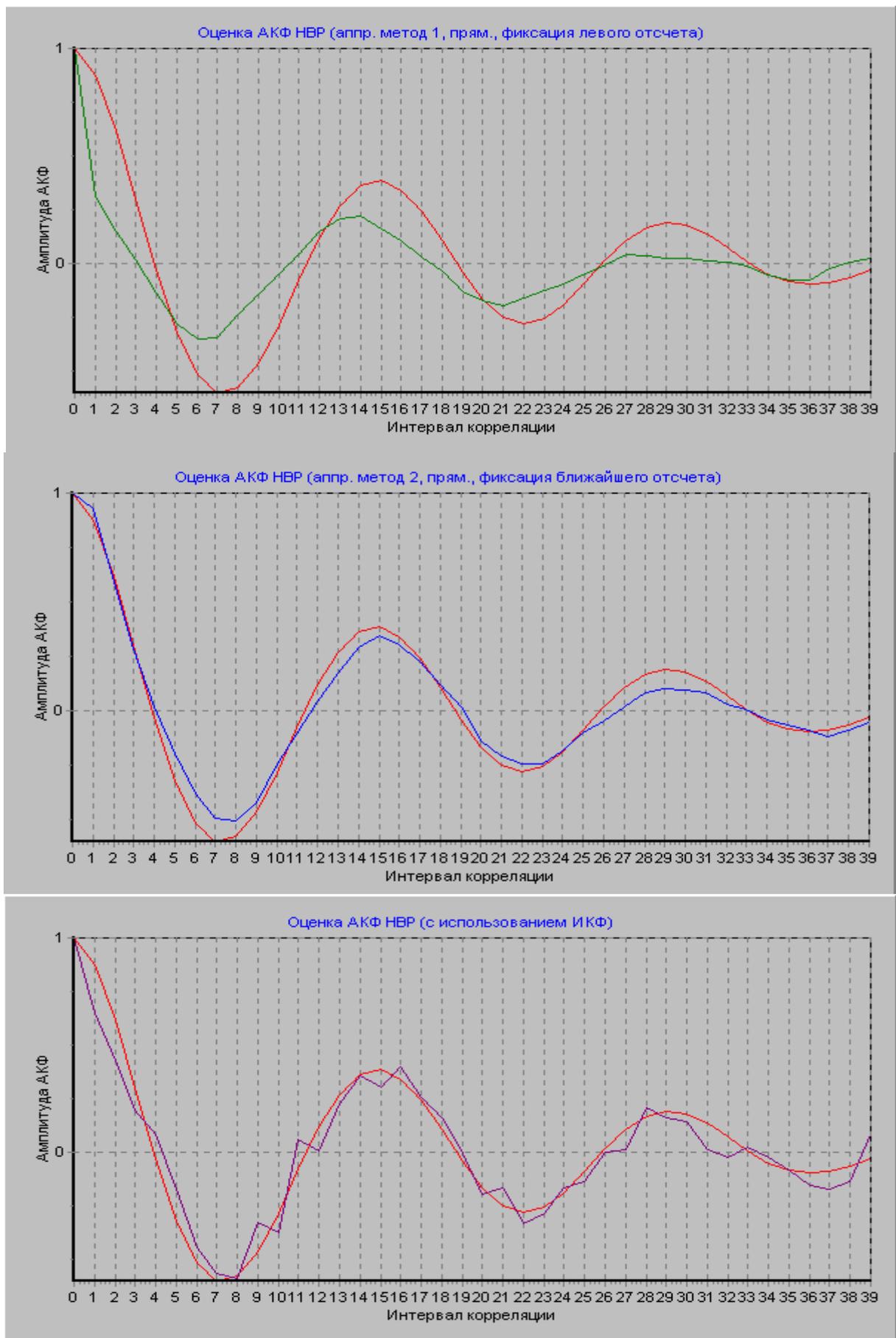


Рисунок 3.3. Результаты оценки корреляционной функции при АД ($\varepsilon=0,75$)

Анализ результатов показывает, что при известном алгоритме восстановления процесса при нерегулярной дискретизации наиболее целесообразно применять аппроксимативные алгоритмы с фиксацией ближайшего отсчёта, в противном случае, лучшие результаты дают алгоритмы с использованием интервальной корреляции и лишь существенных отсчётов.

При анализе корреляционных функций как аналитическими методами, так и методами имитационного моделирования необходимо задать интервал дискретизации корреляционных функций. Как было отмечено, интервал дискретизации не всегда совпадает с интервалом дискретизации случайного процесса, а определяется в зависимости от решаемой задачи. Значение интервала дискретизации $\Delta\tau$ зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности δ и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции J_{\max} при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 3.1 [108].

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 3.1

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	Δt	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		Δt	J_{\max}	Δt	J_{\max}
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }\left(1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 - 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{ \mu^2 - 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0\tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{ \mu^2 + 1 }}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{ \mu^2 + 1 }}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

3.3. Статистические погрешности

В соответствии со сложившейся терминологией статистическими погрешностями называют погрешности, обусловленные конечностью объема данных о мгновенных значениях x_{ji} , используемых при измерении значения вероятностной характеристики. Важность исследования статистических погрешностей определяется следующими основными обстоятельствами. Статистические погрешности специфичны для измерения значений вероятностных характеристик случайных процессов и характеризуют предельно достижимые при фиксированном объеме выборки (N , T или NT) точности. Следовательно, сопоставляя различные составляющие погрешности со ста-

статистической погрешностью, можно оценить целесообразность применения того или иного алгоритма измерений, рационально выбрать параметры измерительных устройств и определить принципиальные возможности повышения точности измерений [139].

В соответствии с выражением (3.6), определим статистическую погрешность в виде

$$\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = S_d g[x_{ji}, t_{ji}] - \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_{ji}, t_{ji}]. \quad (3.62)$$

При адекватных алгоритмах измерения

$$\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = S_d g[x_{ji}, t_{ji}] - \Theta[X(t)], \quad (3.63)$$

при неадекватных -

$$\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = S_d g[x_{ji}, t_{ji}] - \bar{\Theta}[X(t)]. \quad (3.64)$$

Независимо от принятого алгоритма измерений

$$M \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = 0. \quad (3.65)$$

Определим дисперсию, среднеквадратическое отклонение и приведенную статистическую погрешность для адекватных алгоритмов:

$$D \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = M \left\{ S_d g[x_{ji}, t_{ji}]^2 \right\} - \Theta^2[X(t)]; \quad (3.66)$$

$$\sigma \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = \left\{ M \left\{ S_d g[x_{ji}, t_{ji}]^2 \right\} - \Theta^2[X(t)] \right\}^{1/2}; \quad (3.67)$$

$$\gamma_{\text{КВ.пр}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{\sigma \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right]}{\Theta[X(t)]_{\text{max}}}. \quad (3.68)$$

Для неадекватных алгоритмов в выражения (3.66), (3.67) необходимо вместо $\Theta[X(t)]$ подставить $\bar{\Theta}[X(t)]$.

Конкретный вид выражений (3.66) - (3.68) зависит от измеряемой характеристики, характеристик входного процесса, алгоритма измерений.

Так, при измерении моментных характеристик, законов распределения без учета неравномерности дискретизации для некоррелированных выборок

$$\sigma_{\text{нрд}} \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = \frac{\sigma_g[x]}{\sqrt{d_{\text{нрд}}}}. \quad (3.69)$$

Учитывая, что $d_{\text{нрд}} = \frac{d_{\text{рд}}}{k_c}$, где $d_{\text{рд}}$ - объем выборки при равномерной дискретизации случайного процесса, для обеспечения равенства

$$\sigma_{\text{нрд}} \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] = \sigma_{\text{рд}} \left[\Delta_{\text{КВ}} \hat{\Theta}_j[X(t)] \right] \quad (3.70)$$

время наблюдения процесса должно быть увеличено в $\sqrt{k_c}$ раз.

При измерении математического ожидания с помощью алгоритма 1 табл.2.2 - используется алгоритм восстановления полиномом нулевого порядка, -

$$\sigma_{\text{нрд}} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \sqrt{\frac{D_x + m_x^2 \chi_{\Delta t}^2 + D_x \chi_{\Delta t}^2}{M_j - 1}}. \quad (3.71)$$

где $\chi_{\Delta t} = \frac{\sigma_{\Delta t}}{m_{\Delta t}}$ - коэффициент вариации интервалов дискретизации, и относительная статистическая погрешность равна

$$\gamma_{\text{кв}}^{(1)} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \frac{\sigma_{\text{нрд}} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right]}{m_x} = \sqrt{\frac{\chi_x^2 + \chi_{\Delta t}^2 + \chi_x^2 \chi_{\Delta t}^2}{M_j - 1}}. \quad (3.72)$$

Из выражения (3.72) видно, что относительная статистическая погрешность измерения математического ожидания с учетом неравномерности дискретизации больше соответствующей погрешности без учета неравномерности. Это объясняется тем, что в алгоритм преобразования входит вторая случайная величина - интервал дискретизации, которая вносит свой вклад в увеличение статистической погрешности.

При измерении математического ожидания с помощью алгоритма 2 табл. 2.2 - используется алгоритм восстановления полиномом первого порядка,

$$\gamma_{\text{кв}}^{(2)} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \sqrt{\frac{\chi_x^2 / 2 + \chi_{\Delta t}^2 + \chi_x^2 \chi_{\Delta t}^2 / 2}{M_j - 1}}. \quad (3.73)$$

Аналогичные результаты можно получить и для других моментных характеристик. Для этого в выражения (3.72) и (3.73) вместо χ_x необходимо подставить $\chi_{\alpha m}$ или $\chi_{\mu m}$.

Так как теоретически применение алгоритмов возможно лишь в случае преднамеренной неравномерной дискретизации при известном алгоритме восстановления процесса на интервале дискретизации, например, при АД, при которой поток отсчетов представляет собой пуассоновский поток ($\chi_{\Delta t} = 1$), то выражения (3.72) и (3.73) будут соответственно равны:

$$\gamma_{\text{кв}}^{(1)} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \sqrt{\frac{2\chi_x^2 + 1}{M_j - 1}}; \quad (3.74)$$

$$\gamma_{\text{кв}}^{(2)} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \sqrt{\frac{\chi_x^2 + 1}{M_j - 1}}. \quad (3.75)$$

Из полученных выражений видно, что

$$\gamma_{\text{кв.нрд}} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] > \gamma_{\text{кв.рд}} \left[\Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j [X(t)] \right] = \frac{\chi_x}{\sqrt{M_j}}.$$

Таким образом, при измерении вероятностных характеристик, в которых отсутствуют временные аргументы, наиболее целесообразно применять классические алгоритмы без учета неравномерности дискретизации, обеспечивающие меньшие значения статистической погрешности.

Определим статистические погрешности при измерении значений корреляционных функций.

При усреднении по совокупности в ААСИ выражение для дисперсии оценки корреляционной функции при применении алгоритма измерений 3 табл.2.1 примет вид:

$$D \left[\hat{K}_{xt}(t, t + \tau) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N M \left\{ \left[x_j(t) - n_j(t) \right] \left[x_j(t + \tau) - n_j(t + \tau) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[x_s(t) - n_s(t) \right] \left[x_s(t + \tau) - n_s(t + \tau) \right] \right\} - \left[K_{xt}(t, t + \tau) + K_{nt}(t, t + \tau) \right]^2. \quad (3.76)$$

Предположим, для простоты, что $x(t)$ и $n(t)$ стационарные нормальные случайные процессы. Тогда, выполнив необходимые преобразования, получим:

$$D \left[\hat{K}_{xt}(\tau) \right] = \frac{D_x^2}{N} \left\{ \left(1 + \frac{D_n}{D_x} \right)^2 + \left[\rho_x(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \rho_n(\tau) \right]^2 \right\}. \quad (3.77)$$

Отсюда среднеквадратичное отклонение равно

$$\sigma \left[\hat{K}_{xt}(\tau) \right] = \frac{D_x}{N} \left\{ \left(1 + \frac{D_n}{D_x} \right)^2 + \left[\rho_x(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \rho_n(\tau) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.78)$$

а приведенная статистическая погрешность примет вид:

$$\gamma_{\text{кв}} \left[\hat{K}_{xt}(\tau) \right] = \frac{\sigma \left[\hat{K}_{xt}(\tau) \right]}{D_x} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{D_n}{D_x} \right)^2 + \left[\rho_x(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \rho_n(\tau) \right]^2}{N}}. \quad (3.79)$$

Положив $\tau = 0$, определим приведенную статистическую погрешность оценки дисперсии

$$\gamma_{\text{кв}} \left[\hat{D}_{xt} \right] = \left(1 + \frac{D_n}{D_x} \right) \sqrt{\frac{2}{N}} \quad (3.80)$$

и полную статистическую погрешность

$$\delta \left[\hat{D}_{xt} \right] = \left\{ \gamma_{\text{см}}^2 \left[\hat{D}_{xt} \right] + \gamma_{\text{кв}}^2 \left[\hat{D}_{xt} \right] \right\}^{1/2} = \left[\frac{D_n^2}{D_x^2} + \frac{2(1 + D_n/D_x)^2}{N} \right]^{1/2}. \quad (3.81)$$

Полная статистическая погрешность характеризует предельно достижимую точность при заданном объеме выборки N .

При усреднении по времени в случае использования ААСИ (3.33) дисперсия оценки корреляционной функции для нормального процесса будет равна [108]:

$$D \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = \frac{D_x^2}{M_j} \left[1 + \rho_x^2(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \right], \quad (3.82)$$

а приведенная погрешность примет вид:

$$\gamma_{\text{кв}} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = \left\{ \frac{1}{M_j} \left[1 + \rho_x^2(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.83)$$

Отношение $\frac{D_n}{D_x}$, как и в случае (3.79), характеризует увеличение дисперсии

оценки $\hat{K}_{xj}(\tau)$.

При усреднении по времени и совокупности в случае использования ААСИ

$$\hat{K}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \quad (3.84)$$

дисперсия оценки корреляционной функции равна

$$D \left[\hat{K}_{xcp}(\tau) \right] = \frac{D_x^2}{NM} \left[1 + \rho_x^2(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \right] \quad (3.85)$$

а приведенная погрешность определится в виде

$$\gamma_{кв} \left[\hat{K}_{xcp}(\tau) \right] = \left\{ \frac{1}{NM} \left[1 + \rho_x^2(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \right] \right\}^{1/2} \quad (3.86)$$

При применении АИИКФ для измерения значений корреляционных функций структура алгоритма для любого способа усреднения повторяет структуру алгоритма (3.84). Отличие заключается в том, что $D_n = 0$ и объем выборки равен $d \times C_x(J)$.

Следовательно, приведенная статистическая погрешность оценки корреляционной функции равна

$$\gamma_{кв} \left[\hat{K}_x(J) \right] = \left[\frac{1 + \rho_x^2(J)}{d \times C_x(J)} \right]^{1/2} \quad (3.87)$$

Из выражения (3.87) следует, что $\gamma_{кв} \left[\hat{K}_x(J) \right]$ зависит от характеристики пото-

ка существенных отсчетов - значений интервальной корреляционной функции. Для определения конкретного выражения погрешности необходимо, определив модель потока, подставить в выражение (3.87) соответствующее ей выражение интервальной корреляционной функции. Например, при аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений с параметрами λ (пуассоновский процесс) и p и усреднении по времени получим

$$\gamma_{кв} \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = \left[\frac{1 + \rho_x^2(J)}{M_j \lambda p \Delta t_0} \right]^{1/2} \quad (3.88)$$

В случае, если $\Delta \tau = (2n + 1) \Delta t_0 = k \Delta t_0$, происходит дополнительное сглаживание корреляционной функции. В этом случае дисперсия оценки будет в k раз меньше дисперсии, определенной в соответствии с выражением (3.88):

$$D \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = D_x^2 \left[\frac{1 + \rho_x^2(J)}{M_j k \lambda p \Delta t_0} \right]^{1/2} \quad (3.89)$$

Следует отметить, что увеличение $\Delta \tau$ в общем случае приводит к увеличению погрешности от смещенности. Оптимальное значение $\Delta \tau$ можно определить, минимизируя полную статистическую погрешность (см. выражение (3.81)).

Как следует из выражений для оценки дисперсий оценок измеряемой вероятностной характеристики, выбором d при заданных характеристиках процесса и потока существенных отсчетов всегда возможно обеспечить выполнение условия:

$$\gamma_{\text{КВ}} \left[\hat{\Theta}_j[X(t)] \right] \leq \gamma_{\text{КВ.ДОП}} \left[\hat{\Theta}_j[X(t)] \right] \quad (3.90)$$

где $\gamma_{\text{КВ.ДОП}} \left[\hat{\Theta}_j[X(t)] \right]$ - допустимое значение статистической погрешности.

Полученные результаты оценки статистических погрешностей при измерении корреляционных функций могут быть обобщены для процессов, отличных от нормальных, с использованием результатов, представленных в [96]. Для этого необходимо выразить момент четвертого порядка $M \left[\overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{x}^2(t - \tau) \right]$ через $k_\varepsilon K_x^2(\tau)$.

Выражение (3.83), например, в этом случае примет вид [108]:

$$\gamma_{\text{КВ}} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = \left\{ \frac{1}{M_j} \left[1 + (1 + k_\varepsilon) \rho_x^2(\tau) + \frac{D_n}{D_x} \right] \right\}^{1/2} \quad (3.91)$$

Отсюда видно, что при известном законе распределения случайного процесса:

$$k_\varepsilon \text{ и } D_n = \frac{\gamma}{\eta}, \text{ - возможно определение } \gamma_{\text{КВ}} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right].$$

Определим статистические погрешности результатов измерения при применении упрощенных алгоритмов корреляционного анализа, широко используемых в практике статистических измерений.

Так, для ААСИ значений релейных КФ при усреднении по совокупности

$$\hat{R}_{xj}(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \delta_{ji} \sum_{l=0}^L \text{sign} \overset{\circ}{x}_{j,i+l} \delta_{j,i+l} \quad (3.92)$$

или по времени

$$\hat{R}_{xj}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M_j-1} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{m=R_0}^{L_0-1} \text{sign} \overset{\circ}{x}_{jm} (t_{j,m+1} - t_{jm}) \quad (3.93)$$

оценки получают смещенными.

Приведем в качестве примера математическое ожидание оценки релейной корреляционной функции при усреднении по времени:

$$M \left[\hat{R}_{xj}(\tau) \right] = \int_0^\tau R_{xj}(\tau - \xi) \varphi_\xi(\xi) d\xi. \quad (3.94)$$

Отсюда

$$\Delta_{\text{на}} = \int_0^\tau R_{xj}(\tau - \xi) \varphi_\xi(\xi) d\xi - R_{xj}(\tau). \quad (3.95)$$

Дисперсия оценок для АД нулевого порядка (в этом случае первая производная сигнала на интервале дискретизации сохраняет знак) при усреднении по времени равна

$$D\left[\hat{R}_{xj}(\tau)\right] = \frac{D_x^2}{M_j} \left[1 - \frac{2}{\pi} \rho_x^2(\tau)\right]. \quad (3.96)$$

Отсюда приведенные значения статистической погрешности равны

$$\gamma_{\text{КВ}}\left[\hat{R}_{xj}(\tau)\right] = \left\{ \frac{1}{2M_j} \left[\pi - 2\rho_x^2(\tau)\right] \right\}^{1/2}. \quad (3.97)$$

При применении АИИКФ для измерения значений $\hat{R}_{xj}(J)$, $\hat{P}_{xj}(J)$, $\hat{G}_{xj}(J)$ оценки получаются несмещенными, а приведенные статистические погрешности соответственно равны [108]:

$$\gamma_{\text{КВ}}\left[\hat{R}_x(J)\right] = \left[\frac{\left[\pi - 2\rho_x^2(J)\right]^{1/2}}{d \times C_x(J)} \right]; \quad (3.98)$$

$$\gamma_{\text{КВ}}\left[\hat{P}_x(J)\right] = \left[\frac{\left[1 - \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2 \rho_x(J)\right]^{1/2}}{d \times C_x(J)} \right]; \quad (3.99)$$

$$\gamma_{\text{КВ}}\left[\hat{G}_x(J)\right] = \left[\frac{(\pi - 2) \left[1 - \rho_x^2(J)\right]^{1/2}}{2d \times C_x(J)} \right]. \quad (3.100)$$

При применении АИИКФ для измерения значений $\hat{K}_{xyj}(J)$, $\hat{R}_{xyj}(J)$, $\hat{P}_{xyj}(J)$, $\hat{G}_{xyj}(J)$ оценки получаются несмещенными, а приведенные значения статистической погрешности в $C_{xy}^{1/2}(j)$ раз больше соответствующих значений погрешностей при равномерной дискретизации. Выражения для их оценки аналогичны выражениям (3.98)-(3.100), только вместо $\rho_x(J)$ и $C_x(J)$ необходимо в них подставить $\rho_{xy}(J)$, $C_{xy}(J)$ и т.д.

3.4. Погрешность от конечности числа каналов

При неравномерной дискретизации случайных процессов в конкретной реализации на интервал $[0, \tau_{\text{max}}]$ попадает случайное число существенных отсчетов $l_{ji} < L$, участвующих в формировании оцениваемой характеристики. Как показано в разделе 2, число L определяется в результате решения уравнения (1.30). Следует подчеркнуть, что, если число используемых отсчетов меньше L_{max} , это приводит к увеличению погрешности на конце оцениваемой характеристики, если значительно больше - к увеличению аппаратных и временных затрат.

Погрешность от конечности числа каналов возникает как при использовании ААСИ, так и АИИКФ. Характер проявления этой составляющей методической погрешности практически не зависит от принятого способа усреднения, поэтому рассмотрим оценку $\Delta_{kk} \Theta_j [\hat{X}(t)]$ на примере $\hat{K}_{xj}(\tau)$ с использованием усреднения по времени.

В этом случае для ААСИ с учетом (3.7)

$$\Delta_{kk} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{l=L+1}^{M_j} x_{j,L+1} \delta_{j,i+1}. \quad (3.101)$$

Из полученного выражения видно, что, если

$$P(L, \tau_{k \max}) \rightarrow 1, \quad (3.102)$$

то

$$\begin{cases} M \left[\Delta_{kk} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] \right] = 0; \\ D \left[\Delta_{kk} \left[\hat{K}_{xj}(\tau) \right] \right] = 0. \end{cases} \quad (3.103)$$

Отсюда видно, что этой составляющей методической погрешности можно пренебречь.

Аналогичным образом при использовании АИИКФ

$$\Delta_{kk} \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \left\{ \frac{1}{\hat{C}_{xj}(J)^{l=0}} \sum_{i=1}^{M_j} x_{j,i+1} \delta_{j,i+1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\hat{C}_{xj}(J, L)^{l=0}} \sum_{i=1}^L x_{j,i+1} \delta_{j,i+1} \right\}. \quad (3.104)$$

Так как при выполнении условия (3.102) $\hat{C}_{xj}(J, L) \rightarrow \hat{C}_{xj}(J)$, выражение (3.104) представим в виде, аналогичном (3.101):

$$\Delta_{kk} \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = \frac{1}{M_j \hat{C}_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{l=L+1}^L x_{j,i+L} \delta_{j,i+1}. \quad (3.105)$$

Таким образом, при выполнении условия (3.102) погрешностью от конечности числа каналов можно пренебречь как при применении ААСИ, так и АИИКФ.

3.5. Погрешность дискретизации

При неравномерной дискретизации $\Delta t_i = \text{random}$. Если интервал принудительной дискретизации процесса меньше интервала дискретизации аргумента измеряемой вероятностной характеристики, то возникает погрешность неадекватности, определяемая в соответствии с выражением (3.44) подраздела 3.2. Можно показать, что, если

интервалы дискретизации процесса кратны интервалу принудительной дискретизации, то дополнительной составляющей методической погрешности, вызванной дискретизацией, не возникает. Так, при измерении $\hat{K}_{xj}(J)$ с помощью АИИКФ при усреднении по времени с учетом (3.8)

$$\Delta_d \left[\hat{K}_{xj}(J\Delta\tau) \right] = \frac{1}{M_j \hat{C}_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_j} x_{xj} \sum_{l=0}^L x_{j,i+1} \left[\delta_{j,i+1}^* - \delta_{j,i+1} \right] \quad (3.106)$$

где

$$\delta_{j,i+1}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{\Delta t_0 (l_{j,i+1} - l_{j,i})}{\Delta\tau} + \lambda \right] = J; \\ 0, & \text{если нет.} \end{cases} \quad (3.107)$$

Отсюда видно, что, если выполняется условие $\delta_{j,i+1}^* = \delta_{j,i+1}$, то погрешность дискретизации равна нулю.

Условие (3.106) выполняется, например, для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений, аддитивной случайной дискретизации, аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Если интервалы дискретизации не кратны минимальному интервалу, как, например: при периодической дискретизации с «дрожанием», периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений (см. раздел 1), то погрешность дискретизации определяется аналогично погрешности неадекватности (см. раздел 3.2) в соответствии с выражениями (3.56), (3.59), в которые вместо $\Delta\tau$ необходимо подставить Δt_0 .

Аналогичные результаты получаются и при использовании ААСИ, например (2.90).

3.6. Погрешность квантования

Погрешность квантования, определяемая в соответствии с выражением (3.9), возникает из-за замены значений случайного процесса x_{ji} на соответствующее им дискретные значения η_{ji} .

Определим погрешность квантования при измерении $\hat{K}_{xj}(J)$ с использованием АИИКФ.

В этом случае

$$\hat{K}_{xj}(J) = \frac{q^2}{M_j \hat{C}_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_k} \eta_{ji} \sum_{l=L+1}^L \eta_{j,i+1} \delta_{j,i+1}^* \quad (3.108)$$

и погрешность квантования равна

$$\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = - \frac{1}{M_j \hat{C}_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{l=0}^L \delta_{j,i+1}^* \left[q\eta_{ji} \Delta x_{j,i+1} + q\eta_{j,i+1} \Delta x_{j,i} + \Delta_{j,i} \Delta x_{j,i+1} \right] \quad (3.109)$$

где $\Delta x_{j,i} = x_{j,i} - q\eta_{j,i}$ - погрешность квантования случайного отсчета последователь-

ности $\left\{ \overset{\circ}{x}_{j,i} \right\}_{i=1}^{M_j}$.

Из выражения (3.109) следует, что

$$M \left[\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] \right] = 0. \quad (3.110)$$

Определим дисперсию $\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right]$

$$D \left[\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] \right] = \frac{1}{M_j^2 C_{xj}^2(J)} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{l=0}^L \sum_{j=1}^{M_j} \sum_{n=0}^L \delta_{j,i+l}^* \delta_{j,j+n}^* \times \\ \times M \left\{ \left[q\eta_{j,i} \Delta x_{j,i+1} + q\eta_{j,i+1} \Delta x_{j,i} + \Delta x_{j,i} \Delta x_{j,i+1} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[q\eta_{j,j} \Delta_{j,j+n} + q\eta_{j,j+n} \Delta x_{j,j} + \Delta x_{j,j} \Delta_{j,j+n} \right] \right\}. \quad (3.111)$$

Произведя все необходимые преобразования, получим

$$D \left[\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] \right] = \frac{1}{M_j C_{xj}(J)} \left[2D_\eta D_{\Delta x} + D_{\Delta x}^2 \right]. \quad (3.112)$$

Так как $D_\eta = D_x - D_{\Delta x}$, то

$$D \left[\Delta_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] \right] = \frac{D_x^2}{M_j C_{xj}(J)} \left[\frac{D_{\Delta x}}{D_x} \left(2 - \frac{D_{\Delta x}}{D_x} \right) \right]. \quad (3.113)$$

Учитывая, что шум квантования Δ_x распределен по равномерному закону [47],

$q = \frac{|x_{\max}|}{2^r}$, где r - число уровней квантования, $|x_{\max}| = \eta \sigma_x$, выражение приведенной

погрешности квантования примет вид

$$\gamma_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right] = \frac{1}{\sqrt{M_j C_{xj}(J)}} \frac{\eta \sqrt{3}}{3 \times 2^{r+1}} \sqrt{2 - \frac{\eta^2}{3 \times 2^{2r+2}}}. \quad (3.114)$$

Найдем отношение

$$\mathfrak{R} = \frac{\gamma_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right]}{\gamma_{KB} \left[\hat{K}_{xj}(J) \right]} = \frac{\frac{\eta \sqrt{3}}{3 \times 2^{r+1}} \sqrt{2 - \frac{\eta^2}{3 \times 2^{2r+2}}}}{\sqrt{1 + \rho_x^2(J)}}. \quad (3.115)$$

Численные значения \mathfrak{R} для $J=0$ и $J=\infty$ для нормального процесса ($\eta=3$ с $P_d=0,9973$) приведены на рис. 3.4.

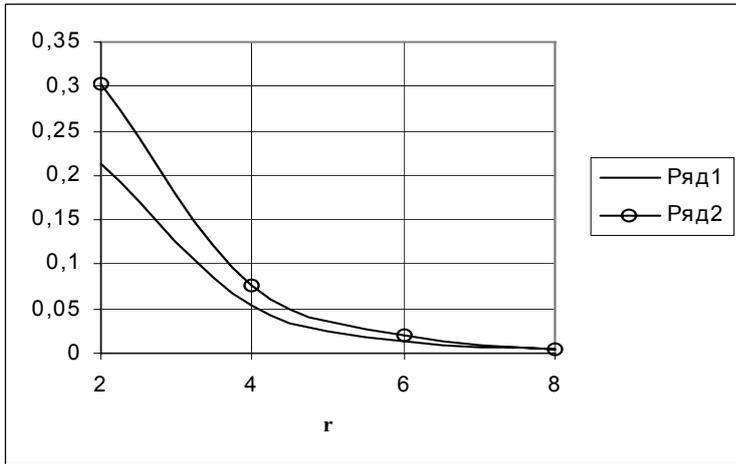


Рисунок 3.4.

Отсюда видно, что при $r > 6$ погрешность квантования составляет меньше 2% статистической погрешности, т.е. ею можно пренебречь.

Определим погрешность квантования для упрощенных алгоритмов корреляционного анализа при использовании АИИКФ с усреднением по времени.

Для релейного алгоритма

$$\Delta_k \left[\hat{R}_{xj}(J) \right] = - \frac{1}{M_j C_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_j} \Delta x_{j,i} \sum_{l=0}^L \text{sign } \eta_{j,i+l} \delta_{j,i+l}^* \quad (3.116)$$

Отсюда

$$M \left[\Delta_k \left[\hat{R}_{xj}(J) \right] \right] = 0, \quad (3.117)$$

а

$$D \left[\Delta_k \left[\hat{R}_{xj}(J) \right] \right] = \frac{D_{\Delta x}}{M_j C_{xj}(J)}. \quad (3.118)$$

Приведенная погрешность квантования равна

$$\gamma_k \left[\hat{R}_{xj}(J) \right] = \frac{\eta}{2^{r+1}} \sqrt{\frac{\pi}{6 M_j C_{xj}(J)}}. \quad (3.119)$$

Найдем отношение

$$\mathfrak{S} = \frac{\gamma_k \left[\hat{K}_{xj}(J) \right]}{\gamma_k \left[\hat{R}_{xj}(J) \right]} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1,13. \quad (3.120)$$

Т.е. при релейном алгоритме число уровней квантования меньше числа уровней квантования мультипликативного алгоритма.

При полярном алгоритме число уровней квантования $r=1$.

Для алгоритма определения корреляционной функции через модуль разности

$$\Delta_k \left[\hat{G}_{xj}(J) \right] = - \frac{1}{M_j C_{xj}(J)} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{l=0}^L (\Delta x_{j,i} + \Delta x_{j,i+l}) \times \text{sign} [q(\eta_{j,i} - \eta_{j,i+l})] \delta_{j,i+l}^* \quad (3.121)$$

$$M \left[\Delta_k \left[\hat{G}_{xj}(J) \right] \right] = 0; \quad (3.122)$$

$$D \left[\Delta_k \left[\hat{G}_x^{(k)}(J) \right] \right] = \frac{2 D_{\Delta x}}{M_k}. \quad (3.123)$$

Выражение приведенной погрешности квантования равно

$$\gamma_k \left[\hat{G}_{xj}(J) \right] = \frac{\eta}{2^{r+1}} \sqrt{\frac{\pi}{6 M_j \hat{C}_{xj}(J)}} \quad (3.124)$$

и совпадает с выражением (3.119).

Аналогичные результаты получаются и при усреднении по совокупности реализации и при применении ААСИ с усреднением по совокупности и по времени.

3.7. Погрешность конечной разрядности ПРИС

При реализации алгоритмов статистических измерений с помощью аппаратно-программных средств возникает дополнительная составляющая погрешности, вызванная необходимостью представления отсчетов в виде конечной последовательности чисел, т.е. погрешностями округления.

Следует подчеркнуть, что она возникает только при работе с действительными числами. При выполнении арифметических операций с целыми числами округление не возникает, кроме деления, когда $N \neq 2^n$. В этом случае дробная часть игнорируется. Переполнение, возникающее при выполнении промежуточных результатов, свидетельствует о невозможности решения задачи из-за неправильно выбранной разрядности. Для правильного определения количества разрядов слова обработки необходима информация о виде измеряемой характеристики, динамическом диапазоне входного процесса, объеме выборки. Так, например, при оценке дисперсии нормированного случайного процесса ($\sigma_x^2=1$) разрядность слова обработки

$$R = \text{ent}[\log_2 d] + 1. \quad (3.125)$$

Аналогичным образом возможно определение разрядности и при измерении других, например, корреляционных характеристик функций и плотностей распределения вероятностей.

Изучению составляющих погрешностей округления при представлении данных в форме с плавающей запятой при выполнении элементарных операций посвящено большое количество работ, в которых аналитически приводятся оценки сверху.

Для получения более точных оценок при статистических измерениях с помощью аппаратно-программных средств с $R=8,10...$ применяется имитационное моделирование [195, 206].

Так как оценка вероятностной характеристики формируется в результате усреднения преобразованных элементов входных массивов, то можно предположить, что дисперсия погрешности округления на i шаге преобразования не превысит σ_R^2 ,

зависящее от разрядности мантиисы R ($\sigma_R^2 = \frac{\eta^2 \sigma_x^2}{3 \times 2^{2R+2}}$).

Однако учитывая, что у современных микро-ЭВМ, являющиеся основой аппаратно-программных средств, разрядность мантиссы $R \geq 16$, этой составляющей методической погрешности можно пренебречь.

Таким образом, при выполнении условий $L \geq L_{\max}$, $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$, $r \geq 6$, $R \geq 16$

$$\Delta_{\text{м}} \hat{\Theta}_j[X(t)] = \Delta_{\text{на}} \hat{\Theta}_j[X(t)] + \Delta_{\text{кв}} \hat{\Theta}_j[X(t)]. \quad (3.126)$$

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗАТОРЫ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

4.1. Особенности проектирования статистических анализаторов

Целесообразность применения того или иного технического средства для анализа вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов диктуется целями и задачами эксперимента, обработки, наличием средств, требованиями по точности, быстродействию, экономическими соображениями. Все средства можно классифицировать по следующим признакам (см. рис. 4.1):

- гибкости работы устройства управления;
- принципу обработки информации;
- способу обработки информации;
- времени получения результата;
- способу ввода информации;
- способу представления информации;
- способу представления результата.

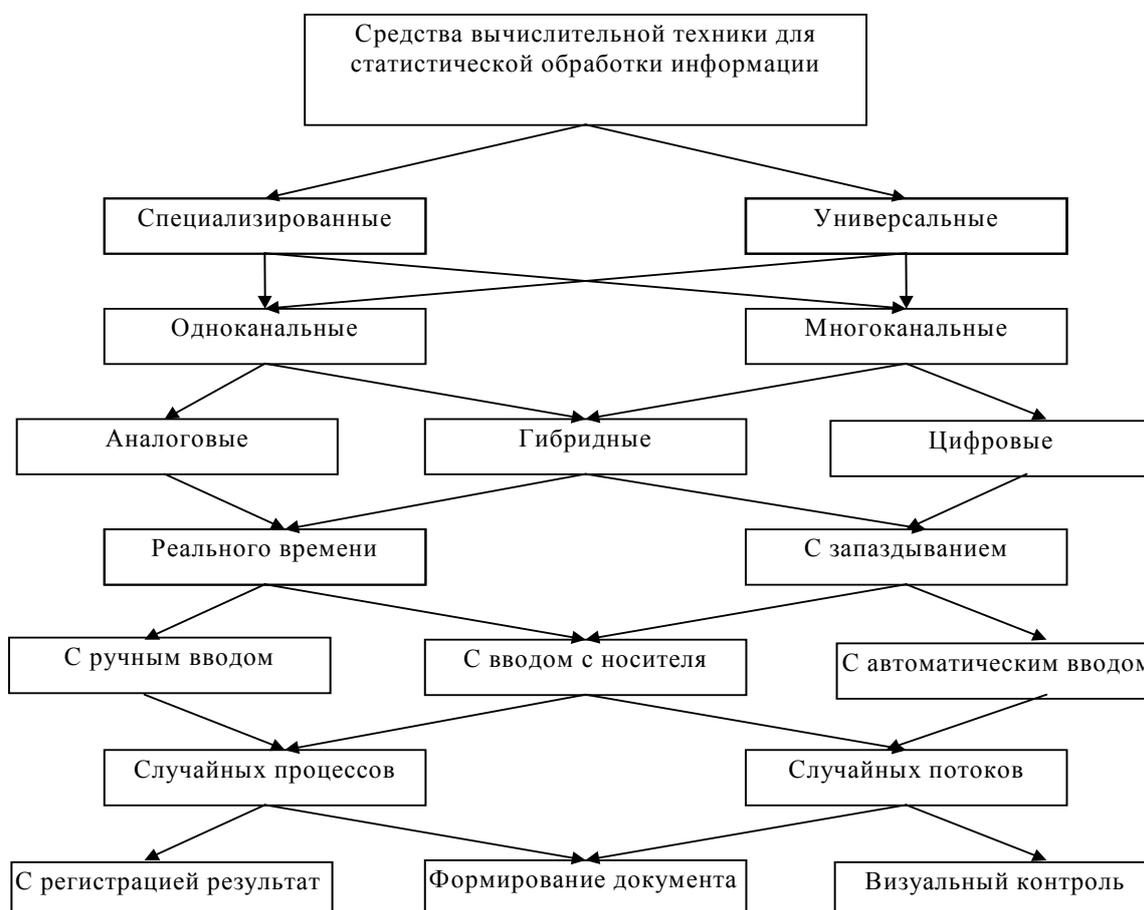


Рисунок 4.1. Классификация средств статистических измерений

Требования простоты аппаратной реализации и работы реальном масштабе времени приводят к необходимости применения специализированных средств.

При исследовании сложных объектов с постоянно изменяющимися задачами исследований наиболее целесообразно применение автоматизированных систем научных исследований - аппаратно-программных систем, реализованных на базе средств вычислительной техники с развитым программным обеспечением.

Специфика статистических измерений неэквидистантных временных рядов из раздела 2, заключается в том, что для каждой j -ой реализации исследуемого ряда необходимо подвергнуть функциональным преобразованиям два массива выборочных данных: массив значений $\{x_{ji}\}_{j=1,\dots,N}^{i=1,\dots,M_j}$ и соответствующий ему массив времен

$\{t_{ji}\}_{j=1,\dots,N}^{i=1,\dots,M_j}$ или интервалов времени $\{\Delta t_{ji}\}_{j=1,\dots,N}^{i=1,\dots,M_j}$.

При этом массив времен (интервалов времени) используется для [108]:

- формирования массивов аргументов функциональных характеристик, зависящих от времени, например, корреляционно-структурных;
- адресации при формировании оценки функциональных характеристик, зависящих от времени в АИИКФ;
- формирования оценки вероятностных характеристик в ААСИ;
- повышения быстродействия в дескрипторных алгоритмах;
- для автоматического восстановления процесса при известном алгоритме восстановления процесса на интервале дискретизации;
- усреднения в АИИКФ.

Учет неэквидистантности временного ряда при статистических анализаторов приводит к необходимости включения в их структуру, в общем случае, следующих блоков (см. рис. 4.2 на примере статистических измерений значений двумерных характеристик):

- функционального преобразования значений входных процессов (БФПЗС);
- формирования и преобразования значений временных интервалов (БФПЗВИ);
- совместного преобразования значений и временных интервалов (БСПЗИ);
- формирования аргументов (БФА);
- селекции (БС);
- коммутации (БК);
- памяти (БП);
- усреднения (БУР);
- выдачи результата (БВР);
- управления (БУ);
- аналого-цифрового преобразования (АЦП).

Вопросы проектирования адаптивных АЦП подробно исследованы в ряде работ [296,297] и в монографии не рассматриваются.

БФПЗВИ предназначен для:

- формирования временных интервалов;
- формирования суммы временных интервалов.

БФПЗС применяется для совместного функционального преобразования значений сигналов при:

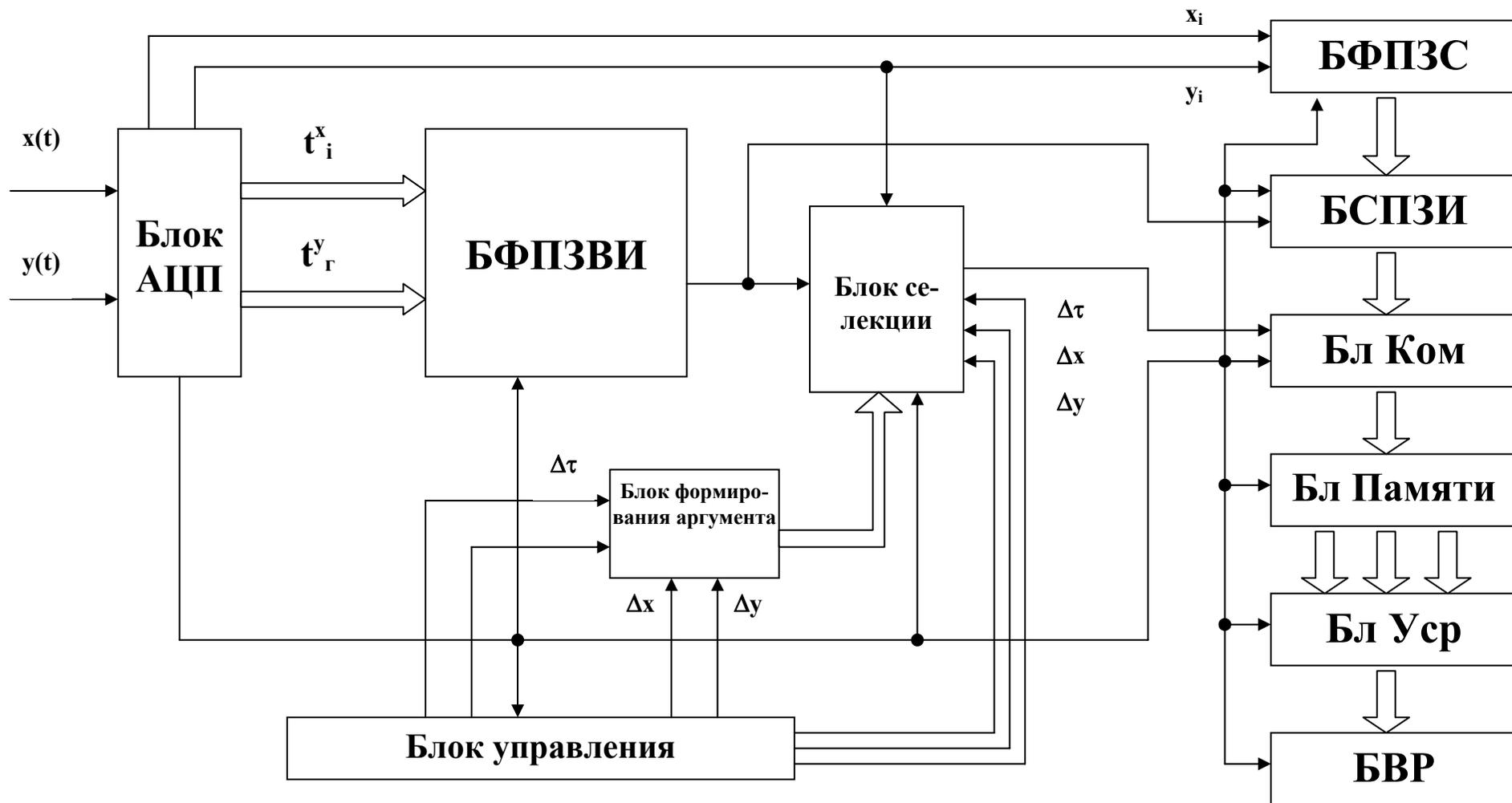


Рисунок 4.2 Статистический анализатор

- корреляционно-структурном анализе: умножение $x_{ji} y_{lr}$, знаковое умножение $\text{sign} x_{ji} \text{sign} y_{lr}$, преобразование "значение-знак" $x_{ji} \text{sign} y_{lr}$, определение модуля $|x_{ji} - y_{lr}|$, возведение в квадрат $(x_{ji} - y_{lr})^2$ и т.д.;

- измерении моментных характеристик m порядка: возведение в m степень.

При анализе законов распределения неэквидистантного временного ряда этот блок не используется.

БСПЗИ используется в ААСИ при усреднении по времени и по совокупности.

БФА при корреляционно-структурном анализе формирует массив аргументов с постоянным или переменным шагом, определяемым видом КФ и значениями ее параметров, а при анализе законов распределения для:

- стационарных процессов - массивы $J_x \Delta x, J_y \Delta y$;
- нестационарных процессов - $J_\tau \Delta \tau, J_x \Delta x, J_y \Delta y, J_i = 0, \dots, J_{i_{\max}}$.

БС применяется для уменьшения погрешности от смещенности (неадекватности алгоритма), когда $\Delta \tau \neq \Delta_\tau, \Delta x \neq \Delta_x, \Delta y \neq \Delta_y$, где Δ_i ширина дифференциального коридора [108]. Это приводит к преобразованию существенных значений только при выполнении следующих условий:

- для корреляционно-структурного анализа - $J \Delta \tau - \Delta_\tau / 2 \leq t_{i+1} - t_i < J \Delta \tau + \Delta_\tau / 2$;

- для законов распределения -
$$\begin{cases} J_x \Delta x - \Delta_x / 2 \leq x_i < J_x \Delta x + \Delta_x / 2; \\ J_y \Delta y - \Delta_y / 2 \leq y_i < J_y \Delta y + \Delta_y / 2. \end{cases}$$

Следует отметить, что при той же длине реализации в случае применения БС увеличивается дисперсия оценки.

БК используется для:

- адресации функционально - преобразованных элементов массивов;
- подсчета числа адресаций (инкрементирование содержимого определенных ячеек памяти).

Назначение остальных блоков статистических анализаторов неэквидистантных временных рядов специфики не имеет.

Состав и содержимое блоков при реализации статистических анализаторов зависят от:

- вида измеряемой характеристики: корреляционные функции, законы распределения;
- способа усреднения: по совокупности, по времени, по времени и совокупности;
- типа характеристики: t -текущая, j -текущая, средняя;
- алгоритма измерения: ААСИ, АИИКФ, ДАСИ;
- формы представления информации: абсолютные значения, приращения значений;
- характеристик входных процессов: динамического, частотного
- диапазонов, КФ, законов распределения и т.д.

Вид анализируемой характеристики зависит от решаемой задачи, тип характеристики - от класса процесса, характеристики входного процесса - от свойств изучаемого объекта, явления.

Таким образом, располагая априорной информацией о:

- виде измеряемой характеристики;
- характеристиках процесса;
- способе усреднения;
- модели потока существенных отсчетов;
- алгоритме восстановления процесса на интервале дискретизации;
- возможной длине реализации;
- требуемой точности;
- возможности буферизации входных массивов;
- требуемом быстродействии;
- допустимых затратах на реализацию;
- допустимых сроках разработки, -

можно приступить к проектированию статистических анализаторов неэквидистантных временных рядов.

Специфика проектирования проявляется на этапе принятия проектных решений:

- выборе алгоритма статистических измерений: ААСИ, АИИКФ, ДАСИ;
 - выборе варианта реализации: специализированное, ПРИС;
 - выборе способа реализации: последовательный, параллельный, параллельно-последовательный;
 - выборе способа организации памяти: сдвиговый, циркуляционный [116],
- а также расчете параметров статистических анализаторов: Δt_0 , Δ , λ , L , R , N , M ...

Блок-схема алгоритма проектирования представлена на рис. 4.3, а пояснения к выбору алгоритма - на рис. 4.4.

Алгоритмы статистических измерений могут быть реализованы различными способами. В некоторых случаях алгоритм может быть реализован только при усреднении по совокупности, а реализация при усреднении во времени или по времени и совокупности либо невозможна, либо экономически нецелесообразна. Рассматриваемые способы реализации, обладая различным быстродействием, предъявляют различные требования по занимаемому объему памяти для хранения программ ПРИС, входных и промежуточных данных, сложности аппаратурной реализации.

При необходимости измерения значений вероятностных характеристик неэквидистантных высокочастотных временных рядов и невозможности буферизации входных массивов единственным способом является применение специализированных статистических анализаторов, обладающих наибольшим быстродействием, определяемым задержкой в распространении сигнала.

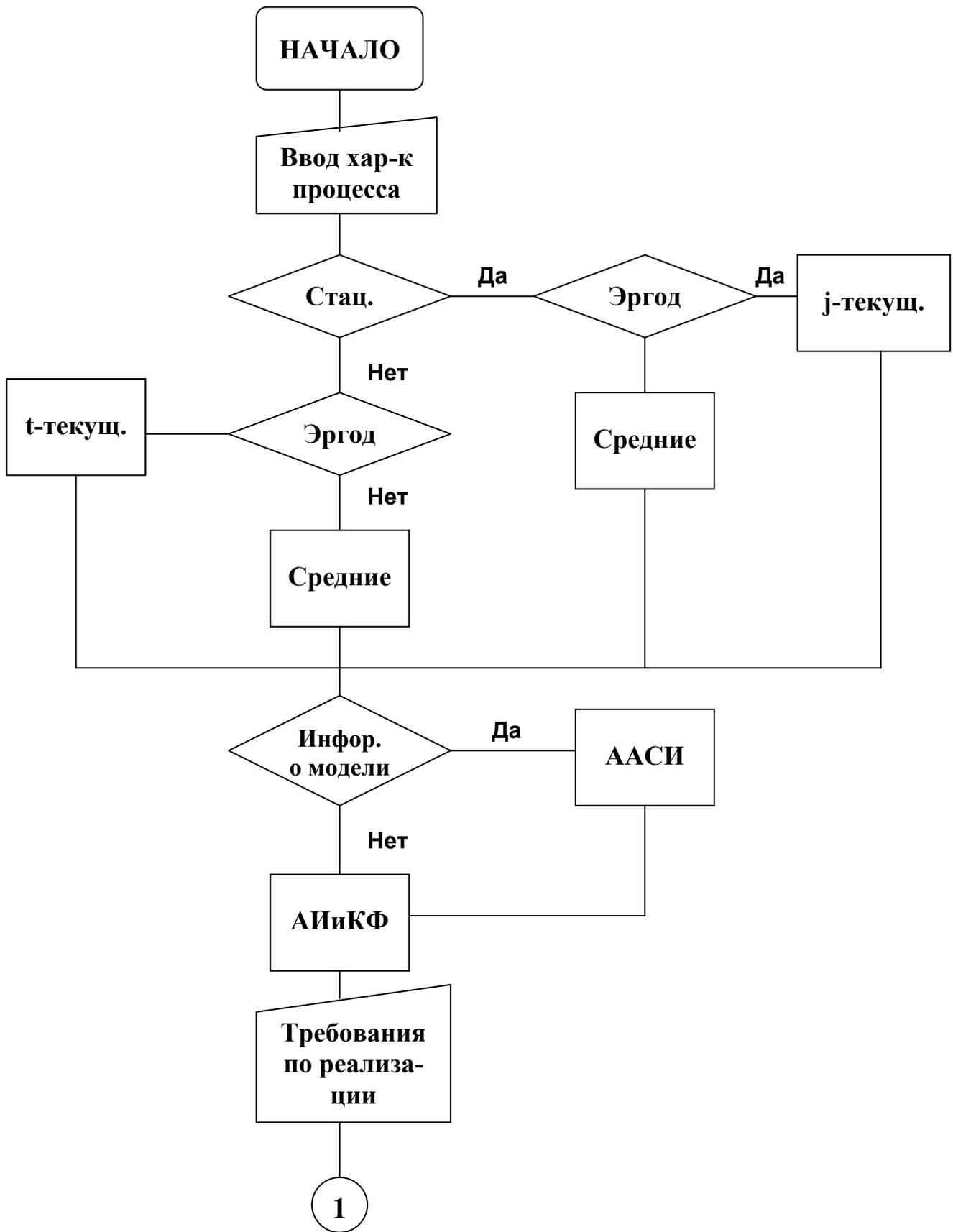


Рисунок 4.3. Алгоритм проектирования

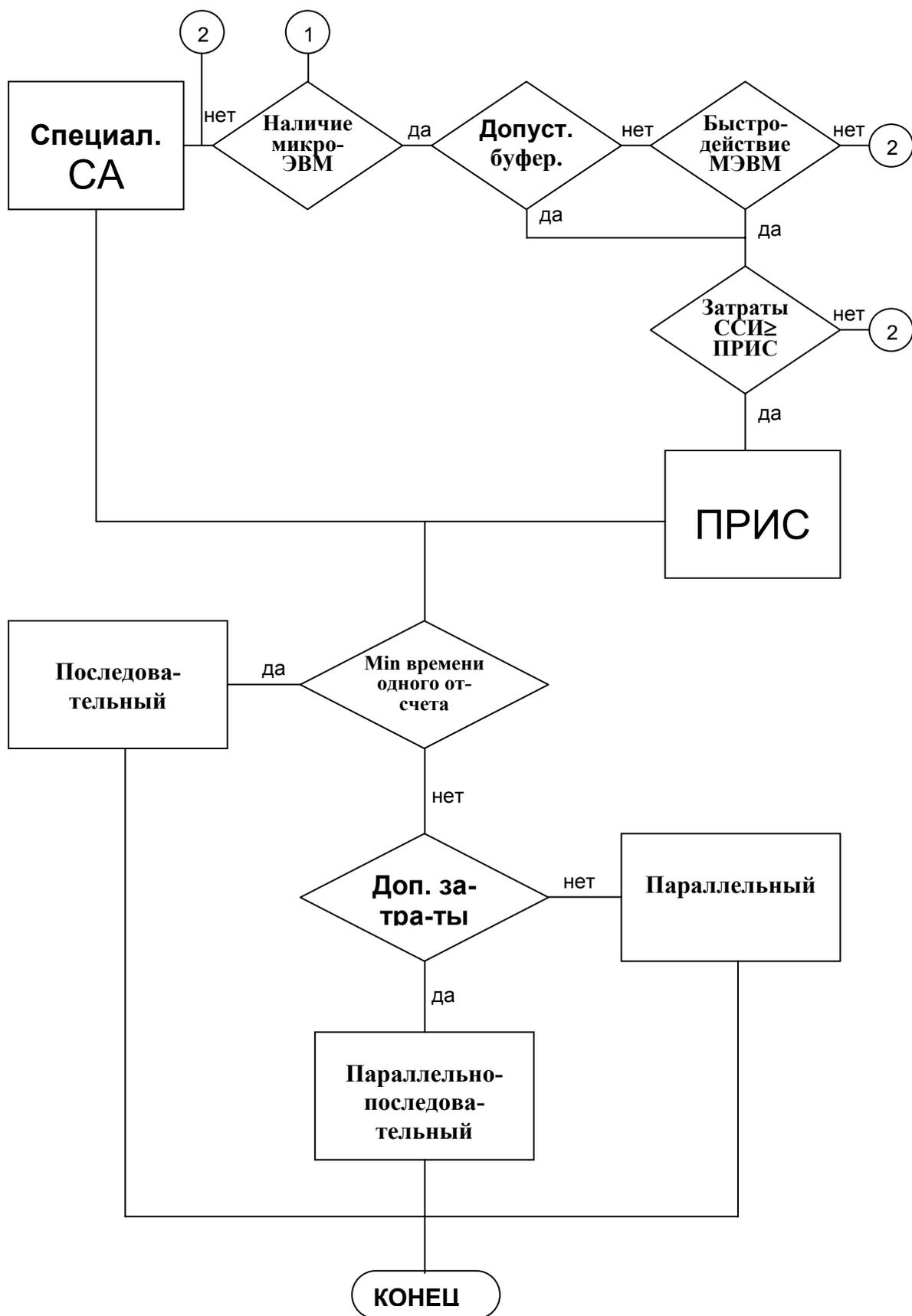


Рисунок 4.3. (Продолжение)

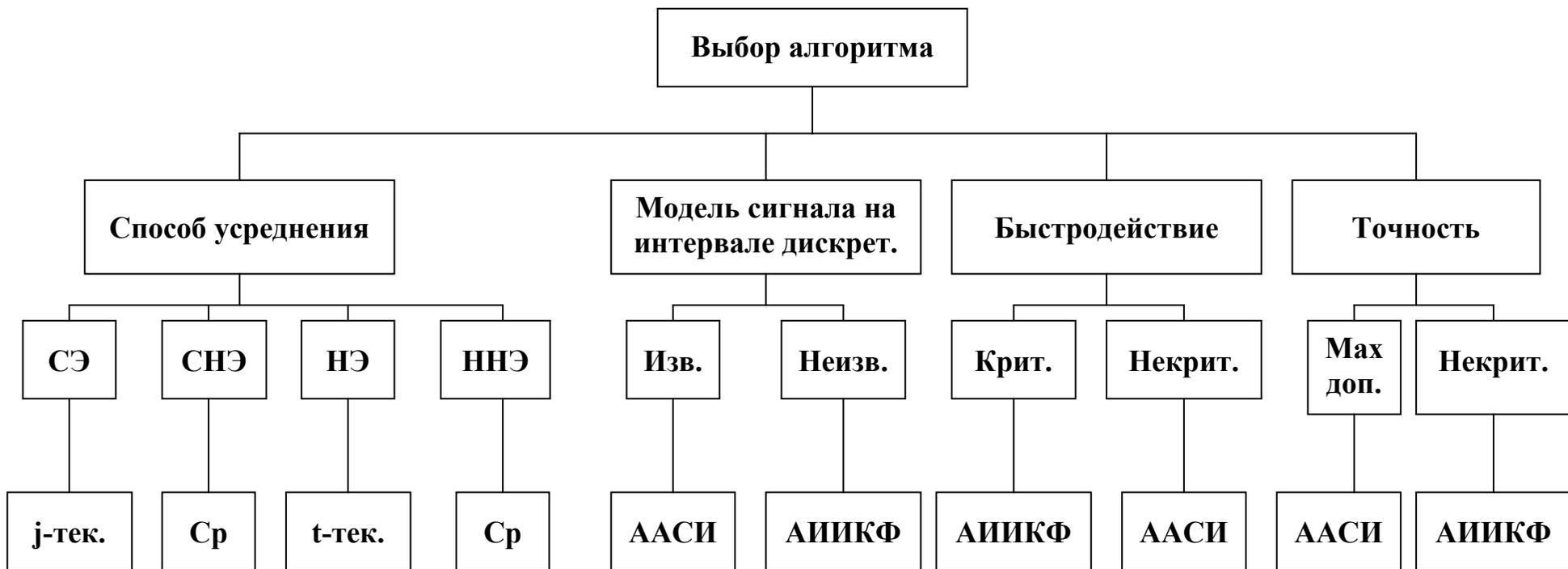


Рисунок 4.4. Выбор алгоритма статистических решений

4.2. Аппроксимативные статистические анализаторы

Разработанные в разделе 2 алгоритмы измерения вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов легли в основу разработки специализированных статистических анализаторов.

4.2.1. Аппроксимативный коррелометр

Представленный на рис. 4.5 коррелометр позволяет оценивать взаимную корреляционную функцию неэквилидистантных временных рядов по существенным отсчётам без этапа предварительного восстановления промежуточных отсчётов [21].

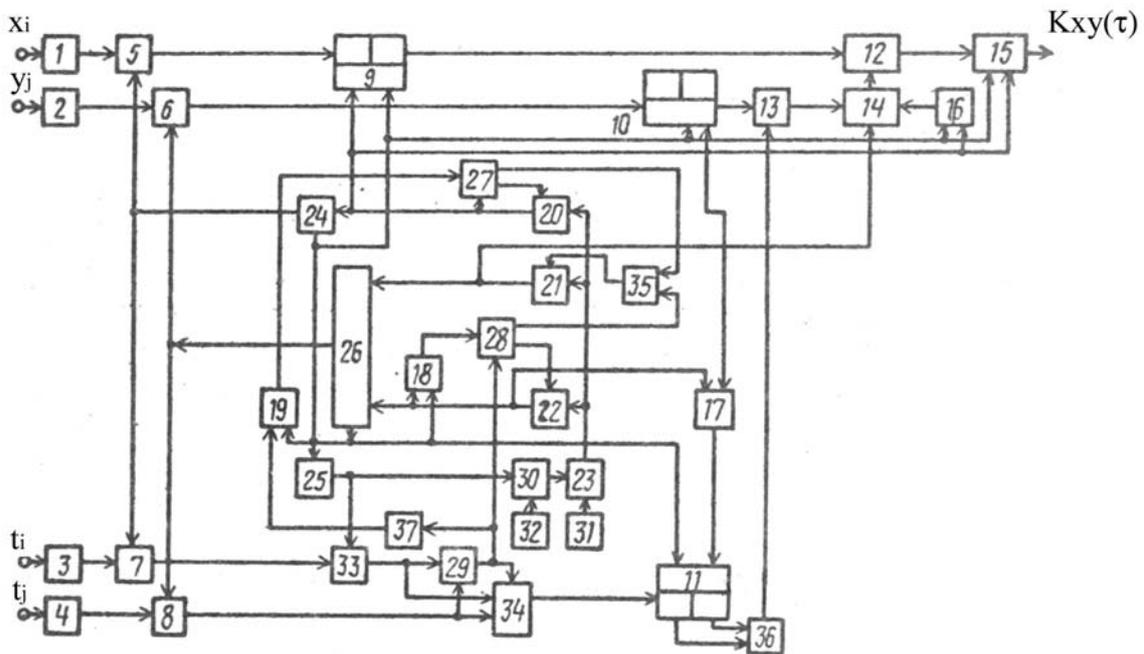


Рисунок 4.5. Аппроксимативный коррелометр

Пусть на вход коррелометра поступают два неэквилидистантных временных ряда $\{x_i, t_i\}$ и $\{y_j, t'_j\}$. Пусть, кроме того, известно, что на каждом интервале дискретизации (в общем случае $\Delta t_i = \text{random}$ и $\Delta t'_j = \text{random}$) исследуемые процессы аппроксимируются полиномами нулевого порядка, т.е.,

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}_M(t) = \overset{\circ}{x}_i 1(t_i \leq t < t_{i+1}); \\ \overset{\circ}{y}_M(t) = \overset{\circ}{y}_j 1(t'_j \leq t < t'_{j+1}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Причём $t_i=0$, $t_{M_x} = T$, $t'_1 = 0$, $t_{M_y} = T$.

В основу работы коррелометра положен следующий алгоритм (см. подраздел 2.2):

$$\hat{K}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M_x-1} x_i \left[\sum_{m=k_i}^{L_i-1} y_m (t'_{m+1} - t'_m) + y_{k_i+1} (t'_{k_i} - t_i - \tau) + y_{L_i} (t_{i+1} + \tau - t'_{L_i}) \right]. \quad (4.2)$$

Здесь точки k_i и L_i определяются из условий

$$\begin{cases} t'_{k_i-1} \leq t_i + \tau < t'_{k_i}; \\ t'_{L_i} \leq t_{i+1} + \tau < t'_{L_i+1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Таким образом, выражение (4.2) является оценкой взаимной корреляционной функцией при аппроксимации исследуемого процесса полиномами нулевого порядка. Причём из него видно, что для определения этой оценки не требуется знания промежуточных отсчётов процессов. Она находится непосредственно по существенным отсчётам исследуемого процесса, которые в частном случае могут быть представлены регулярными временными рядами.

Коррелометр работает следующим образом.

АЦП 1-4 осуществляют передачу в соответствующие элементы памяти 5-8 заданных объёмов выборки M_x , M_y неэквилидистантных временных рядов x_i и y_j и соответствующих меток времени t_i, t'_j . Причём M_x – число, удовлетворяющее неравенству

$$t_{M_x} + \tau_{k \max} \leq T. \quad (4.4)$$

Перед началом работы регистр памяти 32, блоки памяти 9-11, сумматор 14, блок интегрирования 15 и счётчики 24-26 обнулены. Триггер 28 установлен в состояние, при котором сигнал с его первого выхода закрывает элемент И 22. При этом сигнал со второго выхода триггера 27 держит закрытым элемент И 21. Так как в счётчике 25 - нуль и в регистре 32 также - нуль, то на выходе элемента сравнения 29 появляется запрещающий сигнал, который держит элемент И 23 в закрытом состоянии, и импульсы с генератора 31 не подаются на соответствующие блоки коррелометра.

Работа коррелометра начинается с момента приёма в регистр памяти 32 кода, соответствующего $\tau_{k \max}$. После этого приёма срабатывает элемент сравнения 30, который открывает элемент И 23. В результате этого импульсы с генератора 31 поступают в схему коррелометра. Первый поступающий импульс через открытый элемент И 20 увеличивает содержимое счётчика 24 на 1. Первый адрес с выхода счётчика 24 подается в элементы памяти 5 и 7 и выбирает первый отсчёт первого временного ряда

x_i и соответствующую ему метку времени t_i . Причём отсчёт ряда x_i поступает на вход блока памяти 9, а метка времени - на первый вход сумматора 33. Этот же первый тактовый импульс с выхода элемента И 20 поступает на первый установочный вход триггера 27 и устанавливает его в состояние, при котором сигнал с его второго выхода закрывает элемент И 20, а разрешающий сигнал с его первого выхода поступает на первый вход элемента И 35, на втором входе которого уже присутствует разрешающий сигнал с первого выхода триггера 28. Тем самым на выходе элемента И 35 образуется разрешающий сигнал, который открывает элемент И 21 подготавливая его к приему тактовых импульсов. С этого момента начинается поиск точки k'_i , удовлетворяющей условию (4.3). Поиск осуществляется следующим образом. Последовательно, по тактовым импульсам, проходящим через элемент И 21, из элементов памяти 6

и 8 выбираются отсчёты второго ряда y_i и меток времени t'_j , которые поступают соответственно в блок памяти 10, на вход элемента сравнения 29 и первый вход коммутатора 34. На второй вход элемента сравнения 29 подается код с выхода сумматора 33, соответствующий сумме $(t_1 + \tau)$. Пока выполняется условие (4.3), выходной сигнал элемента сравнения 29 разрешает прохождение меток времени t'_{m+1} второго ряда через первый вход коммутатора 34 на его выход и далее на вход блока памяти 11, где постоянно присутствуют текущая и предыдущая метки времени t'_{m+1} , t'_m второго ряда. При этом в блок умножения 13 поступает код, соответствующий разности $(t'_{m+1} - t'_m)$, образованной в блоке вычитания 36 кодами с выходов блока памяти 11.

При этом в сумматоре 14 накапливаются частные произведения $y_m(t'_{m+1} - t'_m)$. Поиск продолжается до тех пор, пока не нарушится первое условие (4.3). При этом срабатывает элемент сравнения 29, выходной сигнал которого поступает на первый вход триггера 28. Сигнал со второго выхода триггера 28 открывает элемент И 22, а с первого выхода - запрещает прохождение открывающего сигнала на элемент И 21 (т.е. закрывает его). Кроме того, сигнал с выхода элемента сравнения 29 переключает коммутатор 34 в положение, при котором коммутатор 34 пропускает информацию со своего второго входа на свой выход. С приходом тактового импульса через открытый элемент И 22 и элемент ИЛИ 17 код с выхода коммутатора 34 записывается в первую ячейку памяти блока памяти 11. Таким образом, на выходе блока 36 образуется разность $(t'_{ki+1} - t_i - \tau)$. Тот же импульс с выхода элемента И 22 декрементирует реверсивный счётчик 26 и закрывает через триггер 28 элемент 22. Новое уменьшенное содержимое счётчика 26 вызывает выбор предыдущего отсчёта второго ряда y_{ki} и соответствующей метки времени t'_{ki} из элементов памяти 6 и 8. Таким образом точка

ki найдена. Причём значение отсчёта y_{ki} не записывается в блок памяти 10, а метка времени t'_{ki} поступает на первый вход элемента сравнения 29. Новое уменьшенное значение t' закрывает элемент сравнения 29. Сигнал с его выхода возвращает коммутатор 34 в состояние, при котором он пропускает информацию со своего первого входа на выход. Кроме этого, по заднему фронту сигнала, закрывающего элемент сравнения 29, формирователь импульсов 37 формирует короткий импульс, который пройдя через элемент ИЛИ 19, переключает триггер 27 в состояние, при котором на его втором выходе присутствует сигнал, открывающий элемент И 20, а на его выходе - сигнал, через элемент И 35 закрывающий элемент И 21. Для первого отсчёта неэкви-

дистантного временного ряда x_i на информационном входе блока 15 находится нуль. Поэтому с приходом очередного тактового импульса через элемент И 20 в нём информация не накапливается. С приходом этого импульса снова закрывается элемент И 20 и открывается элемент И 21, инкрементируется счётчик 26. Содержимое блока памяти 9 сдвигается. При этом в его первую ячейку памяти принимается отсчёт x_2 , а во вторую - x_1 . Таким образом, начинается поиск точки L_i . Этот поиск осуществля-

ется аналогично поиску точки k_i , только для второго условия (4.3). После нахождения этой точки на первом входе блока умножения 12 находится значение отсчёта x_i , на выходе сумматора 14 - накопленная сумма:

$$\sum_{m=k_i}^{L_i-1} y_m (t'_{m+1} - t'_m) + y_{k_{i+1}} (t'_{k_i} - t_i - \tau) + y_{L_i} (t_{i+1} + \tau - t'_{L_i}). \quad (4.5)$$

На выходе блока 15 находится соответствующее частичное произведение суммы на значение отсчёта x_i . По тактовому импульсу с выхода элемента И 20 производится накопление этого произведения в блоке 15 и одновременное обнуление сумматора 14. По этому же сигналу сдвигается содержимое блока памяти 10. При этом на его выходе появляется значение отсчёта первого ряда. На выходе блока памяти находится по-прежнему значение отсчёта второго ряда y_{L_1} , которое для следующего цикла становится значением y_{k_2} , т.е. точка L_1 становится точкой k_2 . После этого начинается поиск точки L_2 . Процесс накопления происходит до тех пор, пока не переполнится реверсивный счётчик 26. Это будет соответствовать перебору всех отсчётов реализации исследуемого временного ряда. При этом на выходе блока 15 будет находиться значение взаимной корреляционной функции для данной задержки τ . По сигналу переполнения реверсивного счётчика 26 с его выхода переноса обнуляется блок 15, сумматор 14, блоки памяти 9-11, счётчик 24, а содержимое счётчика 25 инкрементируется. Таким образом, подготавливается условие для определения взаимной корреляционной функции в следующей ординате. Процесс вычисления повторяется до тех пор, пока не переберутся все ординаты взаимной корреляционной функции на $\tau_{k \max}$. Как только содержимое счётчика 25 станет больше содержимого регистра памяти 32, срабатывает элемент сравнения 30 и закрывается элемент И 23. Таким образом, устройство заканчивает свою работу.

Следует отметить, что существенными недостатками предложенного коррелометра являются сложность и последовательное, а не параллельное определение ординат взаимной корреляционной функции, что, в свою очередь, увеличивает время анализа.

4.2.2. Коррелометр с автоматическим восстановлением промежуточных отсчётов и сдвиговой организации памяти

От этого недостатка свободен коррелометр с усреднением по времени (см. рис. 4.6), в основу работы которого положен следующий алгоритм [12]:

$$\hat{K}_{xj}(\tau) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{l=0}^{M_j} x_{j,i+l} \delta_{j,i+l}, \quad (4.6)$$

где $\delta_{j,i+l} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{j,i+l} \leq t_{ji} + \tau < t_{j,i+l+1}; \\ 0, & \text{если нет.} \end{cases}$

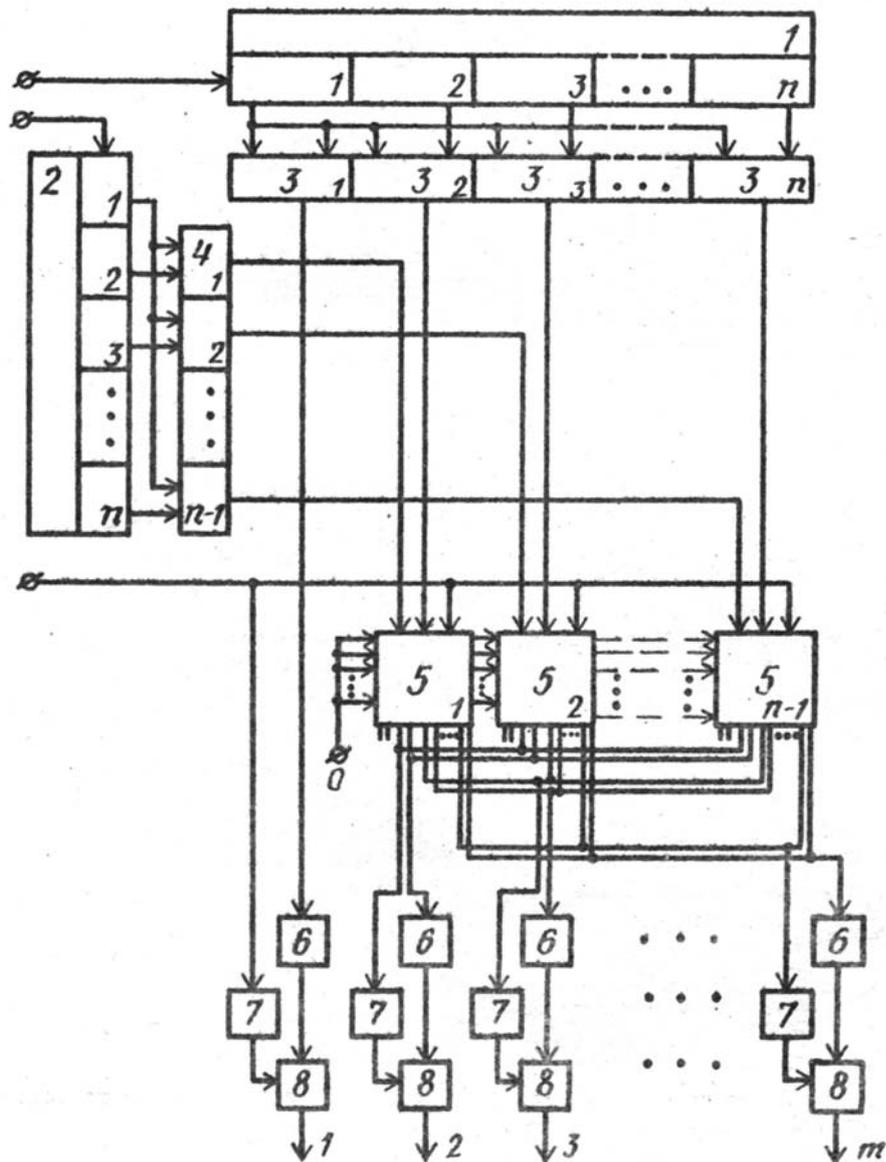


Рисунок 4.6. Коррелометр

Коррелометр содержит блоки памяти 1, 2, блок умножения 3, блок вычитания 4, коммутатор 5, сумматоры 6, счётчики 7, блоки деления 8.

Коммутатор 5 содержит дешифратор 9, элементы НЕ 10, первую группу элементов И 11, ключи 12, элементы ИЛИ 13, вторую группу элементов И 14.

Коррелометр работает следующим образом.

Перед началом работы ячейки обоих блоков памяти 1, 2, сумматоры 6 и счётчики 7 обнулены. На первый информационный вход устройства в i -й момент времени

поступает текущее значение входного процесса x_i , которое запоминается в первой ячейке первого блока памяти 1. На второй информационный вход устройства поступает текущее значение времени t_i , которое запоминается в первой ячейке второго блока памяти 2. На синхронизирующий вход устройства поступает синхроимпульс СИ, соответствующий приходу пары текущих значений $\left\{ x_i, t_i \right\}$. Блоки памяти 1, 2

осуществляют параллельные сдвиги содержимого ячеек в моменты прихода каждой

последующей пары текущих значений входного процесса и меток времени. На выходах блоков умножения формируются в i -й момент времени t_i частичные произведения соответственно $\overset{\circ}{x}_i^2, \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i-1}$, и т.д., которые поступают на информационные входы ключей 12 коммутаторов 5 (k_0, \dots, k_{m-1} см. рис.4.6). Сигнал $\overset{\circ}{x}_i^2$ подается на вход первого сумматора 6. В блоках вычитания 4 формируются разности $(t_i - t_{i-1}), (t_i - t_{i-2})$ и т.д., которые подаются на входы дешифраторов 9 соответствующих коммутаторов 5 и характеризуют временную задержку между существенными значениями входного процесса.

Каждый k_j выход дешифратора j -го коммутатора выдает управляющий сигнал на соответствующий вход k_{j+1} -го элемента ИЛИ $(j+1)$ -го коммутатора. Номер k_j соответствует коду временной задержки. Следует заметить, что номера выходов дешифраторов 9 не равны между собой и возрастают с номером k_j , т.е.

$$k_1 < k_2 \dots < k_{n-1}. \quad (4.7)$$

Причем, $k_{n-1} \leq m$.

В соответствии с (4.7) первый коммутатор 5 выдает частичное произведение, поступающее на его дешифратор 9, и сигнал, образованный синхроимпульсом, поступающим на первые входы элементов И первой группы 11 первого коммутатора 5, на выходы соответствующих ключей 12 и элементов И первой группы 11 своего коммутатора. Номер выходов лежит в диапазоне 1 - k_1 . Второй коммутатор 5 выдает частичное произведение, поступающее на его дешифратор 9, и сигнал, образованный синхроимпульсом, поступающим на первые входы элементов И первой группы 11 второго коммутатора 5, на выходы ключей 12 и элементов И первой группы 11 своего коммутатора 5. Номера выходов лежат в диапазоне $(k_1 + 1)$ и k_2 и т.д. j -ый коммутатор 5 выдает названные сигналы на выходы соответствующих ключей 12 и элементов И 11 своего коммутатора. Номера выходов лежат в диапазоне $(k_{j-1} + 1) - k_j$ и т. д. $(n-1)$ -й коммутатор выдает аналогичные сигналы на выходы ключей 12 и элементов И 11 своего коммутатора. Номера выходов лежат в диапазоне $(k_{n-1} + 1) - k_{n-1}$.

Частичные произведения с выходов ключей 12 коммутаторов 5 поступают на входы соответствующих сумматоров 6, кроме первого, и накапливаются.

Сигналы с выходов элементов И первой группы 11 коммутаторов поступают на входы счетчиков 7, кроме первого, увеличивая их содержимое на +1.

На вход первого сумматора 6 поступает частичное произведение $\overset{\circ}{x}_i^2$, а на вход первого счетчика 7 поступают синхроимпульсы синхронизирующего входа устройства.

После прихода последней пары $\left\{ \overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{t}_m \right\}$ в сумматорах 6 находятся суммы, соответствующие неусредненным ординатам оценки автокорреляционной функции.

Блоки деления 8 делят содержимое сумматоров 6 на содержимое соответствующих счетчиков 7, усредняя, таким образом, результат. На выходе блоков деления 8 получаются ординаты оценки автокорреляционной функции.

Важным элементом предложенного коррелометра является коммутатор. Каждый коммутатор работает следующим образом (см. рис. 4.7).

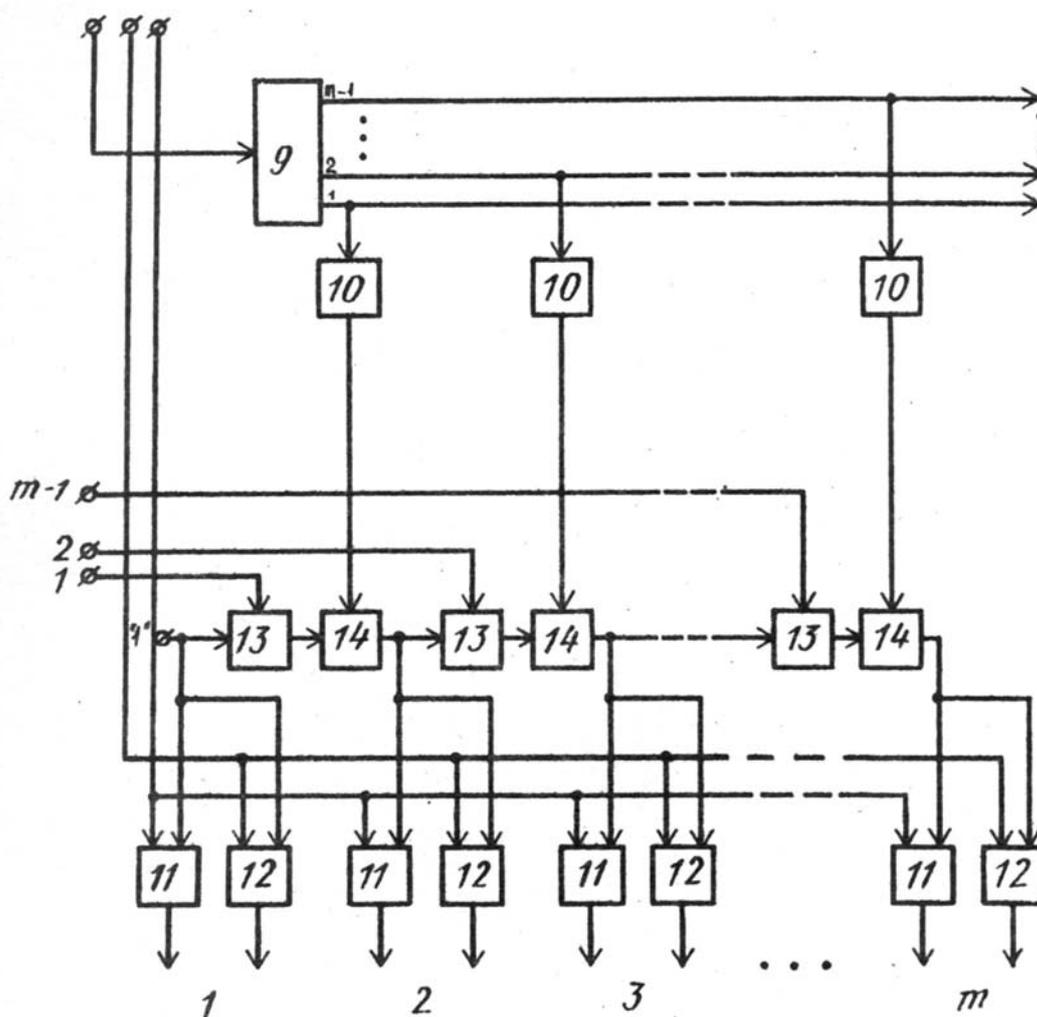


Рисунок 4.7. Коммутатор

На вход дешифратора 9, информационные входы ключей 12 и первые входы элементов И первой группы 11 поступают соответственно временная задержка с j -го блока вычитания 4, частичное произведение с $(j+1)$ -го блока умножения и синхроимпульс со синхронизирующего входа коррелометра. Код временной задержки дешифрируется дешифратором 9 в единичный сигнал на своем k_j -ом выходе. Кроме того, этот сигнал поступает на k_j -ый элемент НЕ 10 рассматриваемого коммутатора. Таким образом, сигналы на выходах элементов НЕ 10 формируют код, обратный коду, сформированному на выходах дешифратора 9. Во всех разрядах этого обратного кода находятся единичные потенциалы, кроме k_j -го, где сформирован нулевой потенциал. Сигналы с выходов элементов НЕ 10 поступают на входы элементов И 14, тем самым разрешая прохождение сигнала через эти элементы до элемента И 14, на который подается нулевой потенциал с k_j -го элемента НЕ 10.

На соответствующие входы элементов ИЛИ 13 j -го коммутатора подается прямой код с выходов дешифратора 9 $(j-1)$ -го коммутатора. В k_{j-1} -м разряде этого кода находится единичный потенциал, во всех остальных - нулевые. Сигнал с k_{j-1} -го выхода дешифратора 9 j -го коммутатора 5 поступает последовательно на вход элемента ИЛИ 13 и вход открытого элемента И 14 $(k_{j-1}+1)$ -го ключа, на первый вход элемента ИЛИ 13 и вход открытого элемента И 14 $(k_{j-1}+2)$ -го ключа и т.д. до закрытого нулевым сигналом с k_j -го элемента НЕ 10 элемента И 14 (k_j+1) -го ключа 12. Сигналы с

выходов элементов И 14 поступают на управляющие входы соответствующих ключей 12 и на входы элементов И первой группы 11. Таким образом, сигнал с k_{j-1} -го элемента ИЛИ 13 входа j -го коммутатора 5 открывает ключи 12 и соответствующие им элементы И 11 с k_j+1 -го до k_j -го.

Частичное произведение со второго входа и синхроимпульс с третьего входа j -го коммутатора 5 подаются соответственно на информационные входы ключей и первые входы элементов И и далее на выходы их групп выходов указанного блока, номера которых лежат в диапазоне $(k_{j-1}+1) - k_j$, т.е. через те ключи и элементы И, которые открыты сигналами соответствующих элементов И.

Если на вход первого коммутатора 5 подается единичный потенциал, а на управляющие входы группы - нулевые потенциалы, то частичное произведение со второго входа и синхроимпульс с третьего входа этого блока передаются соответственно на выходы первой и второй групп первого коммутатора 5, номера которых лежат в диапазоне $1 - k_1$. Если на входы каждого последующего коммутатора 5 подается нулевой потенциал, то частичное произведение с выхода соответствующего блока умножения 3 и синхроимпульс синхронизирующего входа коррелометра через соответствующие ключи 12 и элементы И 11 j -го коммутатора поступают на выходы, номера которых лежат в диапазоне $1 - k_1$.

Так как на соответствующие входы первого элемента ИЛИ 13, элемента И 11 и управляющий вход первого ключа 12 первого коммутатора подается единичный потенциал, то сигнал с этого коммутатора передается на выходы с номерами $(k_{j-1} + 1) - k_j$.

Поскольку на соответствующие входы первого элемента ИЛИ 13, элемента И 11 и управляющий вход первого ключа остальных коммутаторов подается нулевой потенциал, то сигналы с выходов j -го коммутатора поступают на выходы с номерами $(k_{j-1}+1)$ -го по k_j .

Замена блоков умножения на блоки функционального преобразования позволяет измерить значения релейных, полярных корреляционных функций, а также значения структурной функции и корреляционной функции, определяемой через модуль разности (см. таблицу 2.3).

Описанное устройство работает с отсчетами абсолютного времени. Это влечет за собой наличие избыточных многоразрядных блоков памяти для хранения отсчетов абсолютного времени. Применение циркуляционной организации памяти для указанного устройства позволяет существенно упростить его структурную схему и облегчить его практическую реализацию [148].

Для пояснения работы коррелометра в таблице 4.1 показано содержимое блоков памяти, умножений, вычитаний, сумматоров, счётчиков, соответствующее синхроимпульсам неэквидистантного временного ряда (см. рис. 4.8). Из содержимого таблицы видно, что кроме существенных отсчетов обрабатываются и промежуточные отсчёты.

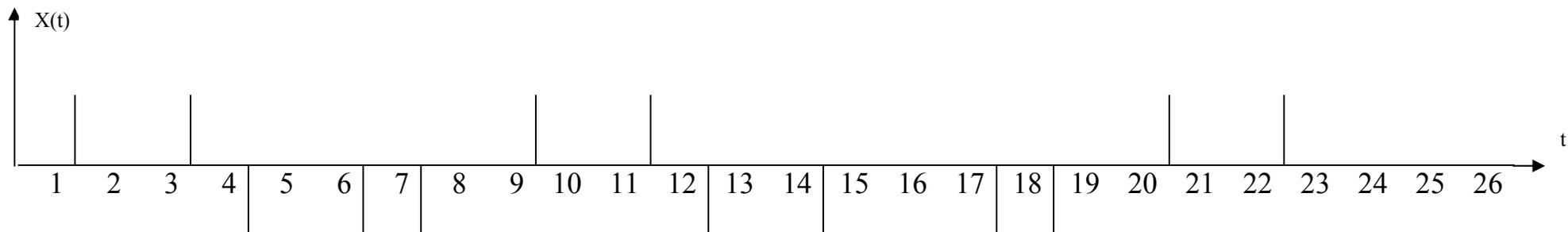


Рисунок 4.8. Реализация неэквилидистантного временного ряда

Содержимое основных блоков коррелометра

Таблица 4.1

№	Содержимое 1 блока памяти				Содержимое 2 блока памяти				Содержимое блоков умножения				Содер. вычитания			Содержимое сумматоров						Содержимое счётчиков					
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	x_1	0	0	0	0	0	0	0	x_1^2	0	0	0	0	0	0	$+x_1^2$						+1					
2	x_2	x_1	0	0	1	0	0	0	x_2^2	$x_2 x_1$	0	0	1	0	0	$+x_2^2$	$+x_2 x_1$					+1	+1				
3	x_3	x_2	x_1	0	3	1	0	0	x_3^2	$x_3 x_2$	$x_2 x_1$	0	2	3		$+x_3^2$	$+x_3 x_2$	$+x_3 x_2$	$+x_2 x_1$		+1	+1	+1	+1			
4	x_4	x_3	x_2	x_1	4	3	1	0	x_4^2	$x_4 x_3$	$x_4 x_2$	$x_4 x_1$	1	3	4	$+x_4^2$	$+x_4 x_3$	$+x_4 x_2$	$+x_4 x_2$	$+x_4 x_1$	+1	+1	+1	+1	+1		
5	x_5	x_4	x_3	x_2	6	4	3	1	x_5^2	$x_5 x_4$	$x_5 x_3$	$x_5 x_2$	2	3	5	$+x_5^2$	$+x_5 x_4$	$+x_5 x_4$	$+x_5 x_3$	$+x_5 x_2$	$+x_5 x_2$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
6	x_6	x_5	x_4	x_3	7	6	4	3	x_6^2	$x_6 x_5$	$x_6 x_4$	$x_6 x_3$	1	3	4	$+x_6^2$	$+x_6 x_5$	$+x_6 x_4$	$+x_6 x_4$	$+x_6 x_3$		+1	+1	+1	+1	+1	
7	x_7	x_6	x_5	x_4	9	7	6	4	x_7^2	$x_7 x_6$	$x_7 x_5$	$x_7 x_4$	2	3	5	$+x_7^2$	$+x_7 x_6$	$+x_7 x_6$	$+x_7 x_5$	$+x_7 x_4$	$+x_7 x_4$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
8	x_8	x_7	x_6	x_5	11	9	7	6	x_8^2	$x_8 x_7$	$x_8 x_6$	$x_8 x_5$	2	4	5	$+x_8^2$	$+x_8 x_7$	$+x_8 x_7$	$+x_8 x_6$	$+x_8 x_6$	$+x_8 x_5$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
9	x_9	x_8	x_7	x_6	12	11	9	7	x_9^2	$x_9 x_8$	$x_9 x_7$	$x_9 x_6$	1	3	5	$+x_9^2$	$+x_9 x_8$	$+x_9 x_7$	$+x_9 x_7$	$+x_9 x_6$	$+x_9 x_6$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Итого															Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	9	8	7	6	5	4	

4.2.3. Аппроксимативный полярный коррелометр

Коррелометр содержит компараторы 1, 2, блоки умножения 3, 4, 9_1-9_n , триггеры 5, 6, 8_1-8_n , распределитель импульсов 7, счётчики 10_1-10_n , 13_1-13_n , 14_1-14_n , генератор тактовых импульсов 11, блоки коммутации 12_1-12_n , блоки деления 15_1-15_n , первый 16 и второй 17 информационные входы [16].

Блок коммутации содержит дешифратор 18, группы элементов НЕ 19_1-19_n , ИЛИ 20_1-20_n , И 21_1-21_n , 22_1-22_n , 23_1-23_n , входы: информационный 24, кода задержки 25, единичного сигнала 26, синхронизации 27.

Алгоритм,

$$\hat{P}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M-1} \text{sign} x_i \sum_{m=ki}^{Li} (t_{m+1} - t_m) \text{sign} y_m, \quad (4.8)$$

трансформированный для устройства реального времени, положен в основу работы аппроксимативного полярного коррелометра с усреднением по времени.

Коррелятор работает следующим образом (см. рис. 4.9).

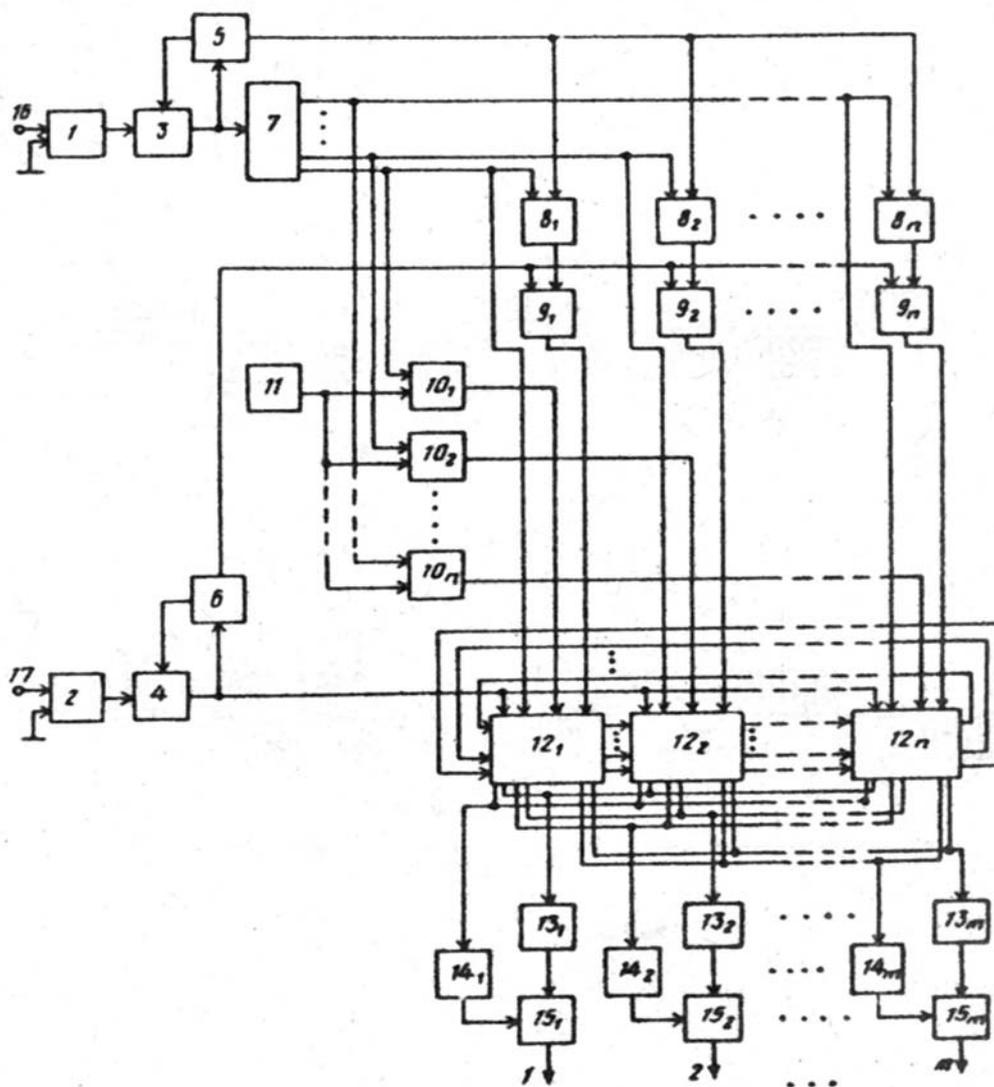


Рисунок 4.9. Аппроксимативный полярный взаимный коррелометр

Перед началом работы счетчики 10, 13 и 14 обнулены. Триггеры 5 и 6 устанавливаются автоматически в состояние, при котором на их прямом выходе присутствуют сигналы, противоположные сигналам на первом входе дополнительных блоков 3 и 4 умножения. Генератор тактовых импульсов 11 вырабатывает импульсы текущего времени, которые накапливаются в счетчиках 10. Первый и второй процессы $x(t)$ и $y(t)$ подаются на первые входы соответственно первого 1 и второго 2 компараторов, на вторые входы которых поданы нулевые потенциалы.

Момент перехода процесса $y(t)$ через нулевой уровень регистрирует компаратор 1, сигнал с выхода которого преобразуется дополнительным блоком 3 умножения в короткий импульс. Этот импульс перекидывает триггер 5 в состояние, при котором сигналы на входах блока умножения 3 противоположны. На инверсном выходе триггера 5 при этом устанавливается сигнал, соответствующий знаку $y(t)$ на текущем интервале Δt_j , т.е. $\text{sign } y_j$. Импульс с выхода блока умножения 3 поступает также на вход распределителя импульсов 7, который, в соответствии с принципом циркуляции памяти, сигналом со своего определенного выхода с номером $l=(j) \bmod n$ ($j=0,1,2,\dots,N$, N_1 - число нулей $y(t)$) разрешает запись текущего значения знака процесса $y(t)$ в триггер 8 с соответствующим номером, а также обнуляет содержимое счетчика 10 с таким же номером. Таким образом, в триггерах 8 запоминаются текущие значения процесса $y(t)$ на текущих интервалах Δt_j времени, а в блоках 9 умножения образуются соответствующие произведения этих знаков на знак первого процесса $\text{sign } x_i$:

- в первом - $\text{sign } y_{j-1} * \text{sign } x_i$;
- во втором - $\text{sign } y_{j-1+1} * \text{sign } x_i$;
- в $(l-1)$ -ом - $\text{sign } y_{j-1} * \text{sign } x_i$;
- в l -ом - $\text{sign } y_j * \text{sign } x_i$;
- в $(l+1)$ -ом - $\text{sign } y_{j-n+1} * \text{sign } x_i$;
- в n -ом - $\text{sign } y_{j-1-1} * \text{sign } x_i$.

В i -й момент времени в счетчиках 10 будут накапливаться коды, соответствующие интервалам времени между моментами перехода процессов через ноль:

- в первом - $\Delta t_{j-1-1} + \Delta t_{j-1} + \dots + \Delta t_{j-1} + \Delta t_j$;
- во втором - $\Delta t_{j-1} + \dots + \Delta t_{j-1} + \Delta t_j$;
- в $(l-1)$ -ом - $\Delta t_{j-1} + \Delta t_j$;

- в l -ом - Δt_j ;
- в $(l+1)$ -ом - $\Delta t_{j-n} + \Delta t_{j-n+1} + \dots + \Delta t_{j-1} + \Delta t_j$;
- в n -ом - $\Delta t_{j-l-2} + \Delta t_{j-l-1} + \dots + \Delta t_{j-1} + \Delta t_j$.

Момент перехода процесса $x(t)$ через ноль регистрирует компаратор 2, сигнал с выхода которого преобразуется вторым дополнительным блоком умножения 4 в короткий импульс. Этот импульс перебрасывает триггер 6 в состояние, при котором сигналы на входах блока умножения 4 противоположны. Кроме того, этот импульс поступает на первые входы блоков коммутации 12 и разрешает прохождение произведений, находящихся на четвертых входах на соответствующие их выходы, конечные номера которых соответствуют кодам соответствующих временных задержек, находящихся на третьих входах соответствующих блоков коммутации 12. Номер блока коммутации 12, с выходов которого заполняются счетчики первой 13 и второй 14 групп, указывает разрешающий сигнал с выхода с номером $l=(j) \bmod n$ распределителя импульсов 7, который присутствует на втором входе блока коммутации 12 с таким же номером. Таким образом, частичные произведения добавляются в счетчики 14 второй группы, начиная с первого и до счетчика с номером, соответствующим временной задержке

$$\Delta \tau = \Delta t_{j-n} + \Delta t_{j-n+1} + \dots + \Delta t_{j-1} + \Delta t_j,$$

где Δt_j - интервал времени между текущим моментом пересечения нулевого уровня процессом $x(t)$ и ближайшим предыдущим моментом времени нулевого уровня процессом $y(t)$. В счетчики первой группы 13 с номерами, соответствующими тому же диапазону $(0, \Delta \tau)$, добавляются единицы. Содержимое счетчиков 14 делится на содержимое счетчиков 13 в соответствующих блоках деления 15, таким образом усредняя результаты.

Блок коммутации 12 работает следующим образом (см. рис. 4.10).

На вход 24 блока коммутации 12 поступает соответствующее частичное произведение знаков двух процессов, которое подается на информационные входы элементов И второй группы 21. На вход 25 одновременно поступает код временной задержки, который дешифрируется дешифратором 18 в сигнал на своем определенном выходе - S_k (где k - номер блока коммутации 12, $k=1,2,\dots,n$). В блоке коммутации 12 с номером $l=(j) \bmod n$ на вход 26 подается единичный сигнал с соответствующего выхода распределителя импульсов 7, который поступает на первый вход первого элемента ИЛИ 20, тем самым разрешая срабатывание элементов И 22 и 21 первой и второй групп с номерами с 1-го по S_0 -ый. В блоке коммутации 12 с другим номером $k \neq 1$ на втором входе 26 присутствует нулевой потенциал, запрещающий срабатывание элементов И 22 и 21 первой и второй групп с номерами от 1 до S_{k-1} -го. В то же время, в k -ом блоке коммутации 12 сигналом с выхода S_{k-1} дешифратора 18 и предыдущего блока коммутации 12 и сигналом с выхода S_k дешифратора 18 разрешается срабатывание элементов И 22 и 21 первой и второй групп того же блока коммутаторов с номерами с S_{k-1} -го до (S_k-1) -го. С приходом синхроимпульса с выхода блока умножения 4 знаков на вход 27 блока коммутации 12 срабатывают соответствующие элементы И 22 и 21 первых и вторых групп и на соответствующие выходы блоков коммутации 12 подаются соответствующие частичные произведения и единичные сигналы соответ-

ственно. По истечении времени реализации T на выходах блоков 15 деления находятся ординаты оценки знаковой взаимокорреляционной функции входных процессов $x(t)$ и $y(t)$. Применяв известное преобразование, можно определить нормированную взаимокорреляционную функцию

$$\rho_{xy}(\tau) = -\cos \left[\pi \hat{P}_{xy}(\tau) \right]. \quad (4.9)$$

Временная диаграмма работы коррелометра приведена на рис. 4.11.

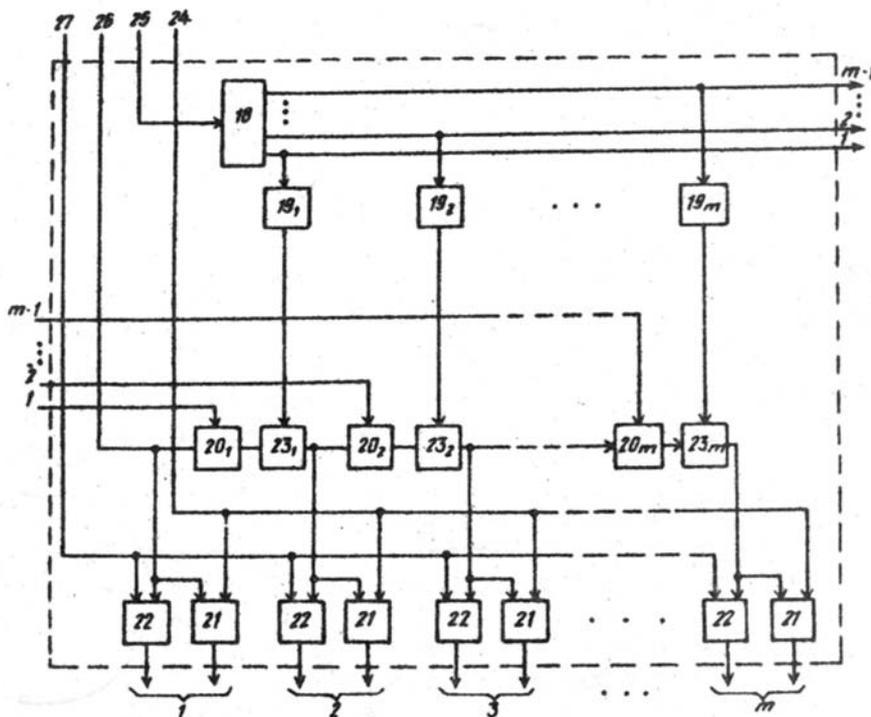


Рисунок 4.10. Блок коммутации

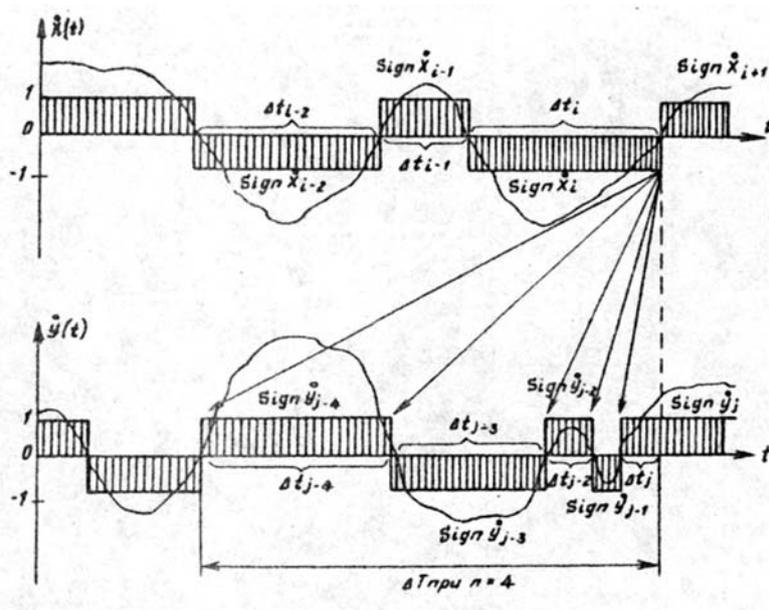


Рисунок 4.11. Временная диаграмма работы полярного коррелометра

4.3. Интервальные коррелометры

В тех случаях, когда алгоритм восстановления сигнала на интервале дискретизации неизвестен, единственной возможностью решения задачи является применение АИИКФ. Интервальная корреляция в статистических анализаторах используется для адресации при формировании оценки и усреднения [108].

Основой для проектируемых статистических анализаторов являются устройства для измерения корреляционных функций импульсных последовательностей - интервальных коррелометров [5, 8].

4.3.1. Интервальный коррелометр с усреднением по времени

В основу работы интервального коррелометра положен следующий алгоритм:

$$\hat{\epsilon}_{xj}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}.$$

Структура интервального коррелометра [5] представлена на рис. 4.12.

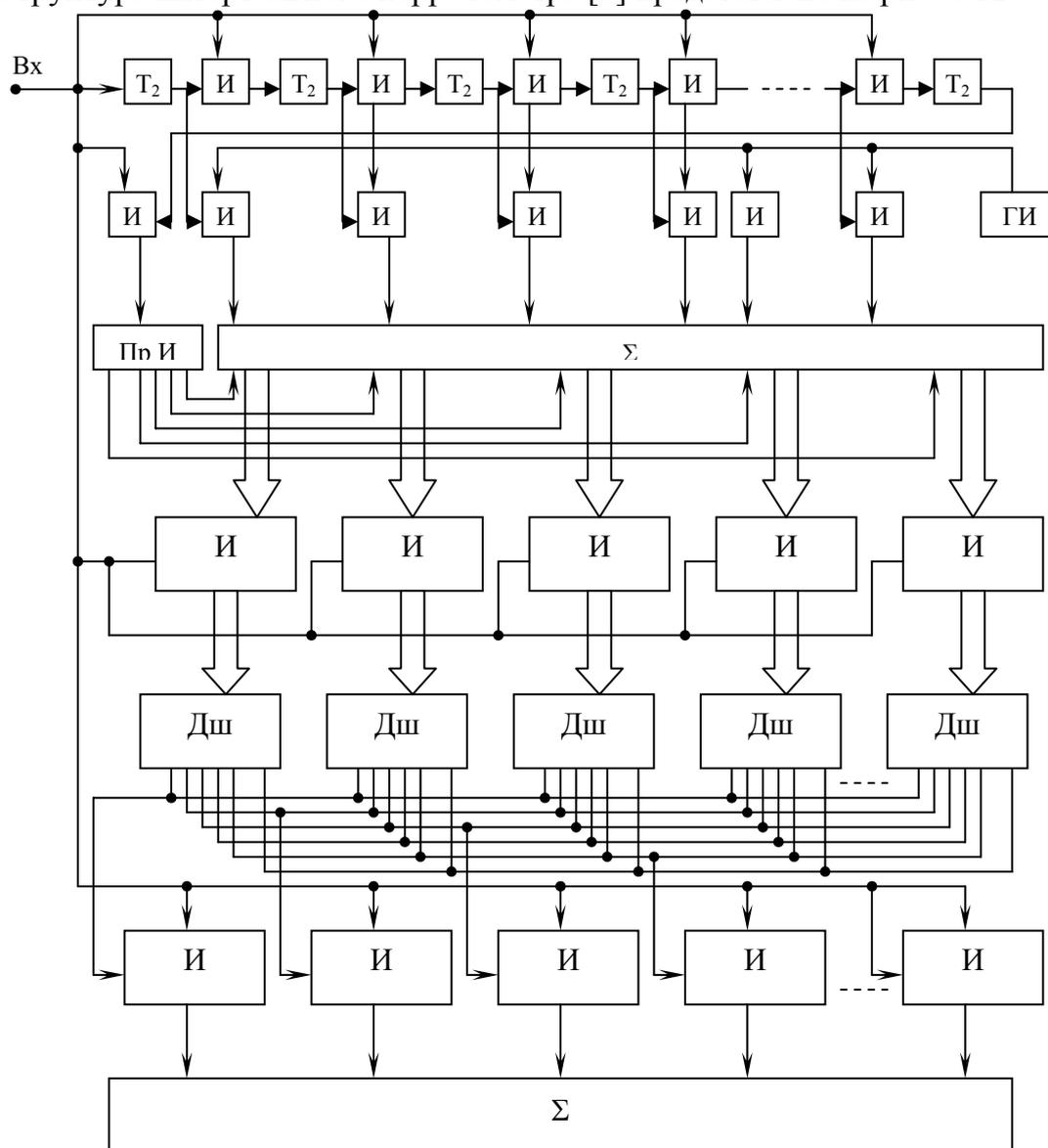


Рисунок 4.12. Интервальный коррелометр

Для пояснения работы интервального коррелометра на рис. 4.13, 4.14 представлены временные диаграммы для четырехканального сумматора ($L=4$), а также таблицы 4.2 и 4.3, в которых представлено содержимое многоканального сумматора первой и второй групп в каждом такте измерения, определяемом потоком входной последовательности импульсов.

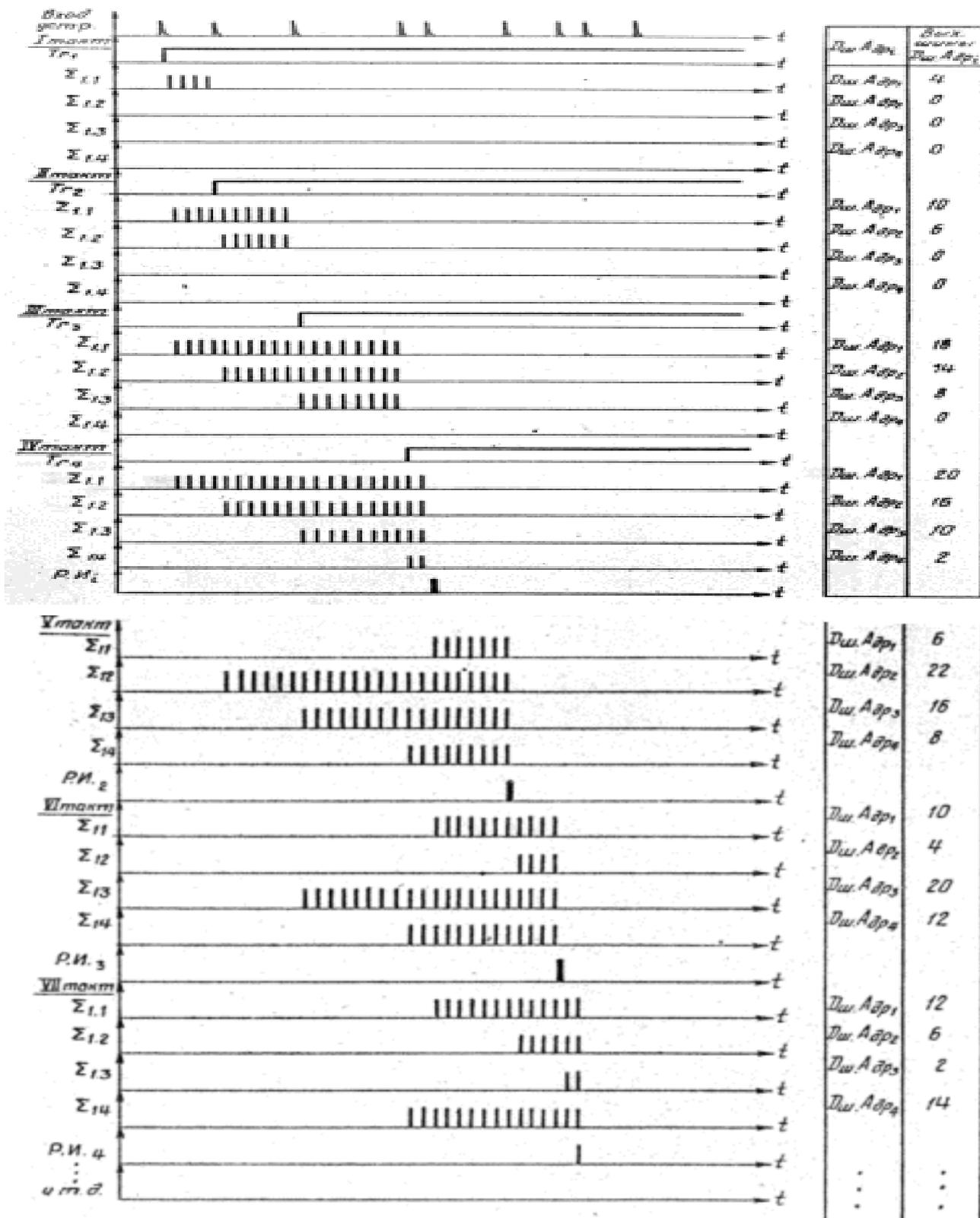


Рисунок 4.13. Временные диаграммы

Содержимое сумматоров первой группы

Таблица 4.2.

$\Sigma_{1,i}$ Такт	$\Sigma_{1,1}$	$\Sigma_{1,2}$	$\Sigma_{1,3}$	$\Sigma_{1,4}$
1 такт	4	0	0	0
2 такт	10	6	0	0
3 такт	18	14	8	0
4 такт	20 обнуление	16	10	2
5 такт	6	22	16	8
6 такт	10	4 обнуление	20	12
7 такт	12	6	2 обнуление	14
⋮	⋮	⋮	⋮	обнуление
и т.д.	⋮	⋮	⋮	⋮

Содержимое сумматоров второй группы

Таблица 4.3

$\Sigma_{2,i}$ Такты	$\Sigma_{2,1}$	$\Sigma_{2,2}$	$\Sigma_{2,3}$	$\Sigma_{2,4}$	$\Sigma_{2,5}$	$\Sigma_{2,6}$	$\Sigma_{2,7}$	$\Sigma_{2,8}$	$\Sigma_{2,9}$	$\Sigma_{2,10}$	$\Sigma_{2,11}$	$\Sigma_{2,12}$	$\Sigma_{2,13}$	$\Sigma_{2,14}$	$\Sigma_{2,15}$	$\Sigma_{2,16}$	$\Sigma_{2,17}$	$\Sigma_{2,18}$	$\Sigma_{2,19}$	$\Sigma_{2,20}$	$\Sigma_{2,21}$	$\Sigma_{2,22}$	$\Sigma_{2,23}$	$\Sigma_{2,24}$	$\Sigma_{2,25}$	$\Sigma_{2,26}$	$\Sigma_{2,27}$	и т.д.	⋮
1 такт				1																									
2 такт						1				1																			
3 такт								1					1					1											
4 такт	1									2					1					1									
5 такт		1				2		2							2							1							
6 такт			2							3		1								2									
7 такт	2					3						2	2																
⋮																													
и т.д.																													

В начальный момент все триггеры находятся в нулевом состоянии. Электрические импульсы поступают на вход устройства.

Первый импульс поступает на вход элементов И третьей группы, разрешая считывание информации с каждого канала сумматора 1 (Σ_1) в дешифраторы адреса соответственно, тем самым на одном из выходов каждого дешифратора адреса вырабатывается единичный потенциал, который разрешает прохождение входного импульса в соответствующие каналы сумматора 2 (Σ_2). В связи с тем, что в первоначальном положении в сумматоре 1 были записаны нули, то ни на одном из выходов дешифраторов адреса не вырабатывается единичный потенциал, разрешающий запись входного импульса в сумматор 2. Первый импульс также поступает на единичный вход триггера (Тг) 1, на единичные входы триггеров 2 и т.д. через элементы И первой группы и перебрасывает триггер 1 в единичное состояние. Остальные триггеры остаются в нулевом состоянии, так как элементы И были закрыты. Чтобы не произошло перекидывание триггеров, начиная со второго, в единичное состояние от первого входного импульса, между единичными выходами триггеров и входами схем И первой группы находятся элементы задержки. Первый элемент И второй группы откры-

вается, и тактовые импульсы от генератора импульсов (ГИ) поступают в первый канал сумматора 1.

Второй входной импульс разрешает прохождение информации с многоканального сумматора 1, равной сумме тактовых импульсов, поступивших в первый канал сумматора 1 от генератора импульсов в промежутке времени между первым и вторым входными импульсами. Выходной сигнал сумматора вырабатывает единичный потенциал на одном из выходов дешифраторов адреса, который является адресом записи второго входного импульса в один из каналов сумматора 2.

Второй входной импульс поступает через открытый элемент И на единичный вход второго триггера и перекидывает его в единичное состояние, тем самым открывая второй элемент И второй группы. В первый и второй каналы многоканального сумматора 1 через открытые элементы И второй группы записываются тактовые импульсы от генератора импульсов.

Дальнейшая работа устройства происходит аналогичным образом.

С приходом L входного импульса в первом канале сумматора 1 записалось число тактовых импульсов в промежутке времени от первого до L входного импульса. Во втором канале записалось число тактовых импульсов в промежутке времени от второго до L входного импульса и т.д. Содержимое этих каналов поступает на соответствующие каналы дешифраторов адреса, на одном из выходов каждого дешифратора адреса вырабатываются единичные потенциалы, которые являются адресами записи L -го входного импульса одновременно в L выбранных каналов сумматора 2. Входной L импульс поступает также через открытый элемент И на единичный вход последнего триггера и перекидывает его в единичное состояние, тем самым открывая элемент И для прохождения последующего $(L+1)$ -го входного импульса на вход распределителя импульсов (РИ), который обнуляет первый канал сумматора 1. Тем самым осуществляется дальнейшее распределение импульсов, поступающих от генератора импульсов в соответствующие каналы сумматора 1, в том числе, и в первый канал. При приходе $(L+2)$ -го входного импульса обнуляется второй канал и происходит дальнейшее поступление импульсов от генератора импульсов. Для прохождения входного импульса в многоканальный сумматор 2 в момент времени, когда на выходах дешифраторов адреса находится единичный потенциал, на входе первой схемы И четвертой группы ставится линия задержки.

4.3.2. Взаимный интервальный коррелометр с усреднением по времени

Основой для проектируемых статистических анализаторов взаимных корреляционно - структурных функций являются устройства для измерения корреляционных функций импульсных последовательностей - взаимных интервальных коррелометров.

В основу работу взаимного интервального коррелометра положен следующий алгоритм:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_{xyj}(J) = \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \quad \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J; \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \hat{C}_{yxj}(J) = \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \quad \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J; \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{array} \right.$$

На рис. 4.14 приведена структурная схема взаимного коррелометра импульсной последовательности [8], работающего следующим образом.

В начальный момент все триггеры находятся в нулевом состоянии. Электрические импульсы первого и второго потоков поступают соответственно на первый и второй входы устройства. Первый импульс, пришедший на первый вход, вырабатывает единичный импульс на соответствующем выходе распределителя импульсов и перекидывает первый триггер в единичное состояние. Первый элемент И первой группы открывается, и тактовые импульсы от генератора импульсов поступают в первый канал сумматора 1. Первый импульс, поступающий на второй вход, открывает элементы И второй группы, разрешая считывание информации с каждого канала сумматора 1, равной сумме импульсов, поступивших в первый канал сумматора 1 от генератора импульсов в промежутке времени между первым импульсом первого потока и первым импульсом второго потока, в дешифраторы адреса. На одном из выходов дешифратора адреса вырабатывается единичный потенциал, который разрешает прохождение входного импульса второго потока через соответственно открытые элементы И третьей группы в каналы сумматора 2. Если первый импульс второго потока пришел раньше первого импульса первого потока, то ни на одном из выходов дешифраторов адреса не выработается единичный потенциал, разрешающий запись входного импульса второго потока в сумматоре 2, так как в первоначальном положении в сумматоре 1 записаны нули.

Второй входной импульс, поступающий на второй вход, разрешает прохождение информации с многоканального сумматора 1, равной сумме тактовых импульсов, поступивших в первый канал сумматора 1 от генератора импульсов в промежутке времени между первым импульсом первого потока и вторым импульсом второго потока. Эта сумма вырабатывает единичный потенциал на одном из выходов дешифратора адреса, который является адресом записи второго потока в один из каналов сумматора 2.

Второй входной импульс первого потока вырабатывает одиночный импульс на соответствующем выходе распределителя импульсов и перекидывает второй триггер в единичное состояние. Вторым элементом И первой группы открывается, и тактовые импульсы от генератора импульсов поступают во второй канал сумматора 1. С приходом третьего входного импульса второй группы на второй вход разрешается прохождение информации с многоканального сумматора 1, равной сумме тактовых импульсов, поступивших в первый канал сумматора 1 от генератора импульсов в промежутке времени между первым импульсом первого потока и третьим импульсом второго потока, и сумме тактовых импульсов, поступивших во второй канал сумматора 1 в промежутке времени между вторым входным импульсом первого потока и третьим импульсом второго потока, на входы первого и второго дешифраторов адреса.

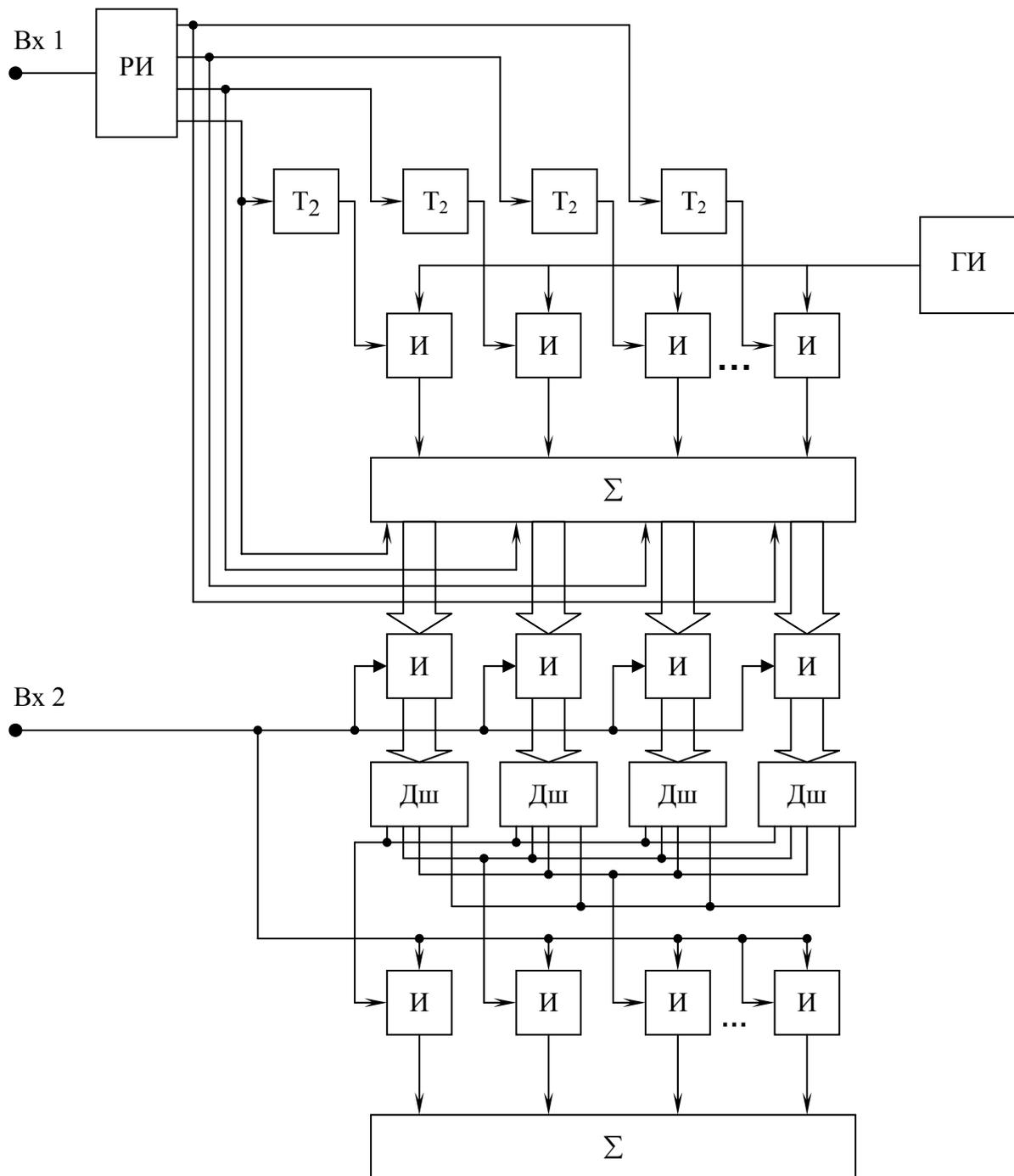


Рисунок 4.14. Взаимный интервальный коррелометр

На одном из выходов дешифраторов адреса вырабатываются единичные потенциалы, которые являются адресом записи третьего входного импульса второго потока в некоторые из каналов сумматора 2.

Дальнейшая работа устройства происходит аналогичным образом. С приходом L входного импульса первого потока перекидывается в единичное состояние последний триггер. Последний элемент I первой группы открывается, и тактовые импульсы от генератора импульсов поступают в L канал сумматора 1. Следующий за ним входной импульс второго потока разрешает прохождение информации с многоканального сумматора 1 на входы дешифраторов и т.д.

Входной $(L+1)$ импульс первой группы поступает на единичный вход триггера и на установочный вход обнуления первого канала многоканального сумматора 1, тем самым обнуляя первый канал, и происходит дальнейшая запись тактовых импульсов. С приходом $(L+2)$ входного импульса первого потока обнуляется второй канал и т.д.

Разработанные интервальные коррелометры позволяют измерять параллельно значения интервальных корреляционных функций, используя усреднение по времени.

4.3.3. Взаимный интервальный коррелометр с усреднением по множеству реализаций.

Структурная схема коррелометра для измерения интервальных корреляционных функций, используя усреднение по множеству реализаций, представлена на рис. 4.15 [22].

Устройство может работать в режимах вычисления интервальной автокорреляционной и взаимной корреляционной функций нестационарных потоков.

Интервальная автокорреляционная функция нестационарных потоков определяется в соответствии с выражением (2.75):

$$\bar{\epsilon}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}.$$

Интервальные взаимные корреляционные функции нестационарных потоков определяется в соответствии с выражением (см. таблицу 2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{xj}} \delta_{\zeta, ji}^x \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}^{xy}; \quad \delta_{j, i+s}^{xy} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t_{j, i+s}^y - t_{ji}^x}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \bar{\epsilon}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{yj}} \delta_{\zeta, ji}^y \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}^{yx}; \quad \delta_{j, i+s}^{yx} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t_{j, i+s}^x - t_{ji}^y}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{array} \right.$$

Рассмотрим работу устройства при измерении интервальных взаимных корреляционных функций как более общего режима по отношению к первому.

В начальный момент времени триггеры находятся в нулевом состоянии. Импульсы первого и второго потоков поступают соответственно на первый и третий входы устройства. Первый импульс первой реализации потока вырабатывает единичный импульс на соответствующем выходе распределителя импульсов и перекидывает триггер $Tg1$ в единичное состояние. Элемент $I1$ открывается, и тактовые импульсы от

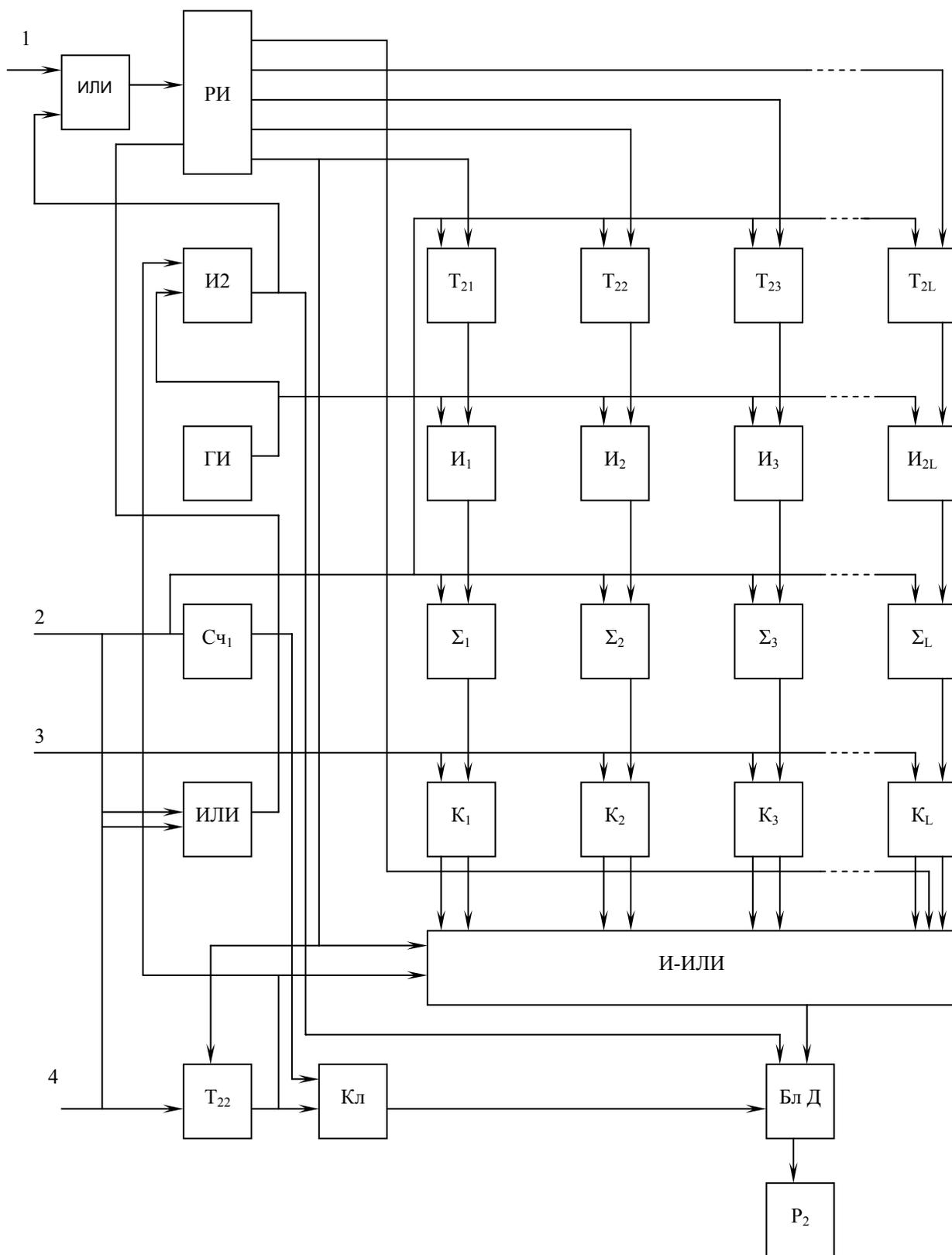


Рисунок 4.15. Интервальный коррелометр с усреднением по множеству

генератора импульсов поступают в первый сумматор. Предварительно все сумматоры обнуляются импульсом «начало реализации», поступающим на второй вход устройства.

Первый импульс второго потока поступает на первые входы блоков коммутации, разрешая считывание информации с сумматоров, равной сумме импульсов, поступивших от генератора импульсов в промежутке времени между первым импульсом первого потока и первым импульсом второго потока, в дешифраторы адреса (см. рис.4.16 а)).

На одном из выходов дешифраторов вырабатывается единичный потенциал, разрешающий прохождение входного импульса второго потока через открытый элемент I_3 в счетчик.

Если первый импульс второго потока пришел раньше первого импульса первого потока, то в счетчики он не поступает, так как в первоначальном положении в сумматорах записаны нули.

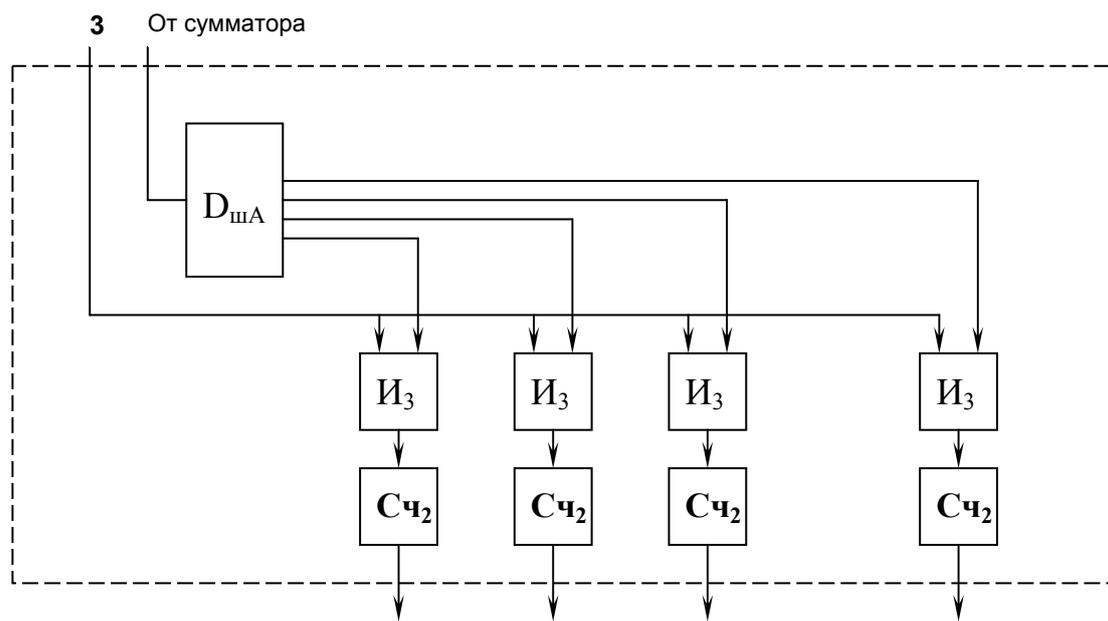
Второй входной импульс второго потока разрешит прохождение информации с сумматора, равной сумме тактовых импульсов в промежутке времени между первым импульсом первого потока и вторым импульсом второго потока, в один из счетчиков и т.д.

Второй входной импульс первого потока опрокидывает второй триггер в единичное состояние, разрешая прохождение тактовых импульсов и во второй сумматор. С приходом очередного импульса второго потока разрешается считывание содержимого первого и второго сумматоров в дешифраторы адреса, вырабатывающие адреса записи импульса второго потока в соответствующие счетчики и т.д.

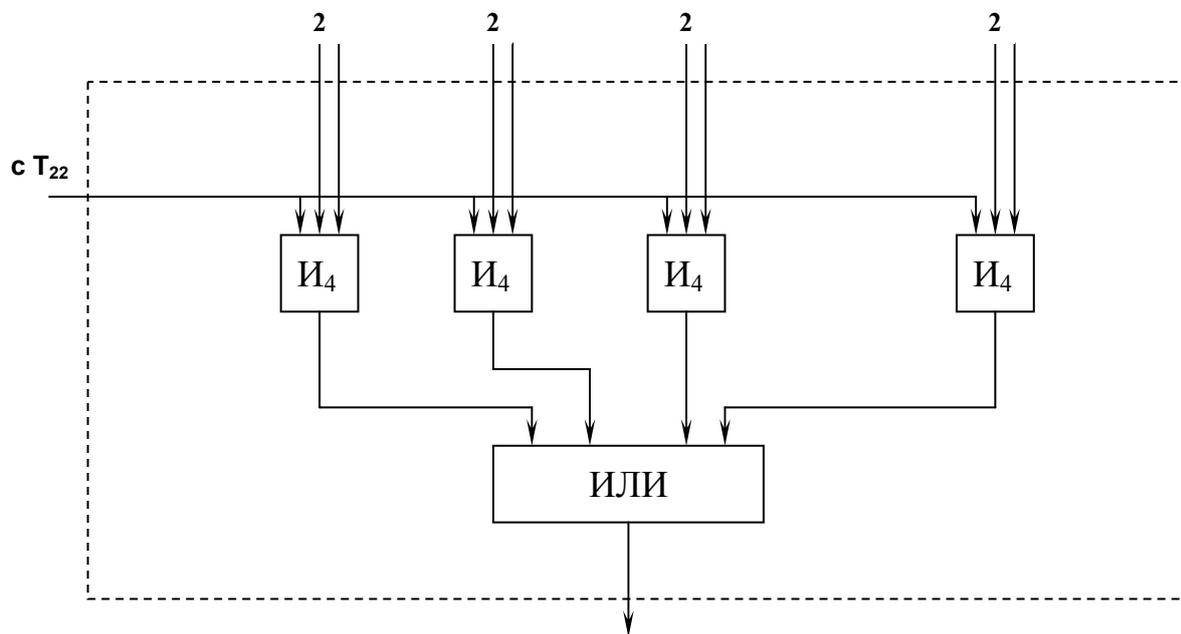
Импульсы «начало реализации» приводят в исходное состояние распределитель импульсов, триггеры и сумматоры. В Сч1 подсчитывается количество реализаций. На четвертый вход устройства поступает импульс, характеризующий конец всех реализаций, поступивших в устройство.

Этот импульс устанавливает в начальное состояние РИ, перекидывает в единичное состояние Тг2, тем самым открывая элемент I_2 , и импульсы от генератора поступают на вход распределителя импульсов. На выходах распределителя импульсов вырабатываются единичные импульсы, поступающие на вторые входы элементов I_4 (см. рис. 4.16 б)), на первые входы которых поступает единичный потенциал с Тг2. Таким образом, информация со счетчиков Сч2 (см. рис. 4.16 а)) будет поступать на первый вход блока деления в качестве делимого, на второй вход которого через открытый ключ поступает информация со Сч1. Тактирование блока БлД происходит с помощью тактовых импульсов, поступающих через открытый элемент I_2 от генератора импульсов. На вход блока регистрации будет последовательно поступать информация об ординатах интервальной взаимной корреляционной функции потоков, усредненных по совокупности реализаций.

При измерении интервальных автокорреляционных функций на третий вход устройства поступают импульсы первого входного потока.



а)



б)

Рисунок 4.16. Коммутатор

4.4. Коррелометр на базе интервального коррелометра со сдвиговой организации памяти

На рис. 4.17 представлена структура коррелометра, использующего усреднение по времени, предназначенного для измерения корреляционных функций случайных процессов [7]. Цифровой коррелятор работает следующим образом.

Перед началом работы ячейки обоих блоков памяти 2 и 5 и сумматоры 8 обнулены. На первый вход устройства 1 в i -й момент времени t_i поступает текущее значение входного процесса x_i , которое запоминается в первой ячейке первого блока памяти 2. На второй вход 4 поступает текущее значение времени t_i , которое запоминается в первой ячейке второго блока памяти 5. Причем в общем случае процесс представлен неравноотстоящими отсчетами времени. Первый и второй блоки памяти 2 и 5 осуществляют параллельные сдвиги содержимого ячеек в моменты прихода каждой последующей пары текущего значения входного процесса и текущего значения времени. Таким образом, в i -й момент времени в 1, 2, ... n -й ячейках первого блока памяти 2 будут находиться значения входного процесса соответственно x_i, x_{i-1} и т.д., а в 1, 2, ... n -й ячейках второго блока памяти 5 - текущие значения времени t_i, t_{i-1} и т.д. Таким образом, на выходе первого, второго и т.д. блоков умножения формируются в i -й момент времени t_i частичные произведения соответственно $x_i^2, x_i x_{i-1}$ и т.д., которые поступают на информационные входы соответствующих блоков коммутации 7. Частичное произведение x_i^2 с первого блока умножения 3 подается на вход первого сумматора 8. На выходе первого, второго и т.д. $(n-1)$ -го блоков вычитания 6 вычисляются разности соответственно $(t_i - t_{i-1}), (t_i - t_{i-2})$ и т.д., которые подаются на управляющие входы соответствующих блоков коммутации 7 и представляют собой временную задержку между соответствующими значениями текущего входного процесса. Следует заметить, что, поскольку, время не убывает, то указанные задержки не равны между собой. Каждый блок коммутации 7 выдает частичное произведение, находящееся на информационном входе, на свой определенный выход и далее на определенный сумматор, номера которых соответствуют коду временной задержки, находящемуся на управляющем входе, указанного блока коммутации 7. Таким образом, адресом каждого частичного произведения является код соответствующей временной задержки, и вследствие неравенства временных задержек частичные произведения пересылаются в разные сумматоры 8.

После прихода последней пары x_N, t_N , в сумматорах 8 находятся суммы, которые после усреднения дают искомые ординаты оценки корреляционной функции входного процесса, представленного неравноотстоящими отсчетами.

Первый и второй блоки памяти 2 и 5 представляют собой наборы регистраторов сдвига, количество регистров в каждом из которых равно разрядности соответственно первого и второго входов устройства 1 и 4. Количество сумматоров m равно требуемому числу ординат корреляционной функции. Разрядность регистров сдвига первого и второго блоков памяти 2 и 5 n зависит в общем случае от корреляционных характеристик входного процесса (максимального интервала корреляции, коэффициента сжатия входного процесса) и может быть взято, для определенности, $n=m$. Блоки коммутации 7 представляют собой узел, сочетающий в себе функции дешифрации управляющего сигнала и коммутации информационного, и могут быть выполнены по схеме, указанной на рис.4.18. Блок коммутации 7 имеет управляющий вход 9, информационный вход 10, дешифратор 11, элементы И 12.

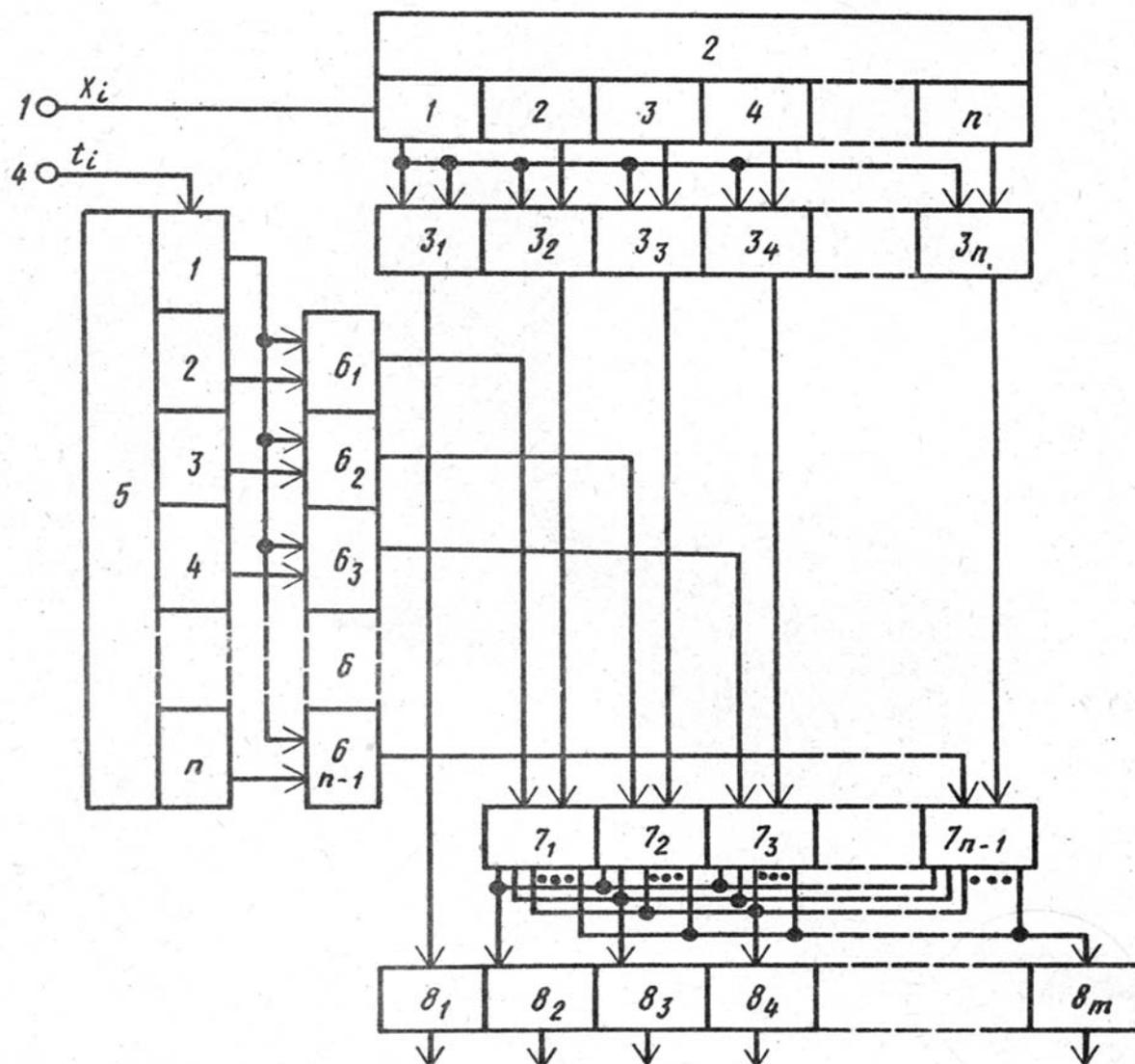


Рисунок 4.17. Коррелометр на базе интервальной корреляции со сдвиговой организации памяти

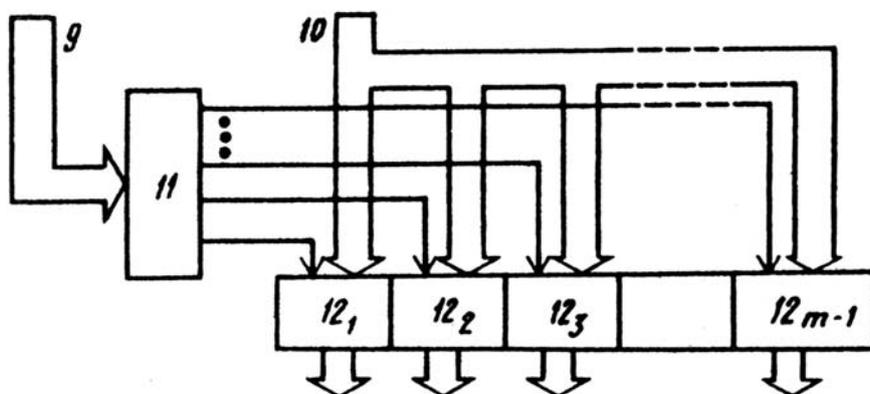


Рисунок 4.18. Блок коммутации

4.5. Многофункциональный коррелометр со сдвиговой организацией памяти

На рис.4.19 представлена структура коррелометра, использующего усреднение по времени, предназначенного для измерения авто и взаимокорреляционных функций случайных процессов, а также авто и взаимных интервальных корреляционных функций потоков событий (см таблицу 4.4) [11].

Рассмотрим работу коррелометра при измерении взаимной корреляционной функции случайного процесса, представленного неравноотстоящими отсчетами, как наиболее общего режима измерения.

Перед началом работы в любом режиме измерения ячейки блоков памяти 1, 2, счетчики и сумматоры обнулены. Значения времени второго входного процесса t_j поступают одновременно с синхроимпульсами $СИ_j$. На выходах блоков умножения формируются частичные произведения текущего значения второго процесса на L текущих значений первого входного процесса. А на выходах блоков вычитания формируются разности между текущим значением времени второго процесса и L текущими значениями времени первого входного процесса.

Синхроимпульсы второго процесса разрешают прохождение информации через блоки коммутации только в момент прихода очередной пары $\{y_j, t_j\}$. Поэтому на выходах блоков вычитания в j -тый момент времени формируются разности с положительными знаками, т.е. соблюдается условие $t_i \leq t_j < t_{i+1}$, где t_i - время прихода последней пары текущих значений $\{x_i, t_i\}$, находящихся в первых ячейках блоков памяти. Тогда на выходах блоков умножения формируются частичные произведения: $U_j X_i, U_j X_{i-1}, \dots, U_j X_{i-L+1}$, а на выходах блоков вычитания - соответствующие им задержки времени: $(t_j - t_i), (t_j - t_{i-1}), \dots, (t_j - t_{i-L+1})$. Поскольку время не убывает, то указанные задержки времени не равны между собой.

Частичные произведения с выходов блоков умножения подаются на первые входы блоков коммутации, на вторые входы которых подаются соответствующие им временные задержки с блоков вычитания. По синхроимпульсу, поступающему на третьи входы блоков коммутации, каждый блок коммутации выдает частичное произведение, находящееся на первом входе, на определенный выход первой группы и далее на определенный сумматор, номер которого соответствует коду временной задержки. Одновременно на выход с таким же номером второй группы указанного блока коммутации подается сигнал, который поступает далее на вход соответствующего счетчика и изменяет его содержимое на «+1».

Таким образом, в каждом из m сумматоров накапливаются частичные произведения между отсчетами двух процессов, соответствующих определенной временной задержке, а в каждом счетчике - количество таких произведений. Блоки деления делят содержимое сумматоров на содержимое счетчиков, таким образом осуществляя усреднение результата. После прихода последней пары текущих значений процесса и текущих значений времени на выходах блоков деления находятся искомые ординаты оценки взаимокорреляционной функции процесса, представленного неравноотстоящими отсчетами.

При измерении автокорреляционной функции соответственно объединяются входы x_i, y_j и t_i, t_j .

№	Алгоритмы функционирования
1	$\hat{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}}{M-J}$
2	$\left\{ \begin{aligned} \hat{K}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}}{M-J} \\ \hat{K}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M-J} y_{ji} x_{j,i+J}}{M-J} \end{aligned} \right.$
3	$\epsilon_{xj}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}$
4	$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{xyj}(J) &= \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \epsilon_{yxj}(J) &= \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
5	$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
6	$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{K}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathcal{K}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$

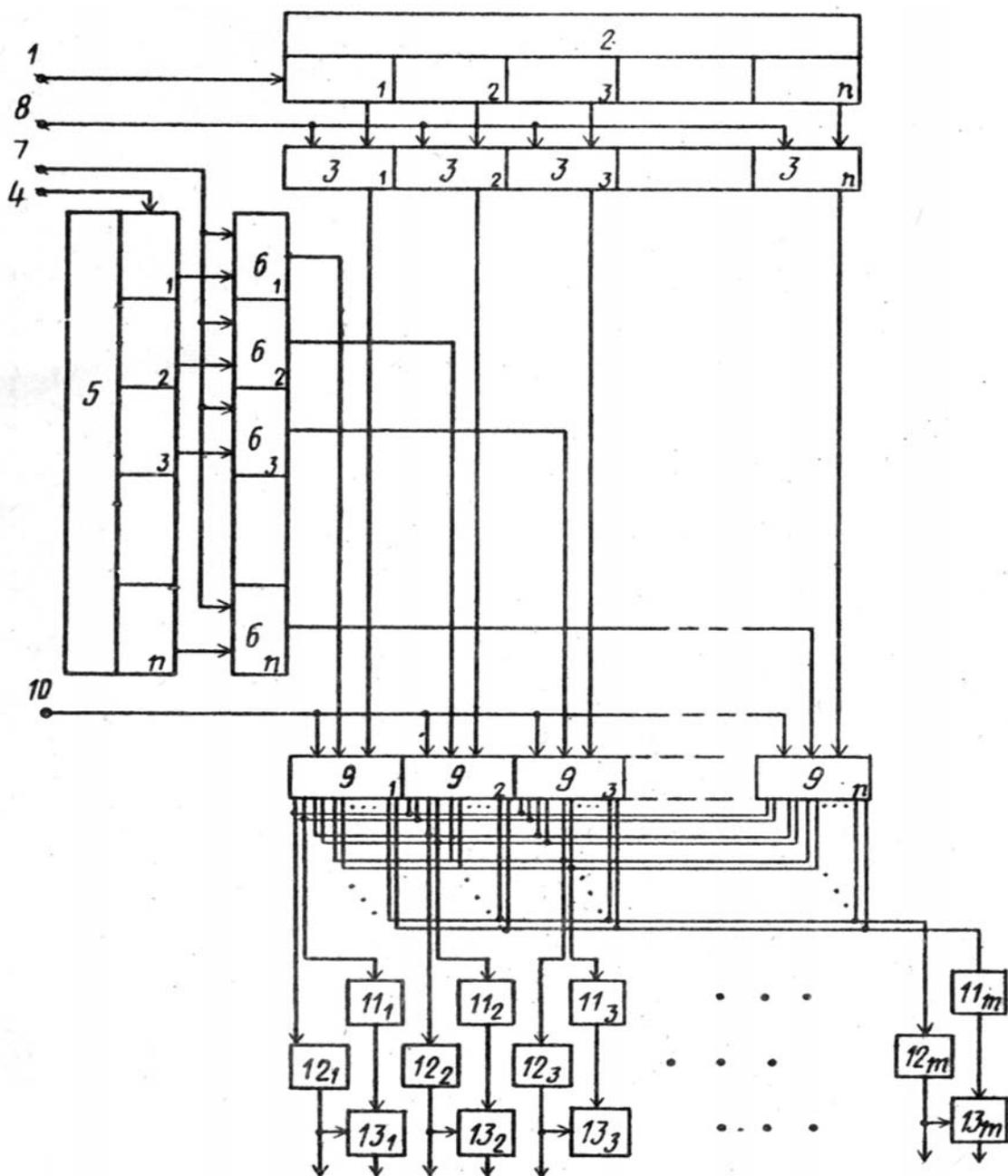


Рисунок 4.19. Многофункциональный коррелометр с усреднением по времени

При измерении интервальных корреляционных функций на входы x_i и y_j ничего не подается, а на входы t_i, t_j подаются текущие значения времени, соответствующие приходу очередных импульсов потоков событий. На вход СИ подаются синхроимпульсы второго потока.

Блок коммутации работает следующим образом (см. рис. 4.20). На первый вход с блока умножения поступает код, соответствующий частичному произведению. Этот код поступает на информационные входы всех ключей. Одновременно на второй вход с блока вычитания поступает код, соответствующий временной задержке. Этот код дешифрируется дешифратором, выходной сигнал которого подается на первые входы элементов И.

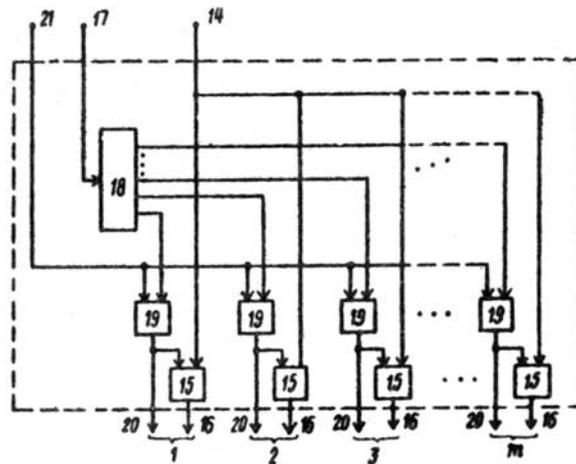


Рисунок 4.20. Блок коммутации

С приходом синхроимпульса на третий вход срабатывает тот элемент И, на первом входе которого присутствует сигнал с дешифратора. Выходной сигнал этого элемента поступает на соответствующий выход второй группы блока коммутации и разрешает прохождение информационного сигнала через ключ на соответствующий выход первой группы.

Замена блоков умножения на блоки функционального преобразования позволяет измерить значения релейных, полярных корреляционных функций, а также значения структурной функции и корреляционной функции, определяемой через модуль разности.

Упрощение структуры разработанных коррелометров возможно за счет использования циркуляционной организации памяти и применения упрощенных алгоритмов корреляционного анализа [108].

4.6. Коррелометр на базе интервального коррелометра с циркуляционной организацией памяти.

Структурная схема коррелометра представлена на рис. 4.21 [9]. Для пояснения работы коррелометра на рис. 4.22 приведен фрагмент реализации входной неэквидистантной последовательности, а в таблице 4.5 - содержание основных блоков для рассматриваемого примера.

Цифровой автокоррелометр работает следующим образом. Перед началом работы ячейки памяти 8, а также сумматоры 9 и вспомогательные сумматоры 5 обнулены. На третий вход устройства 7 поступают синхроимпульсы, по которым осуществляется прием текущих значений входного процесса в ячейки памяти 2 и суммирование текущих интервалов времени между отсчетами входного процесса во вспомогательных сумматорах 5. Причем в общем случае входной процесс представлен неравноотстоящими отсчетами времени. Запись текущих значений входного процесса и суммирование текущих интервалов времени осуществляется в соответствии с принципом циркуляционной организации памяти. Согласно этому принципу с приходом i -го синхроимпульса на третий вход устройства 7 на первый вход устройства 1 поступает текущее значение входного процесса x_i , а на второй вход устройства 4 поступает текущий интервал времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Распределитель импульсов 6 осуществляет последовательную запись текущего значения x_i входного процесса в ячейку памяти 2 с номером $j = (i)_{\text{mod}n} + 1$ и разрешает обнуление вспомогательного сумматора с таким же

номером. В остальных вспомогательных сумматорах 5 происходит суммирование Δt_i с содержанием этих сумматоров 5. Таким образом, с приходом i -го синхроимпульса в ячейках памяти 2 находятся следующие текущие значения входного процесса: в первой - x_{i-j+1} , во второй - x_{i-j+2} , в j -й - x_i в $(j+1)$ -й - x_{i-n+1} , в n -й - x_{i-j} .

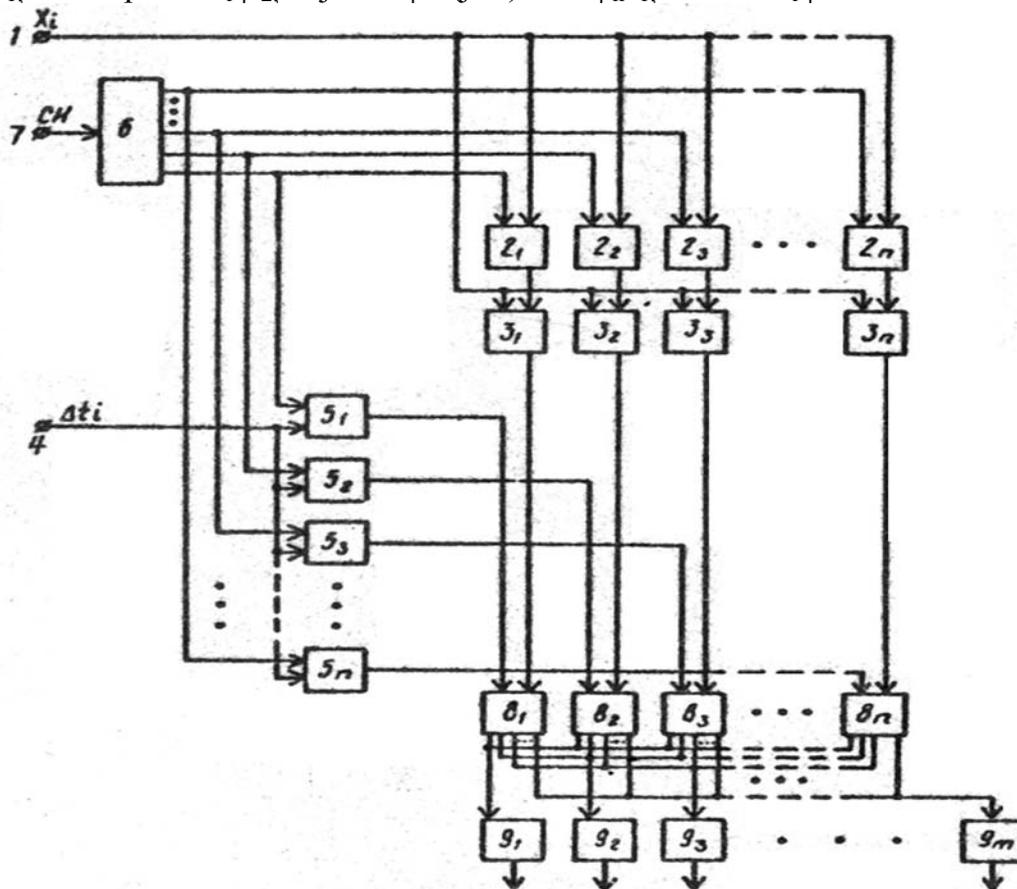


Рисунок 4.21. Коррелометр на базе интервального коррелометра с циркуляционной организацией памяти

Аналогично осуществляется последовательность обнуления вспомогательных сумматоров 5. На выходе блоков умножения 3 формируются частичные произведения соответственно: на выходе первого - $x_{i-j+1}x_i$, на выходе второго - $x_{i-j+2}x_i$, на выходе j -го - x_i^2 , на выходе $(j+1)$ -го - $x_{i-n+1}x_i$, на выходе n -го - $x_{i-j}x_i$.

На выходах вспомогательных сумматоров 5 формируются задержки времени между отсчетами входного процесса соответственно:

- на выходе первого - $t_i - t_{i-j+1} = \Delta t_{i-j+2} + \Delta t_{i-j+3} + \dots + \Delta t_i$;
- на выходе второго - $t_i - t_{i-j+2} = \Delta t_{i-j+3} + \Delta t_{i-j+4} + \dots + \Delta t_i$;
- на выходе j -го - 0;
- на выходе $(j+1)$ -го - $t_i - t_{i-n+1} = \Delta t_{i-n+1} + \Delta t_{i-n+2} + \dots + \Delta t_i$;
- на выходе n -го - $t_i - t_{i-j} = \Delta t_{i-j+1} + \Delta t_{i-j+2} + \dots + \Delta t_i$.

Таким образом, с приходом на третий вход устройства 7 i -го синхроимпульса на информационные входы блоков коммутации 8 подаются частичные произведения с выходов соответствующих блоков умножения 3, а на управляющие входы блоков

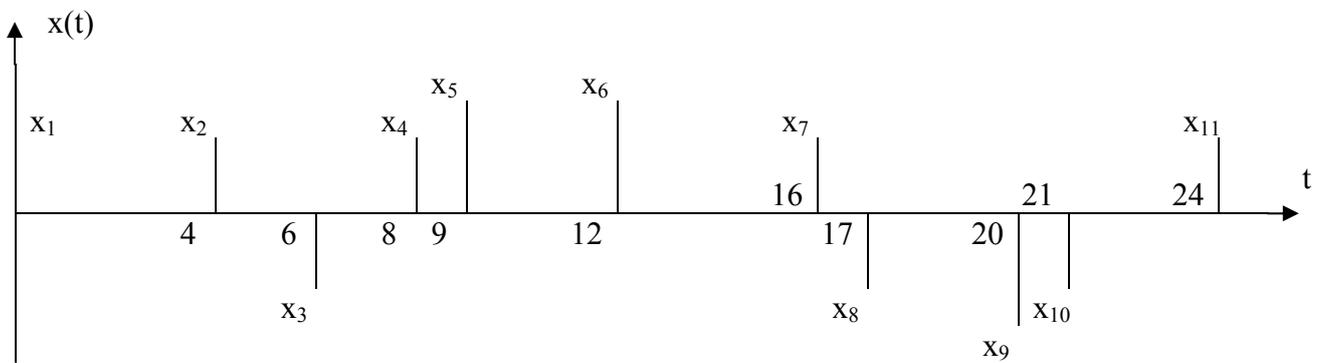


Рисунок 4.22. Реализация неэквидистантного временного ряда

Содержание основных блоков

Таблица 4.5

№ СИ	Содержание																	
	ячеек памяти						блоков умножения						вспомогательных сумматоров					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	x_1	0	0	0	0	0	x_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	x_1	x_2	0	0	0	0	$x_1 x_2$	x_2^2	0	0	0	0	4	0	4	4	4	4
3	x_1	x_2	x_3	0	0	0	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	x_3^2	0	0	0	6	2	0	6	6	6
4	x_1	x_2	x_3	x_4	0	0	$x_1 x_4$	$x_2 x_4$	$x_3 x_4$	x_4^2	0	0	8	4	2	0	8	8
5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	0	$x_1 x_5$	$x_2 x_5$	$x_3 x_5$	$x_4 x_5$	x_5^2	0	9	5	3	1	0	9
6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$x_1 x_6$	$x_2 x_6$	$x_3 x_6$	$x_4 x_6$	$x_5 x_6$	x_6^2	12	8	6	4	3	0
7	x_7	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7^2	$x_2 x_7$	$x_3 x_7$	$x_4 x_7$	$x_5 x_7$	$x_6 x_7$	0	12	10	8	7	4
8	x_7	x_8	x_3	x_4	x_5	x_6	$x_7 x_8$	x_8^2	$x_3 x_8$	$x_4 x_8$	$x_5 x_8$	$x_6 x_8$	1	0	11	9	8	5
9	x_7	x_8	x_9	x_4	x_5	x_6	$x_7 x_9$	$x_8 x_9$	x_9^2	$x_4 x_9$	$x_5 x_9$	$x_6 x_9$	4	3	0	12	11	8
10	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_5	x_6	$x_7 x_{10}$	$x_8 x_{10}$	$x_9 x_{10}$	x_{10}^2	$x_5 x_{10}$	$x_6 x_{10}$	5	4	1	0	12	9
11	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_6	$x_7 x_{11}$	$x_8 x_{11}$	$x_9 x_{11}$	$x_{10} x_{11}$	x_{11}^2	$x_6 x_{11}$	8	7	4	3	0	12
12	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$x_7 x_{12}$	$x_8 x_{12}$	$x_9 x_{12}$	$x_{10} x_{12}$	$x_{11} x_{12}$	x_{12}^2	10	9	6	5	2	0

Примечание $n = 6$; $m = 13$.

сумматоров												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$+x_1^2$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$+x_2^2$	-	-	-	$+x_1 x_2$	-	-	-	-	-	-	-	-
$+x_3^2$	-	$+x_2 x_3$	-	-	-	$+x_3 x_3$	-	-	-	-	-	-
$+x_4^2$	-	$+x_3 x_4$	-	$x_2 x_4$	-	-	-	$+x_1 x_4$	-	-	-	-
$+x_5^2$	$+x_4 x_5$	-	$+x_3 x_5$	$x_4 x_5$	-	$+x_2 x_5$	-	-	$+x_1 x_5$	-	-	-
$+x_6^2$	-	-	$+x_5 x_6$	$+x_4 x_6$	-	$+x_3 x_6$	-	$+x_2 x_6$	-	-	-	$+x_1 x_6$
$+x_7^2$	-	-	-	$+x_3 x_7$	-	-	$+x_5 x_7$	$+x_4 x_7$	-	$+x_3 x_7$	-	$+x_2 x_7$
$+x_8^2$	$+x_7 x_8$	-	-	-	$+x_6 x_8$	-	-	$+x_6 x_8$	$+x_5 x_8$	-	$+x_3 x_8$	-
$+x_9^2$	-	-	$+x_8 x_9$	$+x_7 x_9$	-	-	-	$+x_6 x_9$	-	-	$+x_5 x_9$	$+x_4 x_9$
$+x_{10}^2$	$+x_9 x_{10}$	-	-	$+x_8 x_{10}$	$+x_7 x_{10}$	-	-	-	$+x_6 x_{10}$	-	-	$+x_5 x_{10}$
$+x_{11}^2$	-	-	$+x_{10} x_{11}$	$+x_9 x_{11}$	-	-	$+x_8 x_{11}$	$+x_7 x_{11}$	-	-	-	$+x_6 x_{11}$
$+x_{12}^2$	-	$+x_{11} x_{12}$	-	-	$+x_{10} x_{12}$	$+x_9 x_{12}$	-	-	$+x_8 x_{12}$	$+x_7 x_{12}$	-	-

коммутации 8 подаются соответствующие им временные задержки. Поскольку время не убывает, то указанные задержки не равны между собой. Каждый блок коммутации 8 выдает частичное произведение, находящееся на его информационном входе, на свой определенный сумматор 9, номера которых соответствуют коду временной задержки, находящемуся на управляющем входе указанного блока коммутации. Таким образом, адресом каждого частичного произведения является код соответствующей временной задержки и вследствие неравенства временных задержек частичные произведения пересылаются в разные сумматоры 9, число которых m в общем случае больше числа ячеек памяти n . Частичное произведение x_i^2 с выхода j -го блока умножения 3 пересылается всегда в первый сумматор 9, так как в j -ом вспомогательном сумматоре 5 находится нулевая задержка.

После прихода последнего N -го синхроимпульса и последней пары x_N и t_N в сумматорах 9 находятся суммы, которые после усреднения дают искомые ординаты оценки корреляционной функции входного процесса, представленного неравноотстоящими отсчетами времени.

Для пояснения работы устройства представлена таблица 4.4 соответствия содержимого составных блоков автокоррелятора синхроимпульсам, приходящими на третий вход устройства.

Техническая реализация цифрового автокоррелятора может быть осуществлена с использованием элементов ЦВТ. Ячейки 2 памяти могут быть выполнены на триггерных элементах памяти, количество которых в каждой ячейке 2 равно разрядности первого входа 1 устройства. Количество сумматоров 9 равно требуемому числу ординат корреляционной функции. Количество ячеек 2 памяти и вспомогательных сумматоров 5 зависит в общем случае от корреляционных характеристик входного процесса (максимального интервала корреляции, коэффициента сжатия входного процесса), $n \leq m$. Разрядность вспомогательных сумматоров 5 может быть вычислена, исходя из максимальной задержки времени между отсчетами входного процесса, находящимися одновременно в ячейках 2 памяти устройства, и регулярной частоты дискретизации входного процесса.

Блоки коммутации 8 представляют собой узел, сочетающий в себе функции дешифрации управляющего сигнала и коммутации информационного, и могут быть выполнены по схеме, указанной на рис. 4.23, где обозначены управляющий вход коммутации 8, информационный вход 11, дешифратор 12, элементы И 13. Дешифратор 12 и элементы И 13 являются узлами интегральной микроэлектроники.

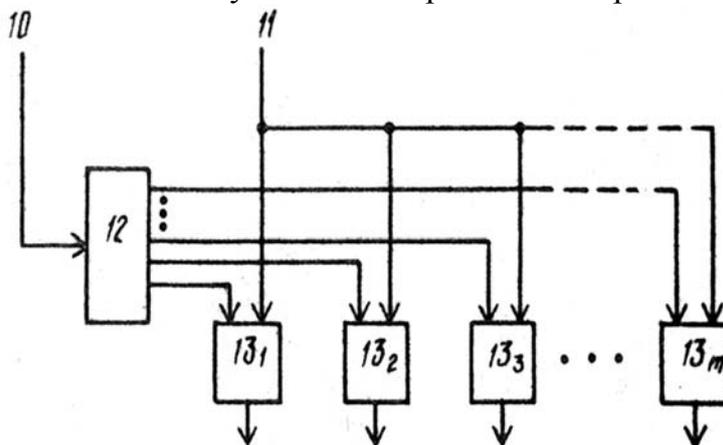


Рисунок 4.23. Блок коммутации

Использование новых элементов - n вспомогательных сумматоров, дополнительного блока коммутации и распределителя импульсов позволило упростить схему цифрового автокоррелятора за счет упрощения конструкции ячеек памяти, уменьшения разрядности вспомогательных сумматоров (за счет суммирования интервалов времени между отсчетами, а не самих текущих значений времени) и отсутствия дополнительного блока памяти.

4.7. Коррелометр на базе интервального коррелометра с циркуляционной организацией памяти с кратным интервалом дискретизации

При цифровых корреляционных измерениях интервал принудительной дискретизации Δt_0 исследуемых процессов обычно равен интервалу дискретизации корреляционной функции $\Delta \tau$. В случае неравномерной дискретизации входных процессов это приводит к существенному возрастанию статистической погрешности результата. Уменьшить эту составляющую погрешности можно введением дополнительной методической погрешности в результат измерения с одновременным уменьшением статистической погрешности [23].

Указанная компенсация осуществляется увеличением интервала дискретизации Δt пропорционально некоторому коэффициенту кратности:

$$k = \frac{\Delta \tau}{\Delta t_0}. \quad (4.10)$$

При этом номер ординаты корреляционной функции, к которому нужно отнести текущее промежуточное произведение отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале Δt , можно определить следующим образом:

$$J = \text{ent} \left[\frac{\Delta t_i}{\Delta \tau} + 0,5 \right] = \text{ent} \left[\frac{\Delta t_i}{k \Delta t_0} + 0,5 \right]. \quad (4.11)$$

Таким образом, к J -ой ординате корреляционной функции относятся все промежуточные произведения отсчетов, интервалы времени между которыми лежат внутри интервала $(J \Delta \tau - 0,5; J \Delta \tau + 0,5)$ т.е. число M_J увеличивается приблизительно в k раз

$$M'_J = M_J * k, \quad (4.12)$$

и, соответственно, статистическая погрешность уменьшается в \sqrt{k} раз.

При малых объемах выборки и больших $k_{\text{сж}}$ процессов увеличение Δt по сравнению с Δt_0 в k раз приводит к существенному уменьшению в \sqrt{k} раз статистической погрешности измерения при незначительном увеличении методической погрешности. Для устранения методической погрешности, вносимой в дисперсию процесса, в нулевую ординату корреляционной функции следует относить лишь те промежуточные произведения, интервалы времени между которыми строго $\Delta t_i=0$, и отбрасывать те отсчеты, для которых $\Delta t_i \neq 0$:

$$\text{ent} \left[\frac{\Delta t_i}{\Delta \tau} + 0,5 \right] = 0, \quad (4.13)$$

$$0 < \Delta t_i < 0,5 \Delta \tau.$$

Представим j -текущую оценку взаимной корреляционной функции с учетом неравномерной дискретизации случайного процесса в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}_{xyj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \sum_{s=0}^{L} y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^{L} \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathbb{K}_{yxj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \sum_{s=0}^{L} x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^{L} \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{k\Delta t_0} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{k\Delta t_0} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Структурная схема коррелометра представлена на рис. 4. 24. Коррелятор реализует алгоритм (4.14) и работает следующим образом.

Перед началом работы счетчики 7, 10, 12, элементы памяти 2, сумматоры 6 обнулены. В первый элемент памяти 15 заносится код $N-k$, где $N=2^p$, p - разрядность дополнительных счетчиков 12, k - коэффициент кратности (4.10). Во второй элемент памяти 15 заносится код $N-k/2$. Код первого элемента предназначен для реализации заданного коэффициента пересчета счетчиков 12, равного k . Код второго элемента предназначен для реализации (4.11).

Во время работы коррелятора на его вход задания режима работы подается единичный потенциал, который открывает ключи 4 на все время работы.

С приходом первого синхроимпульса начинает работать генератор тактовых импульсов 16.

Первый синхроимпульс второго процесса поступает на вход распределителя импульсов 1 и разрешает запись первого отсчета второго процесса в первый элемент памяти. Одновременно этот синхроимпульс поступает на вход разрешения записи-считывания элементов памяти 15 и меняет содержимое местами. Код $N-k/2$ поступает на входы задания начального состояния счетчиков 12. Этот код записывается по сигналу распределителя импульсов 1, проходящему через элемент ИЛИ 11, в первый счетчик 12. Таким образом, обеспечивается адресация произведений в соответствии с (4.14). После этого первым синхроимпульсом второго процесса через элемент задержки 14 через время, достаточное для записи кода $N-k$ в первый счетчик 12, содержимое элементов памяти 15 опять меняется местами. На входы счетчиков 12 подается код $N-k$, который присутствует там до прихода следующего синхроимпульса второго процесса. С момента поступления кода $N-k/2$ в первый счетчик 12 он начинает под-

счет импульсов времени, приходящих на его счетный вход с генератора 16 импульсов через Δt_0 .

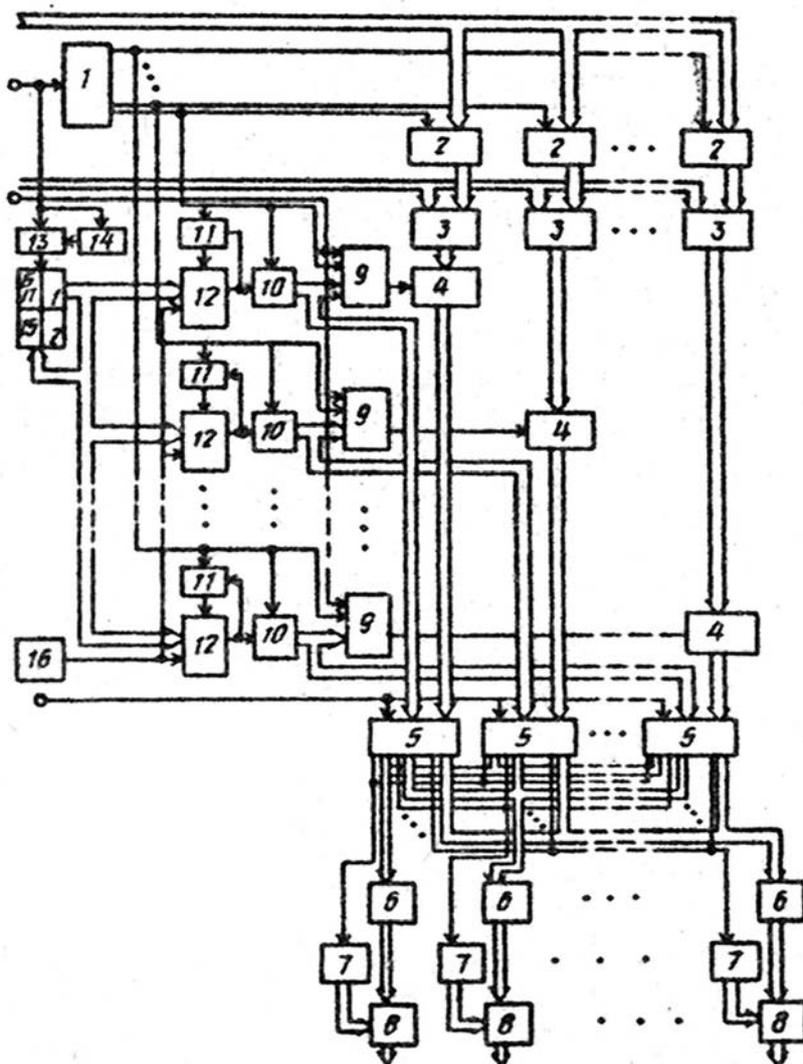


Рисунок 4.24. Коррелометр на базе интервального коррелометра с циркуляционной организацией памяти с кратным интервалом дискретизации

Первый счетчик 10 осуществляет подсчет импульсов переполнения первого счетчика 12, по которым, кроме того, в этот счетчик 12 заносится код $N-k$, находящийся на входах счетчиков 12. С приходом первого отсчета первого процесса на выходе первого счетчика 10 образуется код, который соответствует номеру ординаты корреляционной функции, определяемой по выражению (4.14).

По первому синхроимпульсу первого процесса частичное произведение $y_i^* x_i$ поступает на вход сумматора 6 с номером, соответствующим коду в первом счетчике 10, а содержимое счетчика 7 с таким же номером увеличивается.

Для последующих отсчетов второго процесса по их синхроимпульсам происходит последовательная запись значений этих отсчетов в элементы 2 памяти с номером:

$$L = (i)_{\text{mod}n} + 1 \tag{4.16}$$

(принцип циркуляционной организации памяти).

По этим же синхроимпульсам обнуляются одноименные счетчики 10. В одноименные счётчики 12 заносится код $N-k/2$.

На выходах блоков умножения 3 формируются частичные произведения, которые по синхроимпульсам первого процесса через открытые ключи 4 и блоки коммутации 5 заносятся в соответствующие сумматоры 6, которые совместно со счетчиками 7 и блоками 8 осуществляют усреднение результата. С приходом последнего M_{xj} -го отсчета j -ой реализации первого процесса на выходах блоков деления 8 образуются оценки j -текущей взаимной корреляционной функции в соответствии с выражением (4.12).

Для получения средней оценки взаимной корреляционной функции на вход коррелятора последовательно подаются отсчеты всех реализаций ансамбля реализаций процессов. На этом коррелятор заканчивает свою работу.

Для того чтобы избежать внесения методической погрешности в нулевую ординату автокорреляционной функции, на вход задания режима работы подается нулевой потенциал, таким образом, ключи 4 становятся управляемыми. Они управляются выходами счетчиков 10 и выходами распределителя импульсов 1 для случая (4) при этом первый и второй информационные входы поразрядно соединяются между собой.

В случае выполнения условий (4.13) на выходе соответствующего многовходового элемента ИЛИ 9 образуется нулевой потенциал, который запирает соответствующий ключ 4. При строгом равенстве $\Delta t_i=0$ на соответствующем выходе распределителя импульсов 1 образуется разрешающий сигнал, который через многовходовый элемент ИЛИ 9 открывает ключ 4 для прохождения квадрата отсчета в первый сумматор 6, соответствующий нулевой ординате взаимной корреляционной функции, т.е. дисперсии.

Блоки коммутации 5 (см. рис. 4.25) по синхроимпульсам первого процесса, приходящим через их управляющий вход на элементы И 18, осуществляют распределение кодов частичных произведений отсчетов процессов, приходящих на их информационные входы, на свои выходы, номера которых соответствуют кодам, приходящим на управляющие входы блоков 5 коммутации.

Число элементов памяти 2 n выбирается из условий $n \leq m$, m - цифровой эквивалент τ_{kmax} . Разрядность элементов памяти 2, блоков умножения 3, сумматоров 6, блоков деления 8 определяется разрядностью информационных входов устройства. Разрядность определяется следующим образом:

- p счетчиков 12 –

$$p = \left\lceil \log_2 \frac{(\sum_{l=1}^n \Delta t_l) \max}{\Delta t_0} \right\rceil + 1; \quad (4.17)$$

- q счетчиков 10 –

$$q = \lceil \log_2 p \rceil + 1; \quad (4.18)$$

- r счетчиков 7 -

$$r = \lceil \log_2 M_j \rceil + 1. \quad (4.19)$$

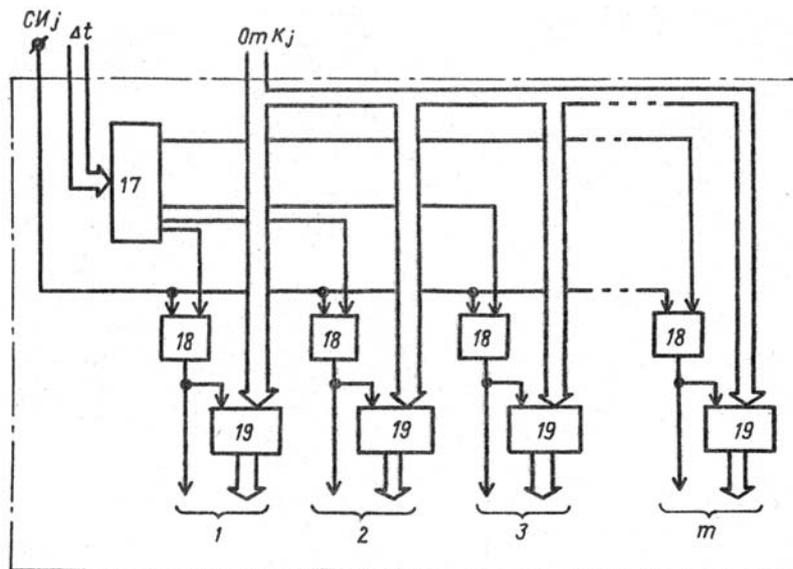


Рисунок 4.25. Блок коммутации

4.8. Многофункциональный структурный анализатор

Предлагаемый многофункциональный структурный анализатор, представленный на рис. 4.26, может работать в следующих режимах [13]:

1. вычисление структурной функции входного процесса с регулярной дискретизацией;
2. вычисление взаимной структурной функции с регулярной дискретизацией;
3. вычисление интервальной автокорреляционной функции импульсной последовательности;
4. вычисление интервальной взаимной корреляционной функции импульсных последовательностей;
5. вычисление структурной функции неэквидистантного временного ряда;
6. вычисление взаимной структурной функции неэквидистантных временных рядов.

Алгоритмы функционирования многофункционального структурного анализатора представлены в таблице 4.6.

Рассмотрим работу анализатора на примере шестого режима, как наиболее общего по отношению к другим режимам.

На вход устройства 1 поступает синхроимпульсы первого входного процесса, по которым осуществляется обнуление соответствующих сумматоров 6 и 8 соответствующих групп, тем самым осуществляется суммирование в соответствии с принципом циркуляционной организации записи.

С приходом $(i + 1)$ -го синхроимпульса первого входного процесса на входы устройства 1 и 2 поступают текущие разности между первым и вторым процессами:

$$\Delta_{i+1,xy} = x_{i+1} - y_i.$$

Таблица 4.6

№	Алгоритмы функционирования
1	$\hat{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M-J} [x_{ji} - \bar{x}_{j,i+J}]^2}{M-J}$
2	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{xyj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M-J} [x_{ji} - y_{j,i+J}]^2}{M-J} \\ \hat{S}_{yxj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M-J} [y_{ji} - x_{j,i+J}]^2}{M-J} \end{array} \right.$
3	$\hat{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}$
4	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_{xyj}(J) = \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \hat{E}_{yxj}(J) = \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{array} \right.$
5	$\hat{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} [x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]^2}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
6	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{xyj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} [x_{ji} - \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}]^2}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \hat{S}_{yxj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} [y_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}]^2}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{array} \right.$

На вход устройства 3 поступает текущий интервал времени между текущими значениями первого и второго входных процессов:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i.$$

В общем случае процесс представлен неэквидистантным временным рядом. Суммирование текущих разностей входных процессов и текущих интервалов времени осуществляется в соответствии с принципом циркуляционной организации памяти.

Для подсчёта взаимоструктурной функции необходимо получить следующие разности между входными процессами (см. рис. 4.27), которые получаются в сумматорах 6 соответствующей группы при суммировании текущих разностей входных процессов.

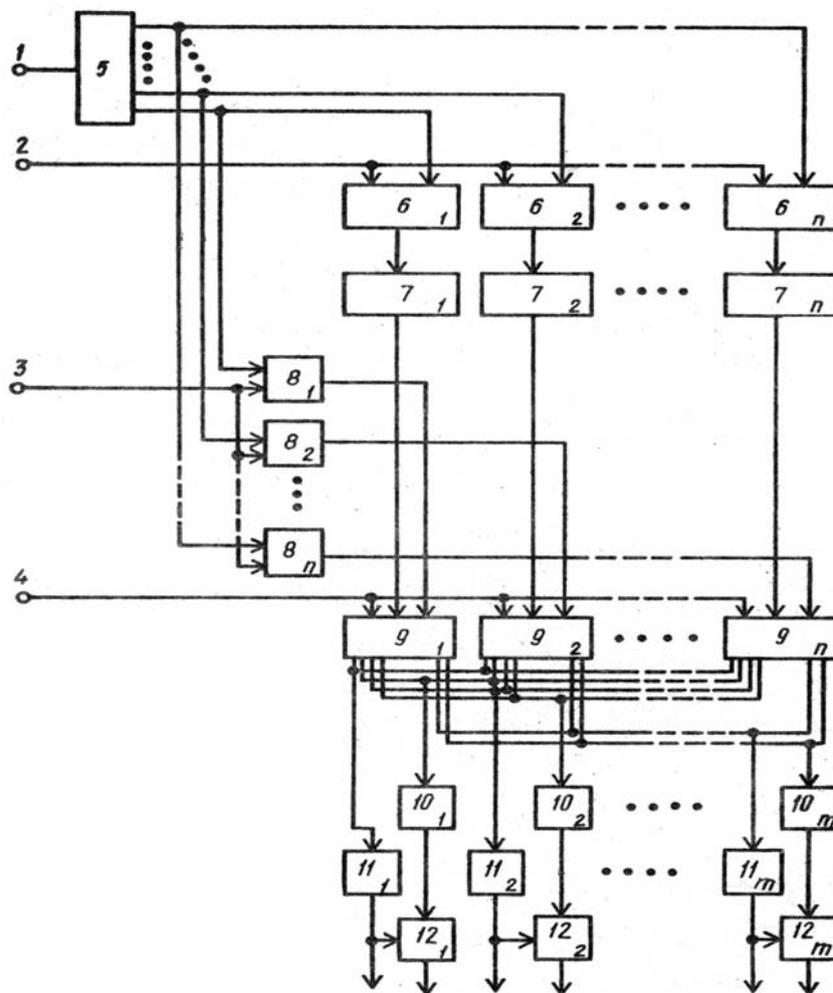
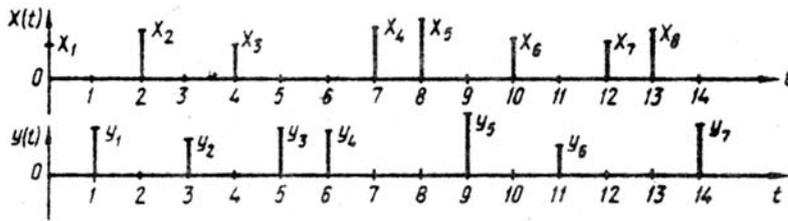


Рисунок 4.26. Многофункциональный структурный анализатор

Таким образом, в результате суммирования текущих разностей входного процесса и циркуляционной организации памяти получаются необходимые разности, которые поступают на вход квадраторов 7. На выходах квадраторов 7 формируются квадраты сумм, а на выходах сумматоров 8 соответствующей группы - временные интервалы между текущими отсчётами. Квадраты сумм разностей с выходов квадраторов 7 подаются на информационные входы блоков коммутации 9, на другие информационные входы которых подаются временные интервалы с сумматоров 8 соответствующей группы. По синхросигналу второго входного процесса y , поступающему с входа устройства 4 на управляющие входы блоков коммутации 9, каждый блок коммутации 9 выдает квадрат сумм разностей, поступающий на информационный вход, на определенный выход первой группы и далее на определенный сумматор 10 соответствующей группы, номер которого соответствует коду временного интервала, находящегося на информационном входе указанного блока коммутации 9 (см. рис. 4.27).



$n=4 \quad m=8$

Время	Содержимое сумматоров первой группы				Сод. сумматоров групп				Содержимое квадратов				Содержимое сумматоров третьей группы									Содержимое счетчиков																	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1	Δ_1	Δ_1	Δ_1	Δ_1	00	1	1	1	$(y_1-x_1)^2$	$(y_1-x_1)^2$	$(y_1-x_1)^2$	$(y_1-x_1)^2$	$(y_1-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	$\Delta_1 + \Delta_2$	0	$\Delta_1 + \Delta_2$	$\Delta_1 + \Delta_2$	2	0	2	2	$(x_2-x_1)^2$	—	$(x_2-x_1)^2$	$(x_2-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$	Δ_3	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$	3	1	3	3	$(y_2-x_1)^2$	$(y_2-x_2)^2$	$(y_2-x_1)^2$	$(y_2-x_1)^2$	$(y_2-x_1)^2$	—	$(y_2-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$	$\Delta_3 + \Delta_4$	0	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$	4	2	0	4	$(x_3-x_1)^2$	$(x_3-x_2)^2$	—	$(x_3-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$	$\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$	Δ_5	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5$	5	3	1	5	$(y_3-x_1)^2$	$(y_3-x_2)^2$	$(y_3-x_3)^2$	$(y_3-x_1)^2$	$(y_3-x_1)^2$	—	$(y_3-x_1)^2$	—	$(y_3-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6$	$\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6$	$\Delta_5 + \Delta_6$	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6$	6	4	2	6	$(x_4-x_1)^2$	$(x_4-x_2)^2$	$(x_4-x_3)^2$	$(x_4-x_1)^2$	—	—	$(x_4-x_1)^2$	—	$(x_4-x_1)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7$	$\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7$	0	$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7$	7	5	2	0	$(x_6-x_1)^2$	$(x_6-x_2)^2$	$(x_6-x_3)^2$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Итого:												Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	3	1	2	1	1	1	1	1	1										

Рисунок 4.27. Пояснения к работе структурного анализатора

Одновременно на выход с таким же номером второй группы выходов указанного блока коммутации 9 подается сигнал, который поступает далее на вход соответствующего счётчика 11 и изменяет его содержимое на + 1. Таким образом, в каждом из m сумматоров 10 накапливается сумма квадратов разностей между отсчётами входных процессов, а в каждом счётчике – количество таких разностей. Каждому сумматору 10 соответствует свой интервал времени между отсчётами. Блоки 12 деления делят содержимое сумматоров 10 на содержимое счётчиков 11, осуществляя усреднение результата. После прихода последней разности текущих значений процессов и текущих значений времени на выходах блоков деления 12 находятся искомые ординаты оценки взаимоструктурной функции процесса, представленные неравноотстоящими отсчётами.

В 5-ом режиме работы устройства на вход 2 подаются текущие разности входного процесса, на вход 3 поступают текущие интервалы времени между отсчётами одного процесса, на входы 1 и 4 - синхроимпульсы очередного текущего значения процесса. При этом на выходах блоков деления 12 получают искомые ординаты оценки структурной функции входного неэквиливантного временного ряда.

В 4-м (3-м) режиме на входы 1 и 3 подаются текущие интервалы времени, соответствующие приходу очередных импульсов входных импульсных последовательностей (последовательности), на вход устройства 4 подаются синхроимпульсы второй последовательности. При этом на выходах счётчиков 11 получают ординаты корреляционной гистограммы.

Во 2-м (1-м) режиме на вход 2 устройства подаётся разность текущих значений процессов (процесса), а на вход 3 – текущие интервалы времени. Причём, процессы (процесс) дискретизируется через равные интервалы времени. Синхроимпульсы дискретизации первого и второго процессов подаются на 1 и 4 входы устройств. При этом в блоках деления 12 получим искомые усредненные ординаты оценки взаимной структурной (структурной) функции.

Блок коммутации работает следующим образом (см. рис. 4.28).

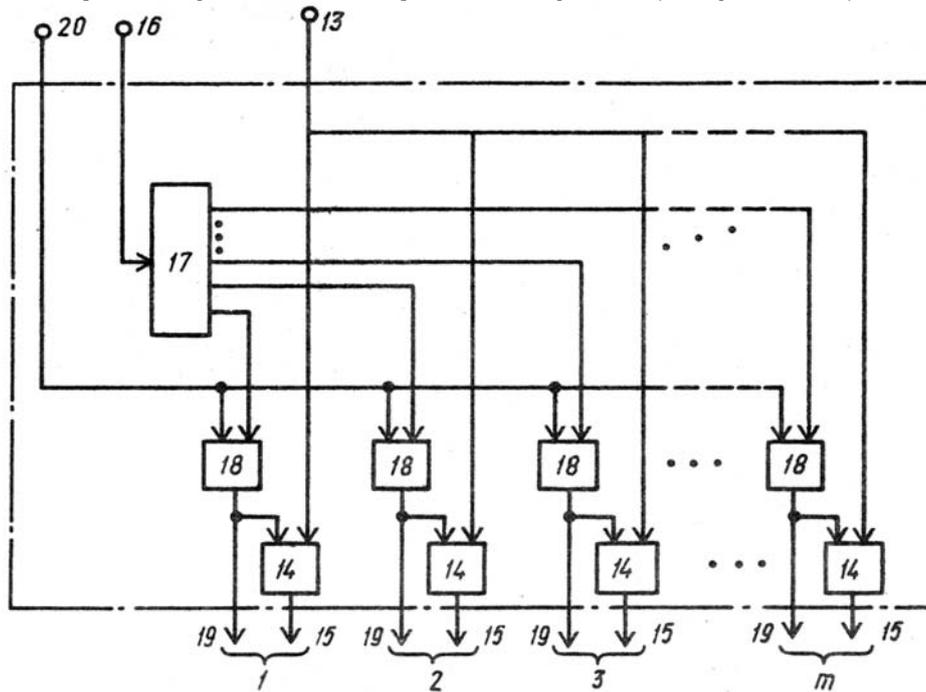


Рисунок 4.28. Блок коммутации

На информационный вход 13 блока коммутации 9 поступает код, соответствующий квадрату разностей входных процессов с квадратора 7. Этот код поступает на информационные входы входы всех ключей 14. Одновременно с этим на другой информационный вход 16 блока коммутации 9 поступает код, соответствующий временной задержке с сумматоров 8. Этот код дешифруется дешифратором 17 в сигнал на его определенном выходе. Выходной сигнал подаётся на первый вход соответствующего элемента И 18. С приходом синхроимпульса на управляющий вход 20 блока коммутации 9 и далее на первые входы элементов И 18 срабатывает тот элемент И 18, на первом входе которого отсутствует сигнал с дешифратора 17. На выходе этого элемента И 18 формируется сигнал, поступающий на соответствующий выход 19 второй группы блока коммутации 9 и разрешающий прохождение информационного сигнала через соответствующий ключ 14 на выход 15 первой группы блока коммутации 9.

На рис. 4.27 представлена таблица соответствия содержимого составляющих блоков устройства синхроимпульсам входных процессов.

В отличие от известных в предлагаемом устройстве отсутствуют блоки умножения и памяти, а для вычисления разности входного процесса используются сумматоры 6, на вход которых подаётся не абсолютное значение входного процесса, что увеличивает разрядность второго входа устройства, а текущие разности входного процесса (циркуляционная организация памяти). Такая организация памяти позволяет уменьшить разрядность второго входа устройства. Кроме того, в предлагаемом устройстве блоки умножения заменены на квадраторы, что существенно упрощает устройство. В предлагаемом устройстве отсутствует второй блок памяти и блоки вычитания, а для вычисления временных интервалов используются сумматоры 8, на которых подаётся не абсолютное значение времени, а текущие интервалы времени между отсчётами (циркуляционная организация памяти).

4.9. Многофункциональный полярный коррелометр на базе интервального коррелометра

Многофункциональный полярный коррелометр может работать в следующих режимах (см. таблицу 4.7) [14]:

- вычисление вероятности совпадения знаков входного процесса с регулярной дискретизацией;
- вычисление вероятности совпадения знаков входных процессов с регулярной дискретизацией;
- вычисление интервальной автокорреляционной функции входной импульсной последовательности;
- вычисление интервальной взаимокорреляционной функции входных импульсных последовательностей;
- вычисление полярной корреляционной функции неэквилидистантного временного ряда;
- вычисление полярной взаимной корреляционной функции неэквилидистантного временного ряда.

Пример реализации неэквилидистантных временных рядов представлен на рис. 4.29.

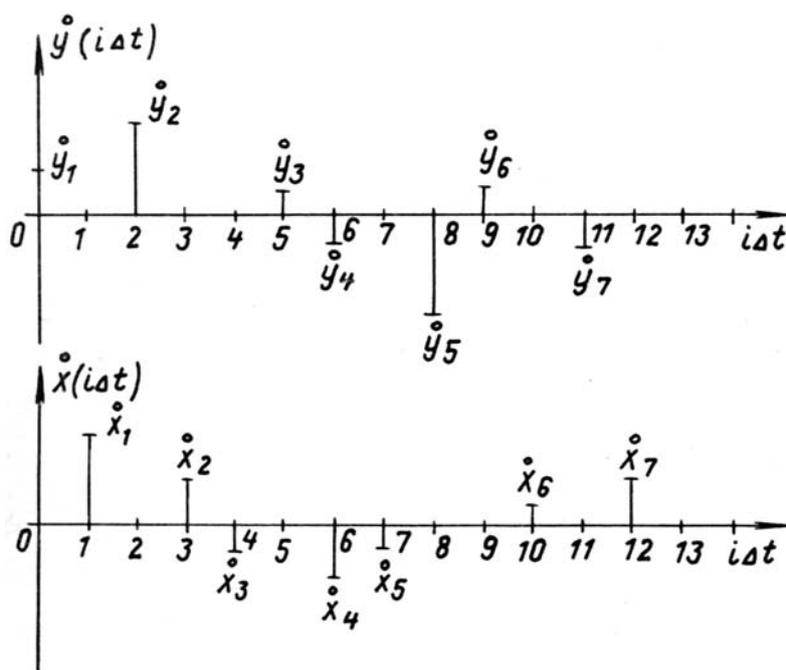


Рисунок 4.29. Пример реализации неэквилидистантного временного ряда

Структурная схема многофункционального полярного коррелометра представлена на рис. 4.30. Рассмотрим последний режим работы как наиболее общий по отношению к остальным режимам.

Перед началом работы в любом режиме триггеры 2, сумматоры 3, счетчики 7 и 8 обнулены. На вход устройства 11 подаются текущие значения знакового разряда первого $\text{sign } \dot{x}_k$, а на вход второго 13 - $\text{sign } \dot{y}_e$ входных процессов. На вход устройства 5 подаются синхроимпульсы k первого, а на вход 12 - синхроимпульсы e второго

Алгоритмы функционирования многофункционального
полярного коррелометра

Таблица 4.7

№	Алгоритмы функционирования
1	$\hat{P}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M-J} \text{sign } x_{ji} \text{ sign } x_{j,i+J}}{M-J}$
2	$\left\{ \begin{aligned} \hat{P}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M-J} \text{sign } x_{ji} \text{ sign } y_{j,i+J}}{M-J} \\ \hat{P}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M-J} \text{sign } y_{ji} \text{ sign } x_{j,i+J}}{M-J} \end{aligned} \right.$
3	$\hat{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}$
4	$\left\{ \begin{aligned} \hat{E}_{xyj}(J) &= \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \hat{E}_{yxj}(J) &= \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[\frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
5	$\hat{P}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
6	$\left\{ \begin{aligned} \hat{P}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \hat{P}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \text{sign } y_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$

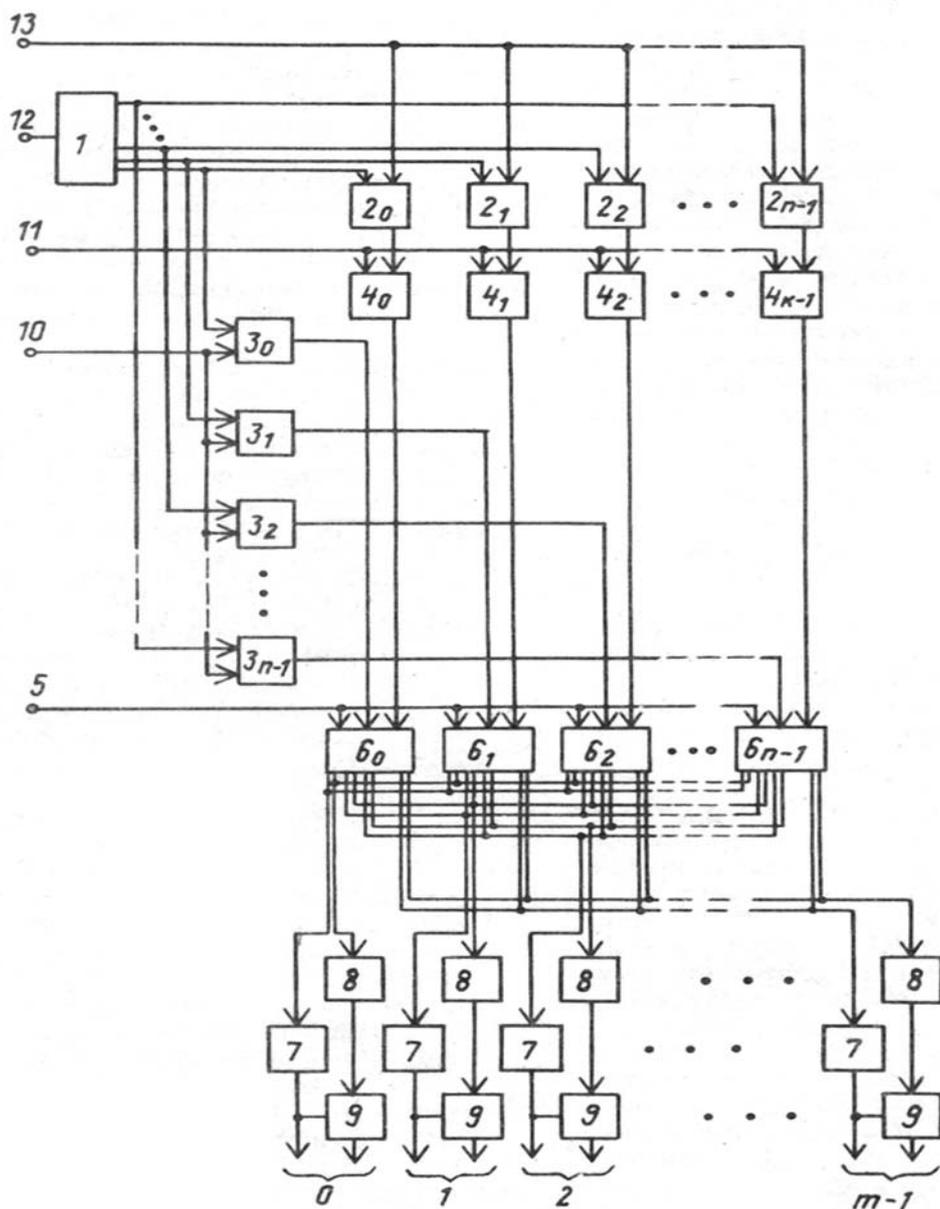


Рисунок 4.30. Структурная схема многофункционального полярного коррелометра

входных процессов. На вход устройства 10 подаются интервалы времени между соседними отсчетами входных процессов. Причем эти интервалы в общем случае не равны между собой. На выходах одноразрядных блоков умножения 4 формируются частичные произведения текущего значения знакового разряда первого входного процесса на n текущих значений знакового разряда второго входного процесса. Распределитель 1 импульсов по синхроимпульсам второго входного процесса осуществляет запись текущего значения знакового разряда второго процесса в триггер 2 с номером $n_l = (l-1) \bmod n$ (циркуляционная организация памяти). Одновременно осуществляется обнуление сумматора 3 с таким же номером n_l и добавление во все сумматоры 3 очередного интервала времени между текущим отсчетом второго процесса и ближайшим предыдущим отсчетом первого или второго процессов. По синхроимпульсам k первого входного процесса также происходит суммирование очередного интервала времени между текущим отсчетом первого входного процесса и ближайшим предыдущим отсчетом первого или второго входных процессов. Таким обра-

зом, на выходах одноразрядных блоков 4 умножения знаков формируются частичные произведения:

- на выходе нулевого - $\overset{\circ}{\text{sign}} x_k \overset{\circ}{\text{sign}} y_{e-nl}$;
- на выходе первого - $\overset{\circ}{\text{sign}} x_k \overset{\circ}{\text{sgn}} y_{e-nl+1}$;
- на выходе nl -го - $\overset{\circ}{\text{sign}} x_k \overset{\circ}{\text{sign}} y_e$;
- на выходе $(nl+1)$ -го - $\overset{\circ}{\text{sign}} x_k \overset{\circ}{\text{sign}} y_{e-nl+1}$;
- на выходе $(nl-1)$ -го - $\overset{\circ}{\text{sign}} x_k \overset{\circ}{\text{sign}} y_{e-nl-1}$.

На выходах сумматоров 3 формируются соответствующие им интервалы времени:

- на выходе нулевого - $t_k - t_{e-nl}$;
- на выходе первого - $t_k - t_{e-nl+1}$;
- на выходе n_1 -го - $t_k - t_e$;
- на выходе (n_1+1) -го - $t_k - t_{e-nl+1}$;
- на выходе $(n-1)$ -го - $t_k - t_{e-nl-1}$.

Синхроимпульсы k первого входного процесса разрешают прохождение через блоки 6 коммутации только в момент прихода очередного значения первого входного

процесса x_k . Частичные произведения с выходов одноразрядных блоков умножения 4 подаются на третьи входы соответствующих блоков коммутации 6, на вторые входы которых подаются соответствующие им интервалы времени с соответствующих сумматоров 3. По синхроимпульсу k , поступающему с входа устройства 5 на первые входы блоков коммутации 6, каждый блок коммутации 6 выдает информацию, находящуюся на его третьем входе, на свой определенный выход второй группы и далее на определенный счетчик 8 второй группы, номер которого соответствует коду временного интервала, находящемуся на втором входе указанного блока коммутации 6. Одновременно на выход первой группы с таким же номером указанного блока коммутации 6 подается сигнал, который поступает далее на вход соответствующего счетчика 7 первой группы и изменяет его содержимое на +1. Таким образом, в каждом из счетчиков 8 второй группы накапливаются частичные произведения разрядов входных процессов, а в каждом счетчике 7 первой группы - количество таких произведений. Каждому счетчику 8 второй группы соответствует свой интервал времени между отсчетами. Блоки 9 деления делят содержимое счетчиков 8 на содержимое счетчиков 7, усредняя результаты.

После прихода последнего синхроимпульса $k=M_j$ на выходах блоков деления 9 находятся искомые координаты оценки вероятности совпадения знаков входных процессов, представленных неравноотстоящими отсчетами. Подвергнув получившиеся результаты преобразованию по формуле

$$\rho_{xyj}(\tau) = -\cos \pi P_{xyj}(\tau), \quad (4.20)$$

можно получить нормированную взаимную корреляционную функцию входных процессов, представленных неравноотстоящими отсчетами.

В пятом режиме на входы 11 и 13 подаются текущие значения знакового разряда входного процесса, а на вход 5 - текущие интервалы времени между отсчетами входного процесса. На входы 10 и 12 подаются синхроимпульсы входного процесса. При этом в n -ом сумматоре 3 обнуление происходит без добавления текущего интервала времени. На выходах блоков деления 9 получаем искомые ординаты оценки вероятности совпадения знаков входного процесса, представленного неравноотстоящими отсчетами.

В четвертом (третьем) режиме на входы 11 и 13 ничего не подается, на вход 10 подаются текущие значения интервалов времени между отсчетами, а на входы 5 и 12 - синхроимпульсы входных импульсных последовательностей (последовательности). При этом на выходах счетчиков 7 первой группы получаем ординаты корреляционной гистограммы.

Во втором (первом) режиме на входы 11 и 13 подаются текущие значения отсчетов соответственно первого и второго процессов (процесса), а на вход 10 - текущие интервалы времени (причем равные между собой). При этом в блоках 9 деления получаем искомые ординаты оценки вероятности совпадения знаков входных процессов (процесса).

Соответствующий информационный вход 14 блока коммутации 6 (рис. 4.31) подключен к первым входам логических элементов И 15, количество которых равно m , выходы которых являются соответствующими выходами 16 второй группы блока коммутации 6. Другой информационный вход 17 блока коммутации 6 подключен к входу дешифратора 18, выходы которого подключены к первым входам соответствующих элементов И 19 второй группы, число которых равно m , выходы которых подключены к вторым входам соответствующих элементов И 15 и являются соответствующими выходами 20 первой группы выходов блока коммутации 6. Управляющий вход 21 блока коммутации 6 подключен к вторым входам элементов И 19.

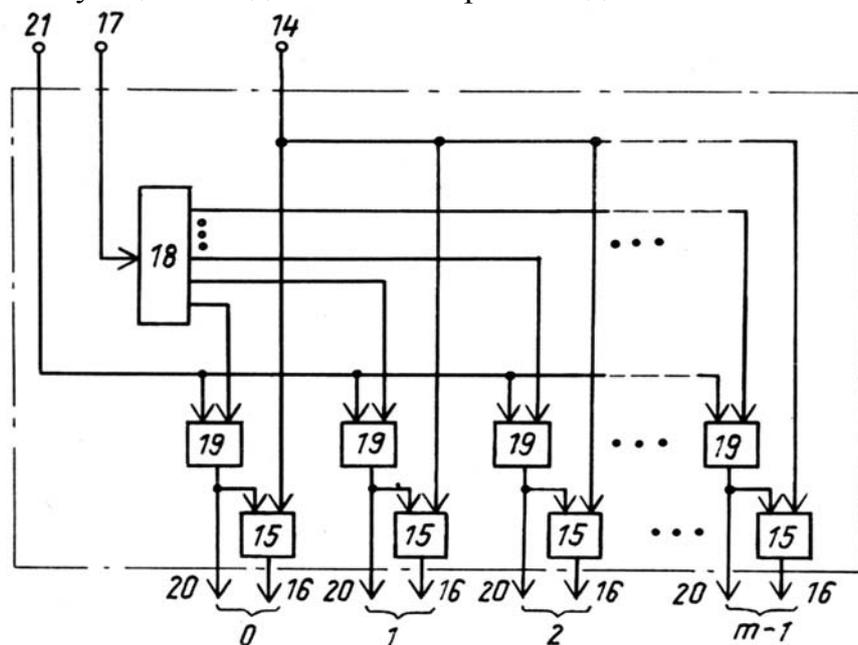


Рисунок 4.31. Блок коммутации

Блоки коммутации 6 работают следующим образом.

На первый информационный вход 14 поступает сигнал, соответствующий частичному произведению знаков с соответствующего одноразрядного блока умножения

4. Этот сигнал поступает на первые входы всех элементов И 15 первой группы. Одновременно на второй информационный вход 17 поступает код, соответствующий временной задержке с соответствующего сумматора 3. Этот код дешифрируется дешифратором 18 в сигнал на его определенном выходе, который подается на первый вход соответствующего элемента И 19 второй группы. С приходом синхроимпульса на управляющий вход 21 блока коммутации 6 и далее на первые входы элементов И 19 второй группы срабатывает тот из элементов, на первом входе которого присутствует сигнал с дешифратора 18. На выходе этого элемента И 19 второй группы формируется сигнал, поступающий на соответствующий выход 20 первой группы блока коммутации 6 и разрешающий прохождение информационного сигнала через соответствующий элемент И 15 первой группы на соответствующий выход 16 второй группы блока коммутации 6.

4.10. Устройство для определения моментов k-го порядка

Пусть на вход устройства поступает неэквидистантный временной ряд $\{x_{ji}, t_{ji}\}_{j=1, \dots, N}^{M_j}$, для которого требуется оценить моменты k-го порядка [15].

При известном алгоритме восстановления процесса между существенными отсчётами для повышения быстродействия можно воспользоваться дескрипторными алгоритмами (см. раздел 2.). В этом случае для случая кусочно-ступенчатой экстраполяции алгоритм оценки момента k-го порядка примет вид

$$\hat{\alpha}_{kj} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^k \delta_{j,i+1}. \quad (4.21)$$

При кусочно-линейной адаптивной интерполяции дескрипторный алгоритм запишется в виде

$$\hat{\alpha}_{kj} = \frac{1}{(m+1)N} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_j-1} \sum_{s=0}^k x_{ji}^{k-s} x_{j,i+1}^s \delta_{j,i+1}. \quad (4.22)$$

Структурная схема устройства для оценки моментов k-го порядка для рассматриваемых видов нерегулярной дискретизации представлена на рис. 4.32.

Устройство работает следующим образом. Перед началом работы счётчик 7, сумматоры 8, 10, 11, 13 и регистр 9 обнулены.

На первый вход устройства 1 подаются синхроимпульсы, соответствующие моментам неравномерной дискретизации. На второй вход устройства подаются существенные отсчёты процесса. На третий вход устройства подаётся код (k+1). Счётчик 7 и сумматор 8 накапливают импульсы, количество которых соответствует текущим значениям соответственно интервалам времени между отсчётами и текущему значению времени реализации, умноженному на (k=1). В момент прихода i-го синхроимпульса содержимое счётчика 7 переписывается в регистр 9, а счётчик 7 обнуляется. Таким образом, код, соответствующий текущему значению i-го интервала между отсчётами, передаётся на третий вход коммутатора 5. На второй вход коммутатора 5 подаётся значение функционального преобразования текущего значения отсчёта x_i с выхода функционального преобразователя 4. В соответствии с алгоритмом восстановления процесса коммутатор 5 по i-му синхроимпульсу, приходящему на его первый вход, выдаёт это значение на свой определенный выход, номер которого соответствует коду текущего временного интервала, находящемуся в регистре 9, и далее – в

сумматор 10 первой группы. На синхровход накапливающего сумматора 11 второй группы с таким же номером поступает сигнал, по которому происходит суммирование кода, находящегося на информационном входе этого сумматора 11 и соответствующего текущему значению интервала между существенными отсчётами процесса. Причём, значение этого кода находится в диапазоне $[1, L_{\max}]$, соответствующего диапазону изменения интервалов между импульсами. Блоки умножения 12 перемножают содержимое сумматоров 10 и 11 первой и второй групп. Многовходовой сумматор 13 суммирует результаты перемножения. Блок деления 14 усредняет получающуюся сумму на длительность реализации T , умноженную на $(k+1)$, накапливающуюся в сумматоре 8. По истечении времени реализации T на выходе блока деления 14 получаем результат измерения.

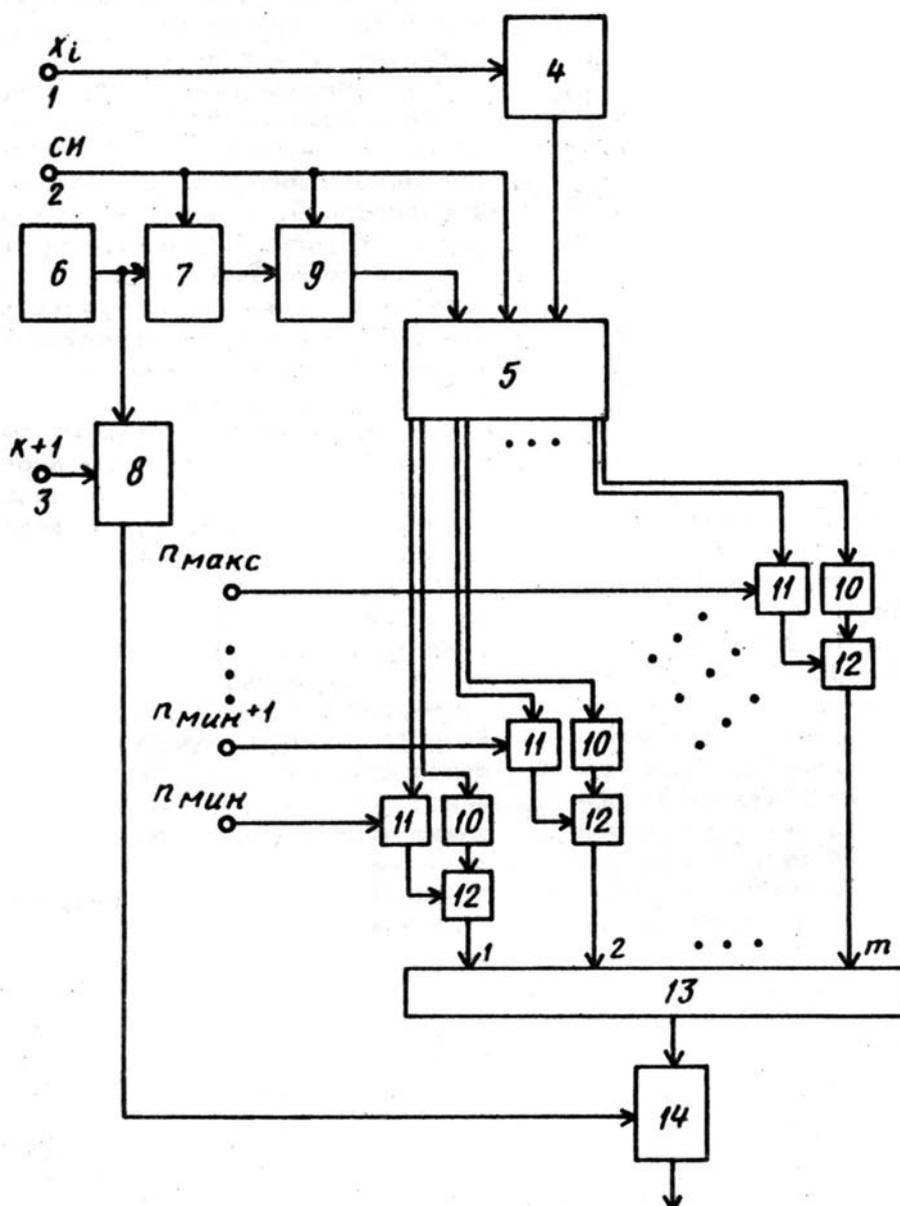
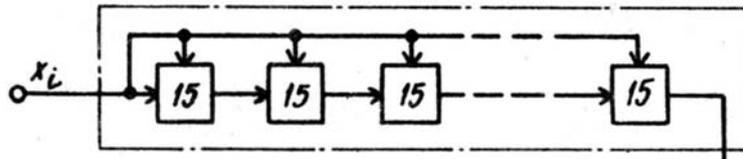
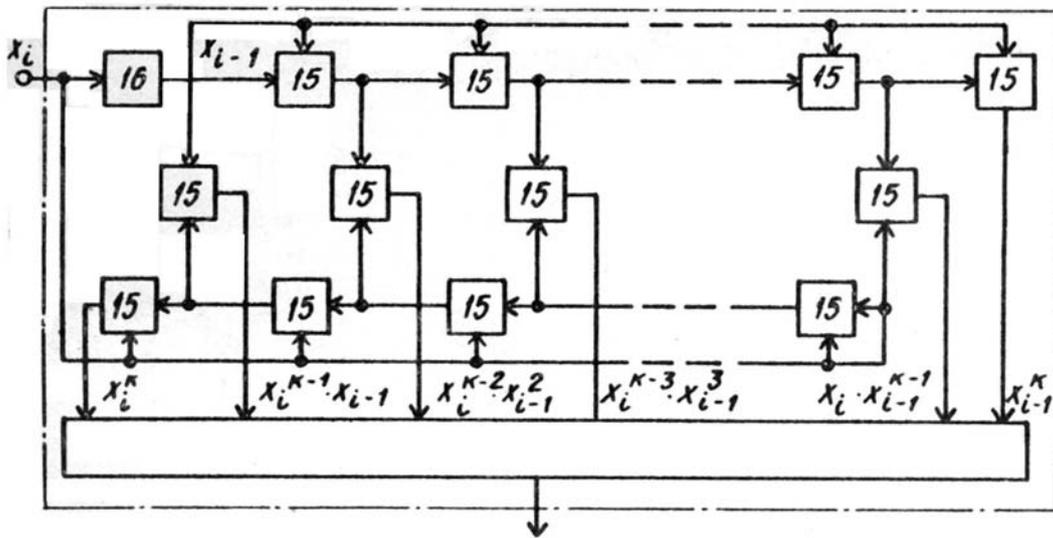


Рисунок 4.32. Устройство для определения моментов k -го порядка

На рис. 4.33 представлены структурные схемы функциональных преобразователей для $k=1$ и $k=2$ соответственно.



а)



б)

Рисунок 4.33. Структурная схема функциональных преобразователей

5. ПРОЦЕССОРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНАЛИЗАТОРЫ

Программно-аппаратный дуализм [72] позволяет реализовать алгоритмы измерения как в виде специализированных средств, построенных на базе «жесткой» логики [5-23], так и в виде процессорных измерительных средств (ПРИС) [108, 206, 207]. Перспективность разработки и применения ПРИС объясняется рядом преимуществ:

- универсальностью - способностью решать программными средствами широкий круг измерительных задач;
- гибкостью - возможностью модификации алгоритмов измерения характеристик сигналов и параметров алгоритмов программным путем без изменения структуры анализатора;
- наличием развитого математического обеспечения;
- наличием развитой системы прерываний от внешних устройств, позволяющей строить системы реального времени;
- возможностью одновременного использования микро-ЭВМ, являющейся ядром ПРИС, для решения других задач, например, вторичной статистической обработки информации;
- уменьшением затрат на проектирование и макетирование и т.д.

Пожалуй, единственным недостатком, ограничивающим область применения ПРИС, является сравнительно низкое, по сравнению со специализированными устройствами, быстродействие. Повышение быстродействия ПРИС возможно различными способами, наиболее перспективными из которых являются:

- алгоритмические;
- структурные;
- программные;
- применение аппаратных множителей;
- рациональное распределение функций между внешними устройствами и микро-ЭВМ.

Кроме того, для расширения частотного диапазона исследуемых случайных процессов при возможности задержки в обработке информации значительный эффект дает предварительная буферизация.

Обобщенная структурная схема ПРИС для измерения значений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов содержит блок неравномерной дискретизации, интерфейс ввода, микро-ЭВМ, регистратор. В качестве блока неравномерной дискретизации могут быть применены адаптивно-временные дискретизаторы [4, 37], адаптивный коммутатор [4], спорадический дискретизатор [68] и т.д. Основные взаимодействующие узлы микро-ЭВМ и их связи зависят от решаемой задачи. Интерфейс ввода и регистратор являются стандартными блоками.

5.1. Интервальный коррелометр

Основой для построения процессорных статистических анализаторов, реализующих алгоритмы с использованием интервальных корреляционных функций, являются процессорные интервальные коррелометры [108, 206-207].

На рис. 5.1 представлена структура интервального коррелометра потоков событий, разработанная на базе микро-ЭВМ [206]. Для каждого случайного события, поступающего на его вход, выполняется следующая последовательность операций.

Операция 1. Дискретизация временного интервала t_i

Эта процедура осуществляется вне компьютера, используя счетчик, подключенный к генератору стабильной частоты. Каждое случайное событие прерывает компьютер. Компьютер переписывает содержимое счетчика в интервальный регистр А и

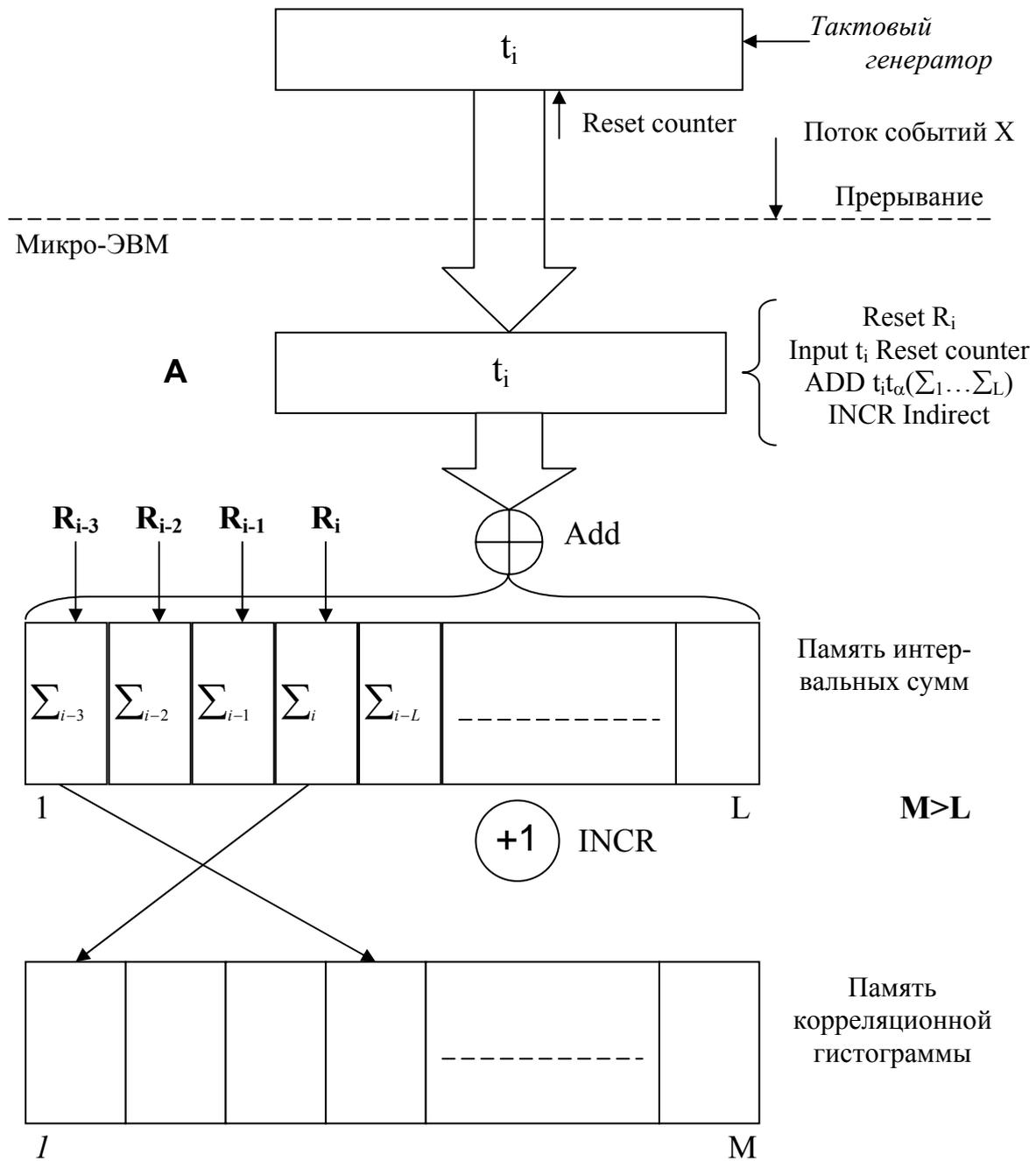


Рисунок 5.1. Интервальный коррелометр

обнуляет счетчик. Содержимое счетчика представляет цифровой эквивалент интервала t_i между двумя последними событиями.

Операция 2. Формирование сумм интервалов.

Для вычисления вклада нового события в корреляционную функцию необходимо вычислить следующие суммы интервалов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i = t_i \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i-L} = t_i + \dots + t_{i-L} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Память резервируется для запоминания всех частичных сумм. Назовем ее памятью интервальных сумм. Она запоминает L частичных сумм предшествующих событий. L - верхний предел числа интервалов, необходимых для вычисления корреляционной функции.

Σ_i запоминается в i-ой позиции памяти сумм. Для этих целей программа прерывания первой обнуляет i-ую позицию. Затем будут сформированы новые частичные суммы путем добавления t_i к старым частичным суммам. Частичные суммы запоминаются в памяти циркуляционным способом: Σ_{i-1} находится слева от Σ_i и Σ_{i-L} - справа от Σ_i . (Для формирования и запоминания частичных сумм возможно применение блока регистров. В этом случае, если все регистры подключены к общему блоку, добавление осуществляется автоматически).

Операция 3. Добавить единицу по всем адресуемым позициям корреляционной функции. Поле памяти резервируется для запоминания гистограмм корреляционной функции. Каждая частичная сумма будет адресом одной ячейки корреляционного поля. Содержимое L адресуемых корреляционных ячеек увеличивается на 1. Заметим, что корреляционное поле состоит из M ячеек ($M > L$). Отношение M/L зависит от шага интервала дискретизации, который может быть установлен выбором частоты генератора.

Программа обработки прерывания для ЭВМ представлена ниже:

Reset R_i ;
Input t_i ; Reset Counter; (5.2)
ADD t_i to ($\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$);
INCR Indirect ($\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$).

5.2. Взаимный интервальный коррелометр

Структурная схема интервального взаимного коррелятора, разработанного на базе микро-ЭВМ, представлена на рис. 5.2 [108]. Взаимный коррелометр имеет структуру, аналогичную автокоррелометру. Отличие заключается во взаимодействии двух программ обработки прерываний по каналам x и y. Следует отметить, что только программа обработки прерывания по x обнуляет i-ую позицию по модулю L, а программа обработки прерывания y добавляет единицу ко всем адресуемым позициям корреляционной функции.

Программы обработки прерывания представлены ниже:

- для потока x:

Input t_i ; Reset Counter;
ADD t_i to ($\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$); (5.3)
Reset R_i ;

- для потока y :

Input t_i ; Reset Counter;
ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;
INCR Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$. (5.4)

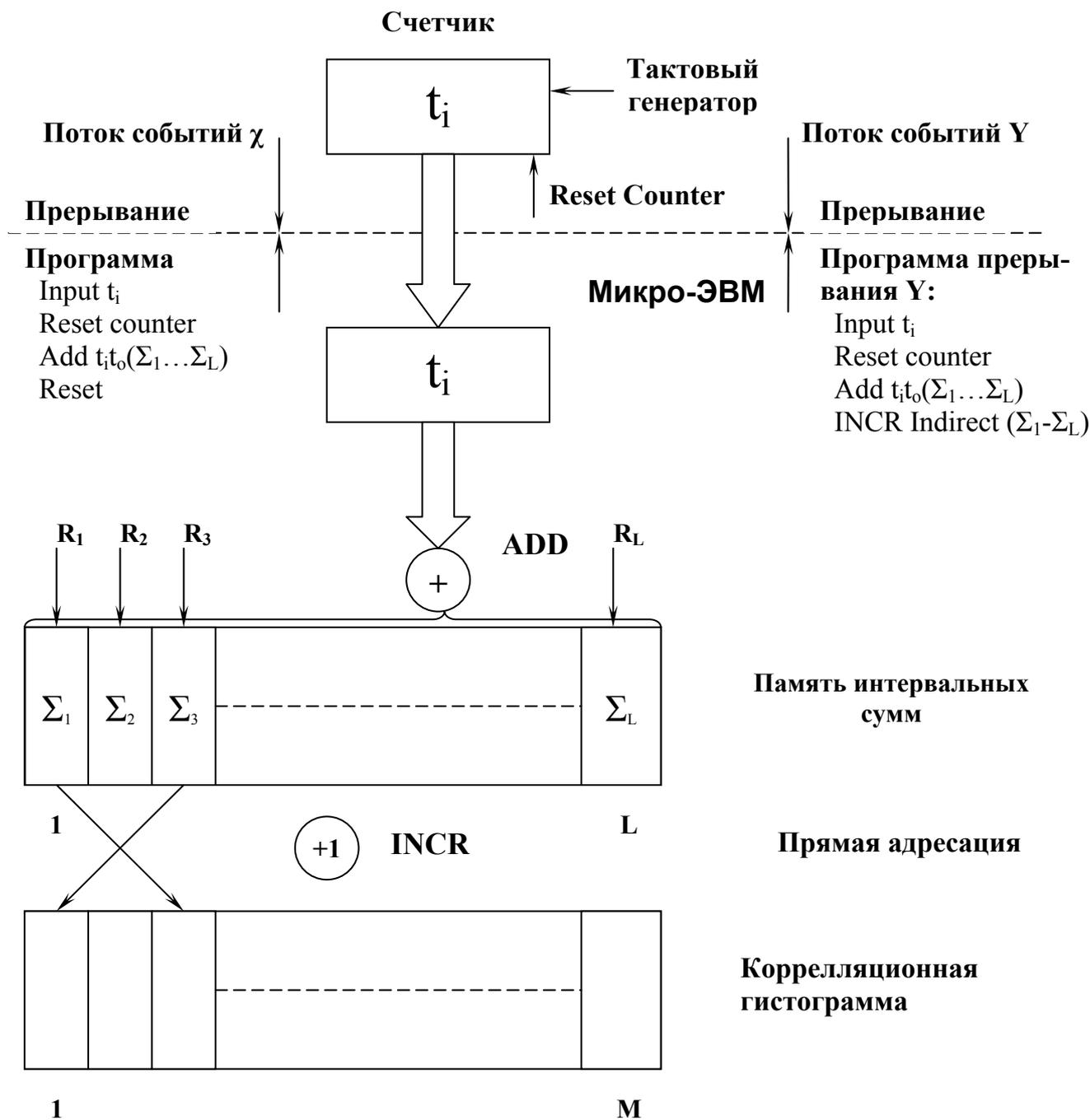


Рисунок 5.2. Взаимный интервальный коррелометр

На базе интервальных коррелометров могут быть разработаны статистические анализаторы для измерения значений разнообразных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

5.3. Многофункциональный коррелометр

Один из вариантов структурной схемы многофункционального коррелометра, реализованного на базе микро-ЭВМ, представлен на рис. 5.3, где $Rg\ x_i$, $Rg\ y_i$ - регистры текущих значений входных процессов, Rgt_i - регистр-счетчик, подсчитывающий длину интервала времени между отсчетами, БуфРг - буферный регистр [108].

Коррелометр позволяет оценивать авто и взаимную корреляционную функции как случайных процессов с регулярным интервалом дискретизации, так и неэквиливантных временных рядов, а также интервальные авто и взаимные корреляционные функции случайных потоков.

При этом, для повышения эффективности проводимых вычислений в структуре алгоритмов обработки информации применены циркуляционная организация памяти и косвенная адресация.

Коррелометр начинает работать с приходом внешнего сигнала на прерывание. По этому сигналу в регистры $Rg\ x_i$ и $Rg\ y_i$ записываются текущие значения входных процессов, и микро-ЭВМ начинает обработку прерываний. Обработка прерываний происходит по одной из следующих программ, представленных в символических обозначениях:

- автокорреляционная функция с равномерной дискретизацией процессов:

```
Input  $x_i$  to A;  
<A>  $\rightarrow ((i) \bmod L)$ ;  
JMS MULT ( $x_i ; x_1, \dots, x_L$ );  
JMS ADD Indirect( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );
```

 (5.5)

- взаимная КФ с равномерной дискретизацией процессов:

```
Input  $x_i$  to A;  
<A>  $\rightarrow ((i) \bmod L)$ ;  
Input  $y_i$  to A;  
JMS MULT ( $y_i ; x_1, \dots, x_L$ );  
JMS ADD Indirect ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );
```

 (5.6)

- интервальная автокорреляционная функция случайных потоков:

```
Reset  $R_i$ ;  
Input  $t_i$  to A;  
Reset Counter;  
ADD  $t$  to ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );  
INCR Indirect ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );
```

 (5.7)

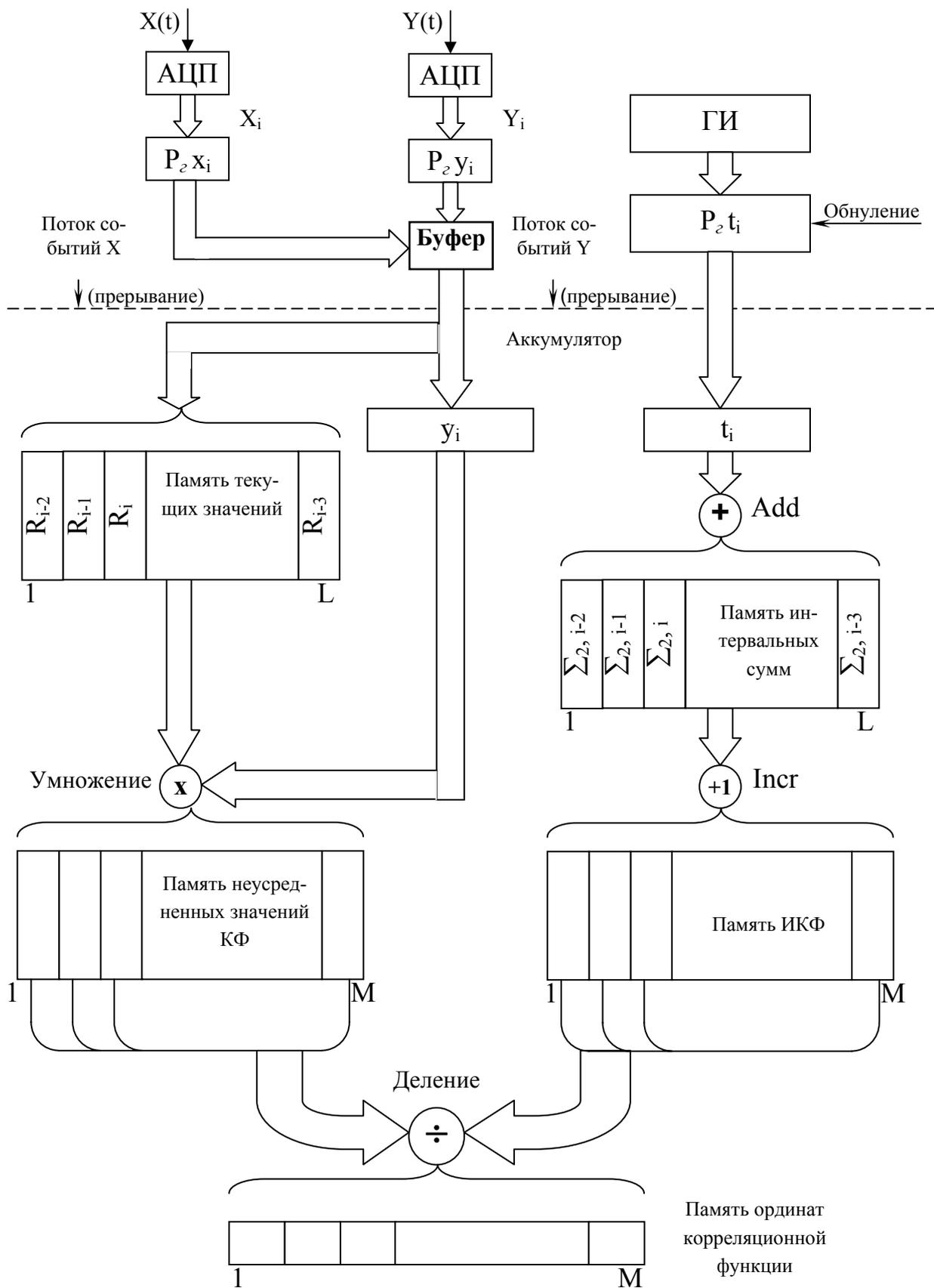


Рисунок 5.3. Коррелометр

- интервальная взаимная корреляционная функция случайных потоков:

прерывание по каналу X:

прерывание по каналу Y:

Input t_i to A	Input t_i to A;	
Reset Counter;	Reset Counter;	(5.8)
ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	
Reset R_i ;	INCR Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	

- автокорреляционная функция неэквидистантных временных рядов:

амплитудная корреляция

интервальная корреляция

Input x_i to A;	Reset R_i ;	
$\langle A \rangle \rightarrow ((i) \bmod L)$;	Input t_i to A;	(5.9)
JMS MULT $(x_i; x_1, \dots, x_L)$;	Reset Counter;	
JMS ADD Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	
	INCR Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	

- взаимная КФ с неравномерной дискретизацией процессов:

прерывание по каналу X:

прерывание по каналу Y:

амплитудная корреляция

Input x_i to A;	Input y_i to A;	
$\langle A \rangle \rightarrow ((i) \bmod L)$;	JMS MULT $(y_i ; x_1, \dots, x_L)$;	(5.10)
JMS ADD Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;		

интервальная корреляция

Input t_i to A;	Input t to A;	
Reset Counter;	Reset Counter;	(5.11)
ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	ADD t_i to $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	
Reset R_i ;	INCR Indirect $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$;	

где JMS MULT- обращение к подпрограмме последовательного перемножения;

JMS ADD Indirect- обращение к подпрограмме последовательного суммирования с косвенной адресацией.

Для усреднения результатов оценки КФ необходимо:

- при равномерной дискретизации процессов частичные суммы соответственно разделить на $N-J$, где N - объем выборки, J - номер ординаты КФ;

- при анализе неэквидистантных временных рядов частичные суммы, соответствующие ординатам амплитудной КФ, разделить на частичные суммы, соответствующие ординатам интервальной КФ.

Следует отметить, что для повышения быстродействия коррелометра возможно применение двух подсистем, реализованных на микро-ЭВМ, первая из которых определяет амплитудную корреляцию, вторая - интервальную. Взаимодействие этих подсистем при организации косвенной адресации и усреднения обеспечивает искомый результат.

5.4. Многофункциональный структурный анализатор

Структурный анализатор на базе микро-ЭВМ представлен на рис. 5.4. Обработка прерываний для него происходит по одной из следующих программ:

1. Структурная функция с равномерной дискретизацией процессов:

Reset $R_2 i$;
 Input Δ_i to A;
 Reset Rg; (5.12)
 ADD Δ_i to $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;
 JMS SQ $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;
 JMS ADD Indirect $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;

2. Взаимная структурная функция с равномерной дискретизацией процессов:

Reset $R_2 i$;
 Input Δ_i to A;
 Reset Rg; (5.13)
 ADD Δ_i to $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;
 JMS SQ $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;
 JMS ADD Indirect $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;

3. Структурная функция неэквидистантных временных рядов:

а) неусредненные значения структурной функции: б) интервальная корреляция:

Reset R_{2i} ;	Reset R_{1i} ;	
Input Δ_i to A;	Input t_i to A;	(5.14)
Reset Rg;	Reset Counter;	
ADD Δ_i to $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;	ADD t_i to $(\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1L})$;	
JMS SQ $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;	INCR Indirect $(\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1L})$;	
JMS ADD Indirect $(\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L})$;		

4. Взаимная структурная функция неэквидистантных временных рядов:

прерывание по каналу X: прерывание по каналу Y:

а) неусредненные значения структурной функции:
 Input Δ_i to A; Input Δ_i to A;

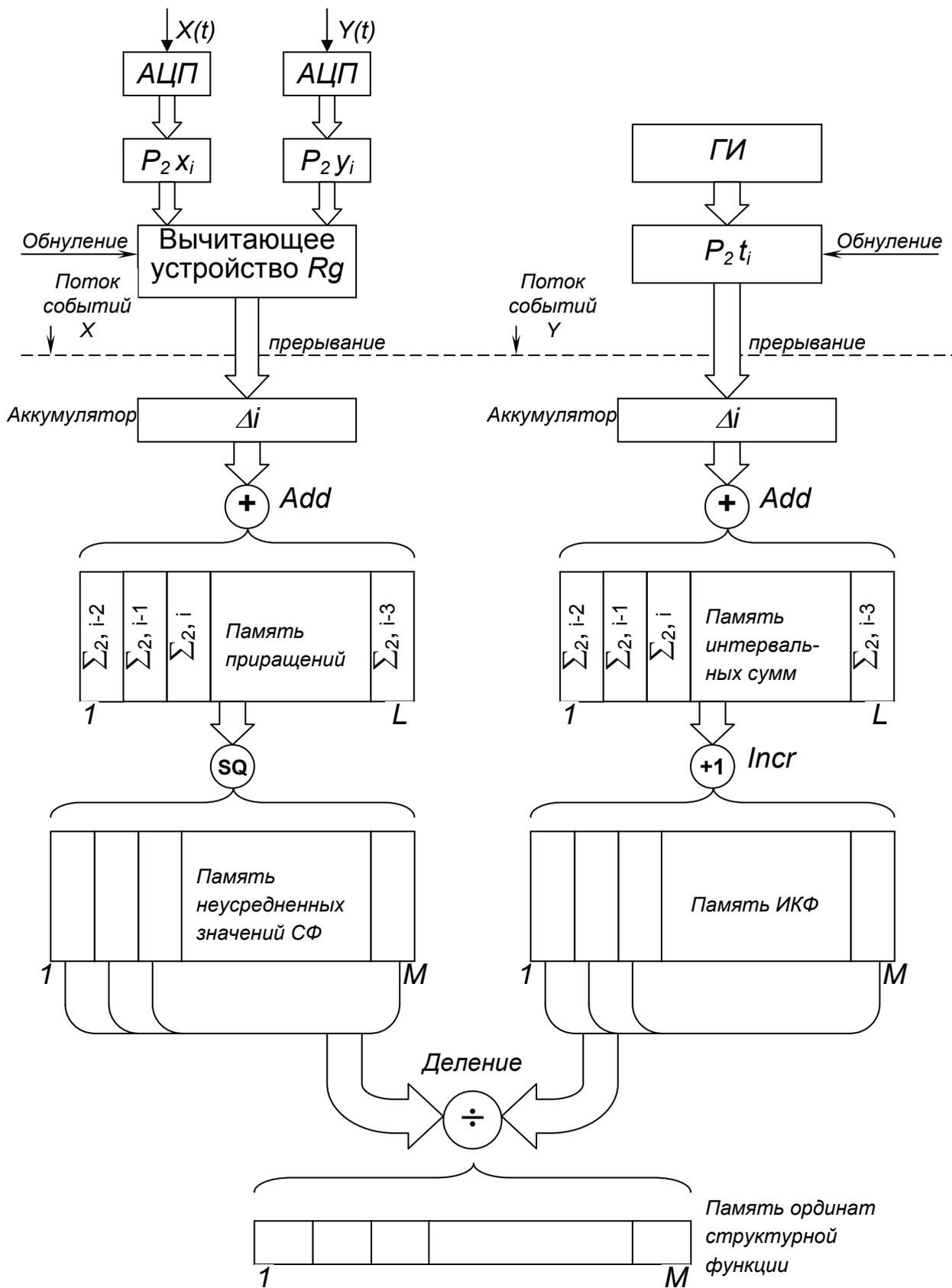


Рисунок 5.4. Структурный анализатор

Reset R _g ;	Reset R _g ;	(5.15)
ADD Δ_i to ($\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L}$);	ADD Δ_i to ($\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L}$);	
Reset R _{2i} ;	JMS SQ ($\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L}$);	
	JMS ADD Indirect ($\Sigma_{21}, \dots, \Sigma_{2L}$);	

б) интервальная корреляция:

Input t_i to A;	Input t_i to A;	
Reset Counter;	Reset Counter;	(5.16)
ADD t_i to ($\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1L}$);	ADD t_i to ($\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1L}$);	
Reset R _{1i} ;	INCR Indirect ($\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1L}$);	

где JMS SQ - обращение к подпрограмме возведения в квадрат.

5.5. Полярный коррелометр

При априори нормальном законе распределения вероятностей сигнала наиболее простой в техническом отношении и наиболее быстродействующей в пересчете на время обработки одного отсчета является система, использующая полярный алгоритм корреляционного анализа в сочетании со спорадической дискретизацией по моментам перехода сигнала через нулевой уровень. Структура ПРИС, реализующая полярный алгоритм корреляционного анализа при спорадической дискретизации случайных процессов, представлена на рис. 5.5 [108]. Блок спорадической дискретизации (БСПД) передает интервал времени Δt_i между текущими соседними отсчетами в интерфейс (ИВ) микро-ЭВМ и после «ответа» машины передает Δt_i в буферную память микро-ЭВМ. После этого ЭВМ начинает обработку прерывания. Микро-ЭВМ обнуляет ячейку рабочей памяти текущих значений интервалов с номером $j=(i) \bmod L$, где L - число каналов коррелометра, добавляет Δt_i ко всем ячейкам этой памяти в соответствии с принципом циркуляции [116]. Затем, используя принцип «мерцающей» единицы, ЭВМ начинает инкрементировать и декрементировать ячейки памяти неусредненных ординат корреляционной функции по адресам, записанным в память текущих значений интервалов. По соответствующим адресам осуществляется инкрементация ячеек памяти весовых коэффициентов.

После обработки последнего отсчета исследуемой реализации микро-ЭВМ усредняет результаты путем деления содержимого ячеек памяти неусредненных ординат корреляционной функции на содержимое соответствующих ячеек памяти весовых коэффициентов. После синусного преобразования полученных результатов в памяти ординат КФ получаем значения ординат нормированной КФ, вывод которых возможен на одно из стандартных периферийных устройств.

5.6. Программное обеспечение процессорных статистических анализаторов

Для реализации ПРИС необходимо решить следующие задачи:

1. выбрать и обосновать тип ЭВМ;

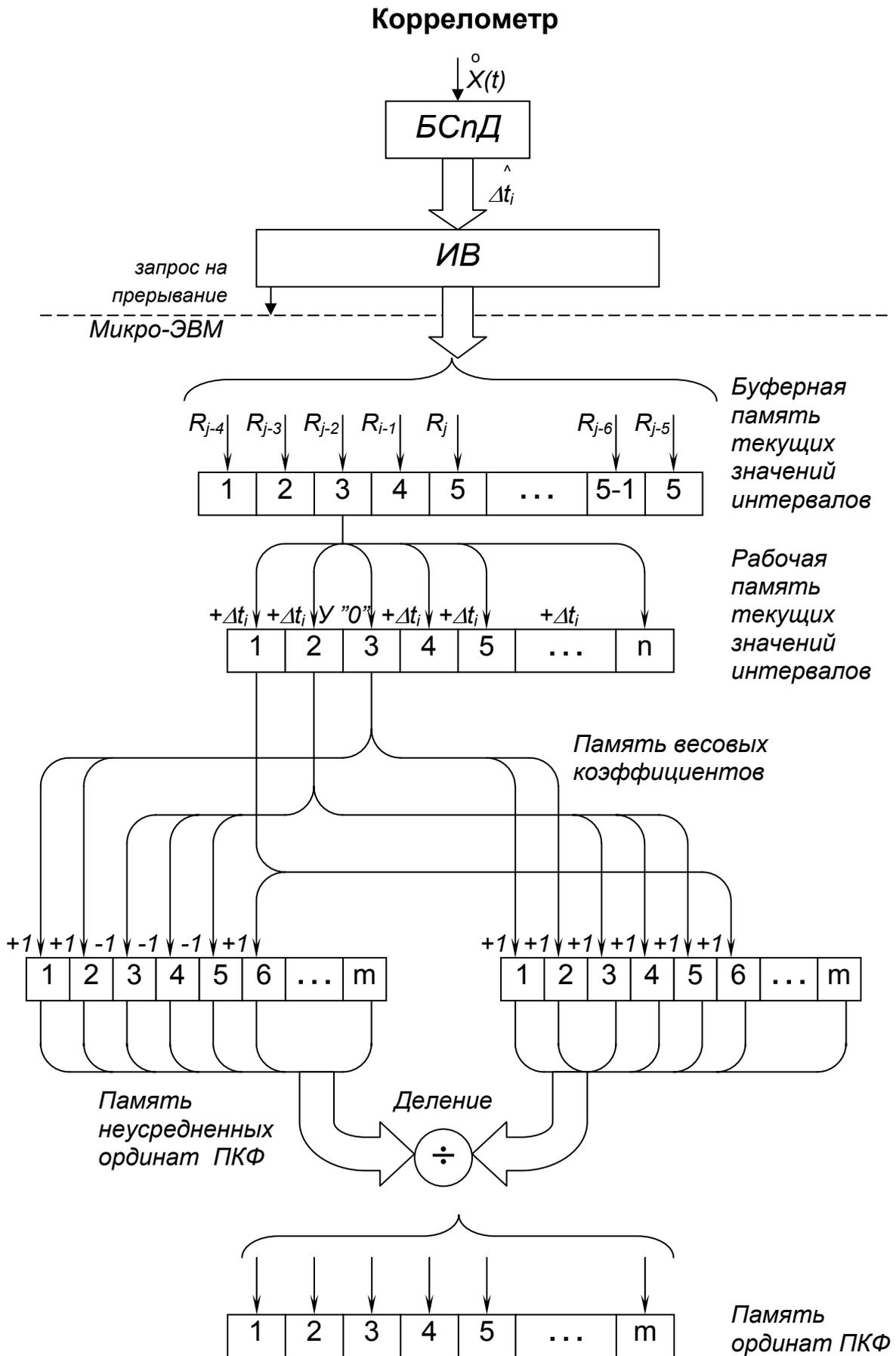


Рисунок 5.5. Полярный коррелометр

2. разработать нестандартные блоки.
3. выбрать и обосновать интерфейс;
4. разработать программное обеспечение;
5. рассчитать параметры ПРИС.

Из них решение 2,4,5 задач определяется спецификой представления неэквидистантных временных рядов. Причем, разработка программного обеспечения является самым трудоемким этапом [72, 73, 129]. Структура пакета прикладных программ для измерения значений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов приведена на рис. 5.6. Здесь введены следующие обозначения:

- СРВ – система реального времени;
- СЗОИ – система с задержкой в обработке информации.

Пакет прикладных программ включает как программы обработки прерываний [108], так и вспомогательные программы, необходимые для первичной [108] и вторичной статистической обработок [107]. Обобщенная блок-схема программы измерения (см. рис. 5.7), работающей в реальном масштабе времени, состоит из управляющей программы и программы обработки прерывания в соответствии с алгоритмом измерения (см. раздел 2).

Управляющая программа состоит из блоков:

- задания параметров ПРИС;
- подготовки и обнуления требуемых зон памяти;
- окончательной обработки: усреднения, функциональных преобразований;
- вывода результатов.

Блок задания параметров ПРИС обеспечивает диалог ПРИС с оператором, обеспечивающий оперативное изменение параметров в зависимости от изменения статистических характеристик исследуемого сигнала и требований к средству измерения.

Блок подготовки и обнуления требуемых зон памяти подготавливает узлы ЭВМ к работе, делает необходимые присвоения, устанавливает счетчики циклов, определяет требуемые области памяти машины, обнуляет предназначенные для хранения промежуточных результатов области ОЗУ:

- памяти текущих значений интервалов времени;
- памяти неусредненных ординат измеряемых характеристик;
- памяти весовых характеристик (неусредненных значений интервальной корреляционной функции для АИИКФ);
- памяти ординат измеряемой характеристики.

С момента прихода сигнала запроса на прерывание в интерфейс машины ЭВМ начинается обработка прерываний по программе, занесенной в ОЗУ. Микро-ЭВМ может обрабатывать поступающую информацию в двух режимах: с предварительной записью ее в ОЗУ (с буферизацией) и в темпе ее поступления (в реальном масштабе времени).

После обработки последнего отсчета исследуемого процесса микро-ЭВМ приступает к программе окончательной обработки. Эта программа выполняет усреднение полученных результатов, нелинейные преобразования и вывод результата.

На этом цикл ПРИС заканчивается и оно подготовлено для следующего эксперимента.

Структура пакета прикладных программ для измерения значений вероятностных характеристик случайных процессов с неравномерным интервалом дискретизации

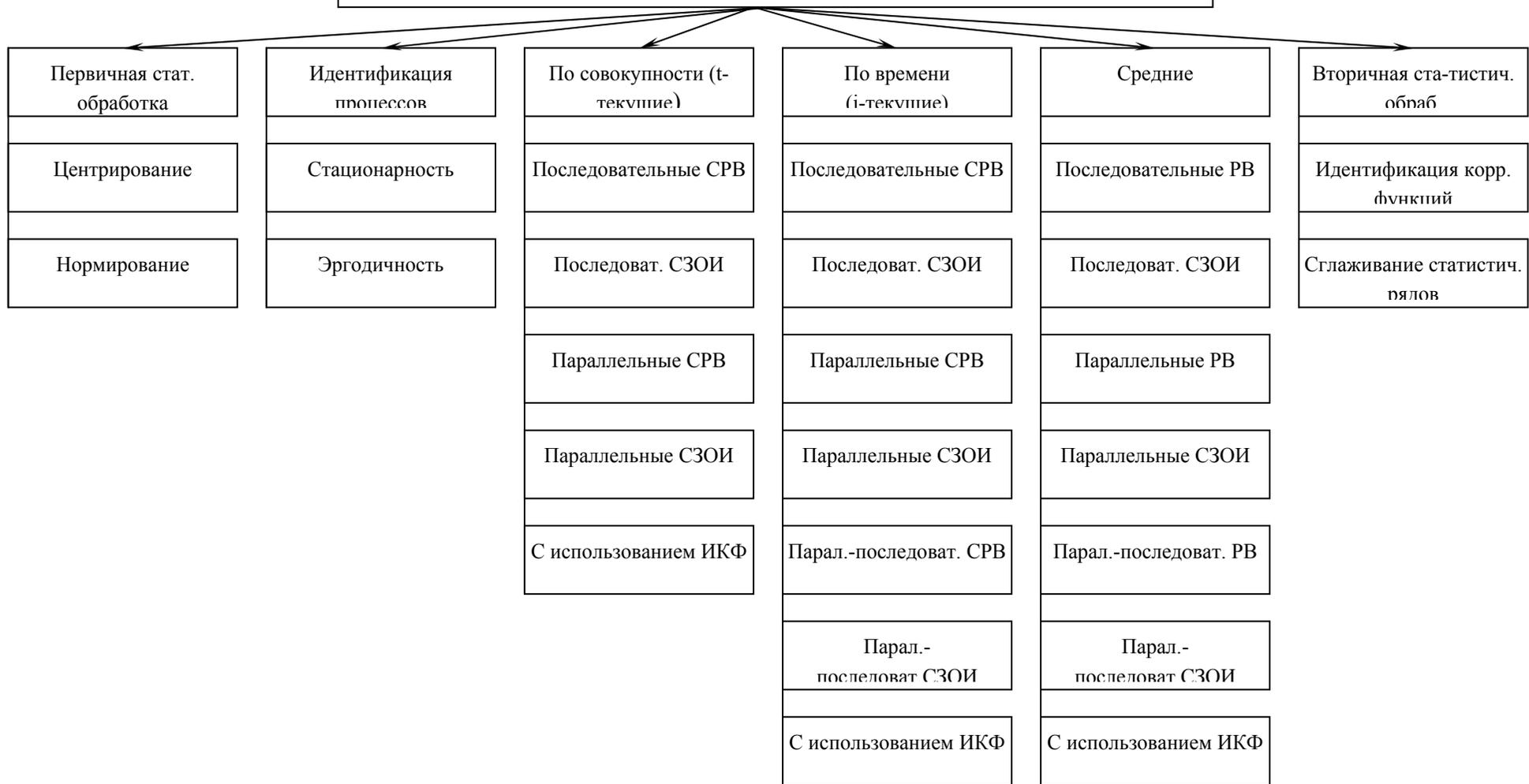


Рисунок 5.6. Структура пакета прикладных программ



Рисунок 5.7. Блок-схема программы измерения

5.7. Обобщенная методика инженерного расчета статистических анализаторов

Окончательным этапом проектирования является расчет параметров специализированного или ПРИС, исходной информацией для которого является:

- вид закона распределения входного процесса;
- класс корреляционных функций входного процесса;
- эквивалентная ширина спектра мощности или диапазон изменения $\tau_{k\max}$;
- показатель колебательности корреляционной функции процесса μ ;
- допустимые погрешности оценки вероятностной характеристики.

Параметры, подлежащие расчету, зависят от вида оцениваемой характеристики и определяются из алгоритмов, представленных в разделе 2. Порядок расчета в силу аппаратно-программного дуализма на зависит от выбранного способа реализации: специализированное или ПРИС, и содержит следующие этапы:

1. По допустимой погрешности оценки функциональной характеристики определяется допустимая величина уставки ε (в случае непреднамеренной неравномерной дискретизации случайного процесса этот этап опускается).

2. Определяется минимальный интервал дискретизации:

$$\Delta t_{\min} = \min \{ \Delta t_i \}_{i=1}^M;$$

3. Определяется интенсивность потока $\lambda = m_{\Delta}$

4. Определяется ширина дифференциального коридора Δ , обеспечивающего допустимые погрешности неадекватности алгоритма.

5. Определяется число ординат функциональной характеристики:

- $J_{\max} = \text{ent} \left[\frac{\tau_{k\max}}{\Delta} \right] + 1$ - для корреляционной функции;

- $J_{\max} = \text{ent} \left[\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta} \right] + 1$ - для законов распределения;

6. Определяется число каналов анализатора L .

7. Определяется эквивалентный объем выборки при заданной длине реализации исследуемого процесса, например: для аддитивной случайной дискретизации

$$N_{\text{э}} = \left\{ \text{ent} \left[\frac{T}{\Delta t_{\min}} \right] + 1 \right\} \lambda \Delta = N \lambda \Delta; \quad (5.17)$$

8. Определяется объем памяти (количество регистров) для хранения промежуточных результатов:

- текущих значений, промежуточных преобразований, интервальных сумм - L ;
- ординат функциональной характеристики и весовых коэффициентов - J_{\max} .

9. Определяются разрядности:

- АЦП - ≥ 6 ;
- ИКФ - $\text{ent} [\log N_{\text{э}}] + 1$;
- неусредненных значений функциональной характеристики:
 $\text{ent} [\log_2 N_{\text{э}} \sigma_{x\max}^2]$.

6. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

6.1. Основные понятия и определения

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\xi_i = f(\epsilon_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости у от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [33].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\xi_i - \varphi_j(\epsilon_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (6.1)$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-l$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [33].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-l}. \quad (6.2)$$

Под числом связей l понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [60], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

решив которую с помощью того или иного численного метода найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. 6.1.

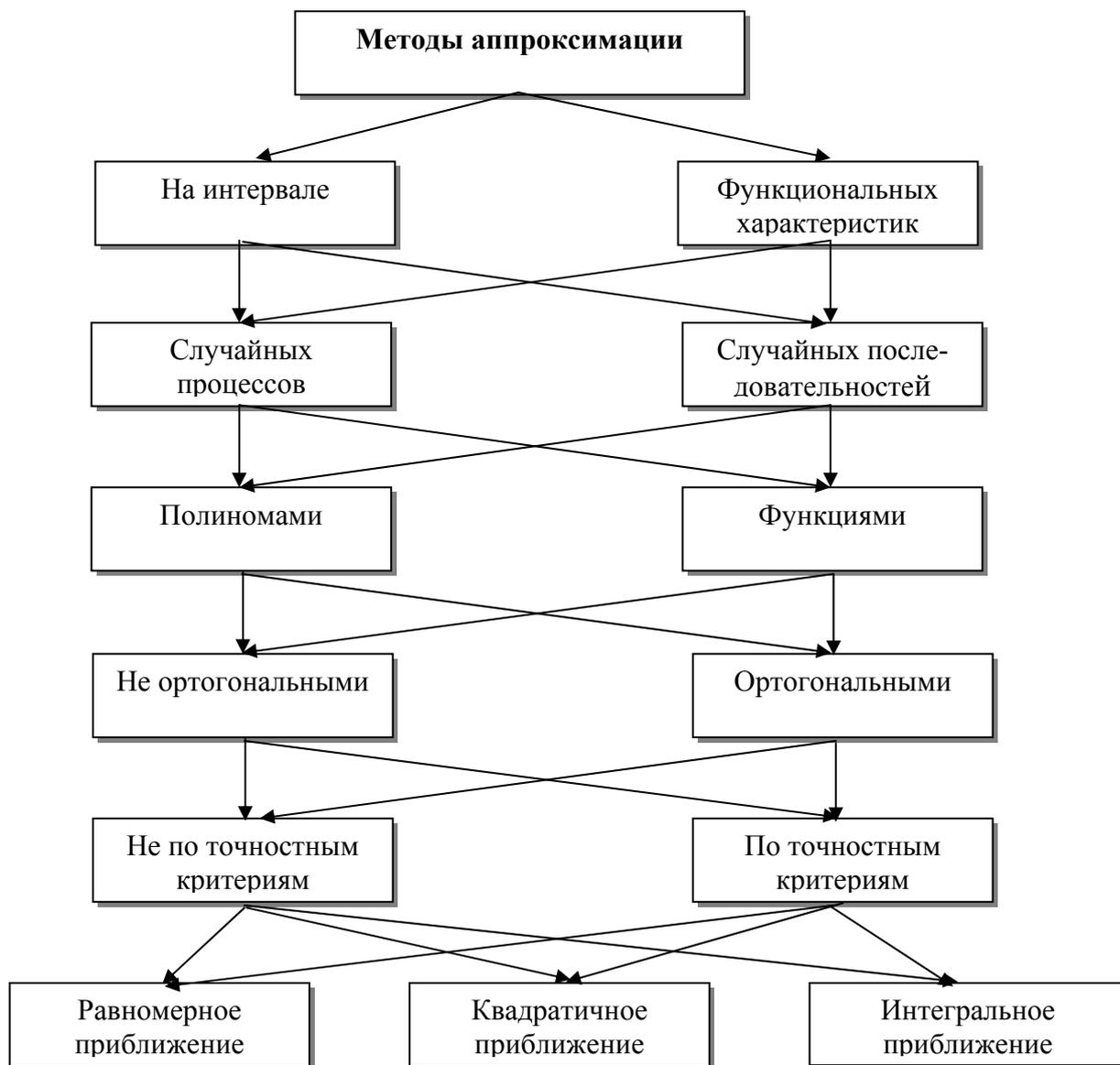


Рисунок 6.1. Классификация методов аппроксимации случайных процессов и последовательностей

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращения объема хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;

5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;

6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;

7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);

8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные).

9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализируются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. 6.2.).

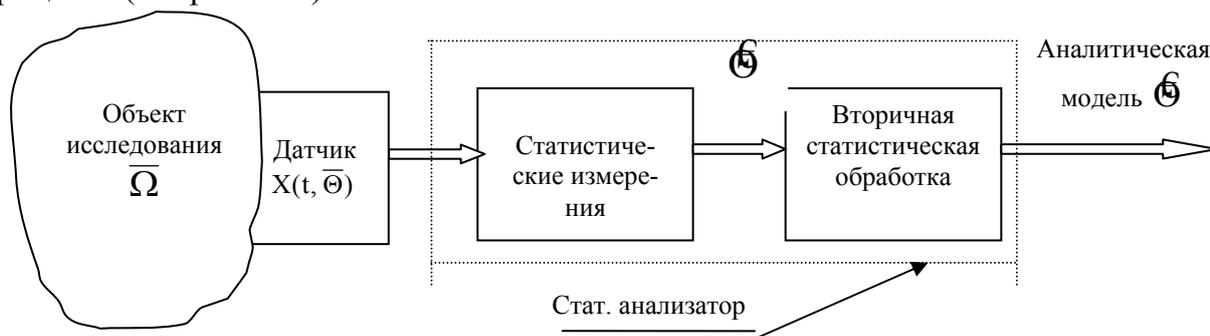


Рисунок 6.2. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Под статистической обработкой с аппроксимацией будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации.

6.2. Аппроксимация законов распределения

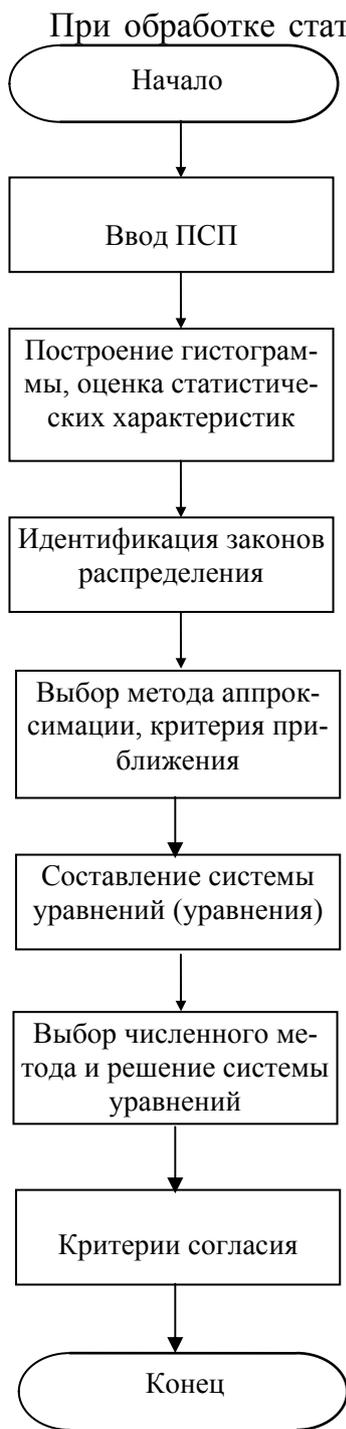


Рисунок 6.3. Блок-схема сглаживания

Последовательность этапов решения задачи сглаживания представлена на рис. 6.3.

После ввода исходных данных (ПСП) первым шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_{ji}\}_{j=N}^{i=1, \dots, Mj}$. Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. Определить диапазон изменения статистического ряда $x_{\min} - x_{\max}$.
2. При неизвестном законе распределения определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M}, \quad (6.4)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [].

Из выражения (6.4) следует, что значение величины M не определено и, следовательно, исследователь должен задать её самостоятельно, ориентируясь на рекомендации специалистов. Как следует из литературных источников, значение M рекомендуется выбирать в диапазоне от 10 до 20 [33].

При известном или предполагаемом законе распределения при линейной интерполяции функции распределения величина Δx определяется выражением:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{8\delta}{|F''(x)|_{\max}}}, \quad (6.5)$$

где δ - погрешность аппроксимации функции рас-

пределения;

$|F''(x)|_{\max}$ - максимум модуля второй производной функции распределения.

В приложении 1 для типовых законов приведены результаты определения $|F''(x)|_{\max}$ и Δx , воспользовавшись которыми необходимо определить:

$$M = \text{ent} \left[\frac{X_{\max} - X_{\min}}{\Delta x} \right]. \quad (6.6)$$

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в J-ый дифференциальный коридор:

$$\hat{p}_{jJ} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{jiJ}, \quad (6.7)$$

$$\text{где } \delta_{jiJ} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{X_{ji} - X_{\min}}{\Delta x} \right] + 1 = J \wedge X_{ji} = X_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } X_{ji} = J \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6.8)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{ji, J+1} = 1/2$, если $X_{ji} = J\Delta x \wedge X_{ji} \neq X_{\max}$, т.е. в этом случае в J и J+1 коридоры добавляется по 1/2.

4. Если частота попадания в какой-либо k-ый дифференциальный коридор мала ($p_j < 0,01 \div 0,02$), для уменьшения влияния случайности его объединяют с k+1 коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 6.1), где $\hat{f}_j = f_j / \Delta x_j$.

Статистический ряд

Таблица 6.1

f_j	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
\hat{f}_j	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

На рис.6.4 - 6.5 для разного количества дифференциальных коридоров приве



Рисунок 6.4.

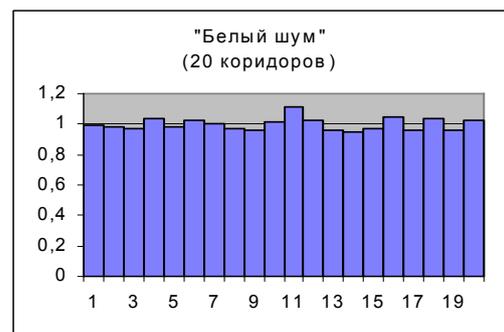


Рисунок 6.5.

дены гистограммы случайной величины, распределённой по равномерному закону в диапазоне $[0,1]$, называемой «белым шумом», сгенерированной с помощью стандартной программы на ЭВМ ($N=10000$). Гистограмма, представленная на рис. 6.4, соответствует таблице 6.1.

Построив гистограмму, можно приступить к задаче идентификации, заключающейся в подборе кривой распределения $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с неизвестными параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение.

Решение этой задачи возможно различными методами, например: по совпадению моментов [33], с использованием фазовых портретов [107] и т. д. (см. подраздел 6.3).

После выбора аналитического выражения с неизвестными параметрами, приступают к решению задачи аппроксимации в соответствии с выбранным критерием приближения.

Классификация методов аппроксимации законов распределения, предложенная на основании общей классификации методов аппроксимации (см. рис. 6.3) и анализа литературных источников, представлена на рис.6.6.



Рисунок 6.6. Классификация методов аппроксимации законов распределения

Следует при этом иметь в виду, что, независимо от метода, аналитические функции $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ или $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, с помощью которых происходит ап-

проксимация статистического распределения, должна удовлетворять основным свойствам законов распределения:

$$\begin{cases} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \geq 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \leq 1; \\ F'_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) > 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Вопросы аппроксимации законов распределения различными методами рассмотрены в подразделах 6.2.4-6.2.5.

Заключительным шагом решения задачи сглаживания статистических рядов является проверка качества аппроксимации с использованием критериев согласия. Если получено удовлетворительное решение задачи, то процесс сглаживания завершен. Если нет, необходимо повторить все этапы, начиная с идентификации.

Для возможности анализа различных методов сглаживания рассмотрим критерии согласия.

6.2.1. Критерии согласия

Предположим, что, исходя из вида гистограммы и теоретических предпосылок, выбрана функция $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с неизвестными параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Требуется подобрать эти параметры так, чтобы функция $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ наилучшим образом описывала данный статистический материал в рамках принятого критерия.

Как бы хорошо ни была подобрана функция $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, между ней и статистическим распределением неизбежны расхождения. Для ответа на вопрос, связаны ли эти расхождения с ограниченным числом наблюдений, или они связаны с неправильным выбором $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, служат «критерии согласия».

Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу H , состоящую в том, что случайная величина X подчиняется некоторому закону распределения. Введем некоторую случайную величину U , являющуюся некоторой мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины $f_u(u)$ зависит как от закона распределения случайной величины X , так и от числа опытов N . Если гипотеза H верна, то $f_u(u)$ определяется законом распределения $f_a(x)$ и числом опытов N .

Вычислим вероятность события $P(u \leq U) = P_d$. Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе H .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U_j = \sum_{j=1}^M c_{jJ} \left(\hat{p}_{jJ} - p_{jJ} \right)^2, \quad (6.10)$$

где- c_{jJ} – веса;

$\hat{p}_{jJ} = F_a(x_{j,J+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_{jJ}, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – теоретические вероятности, соответствующие \hat{p}_{jJ} .

Коэффициенты c_{jJ} вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность p_{jJ} велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить $c_{jJ} = N/p_{jJ}$, то при большом N $f_u(u)$ не зависит от $f_x(x)$ и N , а зависит только от числа разрядов M . Этот закон при увеличении N приближается к закону χ^2 с r степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [33]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ - гамма-функция [53]. (6.12)

В этом случае мера расхождения обозначается χ^2 и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{J=1}^M \frac{\left(\hat{p}_{jJ} - p_{jJ}\right)^2}{p_{jJ}}. \quad (6.13)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (6.13) представляют в виде

$$\chi^2_{jJ} = \sum_{J=1}^M \frac{\left(n_{jJ} - N p_{jJ}\right)^2}{N p_{jJ}}, \quad (6.14)$$

где n_{jJ} - число попаданий x в J -ый дифференциальный коридор.

Распределение χ^2 зависит от параметра r , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно $r=M-k$, где k – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы (см. приложение 4) [33]. Пользуясь ими, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность того, что величина, распределенная по закону χ^2 , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его. В противном случае, для описания статистических данных следует искать более подходящее аналитическое выражение.

Схема применения критерия сводится к следующему:

1. определяется мера расхождения χ^2 по формуле (6.13) или (6.14);
2. определяется число степеней свободы $r=M-k$;

3. по r и χ^2 по таблице П.4. определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с r степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;

4. если вероятность P_d велика, то гипотеза H принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу H . Если вероятность P_d велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза H не противоречит опытным данным [33].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [33].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| \hat{F}_x(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (6.15)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения δ ;
- при неограниченном числе испытаний N вероятность неравенства

$\delta \sqrt{N} \geq \lambda$ стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (6.16)$$

Значения $P(\lambda)$, подсчитанные по формуле (6.14), приведены в приложении в таблице П.5.

Схема применения этого критерия сводится к следующему:

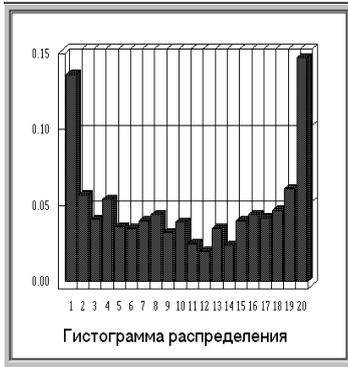
1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется δ ;
3. вычисляется $\lambda = \delta \sqrt{N}$;
4. по таблице П.5. определяется $P(\lambda)$;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости P_d
6. $\lambda < \lambda_{1-P_d}$ (6.17)

7. Если вероятность P_d мала, гипотезу H следует отвергнуть. При сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными данными.

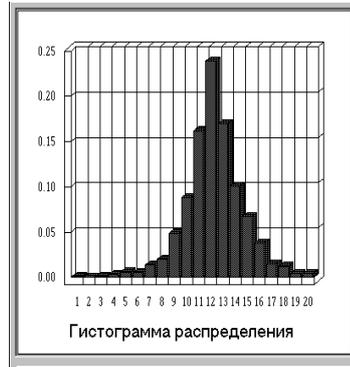
Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения [110], расчете параметров функций распределения [107]. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение $P(\lambda)$, и мы рискуем принять неправильную гипотезу.

6.2.2. Идентификация законов распределения

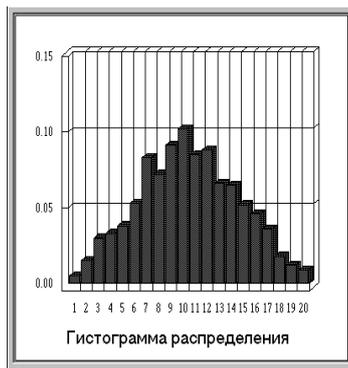
Выбор подходящего аналитического выражения с неизвестными параметрами, подлежащими определению в соответствии с выбранным критерием приближения является самым сложным этапом процедуры сглаживания. Это объясняется тем, что задача плохо формализована, всегда существует опасность, что рассмотрены не все возможные варианты законов распределения, решение необходимо принимать по ограниченному набору входных данных и. т. д.



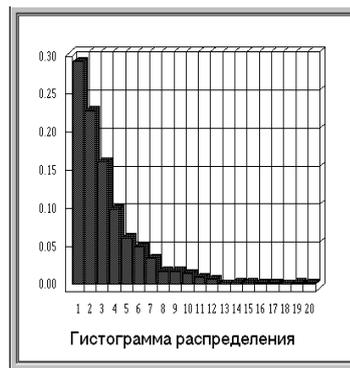
Закон арксинуса



Лапласа



Закон Симпсона



Экспоненциальный

Рисунок 6.7. Гистограммы типовых распределений

судят по совпадению значений статистических и теоретических числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты k -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор.

- Начальным моментом k -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (6.18)$$

где $M[]$ - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

- $\alpha_1 = M[x] = m_x$ - математическое ожидание, характеризующие среднее значение оцениваемой случайной величины;

- $\alpha_2 = M[x^2]$ - определяющий мощность случайной величины.

На практике задачу идентификации решают на основе анализа:

1. гистограммы и её соответствия кривой теоретического распределения;

2. числовых характеристик и их соответствия значениям теоретических числовых характеристик;

3. фазовых портретов (структурных функций).

При большом числе экспериментальных данных в ряде случаев по виду гистограммы можно высказать предположение о виде закона распределения. На рис. 6.7 в качестве примера приведены гистограммы случайных процессов ($N=1000$), которые с большой долей уверенности можно отнести к тому или иному закону распределения.

При ограниченном наборе данных о законе распределения

- Центральные моменты k-го порядка определяются в виде:

$$\mu_k = M[x^k], \quad (6.19)$$

где $\overset{\circ}{x} = x - m_x$ - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

$\mu_2 = M[\overset{\circ}{x}^2] = \sigma_x^2$ - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

$\mu_3 = M[\overset{\circ}{x}^3]$ - характеризует симметричность закона распределения. Для устранения зависимости μ_3 от дисперсии вводят коэффициент асимметрии:

$$K_a = \mu_3 / \sigma_x^3;$$

$\mu_4 = M[\overset{\circ}{x}^4]$ - характеризует островершинность закона распределения. В качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого $\mu_4 = 3\sigma^4$. Для удобства сравнения ввели понятие коэффициент эксцесса:

$$K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3.$$

- Мода - M_0 - наиболее вероятное значение случайной величины x , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0 \quad (6.20)$$

- Медиана - Me - определяется из уравнения

$$P\{x < Me\} = 0,5 \quad (6.22)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

- Коэффициент вариации - $\chi = \sigma_x / m_x$ - применяется при метрологическом анализе результатов измерения.

- Коэффициент формы -

$K_\phi = M[|\overset{\circ}{x}|] / \sigma_x$ - характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценке релейной корреляционной функции (см. раздел 3).

- Пикфактор - $\eta = |x_{\max}| / \sigma_x$ - применяется при оценке динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении в таблице П.1.

На рис. 6.8 в качестве примера приведены результаты определения

Выберите закон распределения :	
Арсинуса	
Параметры закона распределения :	
a : 2	
Начальные моменты :	
Статистические :	Теоретические :
$\alpha_1 = 0,07412$	$\alpha_1 = 0,000$
$\alpha_2 = 2,05834$	
$\alpha_3 = 0,16388$	
$\alpha_4 = 6,17581$	
Центральные моменты :	
Статистические :	Теоретические :
$\mu_2 = 2,05284$	$\mu_2 = 2,000$
$\mu_3 = -0,29300$	$\mu_3 = 0,000$
$\mu_4 = 6,19497$	$\mu_4 = 6,000$
Прочие характеристики :	
Статистические :	Теоретические :
$K_a = -0,09962$	$K_a = 0,000$
$K_\varepsilon = -1,52996$	$K_\varepsilon = -1,500$
$K_\phi = 0,90690$	
$\chi = 1,39589$	
$\eta = 19,33030$	
$\sigma = 1,43277$	

Рисунок 6.8. Сравнительный анализ числовых характеристик случайной величины

числовых характеристик случайного процесса, сгенерированных на ЭВМ ($N=1000$).

Сравнение теоретических и статистических числовых характеристик позволяет предположить, что случайный процесс распределен по закону арксинуса.

Однако более наглядным способом идентификации является идентификация, основанная на анализе фазовых портретов законов распределения. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $f_x(x)$ и $f'_x(x)$. На рисунке 6.9 в качестве примера приведены фазовые портреты типовых законов распределения.

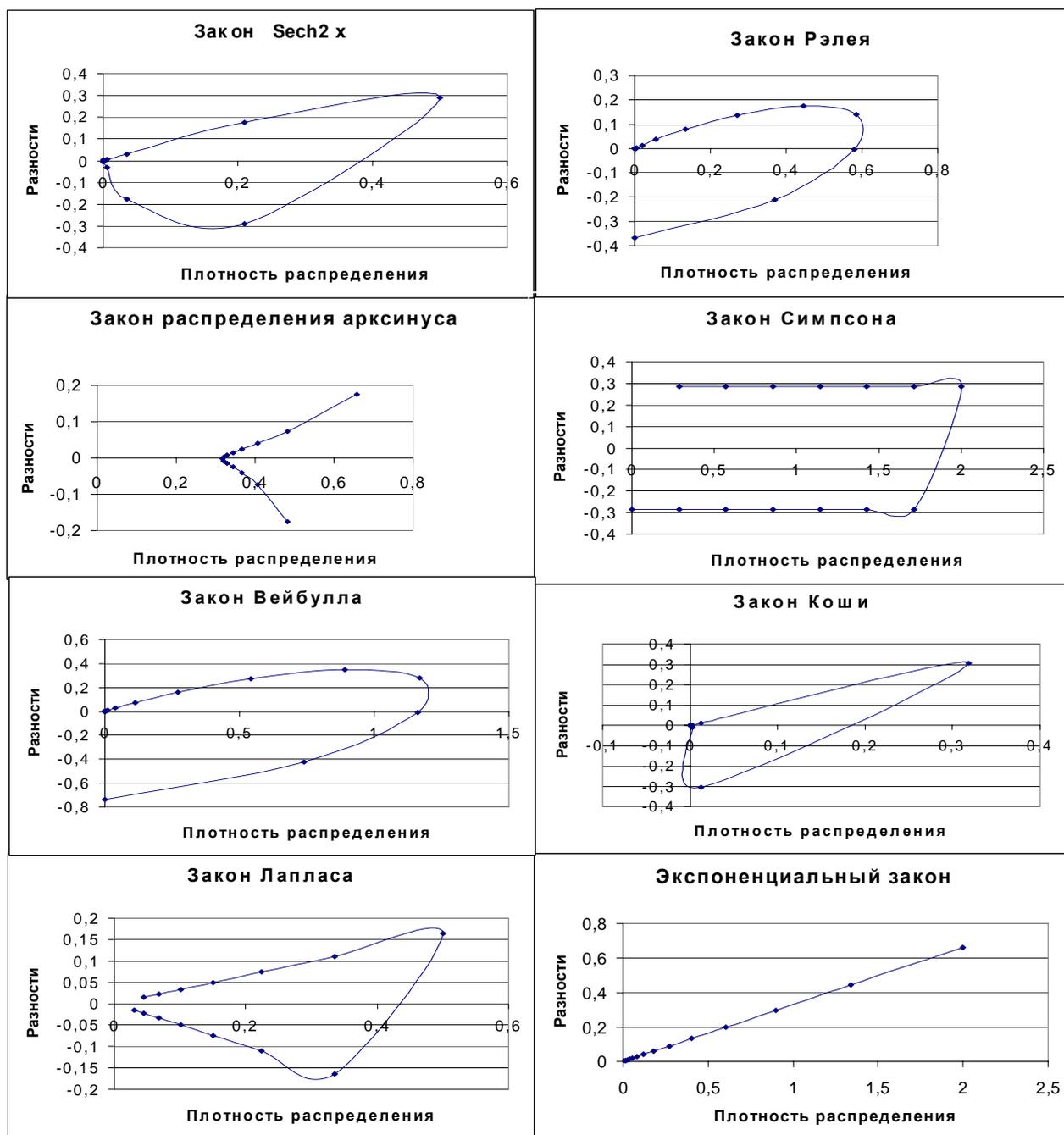
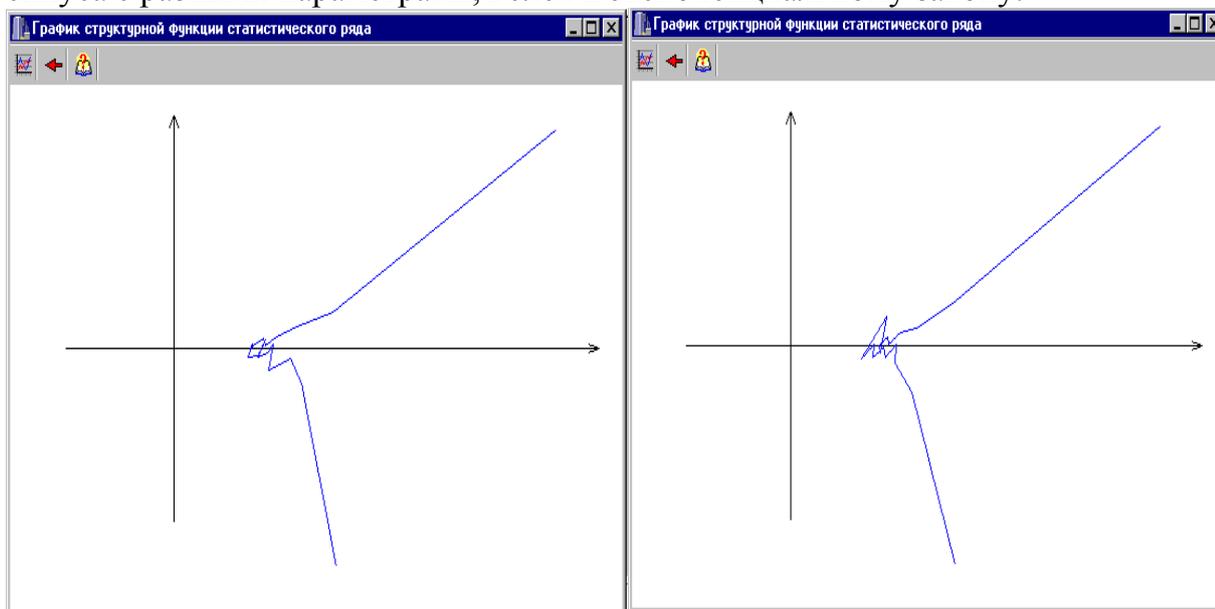


Рисунок 6.9. Фазовые портреты законов распределения

Следует отметить, что каждому закону распределения соответствует свой, уникальный фазовый протрет, не зависящий от значений параметров закона распределения. Заметим, что при расчете координат фазового портрета вместо точного значения

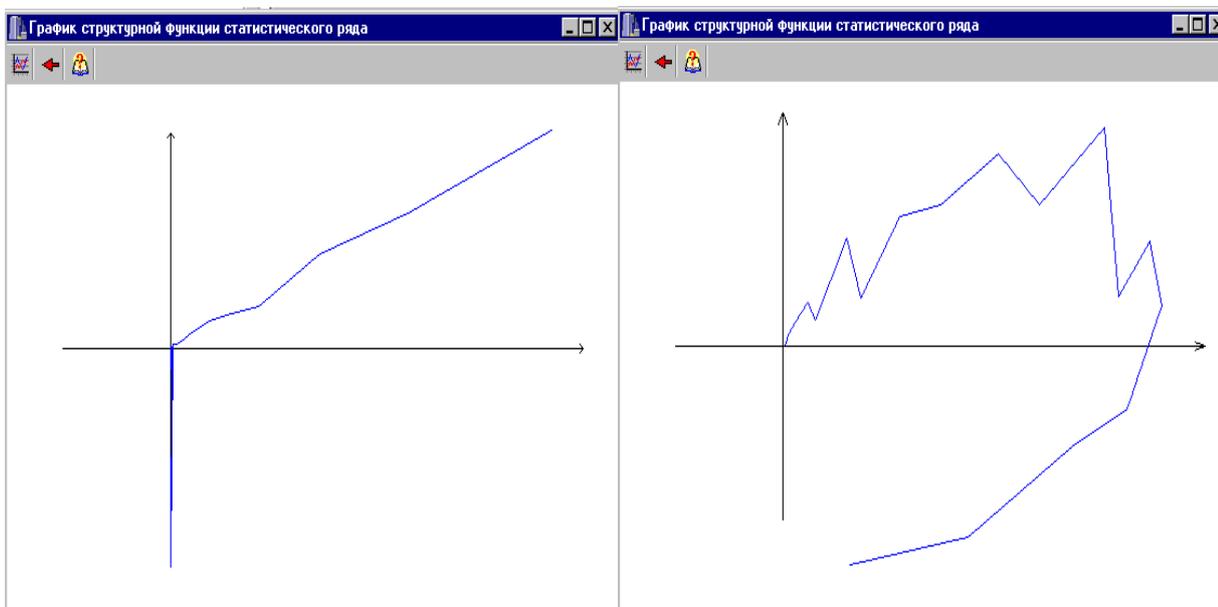
производной плотности распределения вероятностей определялось приращение плотности на заданном интервале..

В силу случайного характера исследуемых случайных величин фазовые портреты, построенные по экспериментальным данным, безусловно, будут отличаться от теоретических. Но эти отличия, тем не менее, позволяют идентифицировать случайные процессы по типу законов распределения. Ниже приведены фазовые портреты для случайного процесса, сгенерированного на ЭВМ по законам распределения арксинуса с разными параметрами, Рэля и экспоненциальному закону.



а) закона арксинуса $-a=5$

б) закона арксинуса- $a=8$



а) экспоненциальное распределение- $\lambda=1$

б) распределение Рэля- $\sigma=1$

Рисунок 6.10. Фазовые портреты

Построив фазовый портрет по параметрам гистограммы, необходимо сравнить его с теоретическими фазовыми портретами и выбрать подходящий, т.е. выбрать соответствующий закон распределения. После этого необходимо перейти к определению параметров выбранного аналитического выражения.

6.2.3. Метод моментов

Один из методов, применяемый для решения задачи сглаживания статистических рядов, называется методом моментов [33]. Согласно этому методу, параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. Выражения для определения числовых характеристик типовых законов распределения приведены в приложении П.1. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Определим параметры аналитического выражения плотности распределения вероятностей генератора «белого шума» - стандартной программы ПЭВМ. Теоретически закон распределения должен быть равномерным $f_x(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$ с параметрами $a=0$ и $b=1$.

Гистограмма приведена на рис. 6.4, а данные для расчётов в таблице 6.1. Уравнения для определения двух неизвестных параметров распределения могут быть составлены различными способами. Потребуем, например, чтобы у статистического и теоретического распределений совпадали математическое ожидание и дисперсия:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_x = \frac{a+b}{2}; \\ \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Отметим, что оценка начальных моментов статистического ряда определяется выражением:

$$\mu_k = \sum_{j=1}^M \bar{x}_j^k \cdot f_j, \quad (6.23)$$

где \bar{x}_j - среднее значение j интервала,

а центральных -

$$\mu_k = \sum_{s=0}^k C_k^s \mu_{k-s} \sigma_x^s. \quad (6.24)$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} a = \mu_x - \sqrt{3} \sigma_x; \\ b = \mu_x + \sqrt{3} \sigma_x. \end{cases} \quad (6.25)$$

Для данного статистического распределения

$$\begin{cases} \bar{\mu}_x = 0,49994; \\ \sigma_x^2 = 0,082208; \\ \sigma_x = 0,286719. \end{cases}$$

Подставив найденные оценки в выражения (6.25), получим: $a=0,003327$, $b=0,996553$. Отсюда видно, что рассчитанные параметры закона распределения незначительно, но отличаются от заданного при генерировании. Следовательно, при

проведении статистического моделирования целесообразно проверять качество программных генераторов и оценивать его реальные характеристики.

Применив критерий Пирсона, вычислим по формуле (1.10) значение $\chi^2 = 7,77$, что соответствует вероятности $P_d > 0,3$ (см. таблицу П.4). Таким образом, можно принять гипотезу о том, что данный статистический ряд соответствует равномерному распределению с найденными параметрами.

Преимуществом метода моментов является простота определения параметров распределения, недостатком - неоднозначность в выборе уравнений, которых может быть большое количество.

Анализ результатов показывает, что при составлении уравнений для определения параметров теоретического распределения по методу моментов необходимо выбирать моменты более низких параметров.

Приведем аналитические решения систем уравнений для типовых законов распределений (см. таблицу 6.2)

Системы уравнений для типовых законов распределений

Таблица 6.2

№	Название	Функции распределения	Системы уравнений
1	Арксинуса	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, (-a < x < a) \\ 1, (a < x < \infty) \end{cases}$	$a = \sqrt{2} \sigma_x$
2	Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, (-\infty < x < \mu) \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, (\mu < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} \\ \mu = m_x \end{cases}$
3	Симпсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a) \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \left(a < x < \frac{a+b}{2} \right) \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, \left(\frac{a+b}{2} < x < b \right) \\ 1, (b < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} a = m_x - \sqrt{6} \sigma_x \\ b = m_x + \sqrt{6} \sigma_x \end{cases}$
4	Sech ²	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3} \sigma_x}$
5	Рэля	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\sigma = \frac{m_x}{1,25}$
6	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0 < (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\alpha = \frac{1}{m_x}$

На рис. 6.11 представлены результаты аппроксимации плотности распределения вероятностей для закона Рэлея при $N=300$, $M=10$, $\sigma=1,00084$.

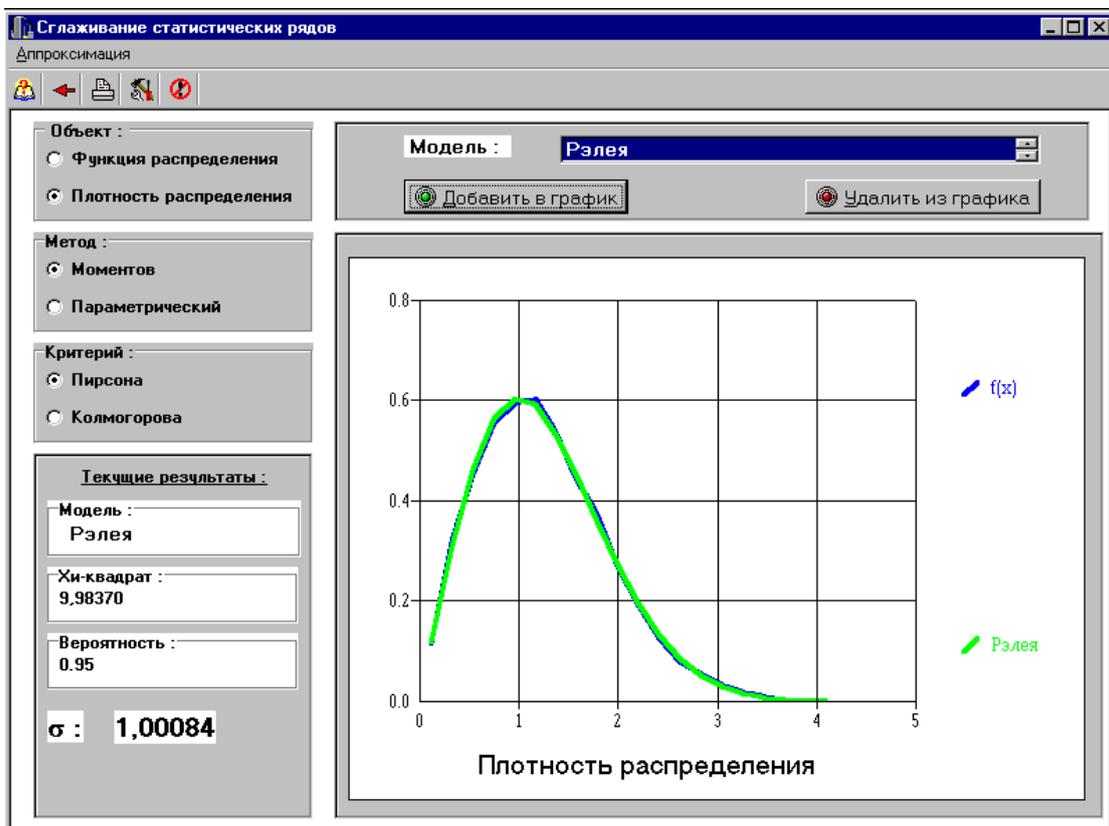
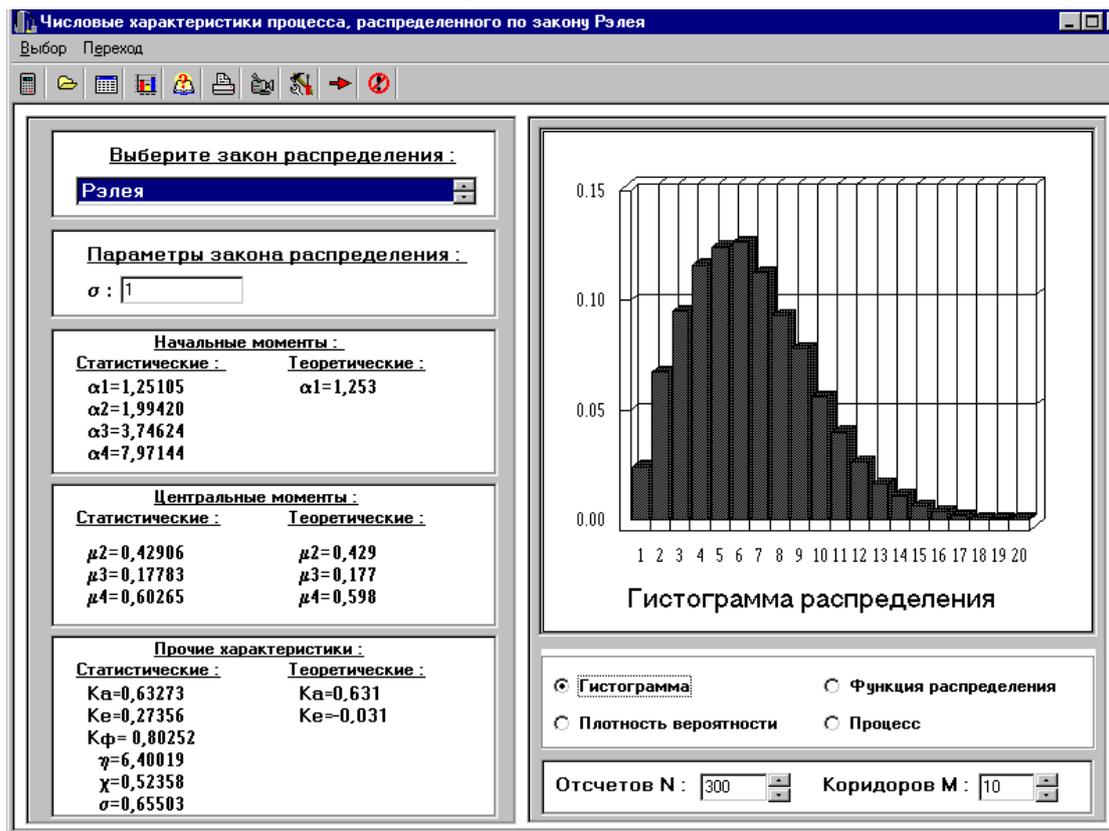


Рисунок 6.11. Определения параметров Рэлея методом моментов

6.2.4. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями

Другим способом решения задачи сглаживания статистических рядов является определение параметров аналитического выражения, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta_j = \sum_{J=1}^M \left[\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) - f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (6.26)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) = \hat{p}_{jJ} / \Delta_{jJ}$ - значение плотности распределения вероятностей в середине

j -го дифференциального коридора \bar{x}_{jJ} ;

$f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами.

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{J=1}^M \left[\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) - f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{J=1}^M \left[\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) - f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Сложность этой системы зависит от вида аналитического выражения и числа неизвестных параметров, подлежащих определению. Как правило, решение этой системы возможно лишь приближенными методами.

Так, например, при однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона [60], неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{J=1}^M \left[\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) - f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_n) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ \left[\hat{f}_x(\bar{x}_{jJ}) - f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta_n) \right] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_{jJ}, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}}. \quad (6.28)$$

В качестве начального приближения можно выбрать значение параметра, определенное по методу моментов.

Алгоритм завершает свою работу, когда выполняется следующее условие:

$$|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \varepsilon, \quad (6.29)$$

где ε - погрешность вычисления параметра, задаваемая исследователем.

Приведем пример расчета по методу Ньютона параметра аппроксимации плотности распределения вероятностей экспоненциального закона распределения.

На рис. 6.12 последовательно приведены результаты определения параметра экспоненциального распределения рассматриваемым способом.

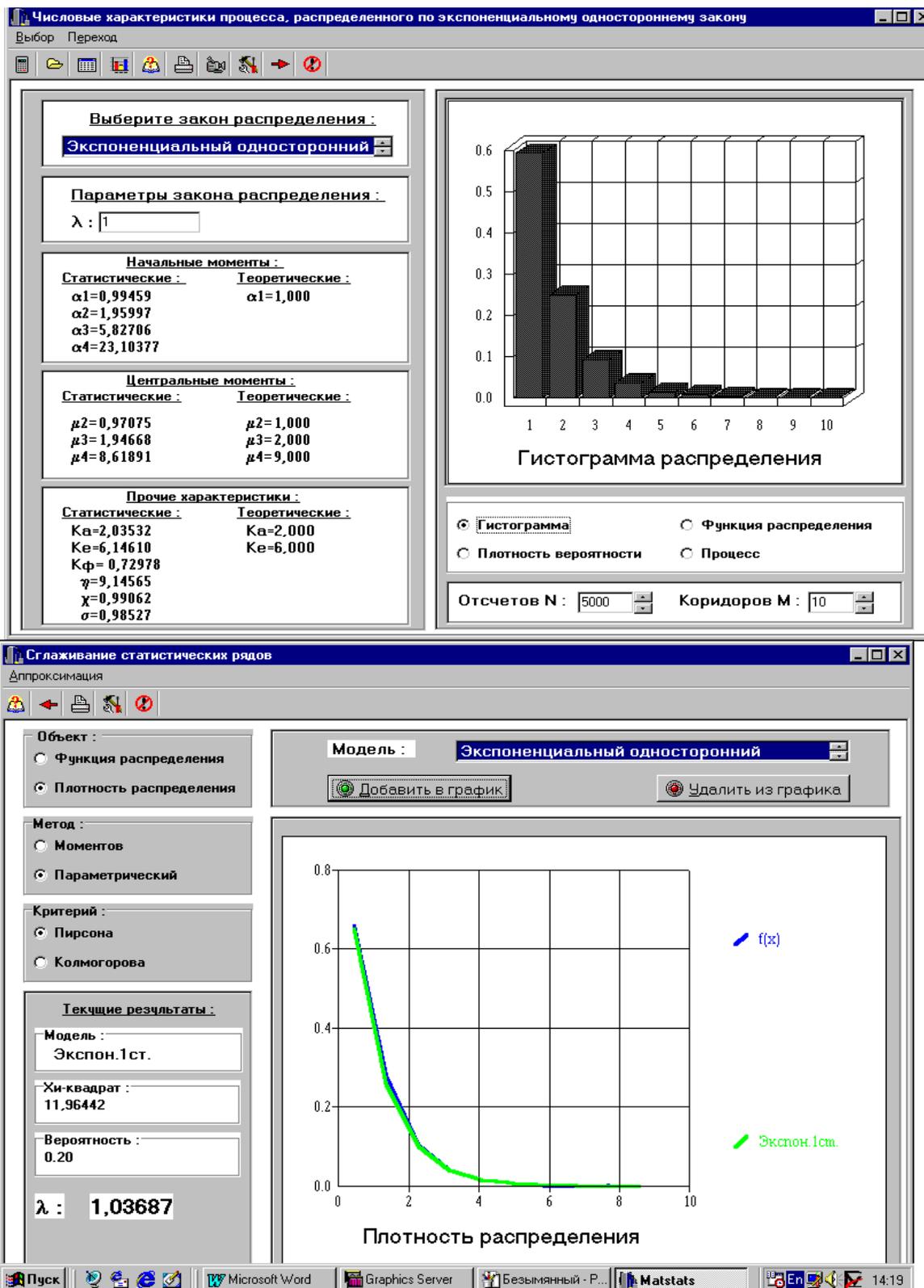


Рисунок 6.12. Определение параметра модели экспоненциального распределения

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить систему уравнений (6.27) для двумерного случая:

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ f_2 = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases} \quad (6.30)$$

Решить эту систему можно только приближенными методами, например, методом Ньютона. Воспользовавшись формулой для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными по методу Ньютона, получим:

$$\beta_1^{n+1} = \beta_1^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (6.35)$$

$$\beta_2^{n+1} = \beta_2^n - \frac{1}{\Delta'} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (6.36)$$

где,

$$\Delta' = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}.$$

Для вычислений необходимо знать значения частных производных по неизвестным параметрам функций f_1 и f_2 . Их выражения приведены в формулах (6.3) - (6.40).

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ & - \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M [\epsilon_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ & - \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (6.40).$$

В качестве примера на рис.6.13 приведены результаты определения параметров распределения Симпсона.

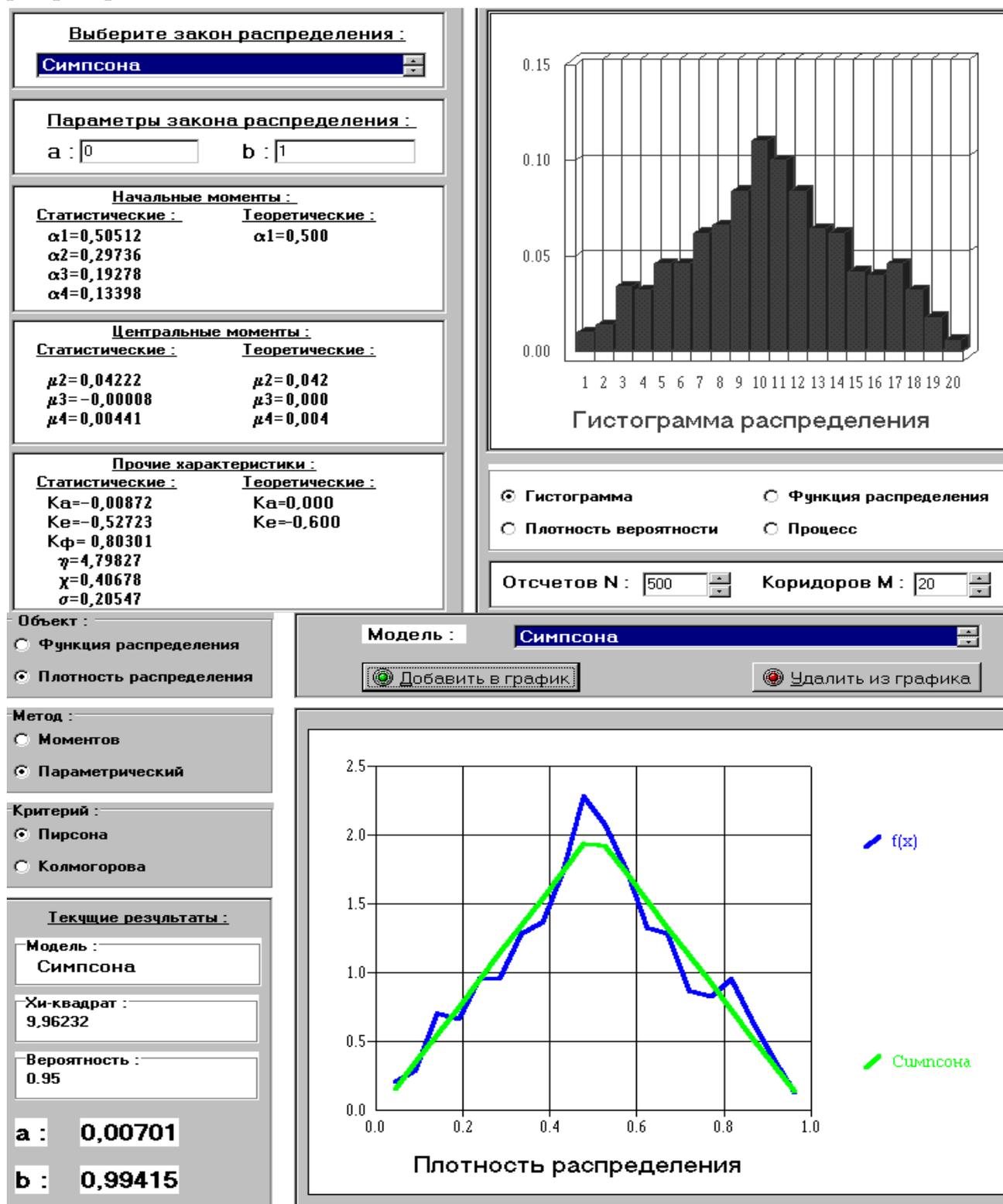


Рисунок 6.13. Определение параметра модели распределения Симпсона

Из результатов раздела видно, что метод аппроксимации плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями значительно сложнее метода моментов. Применение его оправдано при небольших объемах выборки.

6.2.5. Аппроксимация функций распределения вероятностей параметрическими моделями

При аппроксимации плотностей распределения вероятностей в качестве аргумента используется середина дифференциального коридора, что, в свою очередь, вносит дополнительные погрешности при анализе асимметричных законов распределения. От этого недостатка свободна аппроксимация функций распределения вероятностей.

Задача аппроксимации статистического ряда функциями распределения вероятностей ставится аналогично задаче аппроксимации плотностей распределения вероятностей:

$$\Delta = \sum_{J=1}^M \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (6.41)$$

где M - число дифференциальных коридоров;

$$\hat{F}_x(x_{jJ}) = \sum_{s=1}^J \hat{p}_s - \text{значение функции распределения вероятностей в конце } J\text{-го}$$

дифференциального коридора x_{jJ} ;

$F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2, \dots)$ - аналитическое выражение с неизвестными параметрами β_1, β_2, \dots

Условиями минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (6.42)$$

При однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона, неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{J=1}^M \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_n) \right] \frac{\partial F_a(x_{jJ}, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{J=1}^M \left\{ \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_n) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_{jJ}, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_{jJ}, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}, \quad (6.43)$$

и дальше все расчеты производятся аналогично случаю с плотностями вероятностей (см. раздел 6.2.4).

Результаты определения параметра случайного процесса, распределенного по закону арксинуса, представлены на рис. 6.14.

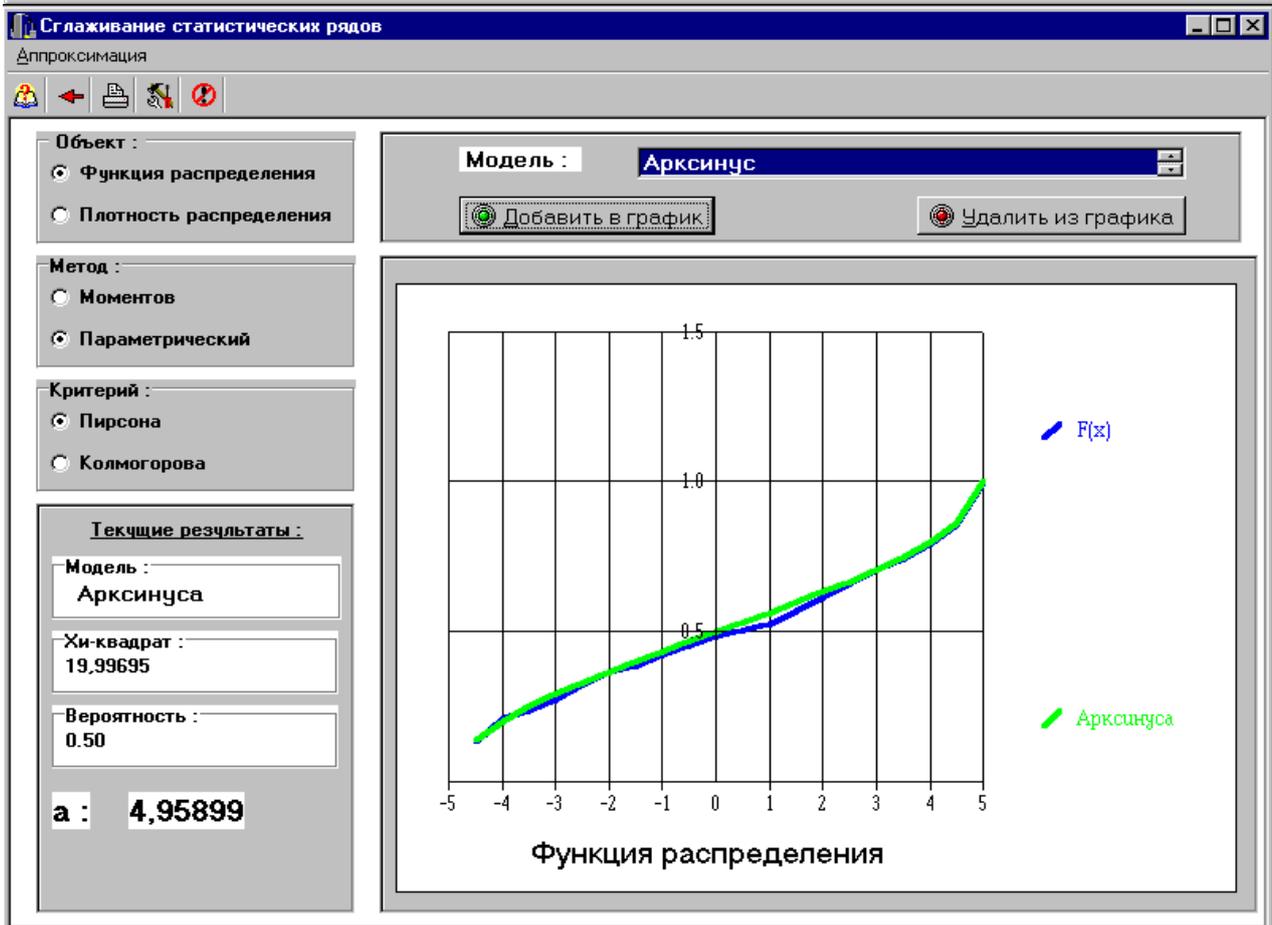
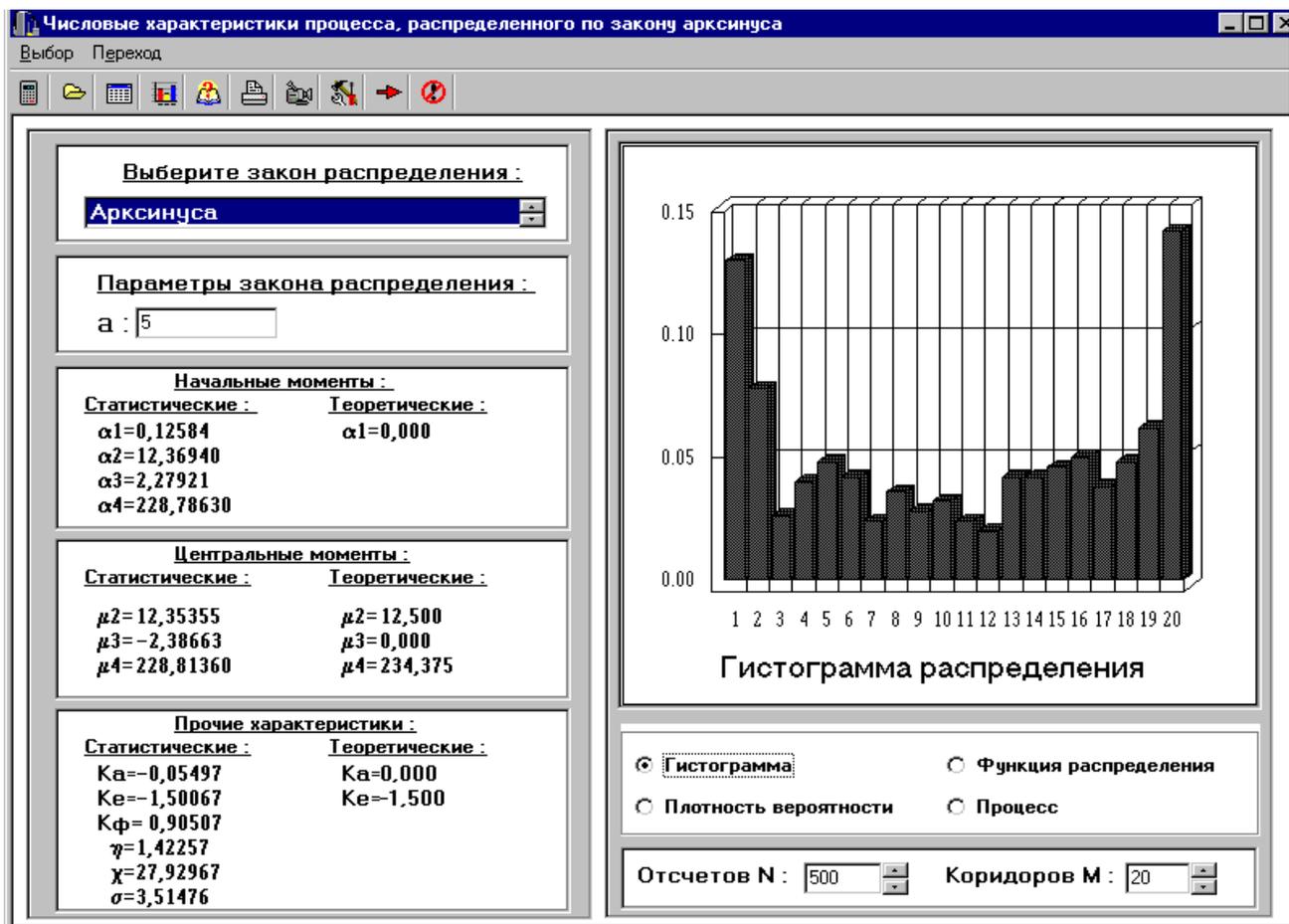


Рисунок 6.14. Результаты определения параметра закона арксинуса

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить уравнение (6.42) для двумерного случая.

Составим систему из двух уравнений для нахождения неизвестных параметров аппроксимации. Эту систему можно получить, продифференцировав выражение (6.42) по неизвестным параметрам.

$$\begin{cases} F_{1j} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ F_{2j} = \sum_{J=1}^M \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

Для решения системы (6.44) воспользуемся приближенным методом Ньютона. Способ нахождения неизвестных параметров аналогичен случаю с плотностями распределения вероятностей (смотрите раздел 6.2.4) – по формулам (6.35) и (6.36).

Для вычислений необходимо определить частные производные по неизвестным параметрам β_1, β_2 функций F_1 и F_2 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_{jJ}) - F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_{jJ}, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \\ &- \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta_1} &= \sum_{j=1}^M \left[\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \\ &- \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (6.48).$$

Значения неизвестных параметров вычисляются итерационно до достижения заданной точности.

Ниже приведены результаты определения параметров функции распределения Симпсона.

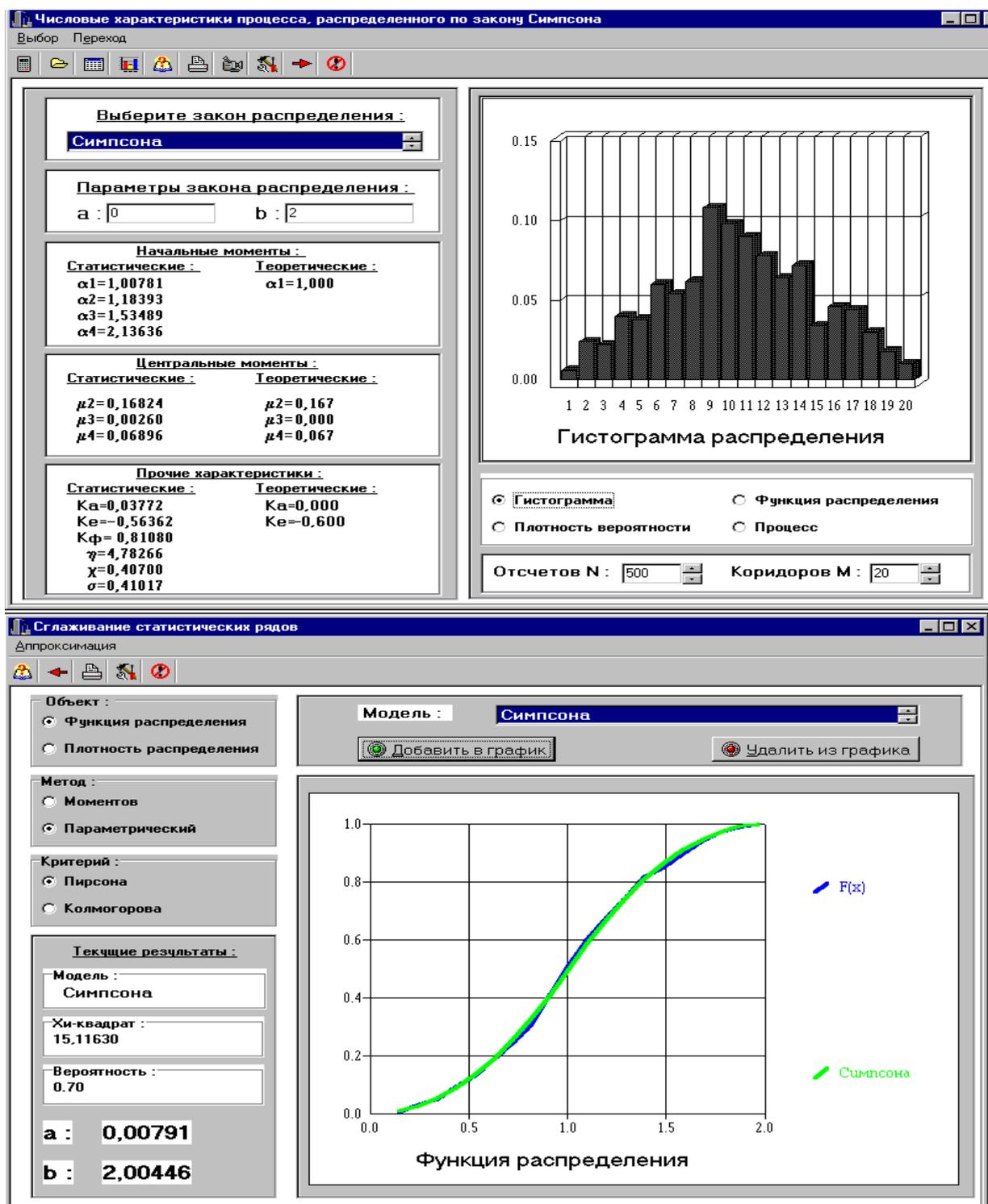


Рисунок 6.15. Результаты аппроксимации

Сравнительный анализ методов аппроксимации законов распределения отдает предпочтение методу аппроксимации функций распределения, особенно при малой выборке.

6.3. Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой информации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

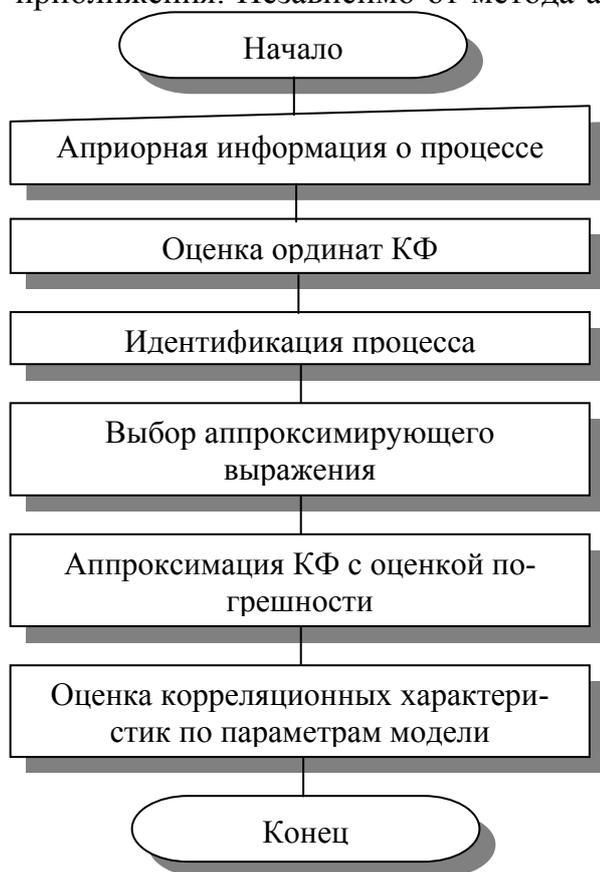


Рисунок 6.16.

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями включает этапы, представленные на рис. 6.16. Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [38-42, 51, 107, 109, 122,123];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [43, 44, 51, 107-109, 122, 176].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего не известно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвест-

ных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [51, 122, 107, 109] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции (см. рис. 6.17).

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т.д. Подобные задачи возникают при создании информационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наилучшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый процесс является марковским. В [94] доказывается теорема, согласно которой стационарный гауссов случайный процесс является марковским тогда и только тогда, когда его нормированная корреляционная функция имеет вид $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$.

При прохождении сигналов через узкополосные системы, их нормированные корреляционные функции имеют вид; $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ [66, 85].

Знание параметров таких функций позволяет определить интервал корреляции процесса, резонансную частоту системы и т.д.

Всё это свидетельствует о фундаментальной роли экспоненциальных и экспоненциально-косинусных корреляционных функций и приводит к необходимости выбирать в качестве моделей функции именно этого вида.

Обычно в качестве критерия приближения применяют точностные критерии [51, 122]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min; \quad (6.49)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации [122]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_k}} d\tau = \min, \quad (6.50)$$

где τ_k - максимальный интервал корреляции;

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)| < \varepsilon, \quad (6.51)$$

где ε - некоторая сколь угодно малая величина.

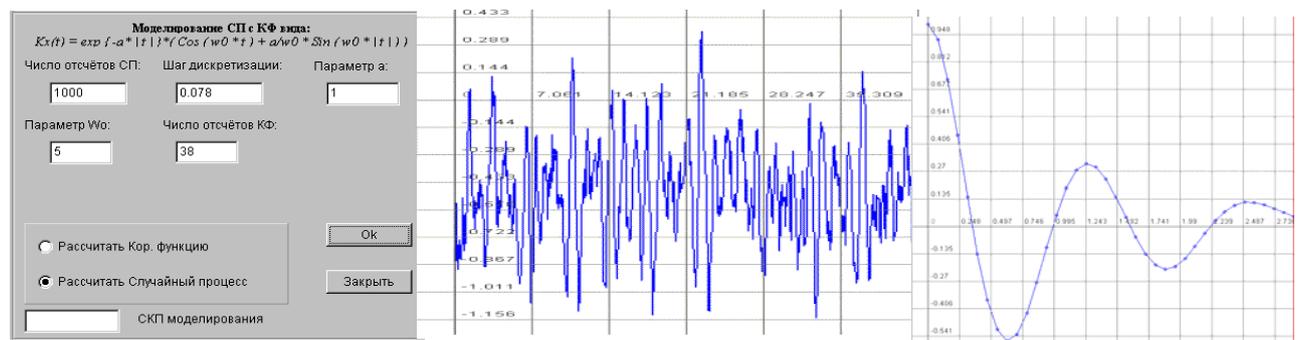
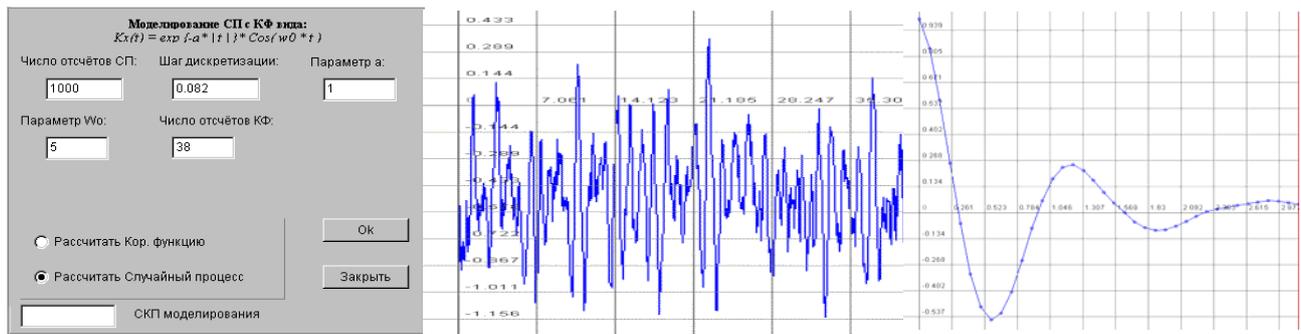
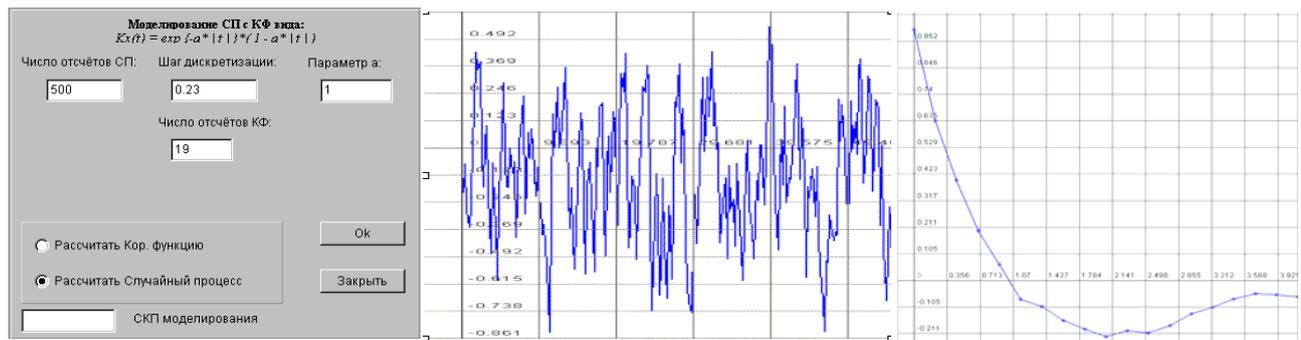
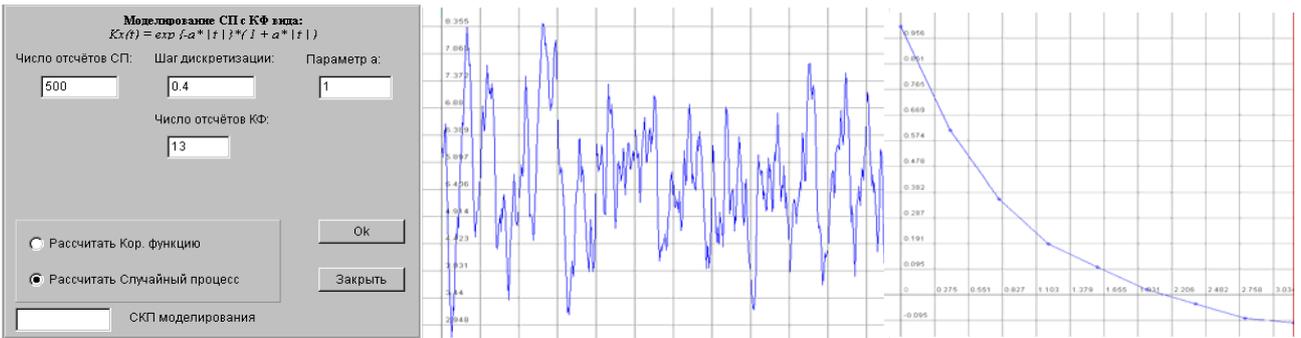
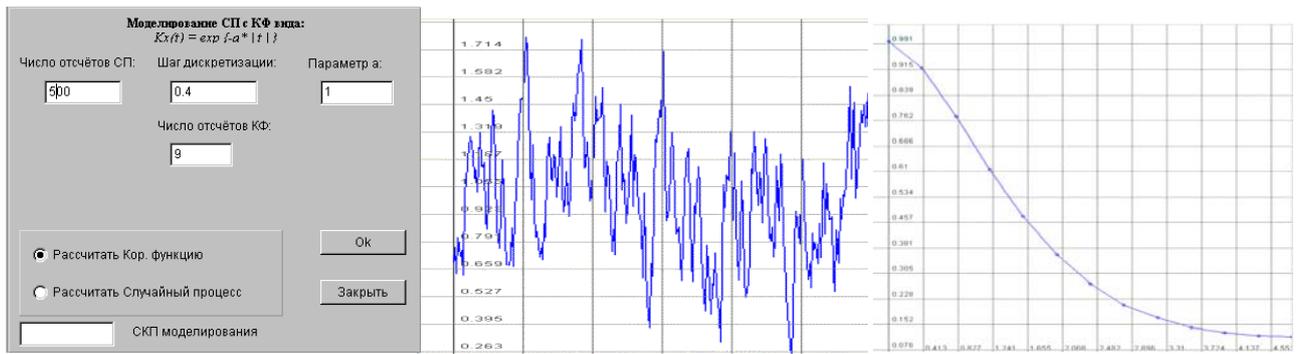


Рисунок 6.17. Случайные сигналы и их корреляционные функции

Реже применяются неточностные критерии. Так, например, в [51] выбран критерий соответствия вида модели виду корреляционной функции исследуемого процесса. В общем случае этот критерий не обеспечивает ни минимума квадратической, ни минимума экспоненциально-взвешенной погрешности аппроксимации. Так как корреляционная функция определяется в результате эксперимента, имеют место случайные погрешности. Поэтому, для получения модели нецелесообразно прибегать к интерполированию. Кроме того, во многих случаях нет необходимости требовать близости модели к корреляционной функции исследуемого процесса в равномерном смысле, а достаточно лишь интегральной близости функций.

Практика показывает, что в этом случае наиболее целесообразно применять квадратическое приближение.

6.3.1. Идентификация корреляционных функций

Рассмотрим особенности идентификации корреляционных функций. Следует отметить, что этой задаче всегда уделялось большое внимание [51, 122, 123, 127].

На практике задачу идентификации решают на основе анализа:

1. статистической корреляционной функции и её соответствия теоретической кривой (см. приложение 6);
2. фазовых портретов.

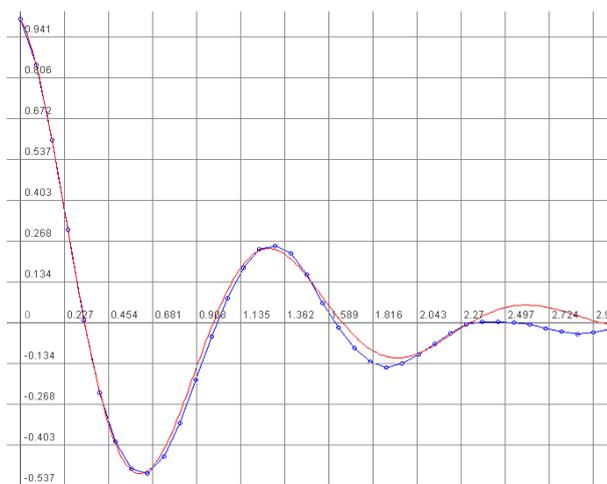


Рисунок 6.18.

При большом числе экспериментальных данных в ряде случаев по виду корреляционной функции можно высказать предположение о её виде. На рис. 6.18, в качестве примера, приведена статистическая корреляционная функция ($M=1000$), которую можно отнести к $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\mu \approx 5$. Однако, при большом показателе колебательности возможны ошибки идентификации.

Поэтому, представляется более перспективным, как и в случае идентификации законов распределения, использование фазовых портретов. Под фазовым портретом

будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах: $\rho_x(\tau)$ и $\rho'_x(\tau)$ (см. рис. 6.19)

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (6.52).$$

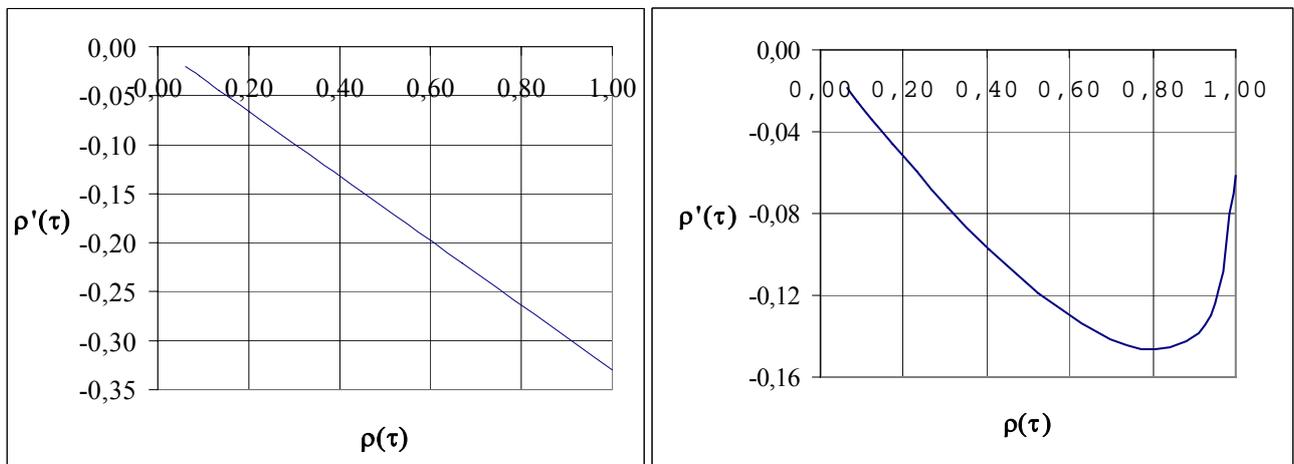
Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет, зависящий от показателя колебательности. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} [\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]]^2}{\sum_{i=0}^{J_{\max}} \Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)}}, \quad (6.53)$$

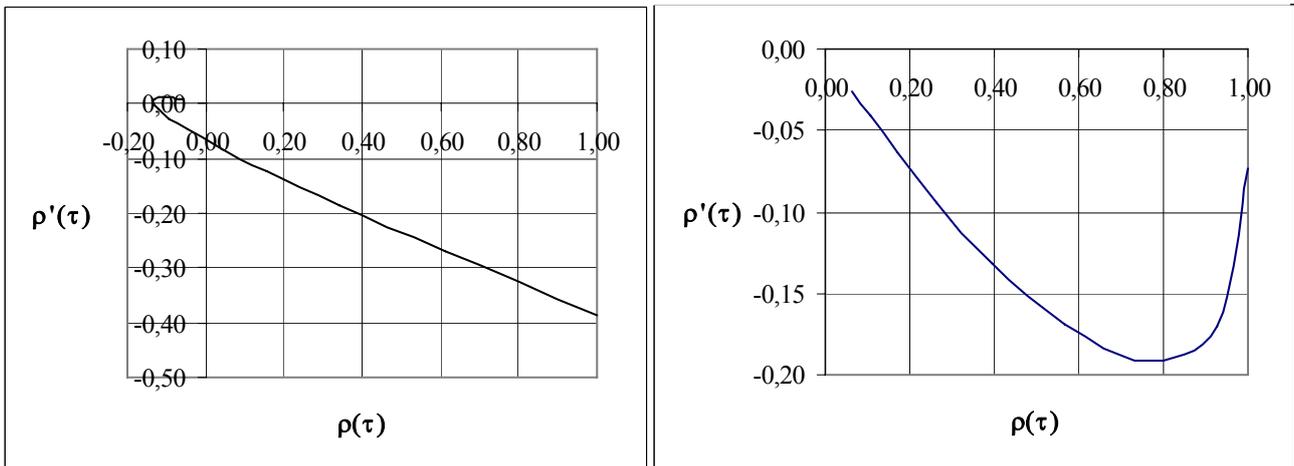
$\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$ - эталонный фазовый портрет.

На рис. 6.19 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.



а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha\tau = 0,4$

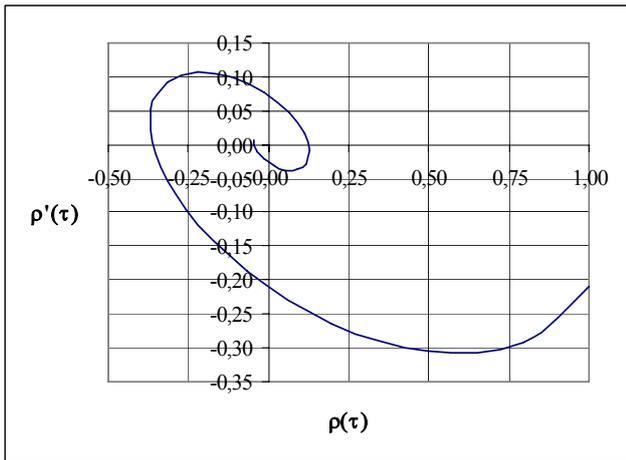
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,4$



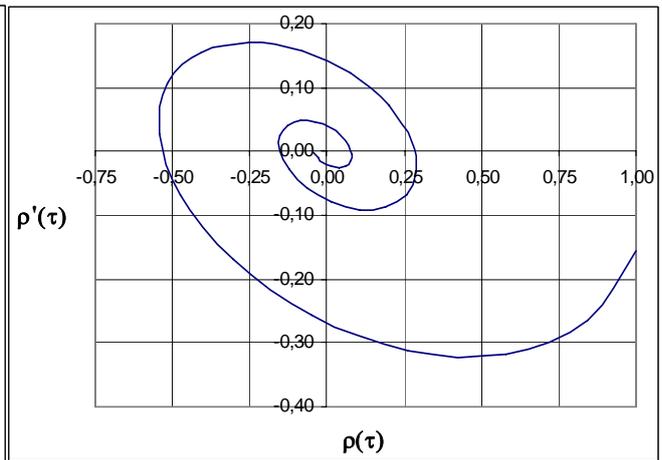
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$, $\alpha\tau = 0,23$ г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3)$, $\alpha\tau = 0,693$

Рисунок 6.19. Фазовые портреты однопараметрических моделей

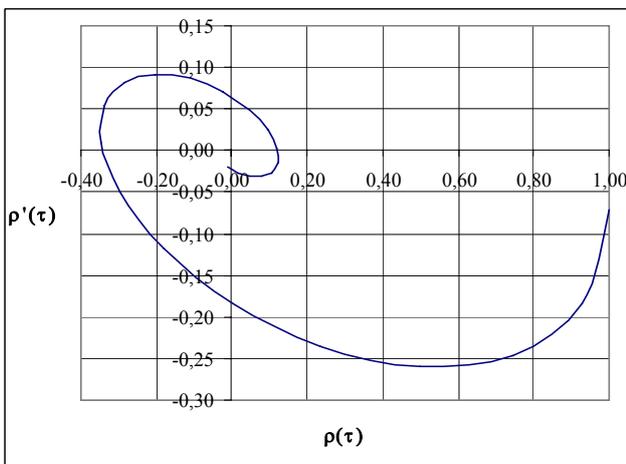
Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 6.20, расположены во всех квадрантах. Причем, количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности $\mu = \omega_0 / \alpha$.



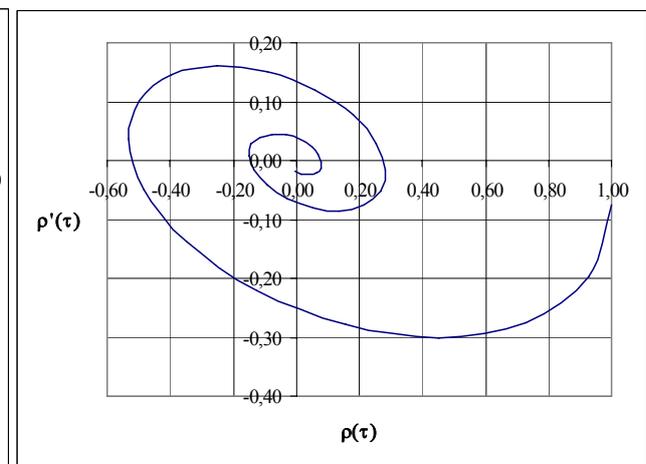
а) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



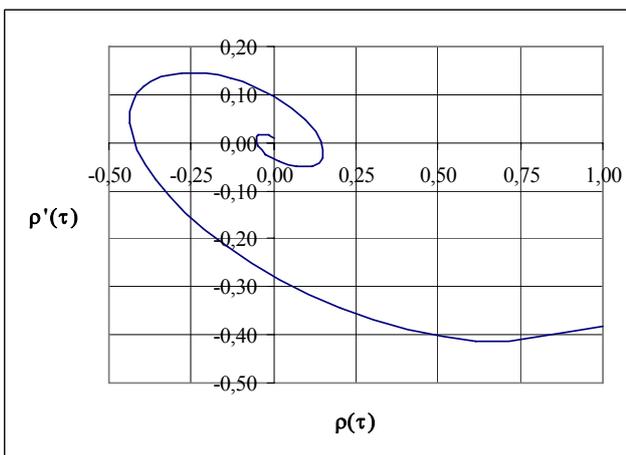
б) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



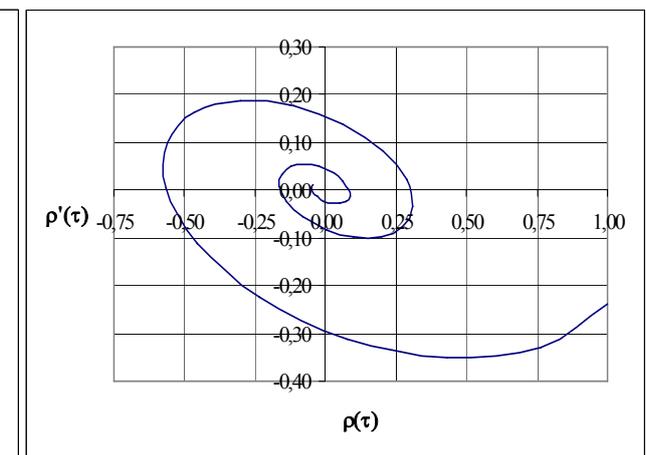
в) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



г) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$



д) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



е) $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

Рисунок 6.20. Фазовые портреты колебательных корреляционных функций

Алгоритм идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов заключается в выполнении следующих этапов:

1. построение фазового портрета экспериментальной КФ;
2. выбор типа модели (экспоненциальная, колебательная); построение фазового портрета типовой КФ из выбранной группы и использование ее в качестве эталона;

3. сравнение портретов (вычисление квадратической погрешности);
4. в случае неудовлетворительного результата, следует:
 - повторить алгоритм с п.3, использовав при этом в качестве эталонной другую типовую функцию;
 - выбрать из всех имеющихся такую функцию, которая дает минимальное значение погрешности;
 - подобрать коэффициент колебательности эталонной модели таким образом, чтобы погрешность была минимальной.

Как показали исследования:

- погрешность идентификации по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки;
- фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции ≥ 10 ;
- при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции (см. приложение б), следовательно, наиболее информативным у фазового портрета является «хвост».

Это, в свою очередь, позволяет при решении аппроксимативных задач уменьшить объём выборки при вычислении исходной корреляционной функции по сравнению с принятыми рекомендациями [95, 137]. Кроме этого, фазовые портреты оказываются своеобразной «обратной связью» качества аппроксимации. Для этого необходимо после нахождения параметров аппроксимирующего выражения корреляционной функции построить новый фазовый портрет. Если задача решена правильно, расхождение между уточненным теоретическим и экспериментальным фазовыми портретами будет минимальным.

На рис. 6.21- 6.26 приведены примеры идентификации корреляционных функций при обработке результатов моделирования псевдослучайных последовательностей на ЭВМ с заданным видом корреляционной функции. Объём выборки равен $M=1000$, погрешность восстановления корреляционной функции - 0,02 (см. таблицу 3.1). Анализ рисунков показывает, что фазовые портреты дают уверенный ответ о принадлежности статистической корреляционной функции к определенному классу как для монотонных, так и колебательных моделей.

6.3.2. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона

Следующим шагом решения задачи аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями является составление системы уравнений (в случае однопараметрических моделей – уравнения) для определения неизвестных параметров. С учетом того, что исходными данными, подлежащими обработке, является массив значений ординат нормированной корреляционной функции - $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$, критерий приближения целесообразнее записать в виде:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)]^2 = \min. \quad (6.54)$$

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения. Найдем это уравнение. Для этого необходимо, подставив в (6.55) $\rho_a(\tau_i, \alpha)$, выполнить дифференцирование и результат приравнять нулю:

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.55)$$

Решение этого уравнения возможно различными способами [60]. Для решения полученного уравнения, воспользуемся методом Ньютона.

Тогда

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial^2 \alpha} - \left[\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}, \quad (6.56)$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$.

Процесс вычисления заканчивается, когда $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon$,

Рассмотрим решение поставленной задачи для случаев двухпараметрической аппроксимации.

Так для аналитического выражения $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, применяемого при аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных процессов, параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона [60, 107]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (6.57)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \rho_x(\tau_i) - A_2; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_2 \tau_i; S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_3 \tau_i; S_3 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_2 (A_2 - R_i); S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_3 (A_2 - R_i); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 (A_3^2 + R_i A_2) \end{aligned}$$

Начальные значения α и ω_0 выбираются следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}; \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2 \tau'}, \end{cases} \quad (6.58)$$

где τ' - интервал времени, соответствующий первому пересечению $\hat{\rho}_x(\tau)$ оси абсцисс.

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (6.59)$$

При аппроксимации корреляционных функций дифференцируемых узкополосных процессов применяется аналитическое выражение

$$\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_1 S_4 - S_2 S_3}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (6.60)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 - \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_3 (\alpha_n \tau_i + 2) / \omega_n + A_2 \tau_i) \right); \\ S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n) (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n) + \right. \\ &\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n - A_3 ((\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n^2 + \tau_i^2)) \right); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n)^2 + R_i (A_2 \tau_i^2 + A_3 (\tau_i^2 + 1 / \omega_n^2) \alpha_n / \omega_n) \right). \end{aligned}$$

При аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных случайных процессов, у которых $S_x(0) = 0$, применяют выражение

$$\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n + \frac{S_1 S_4 - S_2 S_3}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 + \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_2 \tau_i + A_3 (2 - \alpha_n \tau_i / \omega_n)) \right); \end{aligned}$$

$$S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n) (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3) + \right. \\ \left. + R_i (A_2 \tau_i (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n - A_3 (\tau_i^2 + (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n^2)) \right)$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left((A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3)^2 + R_i (A_3 (1 / \omega_n^2 - \tau_i^2) \alpha_n / \omega_n + \right. \\ \left. + A_2 \tau_i (\tau_i - 2 \alpha_n / \omega_n^2)) \right)$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений аналогичны предыдущему случаю. Сравнительный анализ выражений для оценки параметров двухпараметрических выражений показывает, что они существенно проще для экспоненциально- косинусной модели. Заметим, что при увеличении μ , модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0)$ и $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0)$ стремятся к модели $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$. Т.е., в том случае, когда не требуется сохранения свойств случайного процесса: дифференцируемости или $S_x(0)=0$, - более целесообразно применять в качестве модели узкополосного процесса экспоненциально-косинусную корреляционную функцию - $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$, допускающую более простое определение параметров и приемлемые погрешности аппроксимации.

Примеры аппроксимации корреляционных функций различными параметрическими моделями представлены на рис. 6.21-6.26.

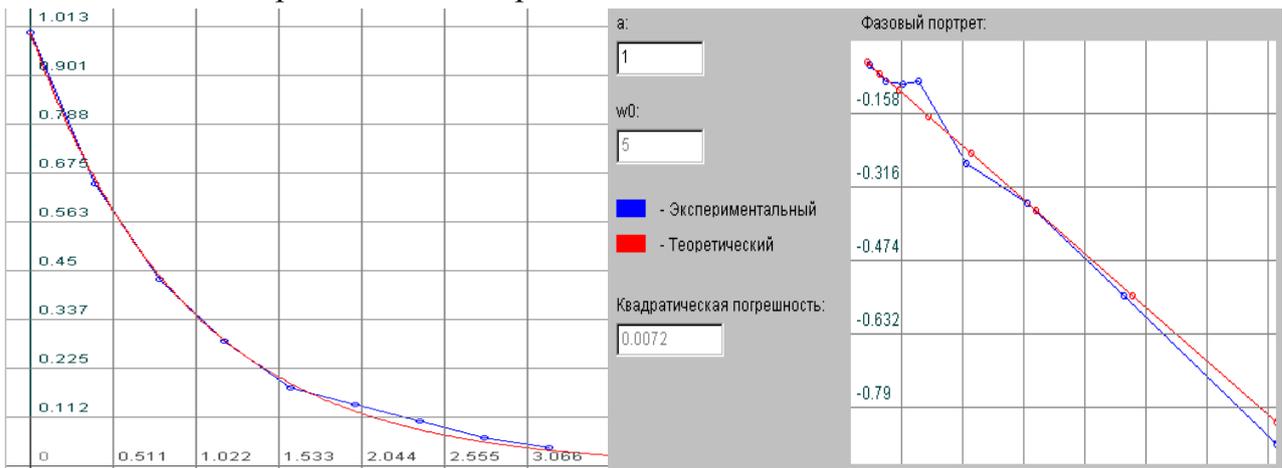


Рисунок 6.21. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

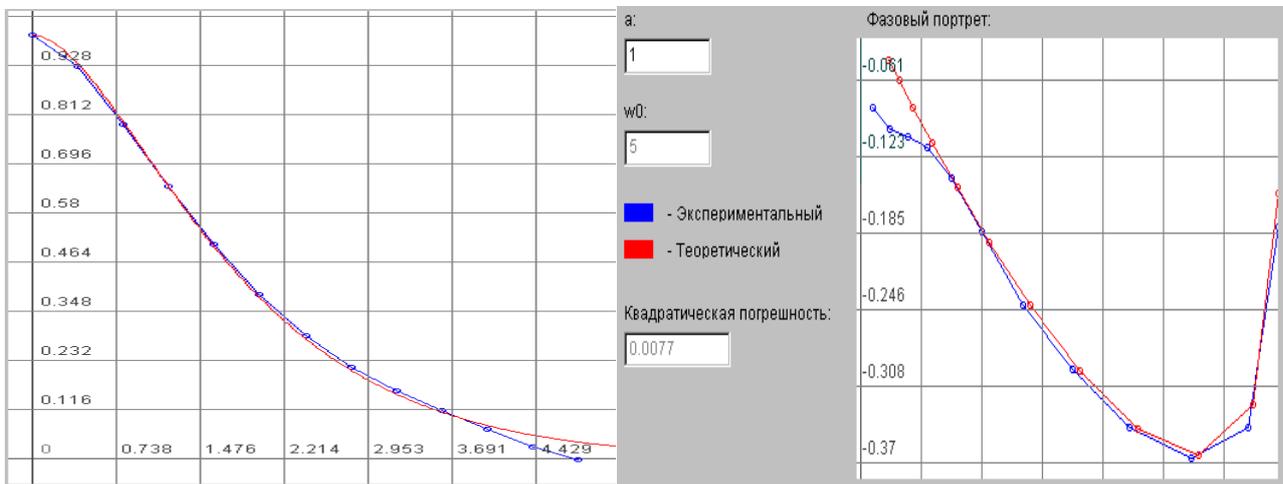


Рисунок 6.22. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$

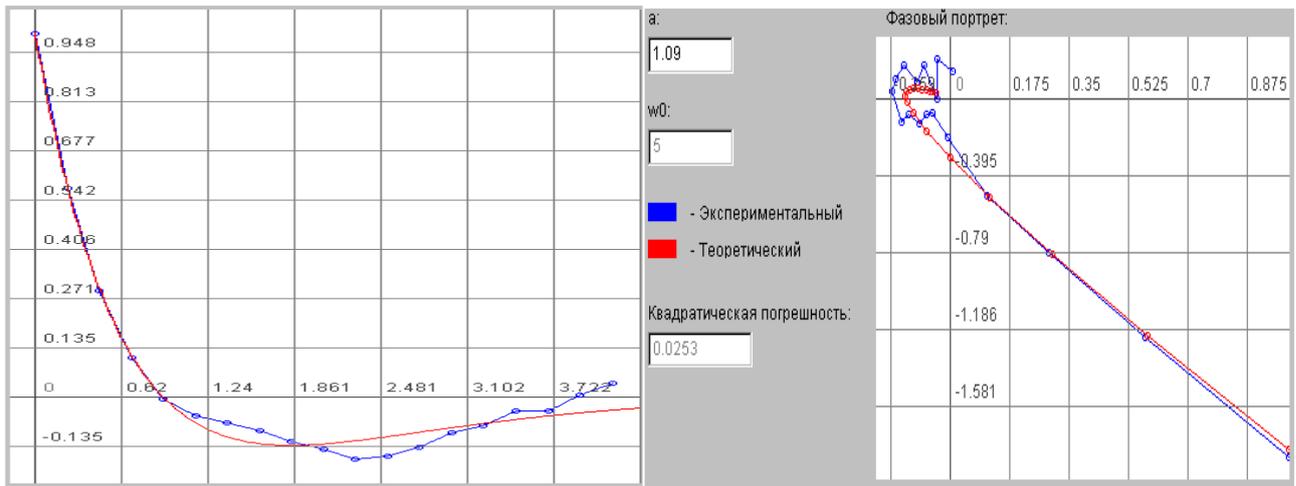


Рисунок 6.23. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$

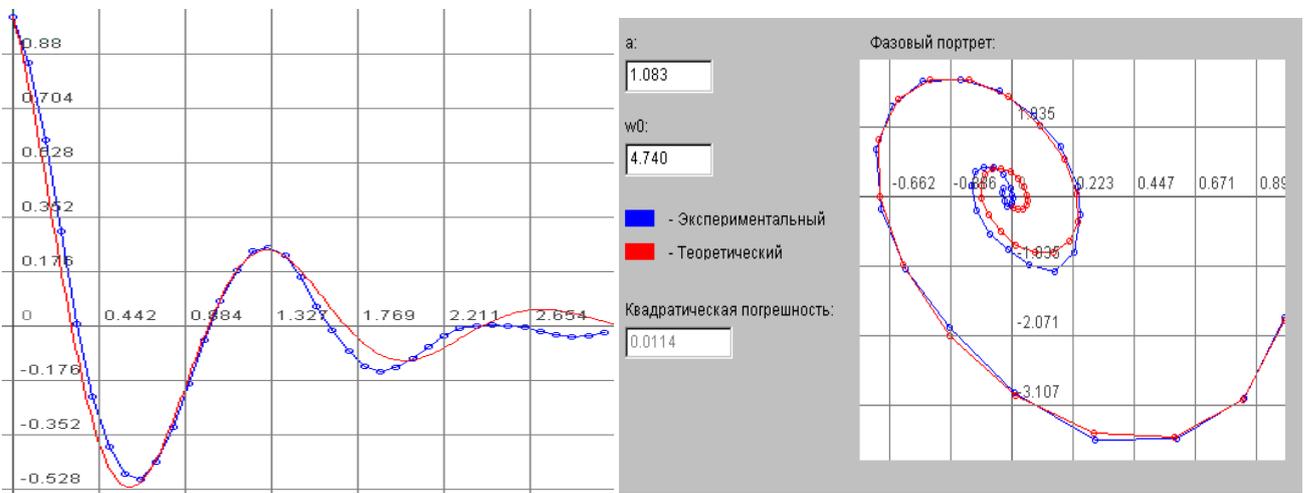


Рисунок 6.24. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

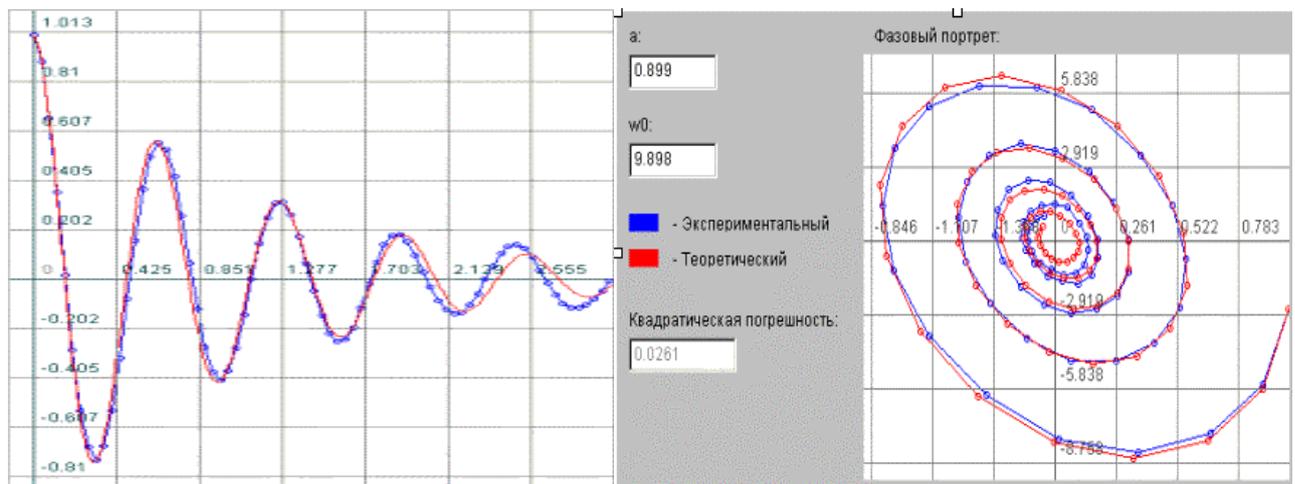


Рисунок 6.25. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \tau \cos \omega_0 \tau)$

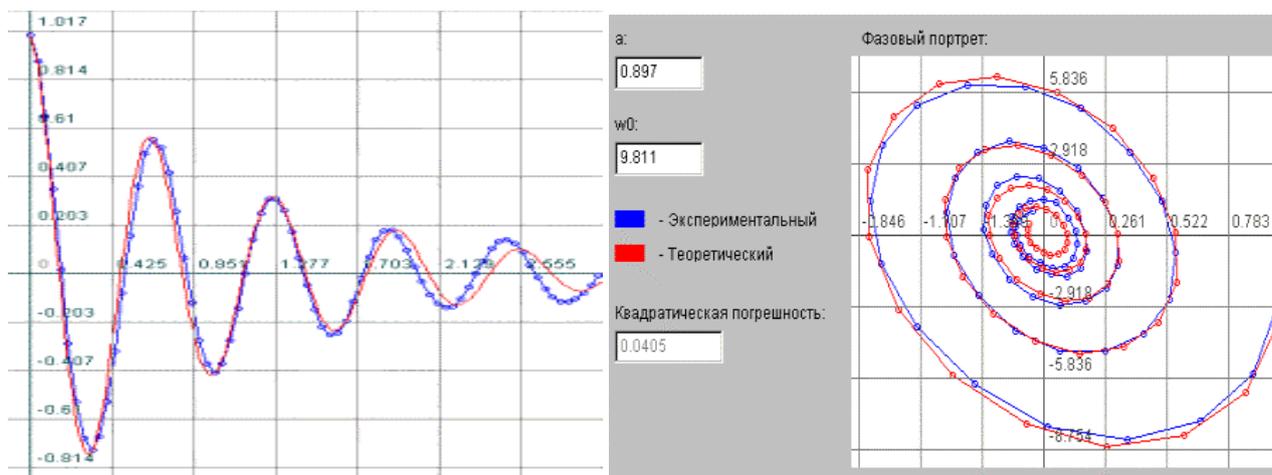


Рисунок 6.26. Аппроксимация $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$

Специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов заключается в следующем:

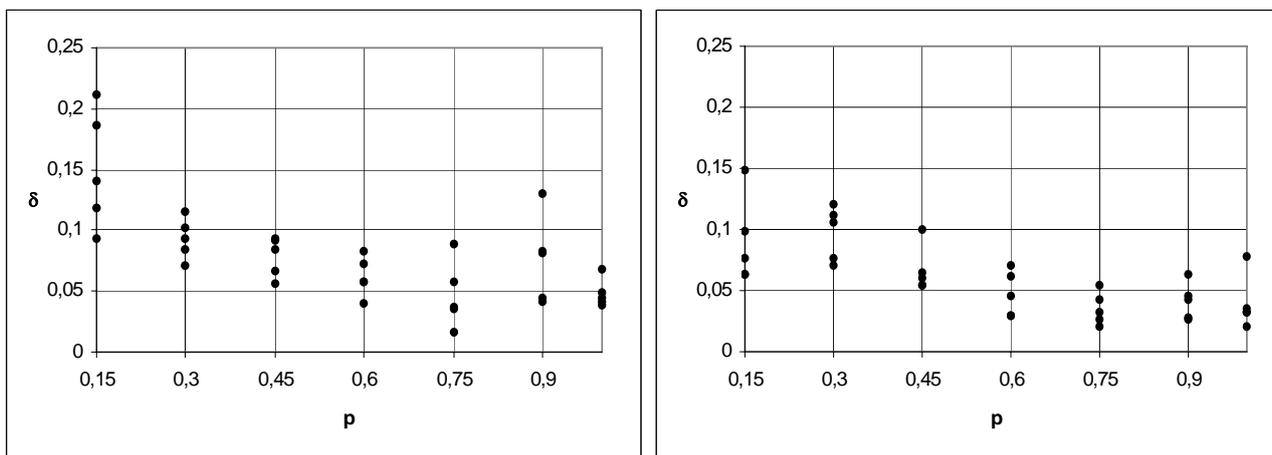
1. пропуски наблюдений, «дрожание» приводят к увеличению дисперсии оценки ординат корреляционной функции, особенно при небольшой выборке;
2. увеличение дисперсии оценки ординат корреляционной функции затрудняет её идентификацию по фазовым портретам;
3. при небольшой выборке теряет смысл понятие погрешности приближения, так как корреляционная функция оценивается с большой погрешностью;
4. минимальное значение погрешности аппроксимации позволяет убедиться, что выбрана лучшая модель из рассматриваемого класса моделей.

Рассмотрим подробнее результаты аппроксимации для двух типовых моделей нерегулярной дискретизации: р-преобразования и «дрожания», - которые характерны для непреднамеренной дискретизации и не зависят от желания исследователя.

Результаты аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$ неэквидистантного временного ряда, полученного р-преобразованием исходного ряда, приведены на рис. 6.27-6.28. Эквивалентный объём выборки, участвующей в получении оценки корреляционной функции, равен $M_s = M_p$.

На рис. 6.27 приведены зависимости погрешности аппроксимации от значения параметра р-преобразования, которые показывают, что:

1. при уменьшении значения р-преобразования даже при $M_s = \text{const}$ погрешность аппроксимации растёт;
2. для обеспечения погрешности аппроксимации $\delta < 0,15$ $M_s \geq 1500$ при $p > 0,15$;
3. для получения более точных результатов аппроксимации необходимо увеличивать M_s .



а) $M_n=1000$

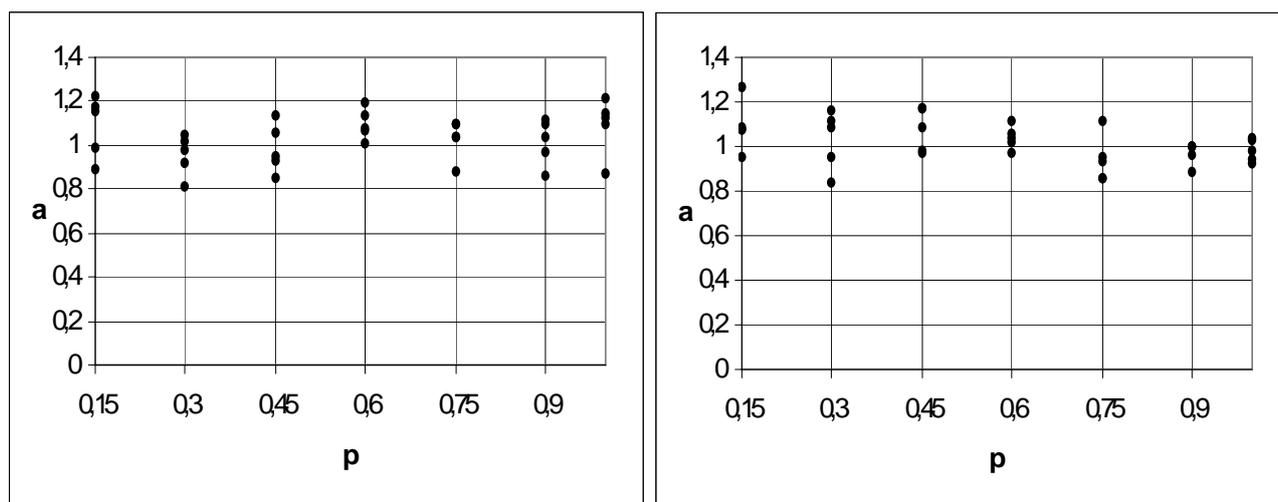
б) $M_n=1500$

Рисунок 6.27. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра ρ -преобразования

На рис. 6.28 представлены результаты оценки параметра аппроксимирующего выражения – показателя затухания. Из анализа результатов видно, что погрешность оценки показателя затухания в меньшей степени зависит от значения параметра ρ -преобразования и эквивалентного объёма выборки, чем погрешность аппроксимации.

Результаты аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ неэквидистантного временного ряда, полученного ρ -преобразованием исходного ряда, приведены на рис. 6.29-6.30.

На рис. 6.29 представлены результаты оценки погрешности аппроксимации, показателя затухания и частоты колебания корреляционной функции. Из анализа результатов видно, что погрешности оценки показателя затухания и, особенно, частоты колебания также в меньшей степени зависят от значения параметра ρ -преобразования и эквивалентного объёма выборки, чем погрешность аппроксимации, особенно при $M_n = 1500$.



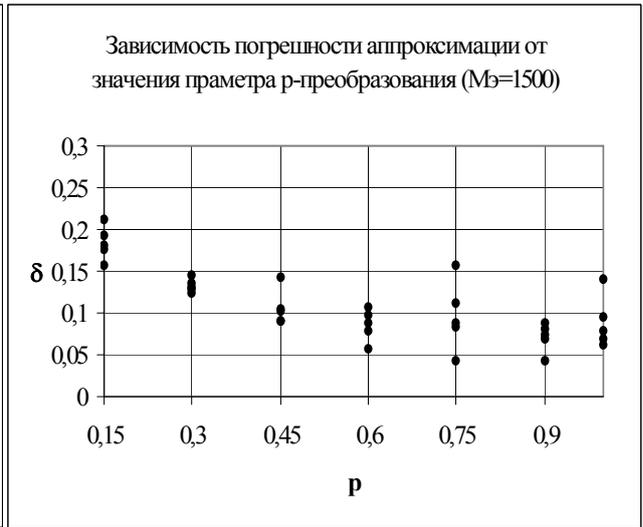
а) $M_n=1000$

б) $M_n=1500$

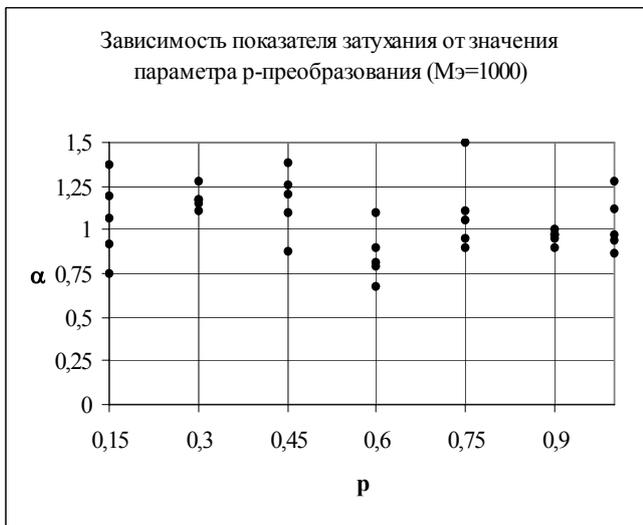
Рисунок 6.28. Зависимость показателя затухания от значения параметра ρ -преобразования



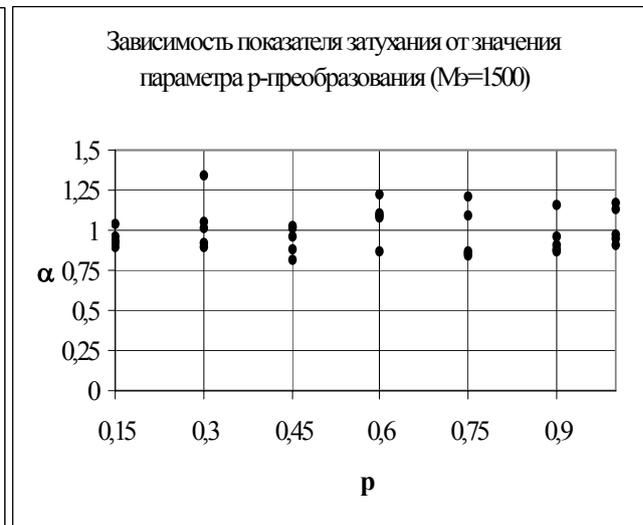
а)



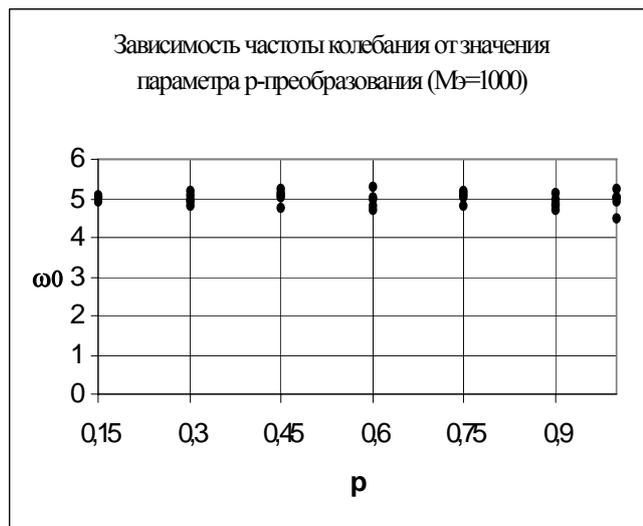
б)



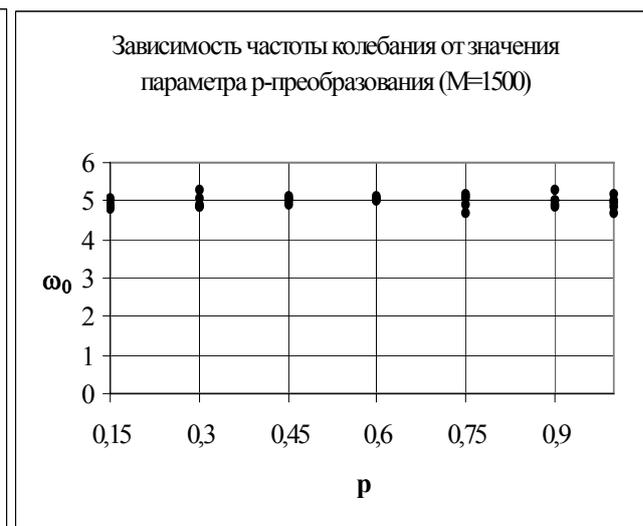
в)



г)

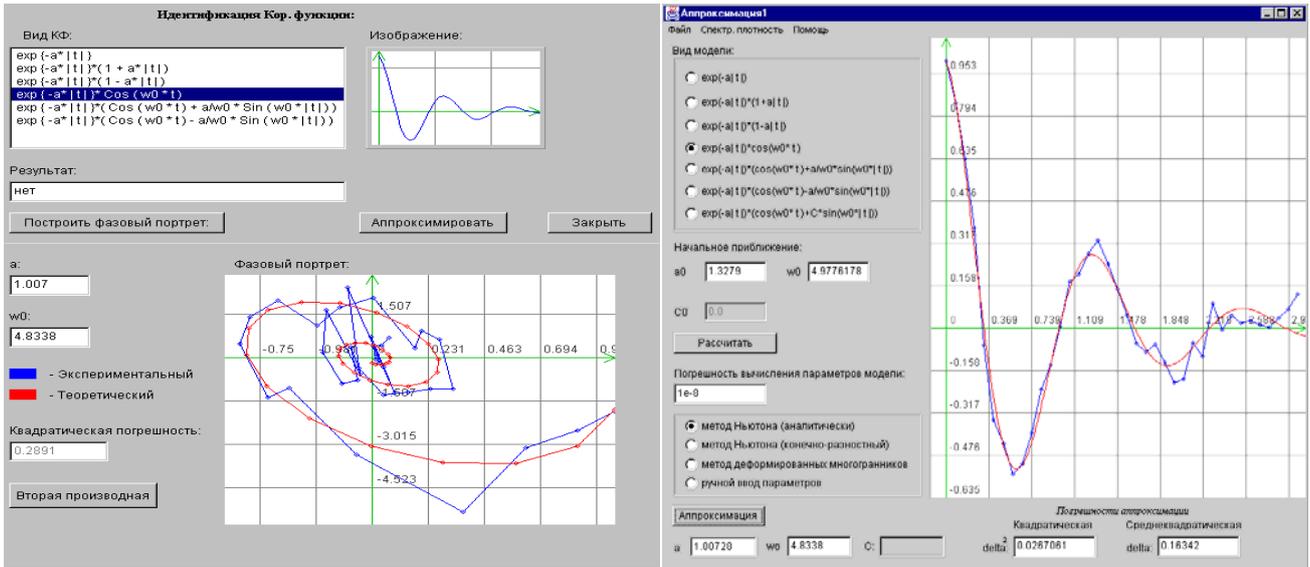


д)

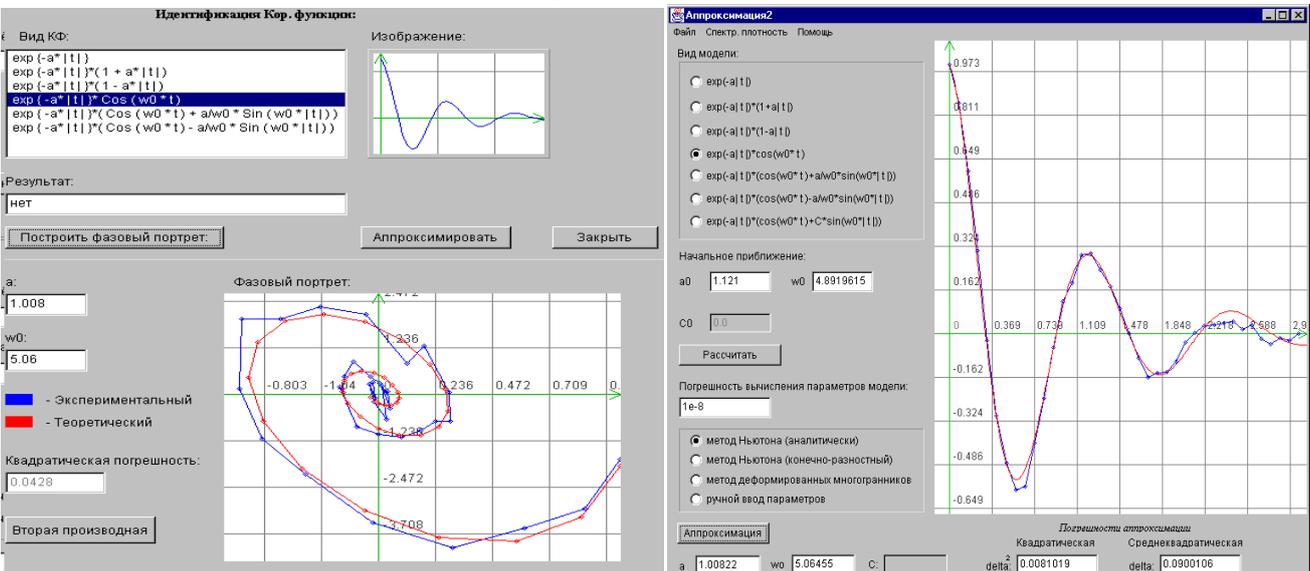


е)

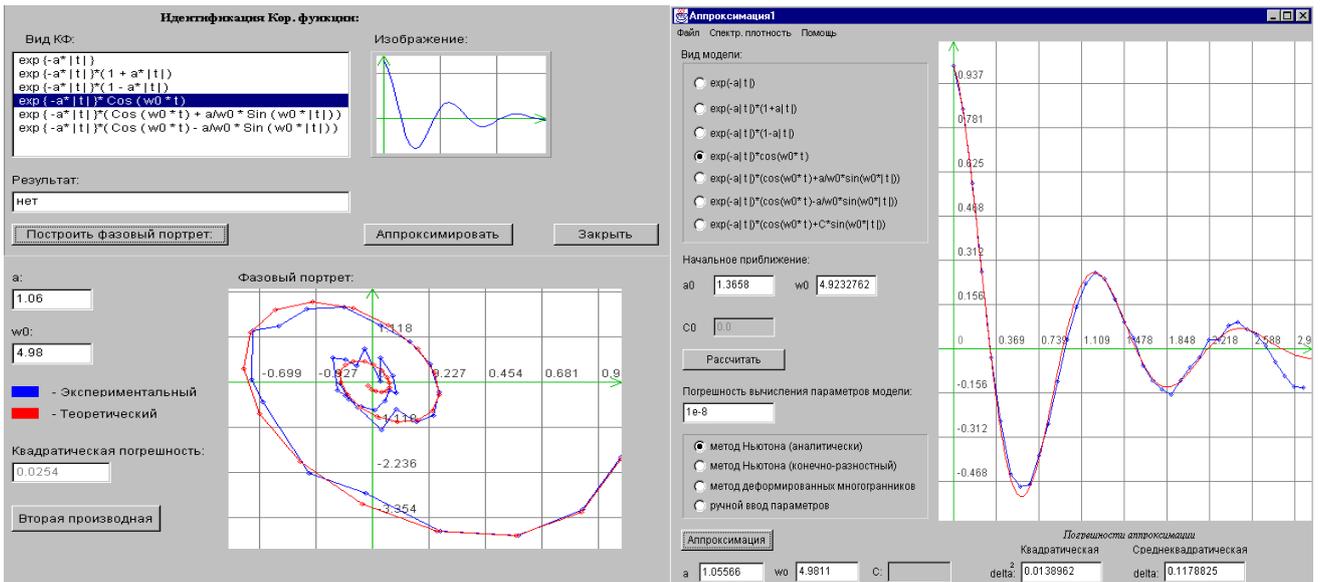
Рисунок 6.29. Результаты аппроксимации корреляционных функций колебательной модели



а) $p=0,15$, $M=10000$



б) $p=0,45$, $M=3333$



в) $P=0,75$, $M=2000$

Рисунок 6.30. Результаты аппроксимации

На рис. 6.31-6.32 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций при «дрожании» временного ряда ($M=1000$).

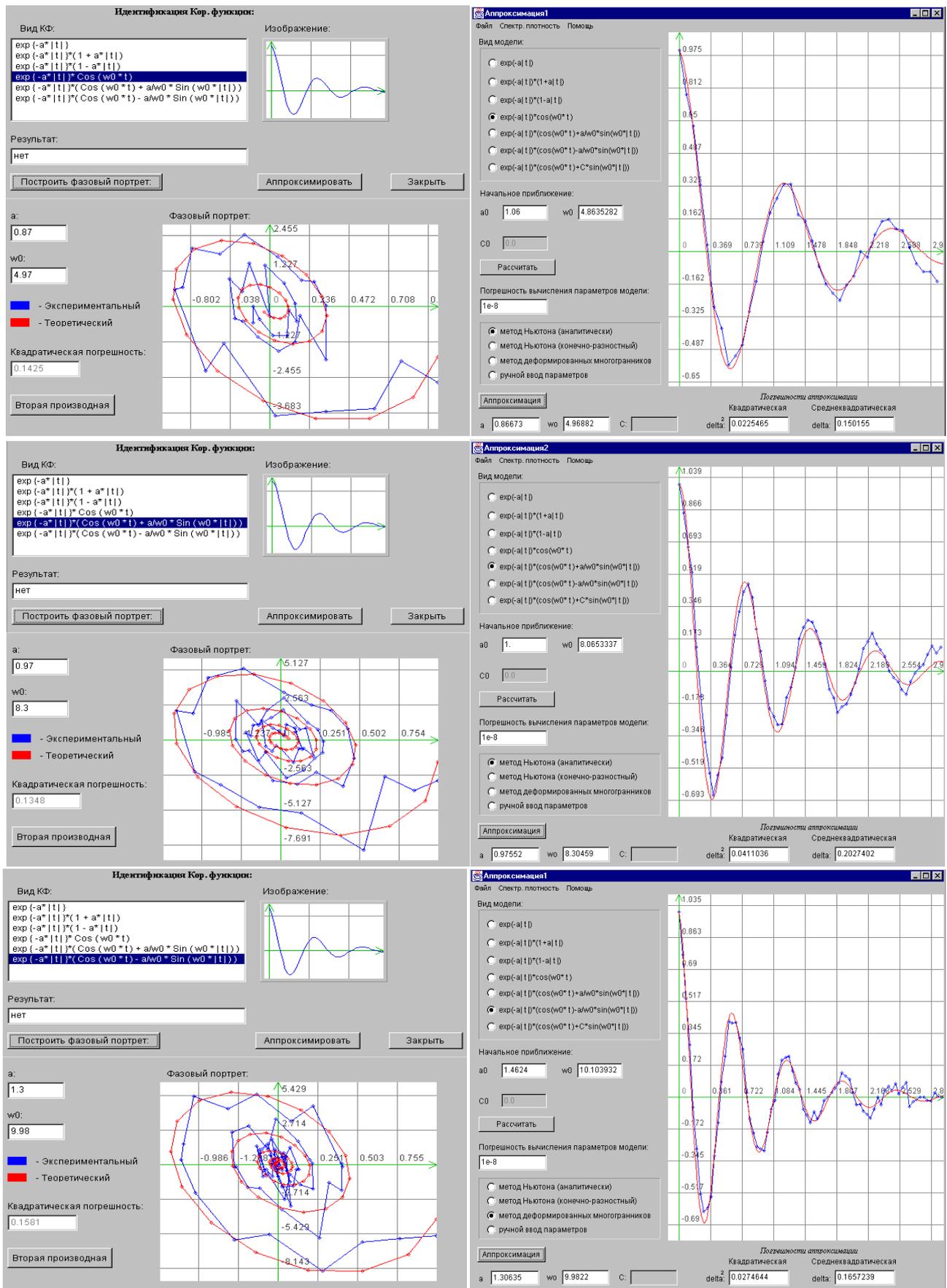
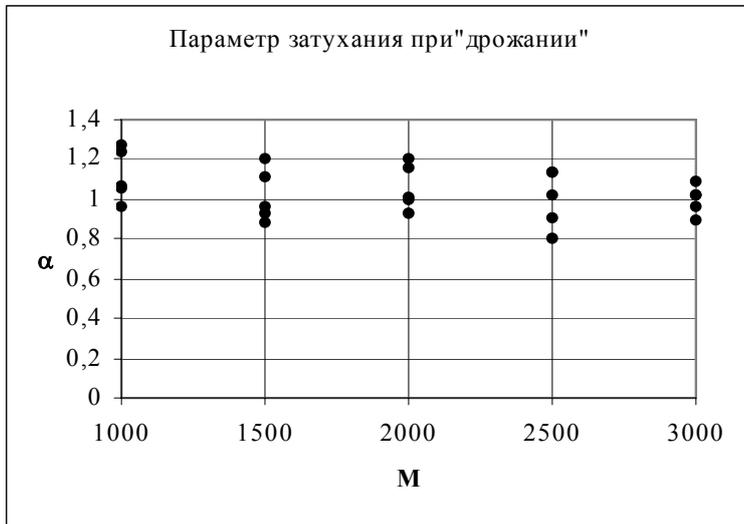


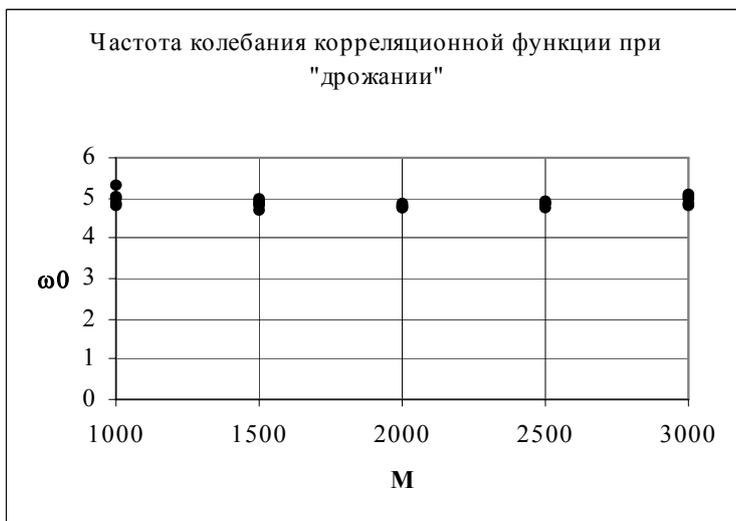
Рисунок 6.31. Результаты аппроксимации корреляционных функций при «дрожании»



а)



б)



в)

Рисунок 6.32. Результаты аппроксимации при «дрожании»

На рис. 3.32 а) приведены результаты оценки погрешности аппроксимации корреляционной функции при «дрожании» временного ряда (см. таблицу 6.2). Анализ результатов показывает, что погрешность аппроксимации при «дрожании» больше, чем погрешность аппроксимации для регулярного временного ряда и уменьшается с увеличением объема выборки. В любом случае, «дрожание» временного ряда необходимо учитывать.

На рис. 6.32 б) приведены результаты оценки параметра затухания колебательной модели корреляционной функции $\alpha = 1$. Анализ результатов показывает, что погрешность оценки параметра при объеме выборки $M \geq 1000$ находятся в пределах $\pm 0,25$. Увеличение погрешности оценки параметра объясняется поведением корреляционной функции на её «хвосте».

На рис. 6.32 в) приведены результаты оценки частоты колебания корреляционной функции $\omega_0 = 5$. Анализ результатов показывает, что при том же объеме выборки погрешность оценки частоты колебания меньше, чем показателя затухания. Отсюда следует вывод, что на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции наибольшее влияние оказывает неточность оценки показателя затухания.

Таким образом, представленные результаты показывают, что разработанные алгоритмы можно применять и для аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.

6.3.3. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)

Следует отметить, что система уравнений с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных имеет достаточно сложный вид, обладает плохой сходимостью, решение сильно зависит от начального приближения. Одним из способов устранения ряда недостатков является применение конечно-разностного метода Ньютона [107].

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [81, 107].

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (6.55), где

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}; \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - e^{-\alpha_n \tau_i}}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - 2e^{-\alpha_n \tau_i} + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}}{h^2} \end{aligned}$$

где h – любое достаточно малое приращение по α .

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (6.55), в котором:

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i); \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i)}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}(1 + (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}, \end{aligned}$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$$

Параметр определяется в результате решения уравнения (6.55), где:

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i); \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i)}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}(1 - (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}. \end{aligned}$$

Для двухпараметрических моделей корреляционных функций параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=\alpha_n}}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \Big|_{\omega_0=\omega_n}}{\sum_{i=0}^N \left(R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} - \left(\frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \right)^2 \right) \Big|_{\omega_0=\omega_n}}. \end{array} \right. \quad (6.62)$$

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми двухпараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [81, 107].

4. Для модели $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i; \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} &\approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h)\tau_i} - e^{-\alpha n \tau_i})}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h)\tau_i} - 2e^{-\alpha n \tau_i} + e^{-(\alpha n - h)\tau_i})}{h^2}; \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - \cos \omega_n \tau_i)}{k}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - 2\cos \omega_n \tau_i + \cos((\omega_n - k)\tau_i))}{k^2}, \end{aligned}$$

где h – любое достаточно малое приращение по α ,

k – любое достаточно малое приращение по ω_0 .

5. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h)\tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h)\tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2},$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

6. Для модели $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left(e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2},$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n + k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left(\cos((\omega_n - k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений определяются по формулам (6.58) и (6.59).

На рис. 6.33 – 6.35 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций типовыми моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона для р-преобразования случайного процесса (р=0,4). Для сравнения приведены результаты с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных. Объём выборки во всех рассматриваемых случаях равен М=1000.

Из анализа результатов видно, что погрешности аппроксимации практически равны. Однако конечно-разностный метод проще реализовать.

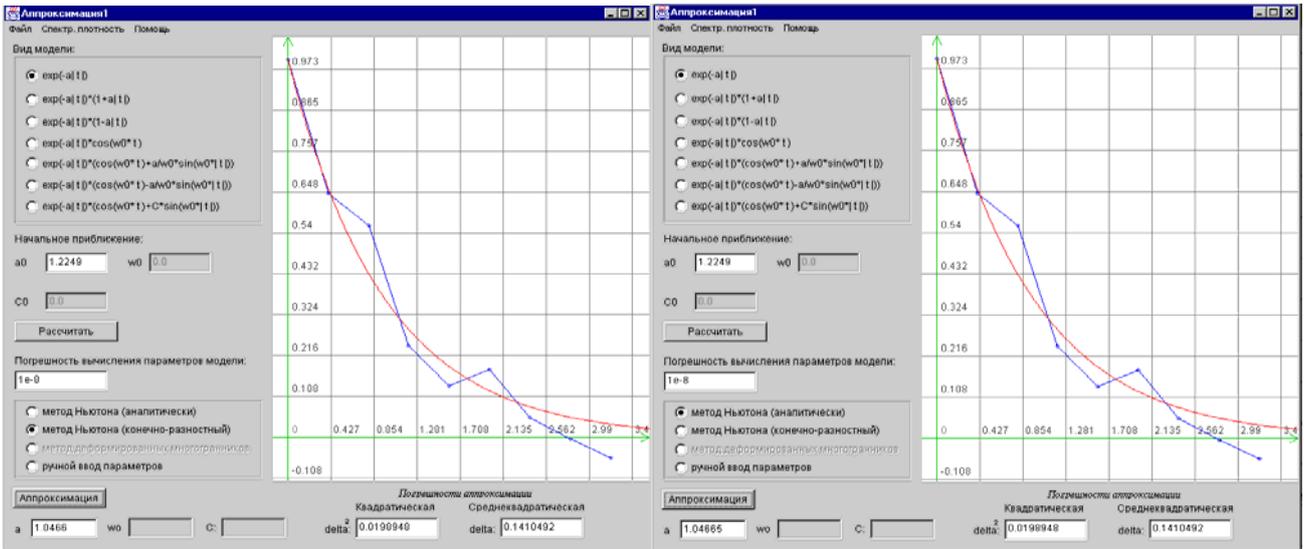


Рисунок 6.33. Результаты аппроксимации моделью $\rho_{a1}(\tau)e^{-\alpha|\tau|}$

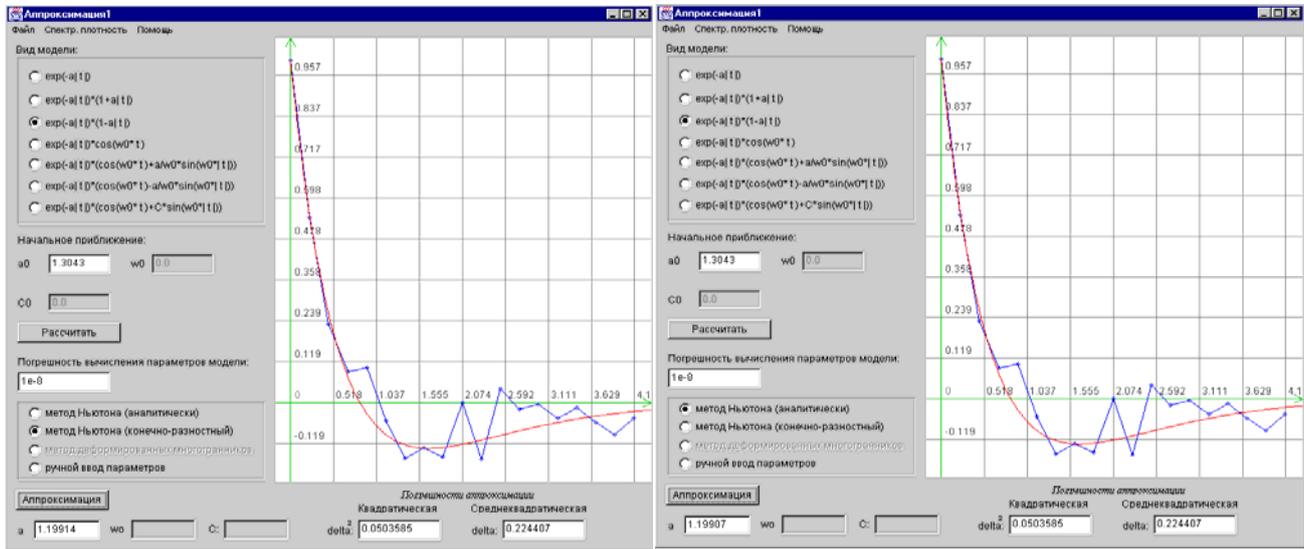


Рисунок 6.34. Результаты аппроксимации моделью $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$

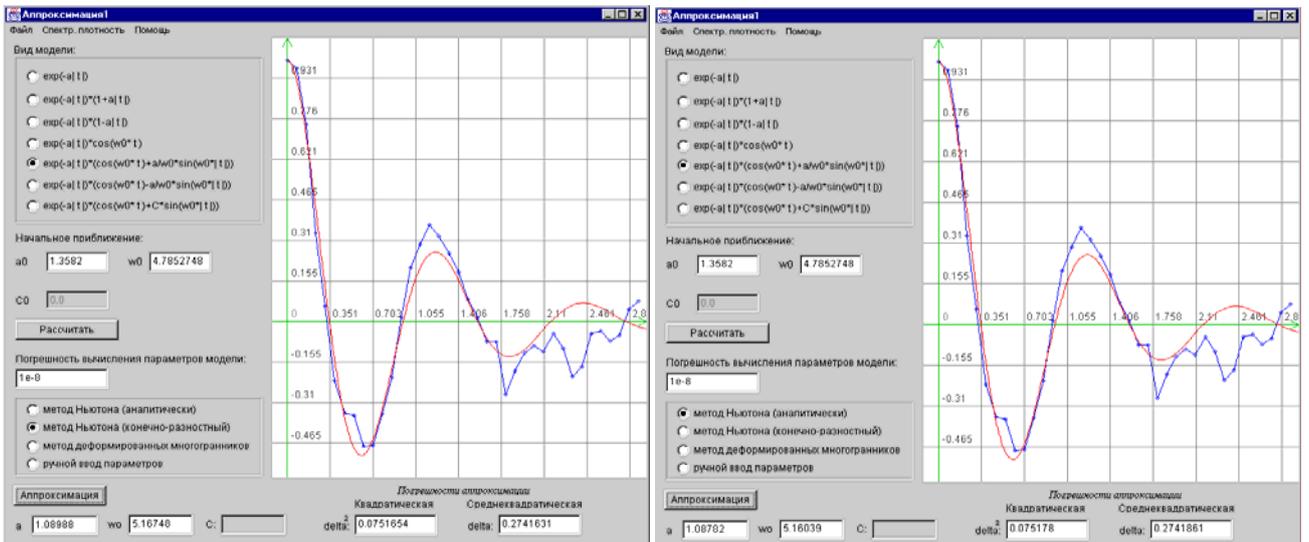


Рисунок 6.35. Результаты аппроксимации моделью $\rho_{a6}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$

6.3.4. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника

При аппроксимации КФ функциями заданного вида можно также использовать метод деформированного многогранника, который является одним из прямых методов многомерного поиска и выделяется высокой эффективностью и помехозащищенностью [74].

Метод деформируемого многогранника Нелдера и Мида легко адаптируется к особенностям оптимизируемой функции, не «замечает» отдельные шероховатости функции (вызванные ошибками вычисления), а скорость сходимости алгоритма не слишком сильно зависит от регулярности целевой функции. Очень часто этот метод оптимизации конкурирует с такими мощными методами оптимизации, как метод Ньютона.

Метод деформируемого многогранника является модификацией симплексного метода. Симплексом называют регулярный многогранник в n -мерном евклидовом пространстве. Для случая 2-х переменных симплекс представляет собой равносторонний треугольник; 3-х переменных - тетраэдр и т.д. Для n -мерного пространства симплекс всегда имеет $n+1$ вершину.

Координаты вершин регулярного симплекса можно определить с помощью матрицы размером $n \times (n + 1)$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_2 \\ 0 & r_2 & r_1 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_1 \end{pmatrix}, \quad (6.63)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[\frac{s}{(n\sqrt{2})} \right] \left(\sqrt{n+1} + n - 1 \right), \\ r_2 &= \left[\frac{s}{(n\sqrt{2})} \right] \left(\sqrt{n+1} - 1 \right), \end{aligned} \quad (6.64)$$

s - параметр, отождествляемый с расстоянием между двумя вершинами.

Элемент r_{ij} матрицы R равен i -ой координате j -ой вершины симплекса.

Поиск минимума функции симплексным методом ведётся следующим образом:

1. В каждой вершине симплекса вычисляется значение функции $y_i = f(x_i)$.
2. Определяется вершина с наибольшим (наихудшим) значением $f(x)$.
3. Через эту вершину и центральную точку симплекса проводится прямая, на которой на некотором удалении от центра S устанавливается новая вершина (см. рис. 6.36).

4. Вершина с наибольшим значением $F(x)$ удаляется. Симплекс по существу «переворачивается» через грань, противоположную наихудшей вершине.

5. Далее процесс повторяется, начиная с п.1.

Важной особенностью симплексного метода поиска является то, что для реализации каждого последующего шага итерации необходимо вычислить функцию $f(x)$ лишь в одной новой точке симплекса. Сама же оптимизация этим алгоритмом ассоциируется с процессом «кантования» симплекса вниз по поверхности функции $f(x)$ в направлении её минимума.

Регулярный метод симплексного поиска склонен к зацикливанию, поэтому,

Нелдер и Мид, нарушив регулярность, устранили указанный недостаток.

Обозначим X_k^A - вершину многогранника (первоначального симплекса), которая даёт максимальное значение $f(x)$ на k -ом шаге, а X_k^B - минимальную оценку функции $f(x)$. Определим вектор координат X_k^C центра многогранника по следующей формуле:

$$x_i^C = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^j \right) - x_i^A \right], \quad (6.65)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

где i - номер координаты, j - номер вершины симплекса, k - номер шага итерации.

В методе деформируемого многогранника над многогранником выполняются операции **отражения, растяжения, сжатия и редукции**.

1. **Отражение** есть проецирование X_k^A через центр X_k^C в соответствии с соотношением:

$$X_k^0 = X_k^C + a(X_k^C - X_k^A), \quad (6.66)$$

где $a > 0$ - коэффициент отражения, X_k^0 - вектор координат новой (отражённой вершины).

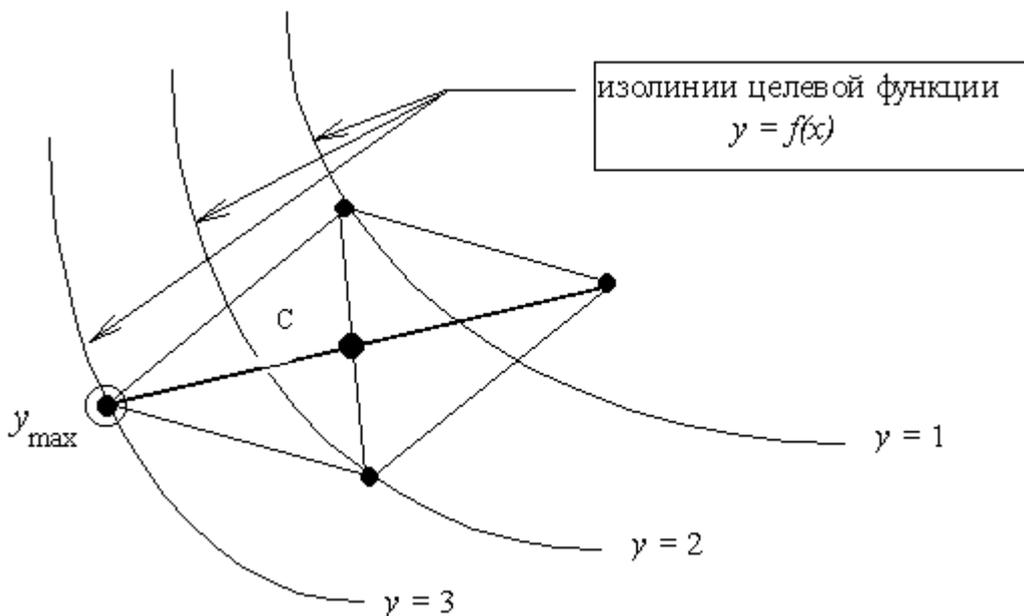


Рисунок 6.36. Геометрическая интерпретация симплексного поиска

2. **Растяжение** применяется в том случае, когда отражение оказалось удачным, то есть значение функции в новой точке меньше, чем в наилучшей из вершин многогранника:

$$f(X_k^0) \leq f(X_k^B),$$

при этом вектор $X_k^0 - X_k^C$ растягивается, и получается новая точка

$$X_k^P = X_k^C + \gamma(X_k^0 - X_k^C), \quad (6.67)$$

где $\gamma > 1$ - коэффициент растяжения.

3. **Сжатие** выполняется, когда в результате отражения значение функции в точке X_k^0 оказалось больше, чем во всех вершинах многогранника, кроме вершины X_k^A , то есть:

$$\begin{aligned} f(X_k^0) &< f(X_k^A) \\ f(X_k^0) &> f(X_k^j), j \neq A \end{aligned}$$

тогда вектор $X_k^A - X_k^C$ сжимается так, что

$$X_k^{Cж} = X_k^C + \beta(X_k^0 - X_k^C) \quad (6.68)$$

где $0 < \beta < 1$ - коэффициент сжатия.

4. **Редукция**, то есть сжатие симплекса в два раза по отношению к вершине с наименьшим значением $f(x): f(x_k^B)$.

Редукция применяется, если $f(X_k^0) > f(X_k^A)$ и выполняется по формуле:

$$X_k^j = X_k^B + 0,5(X_k^j - X_k^B), \text{ при } j=1,2,\dots,n+1.$$

На рис. 6.37 схематично показаны перечисленные операции.

Метод деформируемого многогранника прекращает свою работу, если выполняются условия:

$$\left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^j) - f(x_k^C)]^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - малое число, определяющее ε -окрестность поиска экстремума.

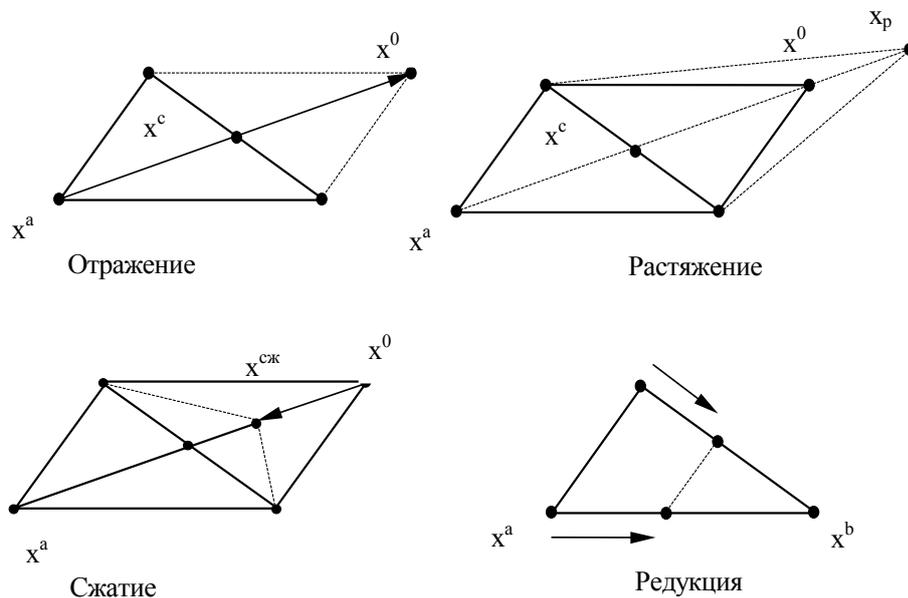


Рисунок 6.37. Основные операции метода деформированного многогранника

Рассмотрим применение метода деформированного многогранника к решению задач аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

При использовании метода деформированного многогранника задача поиска параметров, удовлетворяющих минимуму квадратичной погрешности, сводится к отысканию экстремума (минимума) следующей целевой функции:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (6.69)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – независимые переменные (входные, варьируемые параметры).

Рассмотрим примеры целевых функций, используемых для решения задачи аппроксимации КФ типовыми однопараметрическими моделями [73].

1. $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \right]^2 \rightarrow \min.$$

2. $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

3. $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

4. $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i \right]^2 \rightarrow \min.$$

5. $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

6. $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$.

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[\hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left(\cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

На рис. 6.38–6.39 приведены результаты аппроксимации колебательных корреляционных функций двухпараметрическими моделями методом деформированного

многогранника для р-преобразования случайного процесса (р=0,4). Объем выборки равен M=1000.

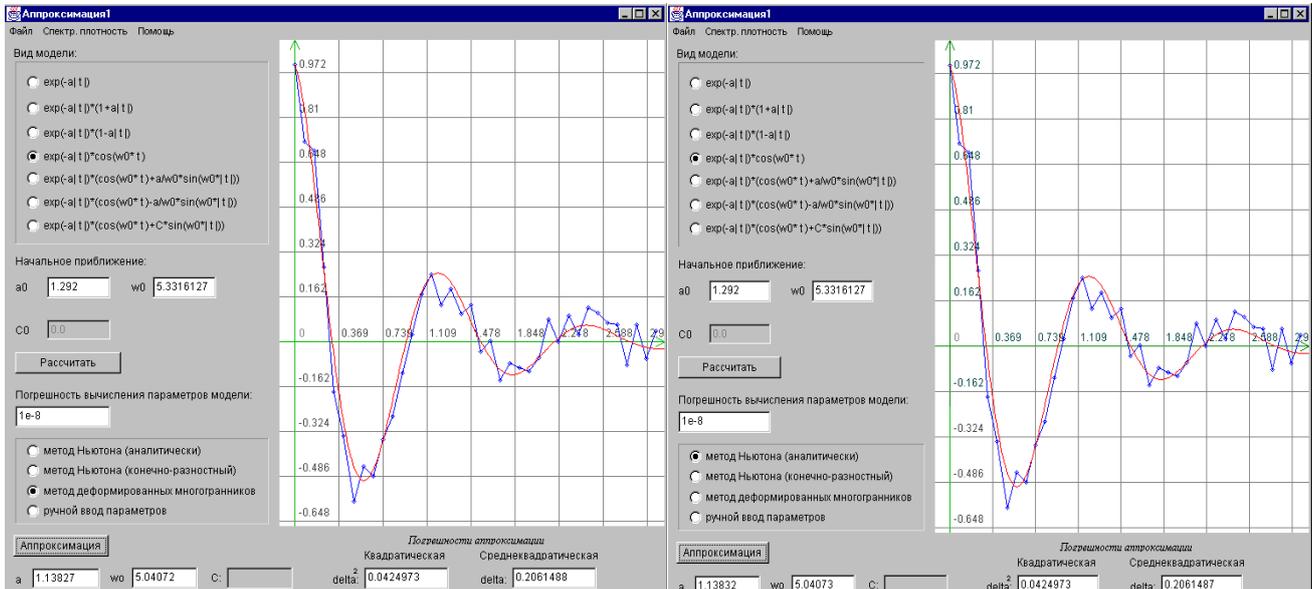


Рисунок 6.38. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

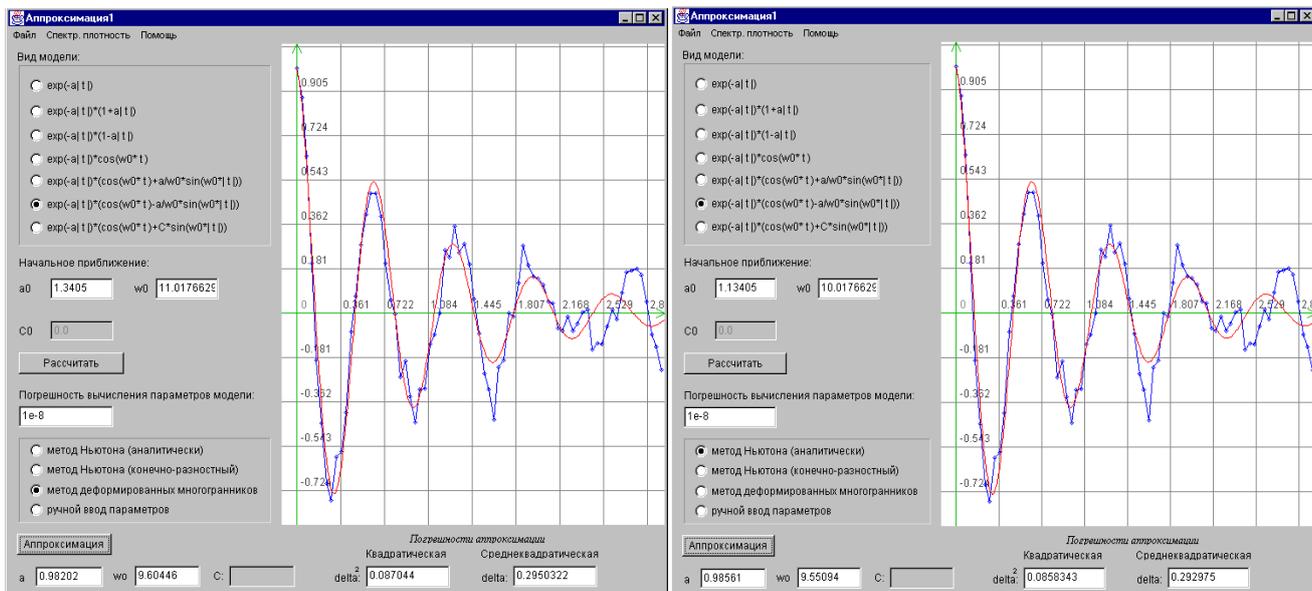


Рисунок 6.39. Результаты аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$

На правых рисунках приведены результаты аппроксимации корреляционных функций методом Ньютона с аналитическим определением производных, которые практически не отличаются от результатов, полученных методом деформированного многогранника. Однако следует подчеркнуть, что метод деформируемых многогранников менее критичен к выбору начального приближения.

6.3.5. Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра

Одной из сложных задач, которую приходится решать при аппроксимации корреляционных функций, является выбор модели корреляционной функции. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [176]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера [94], согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (6.70)$$

где β_k - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$ - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале $(0, \infty)$ с весом $\mu(\tau)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (6.71)$$

Так как ряд сходится в интервале $(0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [111] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (6.72)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением (см. приложение П.7):

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (6.73)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (6.74)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (6.70). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.

Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (6.75)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (6.76)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (6.77)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (6.78)$$

Из выражений (6.77) и (6.78) видно, что значения погрешности аппроксимации Δ и коэффициентов разложения β_k зависят от численного значения параметра α . Как показали исследования [109], относительная погрешность аппроксимации

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} \quad (6.79)$$

зависит от величины этого параметра, вида корреляционной функции и её показателя колебательности μ , числа членов разложения ряда m . На рис. 6.40 приведены результаты определения погрешности аппроксимации

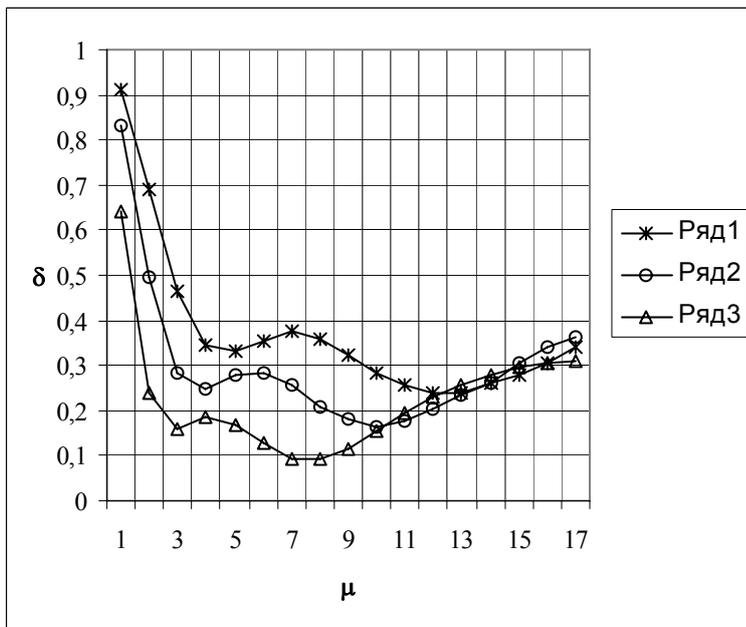


Рисунок 6.40. Методическая погрешность

зависит от m [87]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра

нормированной корреляционной функции вида $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ моделью (6.75) при $m=2$ в зависимости от отношения параметра функций Лагерра к показателю затухания исследуемых корреляционных функций - $\chi = \alpha/\lambda$. На рисунке 6.40 ряду 1 соответствует значения погрешности при $\omega_0 / \lambda = 5$, ряду 2 - 4, ряду 3 - 3.

Отсюда видно, что при выбранной модели корреляционной функции, $\mu = \text{const}$, $m = \text{const}$, погрешность существенным образом зависит от χ , т.е. α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависи-

α , обеспечивающего минимальную погрешность аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Для решения этой задачи требуется априорная информация о корреляционных (спектральных) свойствах исследуемого процесса. Это либо сведения о его граничной частоте ω_b , либо о его корреляционной функции.

В первом случае величина параметра α определяется из соотношения [56]:

$$\alpha = 1 - 4 \omega_b. \quad (6.80)$$

Этот способ, не требуя дополнительных затрат, существенно увеличивает время анализа, так как при этом необходимо многократно определять корреляционную функцию. Кроме того, он не позволяет минимизировать погрешность аппроксимации.

Следующей попыткой явилось решение частной задачи определения величины α , минимизирующей погрешность равномерного приближения [123]

$$\delta = \left| K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right| = \min. \quad (6.81)$$

Для корреляционной функции вида $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ величина α определяется выражением:

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (6.82)$$

Как следует из этого выражения, для определения искомого параметра необходимо знание λ и ω_0 , что, на наш взгляд, является избыточным. Знание параметров λ и ω_0 позволяет непосредственно представить искомую модель в виде $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Таким образом, необходимо разработать алгоритм поиска параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации.

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

В [107] предлагаются и анализируются различные алгоритмы решения этой задачи, которые для удобства сравнения представим в таблице 6.3. Кроме этого, в таблице представлен эвристический алгоритм (см. алгоритм 8).

Алгоритмы подбора параметра α

Таблица 6.3

№	Алгоритм	Преимущества	Недостатки
1	$\beta_{m+1} = 0$	Минимум погрешности	$m+1$ корней
2	$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0$	Минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	$m+1$ корней
3	$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$	Аналитическое решение, один корень	$\delta \neq \min$
4	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на глобальный минимум погрешности	Сложность реализации, увеличивается время анализа

Продолжение таблицы 6.3

5	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ b_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	Сложность реализации, увеличивается время анализа
6	$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0$	Один корень	$\delta \neq \min$
7	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0$	Близок к δ_{\min}	$m+1$ корней
8	$\alpha = 2\omega_0$	Простота определения α	$\delta \neq \min$

Сравнительный анализ алгоритмов показывает, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм 3. Параметр α , определенный по этому алгоритму находится вблизи $\alpha_{\text{опт}}$ и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным [88].

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра является то, что её основное свойство

$$K_x(0) = D_x = \sum_{k=0}^m \beta_k, \quad (6.83)$$

как видно из выражения

$$\sum_{k=0}^m \beta_k = D_x - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} d\omega, \quad (6.84)$$

при произвольной величине α не выполняется при конечном m . Условие (6.83) при произвольной величине α выполняется лишь при $m \rightarrow \infty$.

Для обеспечения условия (6.83) аналитическое выражение $K_x(\tau)$ можно искать в виде:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(\tau, \alpha), \quad (6.85)$$

где

$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} D_x. \quad (6.86)$$

Легко проверить, что в этом случае $K_x(0) = \sum_{k=0}^m \beta_k = D_x$. Однако, коэффициенты разложения c_k , определенные по формуле (6.86), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции b_k

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \quad (6.87)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k = D_x. \quad (6.88)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать Δ_1 по b_k [109]:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \sum_{k=0}^m b_k = \min. \quad (6.89)$$

Решение этой задачи [109] даёт алгоритм определения коэффициентов разложения b_k

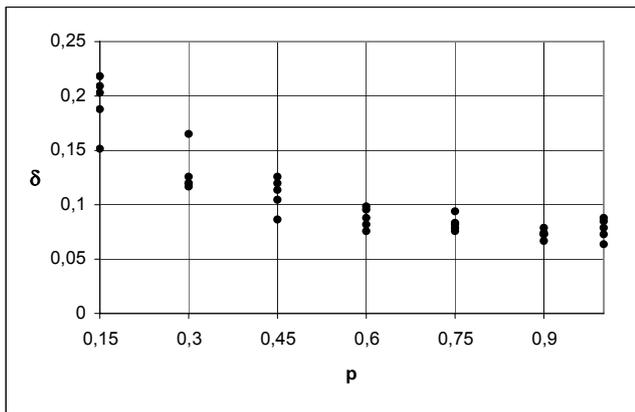
$$b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}. \quad (6.90)$$

При определении числа членов разложения ряда m воспользуемся результатами подраздела 3.7 [107], с помощью которых определим оптимальное число членов разложения ряда (6.75), обеспечивающее минимальную погрешность аппроксимации.

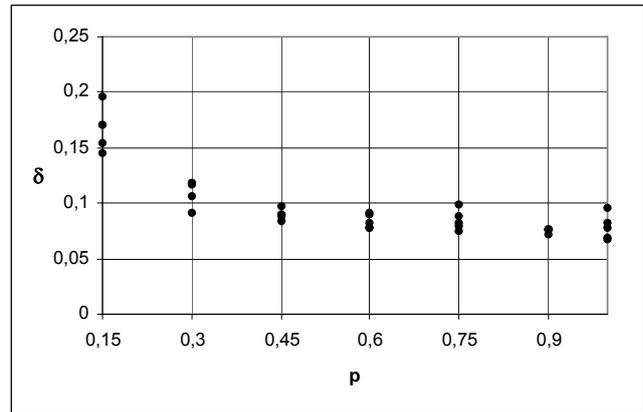
Методика аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0, \dots, J_{\max}}$;
2. определяется параметр функций Лагерра α в результате решения уравнения (4.30);
3. определяются коэффициенты разложения $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (6.77);
4. определяются коэффициенты разложения $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$ в соответствии с выражением (6.90);
5. определяется число членов разложения ряда (6.75) m_{opt} , обеспечивающее минимальное значение погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции δ ;
6. определяются параметры аппроксимирующего выражения: α , $m = m_{\text{opt}}$, $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$, $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$, δ .

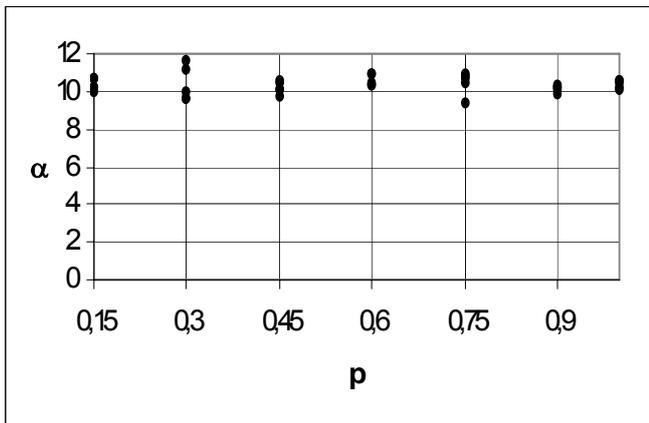
На рис. 6.41 приведены результаты оценки погрешности аппроксимации δ , параметра функции Лагерра α и оптимального числа членов разложения ряда m от значения параметра p -преобразования для различных эквивалентных объёмов выборки для $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.



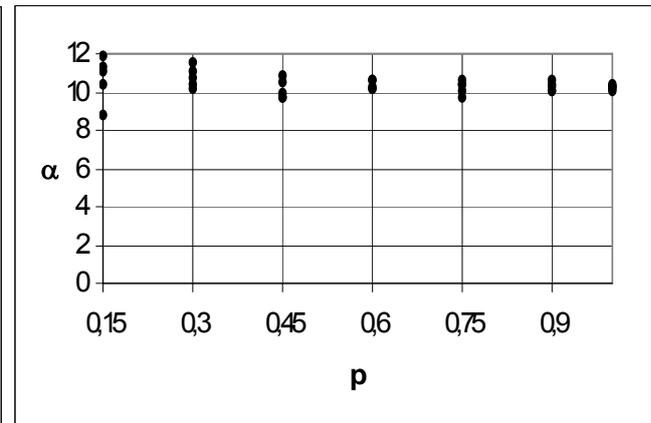
а) $\delta = f(p)$, $M_3 = 1000$



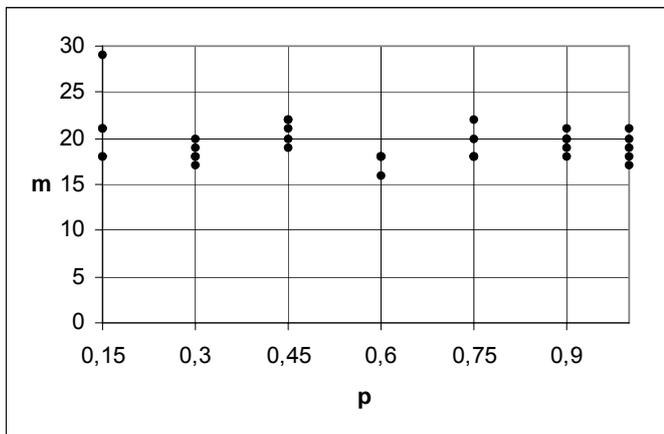
б) $\delta = f(p)$, $M_3 = 1500$



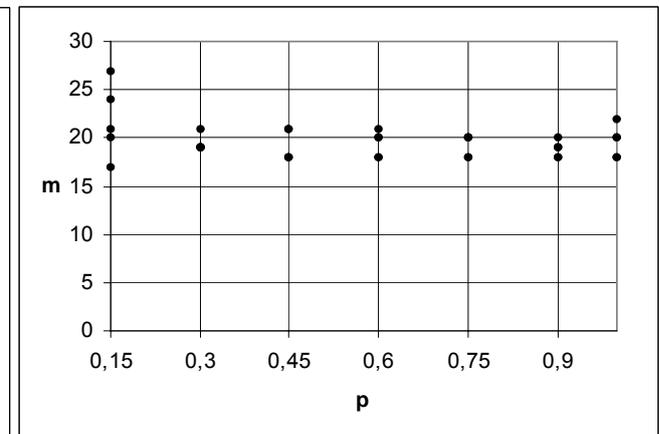
в) $\alpha = f(p)$, $M_3 = 1000$



г) $\alpha = f(p)$, $M_3 = 1500$



д) $m = f(p)$, $M_3 = 1000$



е) $m = f(p)$, $M_3 = 1500$

Рисунок 6.41. Результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при p -преобразовании неэквидистантных временных рядов

Анализ результатов показывает, что погрешность аппроксимации зависит от численного значения параметра p -преобразования и уменьшается с увеличением p . Зависимость погрешности от эквивалентного объёма выборки при аппроксимации корреляционных функций Лагерра меньше, чем аналогичные зависимости при аппроксимации функциями заданного вида.

Значение параметра функции Лагерра α для рассматриваемой модели близко к теоретическому значению $\alpha_T = 10,2$ и практически не зависит от значения параметра p при эквивалентном объеме выборки $M_p \geq 1000$.

Оптимальное число членов разложения ряда m колеблется около 20 и также мало зависит от значения параметра p и эквивалентного объема выборки при $M_p \geq 1000$.

На рис. 6.42-6.43 приведены: зависимости погрешности аппроксимации от числа членов разложения ряда и результаты аппроксимации для корреляционной функции вида $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ для $M_p = 1500$, на рис. 6.44-6.46 – для других колебательных моделей.

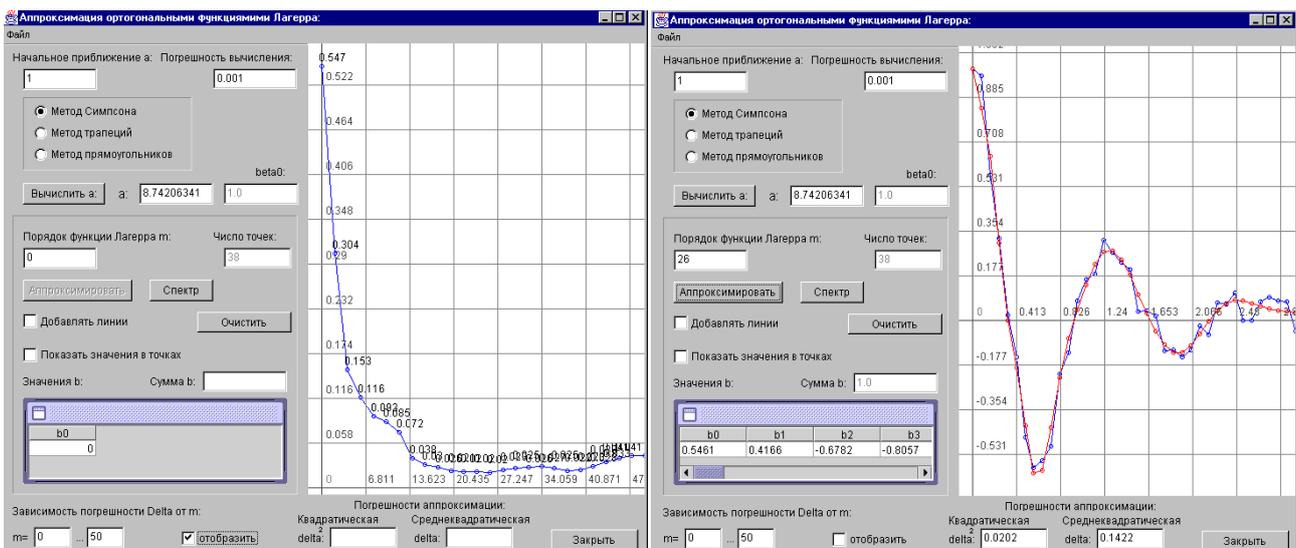


Рисунок 6.42. Результаты аппроксимации $p=0,15$, $M=10000$

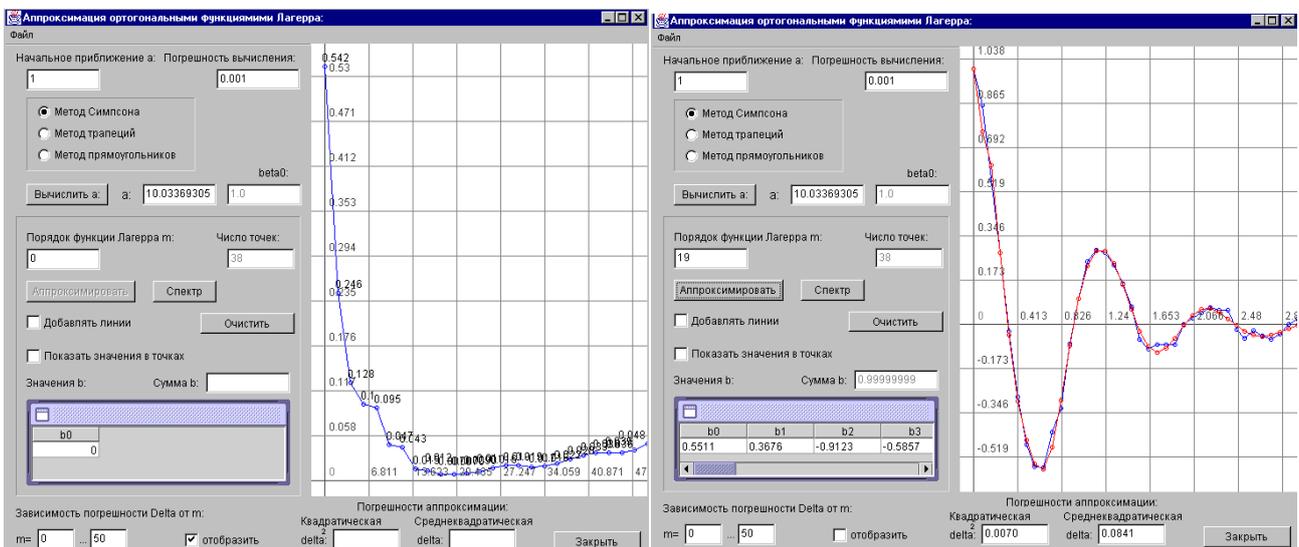


Рисунок 6.43. Результаты аппроксимации $p=0,45$, $M=3333$

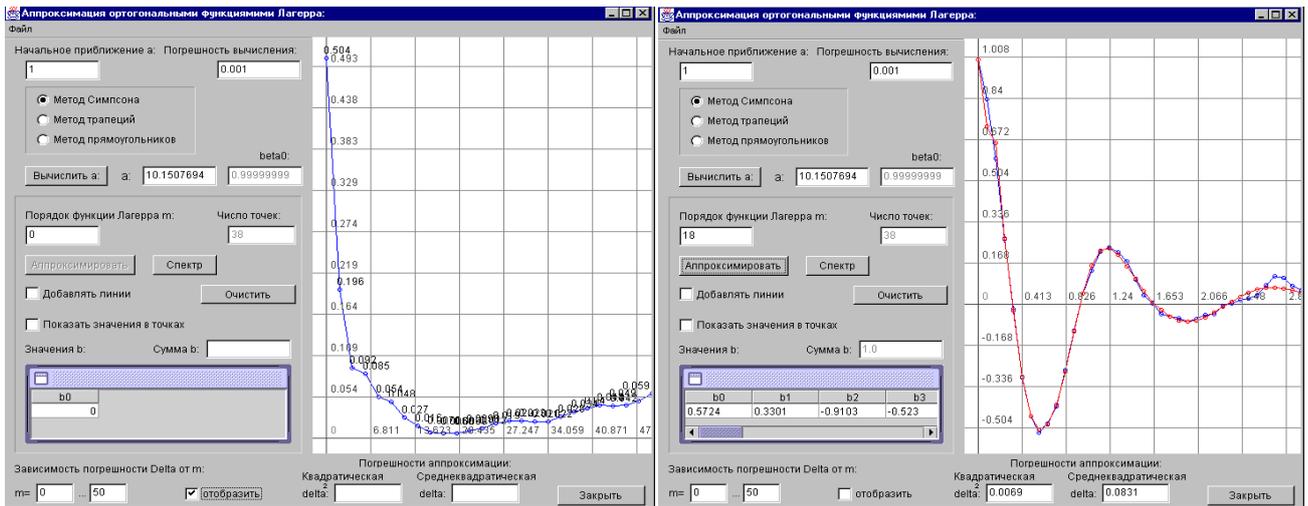
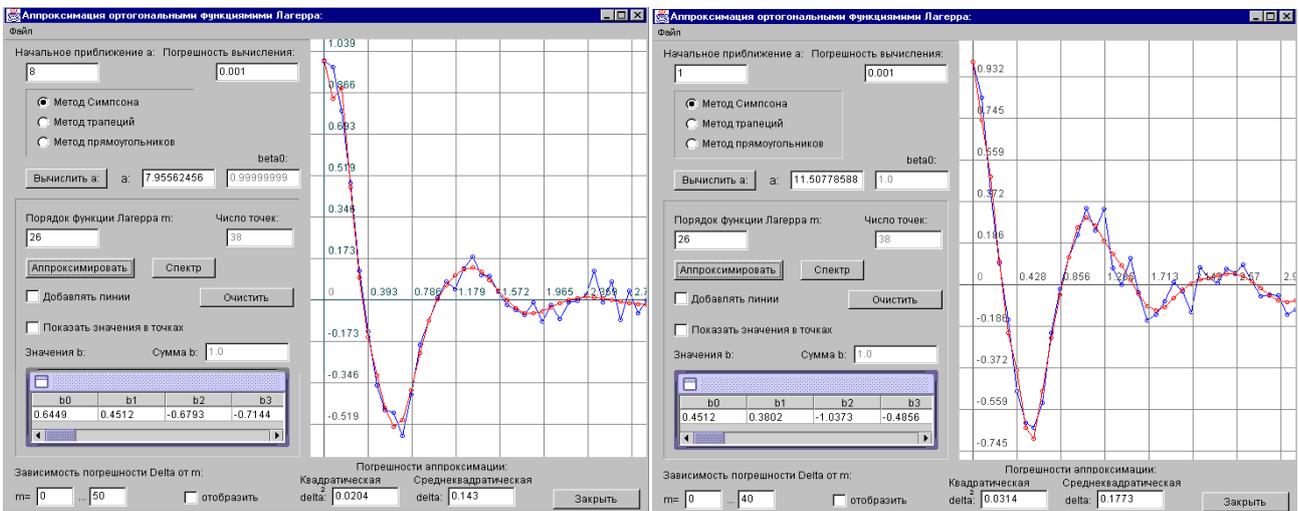


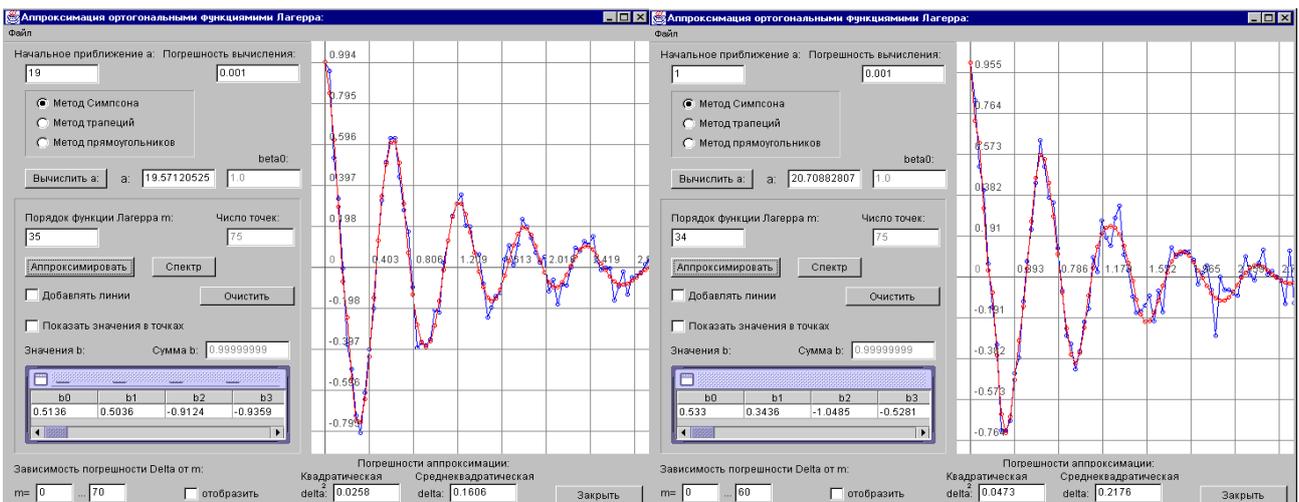
Рисунок 6.44. Результаты аппроксимации $p=0,75$, $M=2000$



а) $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0\tau + \sin \omega_0|\tau|)$

б) $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0\tau + \sin \omega_0|\tau|)$

Рисунок 6.45. Результаты аппроксимации $p=0,15$, $M=10000$, $\omega_0=5$



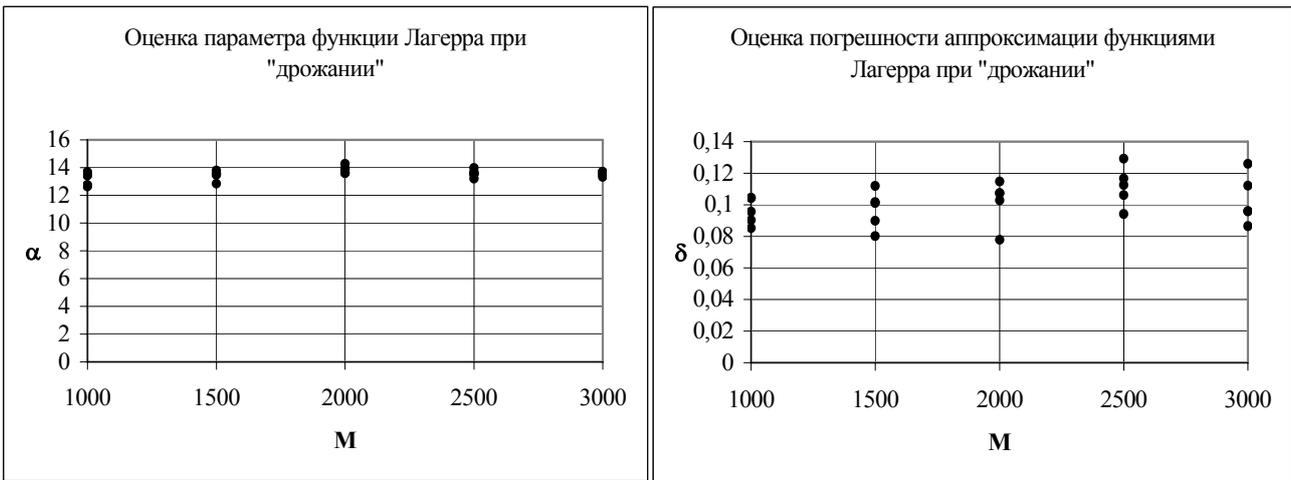
а) $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau$

б) $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0\tau + \sin \omega_0|\tau|)$

Рисунок 6.46. Результаты аппроксимации $p=0,15$, $M=10000$, $\omega_0 = 10$

Полученные результаты удовлетворяют требованиям практики.

На рис. 6.47-6.49 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при «дрожании» временного ряда.



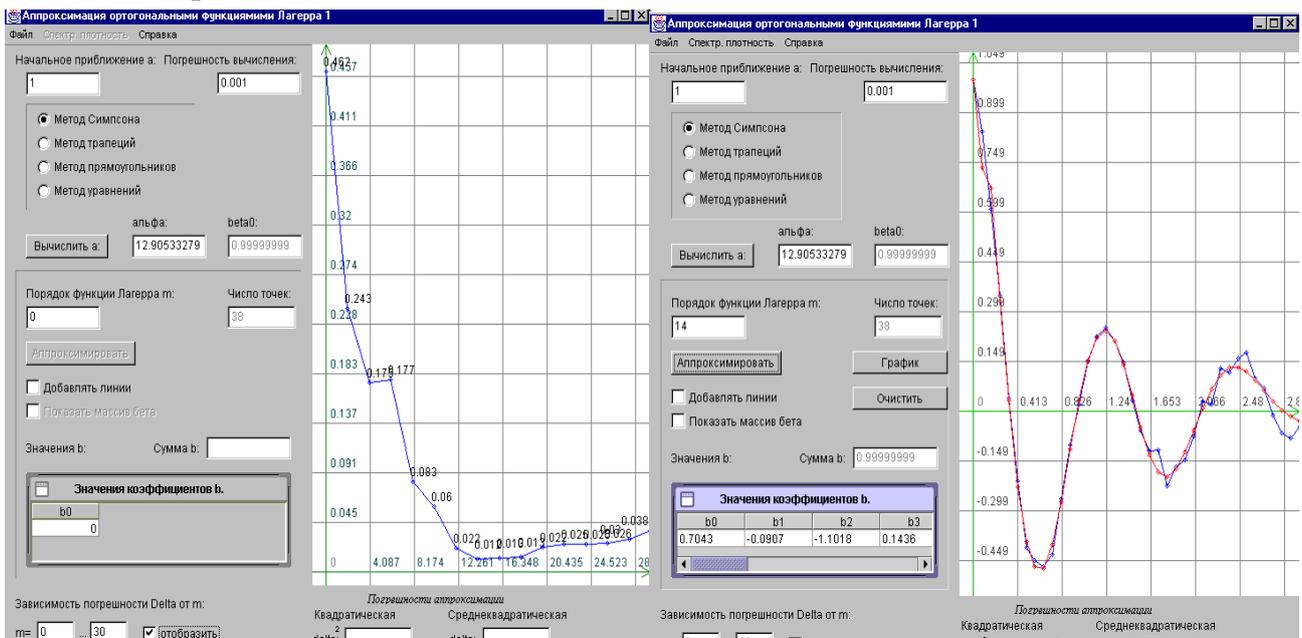
а) б)

Рис. 6.47 Результаты аппроксимации

Анализ результатов показывает, что:

1. значение параметра функции Лагерра при изменении объёма выборки в диапазоне 1000-3000 изменяется незначительно;
2. число членов разложения ряда m в этом же диапазоне тоже изменяется в небольших пределах;
3. диапазон изменения погрешности аппроксимации также изменяется в незначительно.

Отсюда следует вывод, что при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов целесообразно применять модель на базе ортогональных функций Лагерра, параметры которой можно определять при эквивалентном объёме выборки больше 1000.

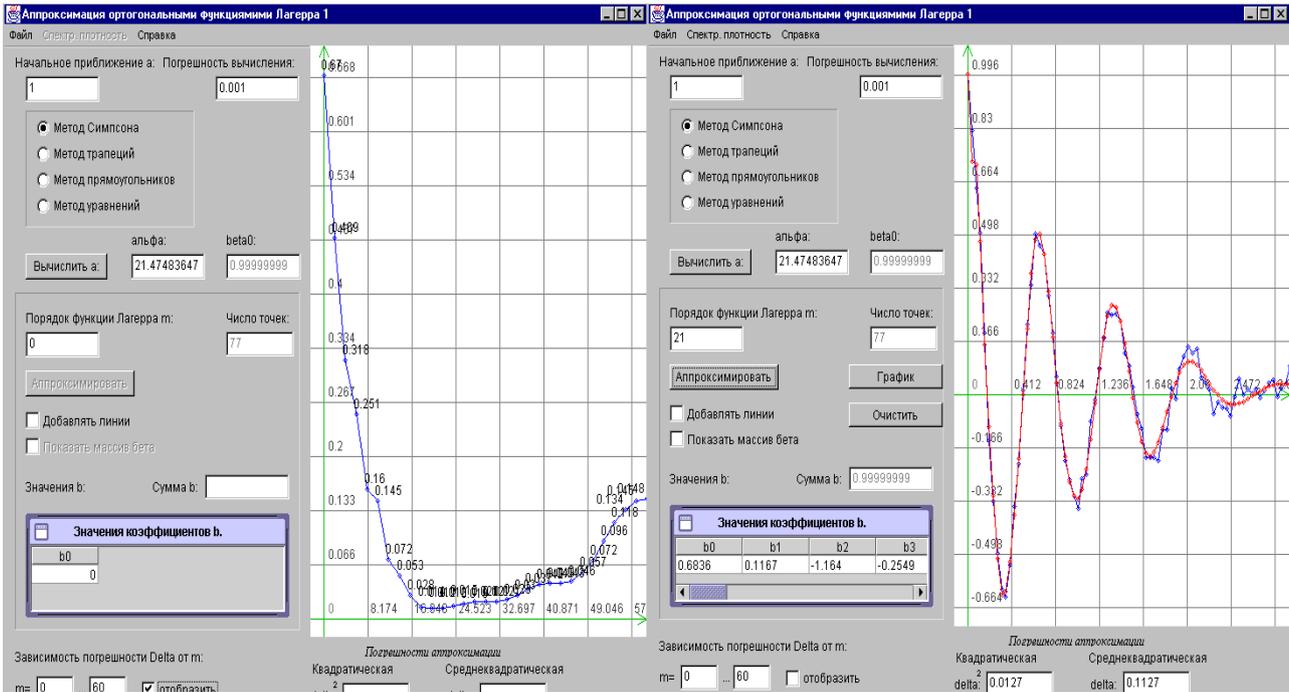


а) Погрешность аппроксимации

б) Аппроксимация функции

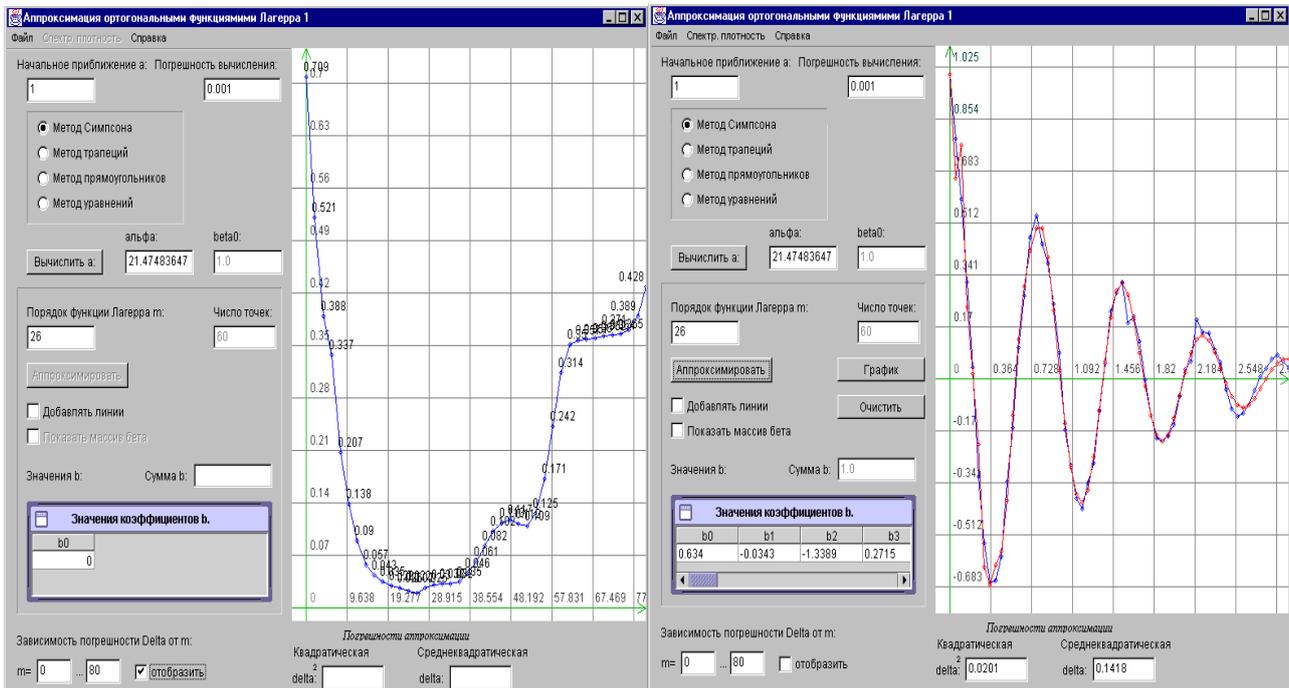
$$\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$$

Рисунок 6.48.



в) Погрешность аппроксимации

г) Аппроксимация функции
 $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|}(\cos 5\tau + 0,2 \sin 5|\tau|)$



в) Погрешность аппроксимации

г) Аппроксимация функции
 $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|}(\cos 8\tau - 0,125 \sin 9|\tau|)$

Рисунок 6.49.

6.3.6. Аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями

При решении ряда практических задач, к которым относятся, например:

- измерение скорости движения, проката [95];
- измерение значения «мертвого» времени [129] и т.д. -

исследуемый случайный сигнал $\overset{\circ}{x}(t)$ задерживается на некоторый временной интервал τ_m (см. рис. 6.50).

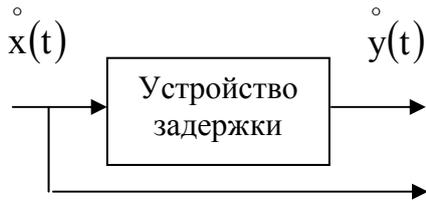


Рисунок 6.50.

Выходной сигнал устройства задержки можно представить в виде $\overset{\circ}{y}(t) = \overset{\circ}{x}(t - \tau_m)$, и взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов будет равна

$$K_{xy}(\tau) = K_x(\tau - \tau_m). \quad (6.91)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае возможна аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями. Для сведения задачи аппроксимации взаимной корреляционной функции к аппроксимации корреляционных функций необходимо определить значение τ_m , соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции. После этого можно воспользоваться результатами подразделов 6.3.2-6.3.4.

В общем же случае необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции. Для идентификации взаимной корреляционной функции можно воспользоваться фазовыми портретами (см. рис.6.51-6.52).

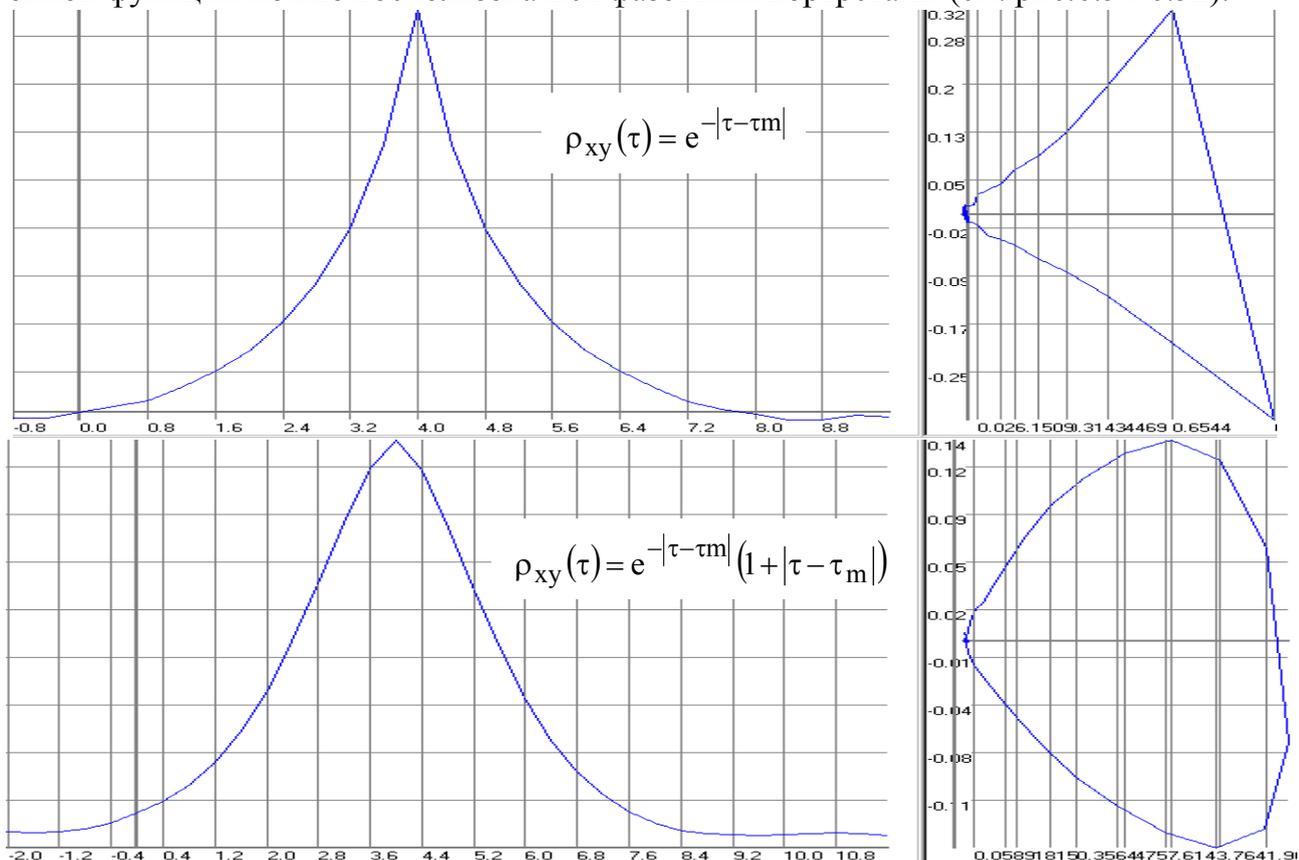


Рисунок 6.51. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

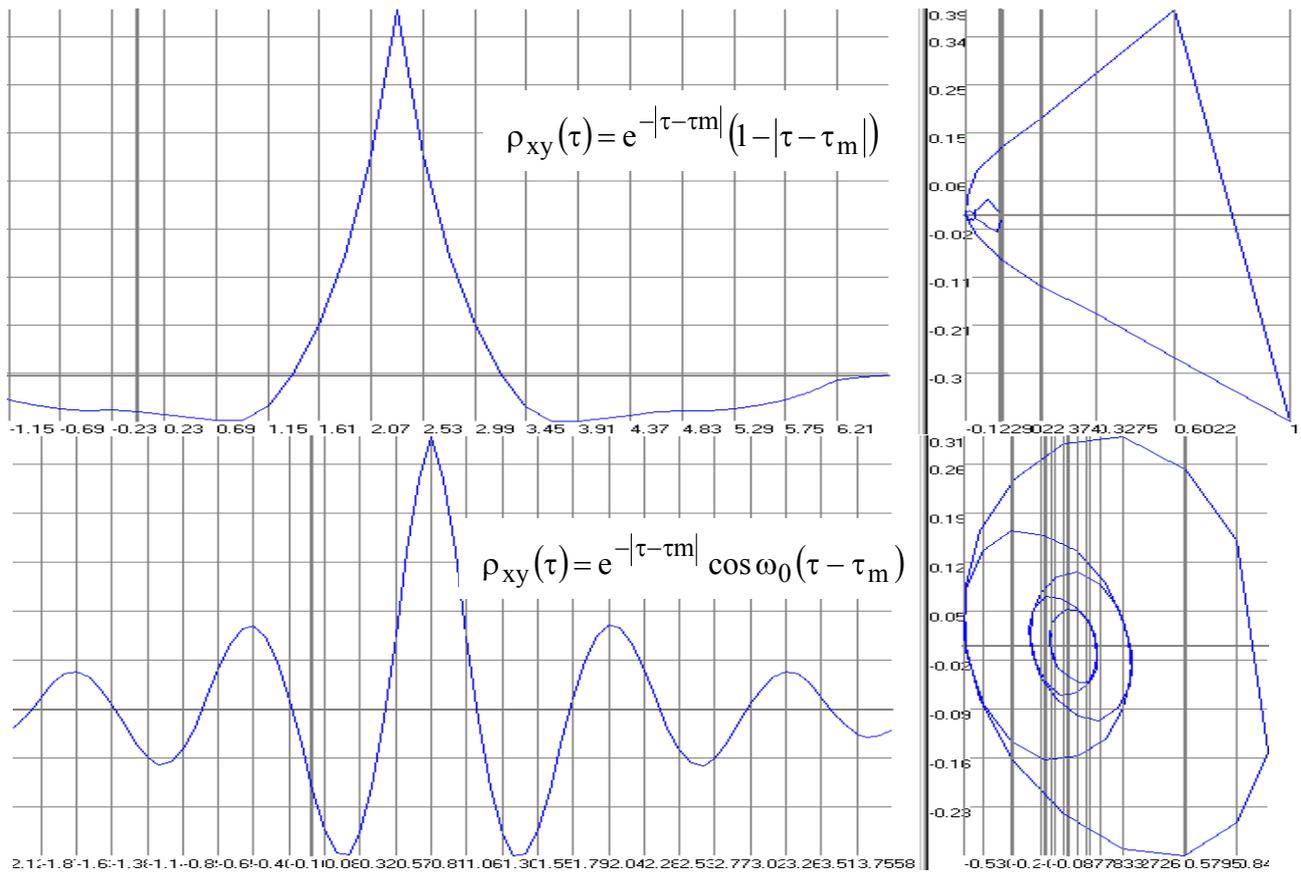


Рисунок 6.52. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

На рис. 6.53-6.55 последовательно представлены результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции параметрической моделью

$$\rho_{xy}(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} \left(\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0|\tau - \tau_m| \right). \quad (6.92)$$

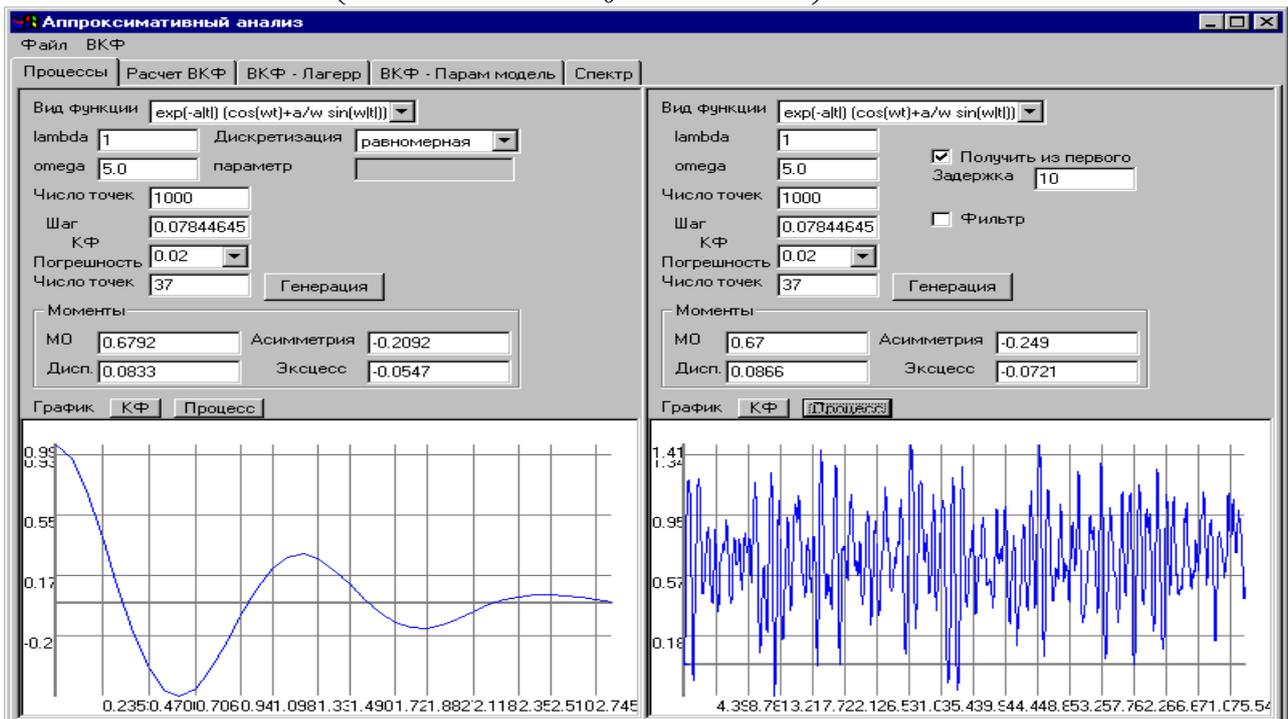


Рисунок 6.53. Характеристики исследуемых процессов

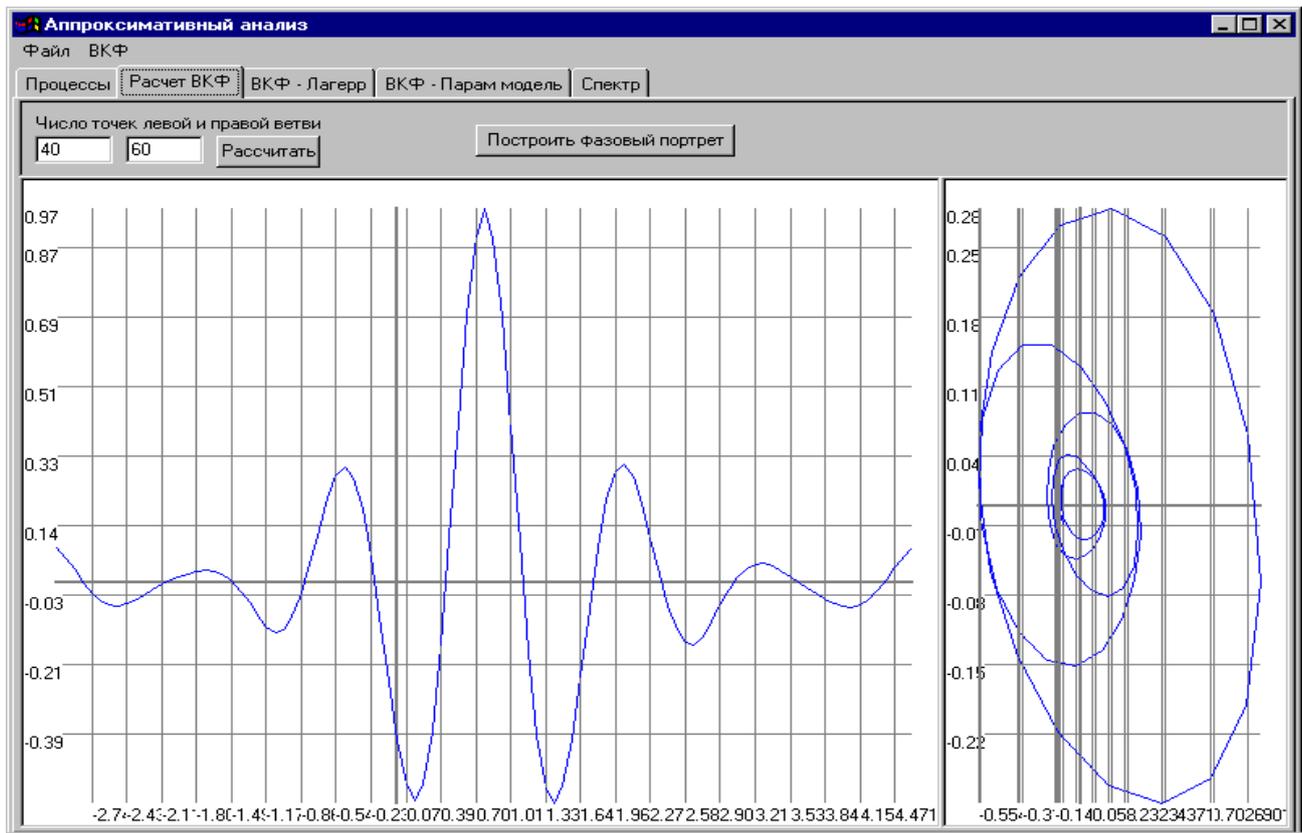


Рисунок 6.54. Взаимная корреляционная функция и её фазовый портрет

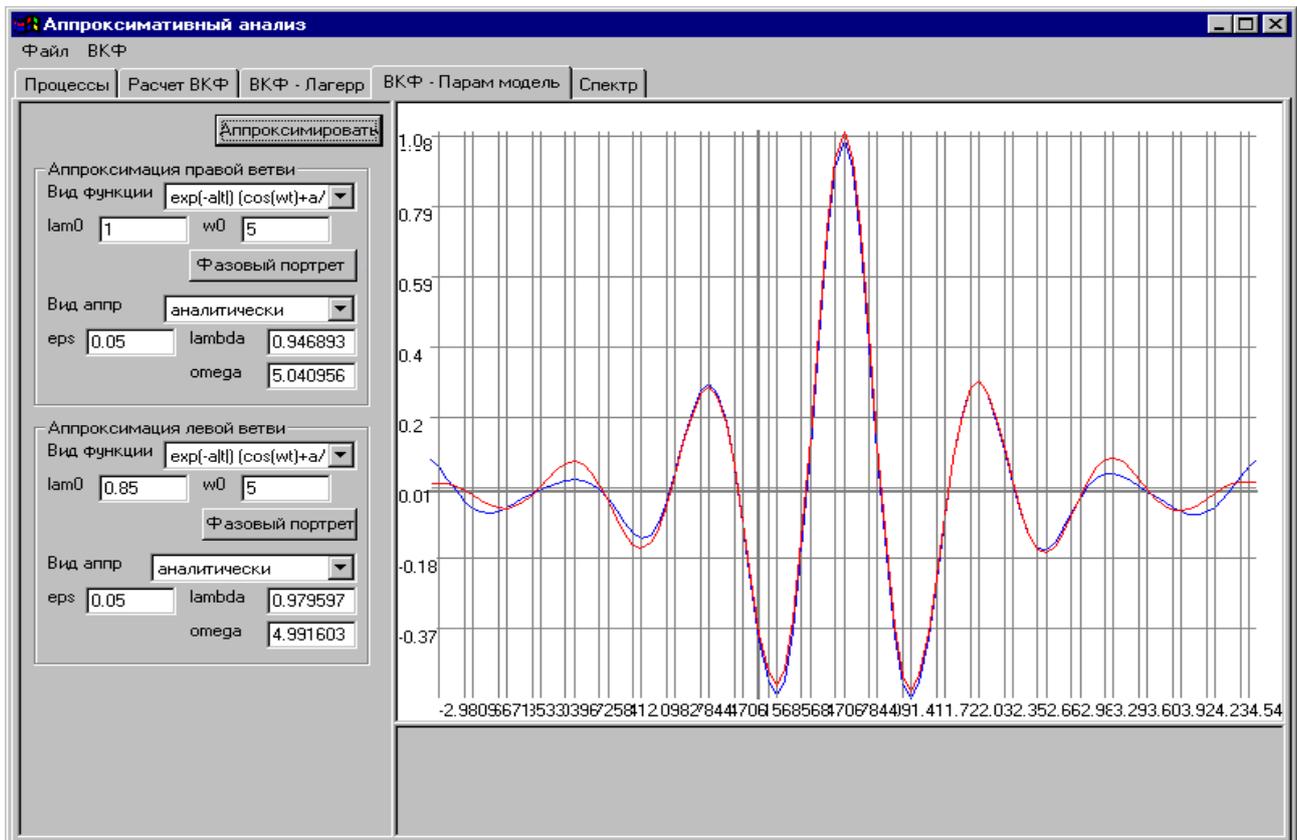


Рисунок 6.55. Результаты аппроксимации

Аналогичным образом можно найти аналитические выражения взаимной корреляционной функции и для других моделей.

6.3.7. Аппроксимация взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

Полученные в подразделе 6.3.8 результаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции, то есть искать модель в виде:

$$K_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,п} l(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,л} l(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2). \quad (6.93)$$

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в нуле. В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс. Результаты аппроксимации нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{xy}(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}$, где τ_m - значение аргумента, соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции, при $M=5000$ представлены на рис. 6.56.

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда (6.93) – 82 параметра. Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

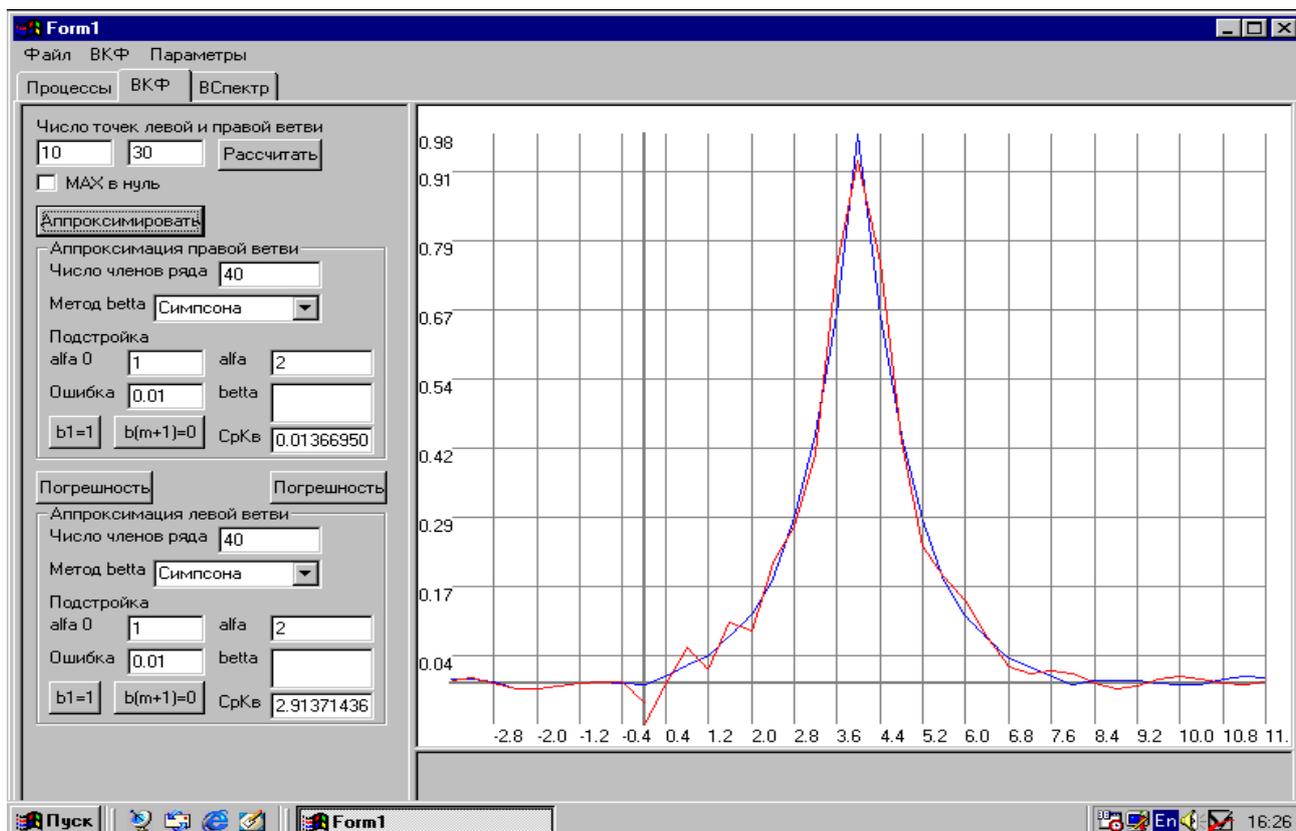


Рисунок 6.56. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить τ_m и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,п} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,л} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2). \quad (6.94)$$

После модификации модели можно воспользоваться методикой оценки параметров ортогонального ряда, разработанного в подразделе 4.6.

Результаты аппроксимации для рассмотренного на рис. 6.56 примера приведены на рис. 6.57.

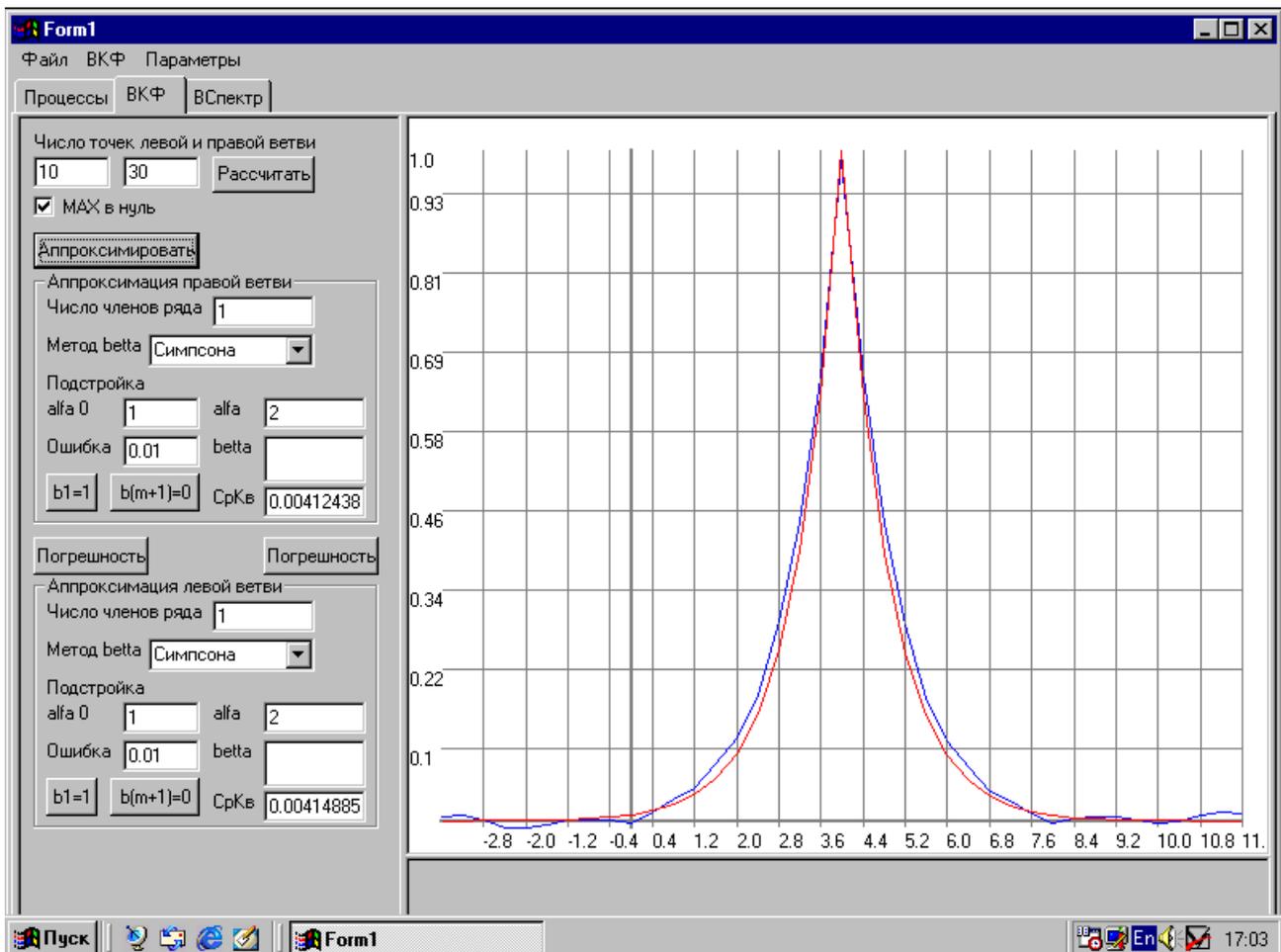


Рисунок 6.57. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции с использованием модифицированного алгоритма

Заметим, что полученная модель содержит всего пять параметров: $\tau_m, \beta_{0,п}, \beta_{0,л}, \alpha_1, \alpha_2$, а значение нормированной взаимной корреляционной функции в нуле равно 1.

На рис. 6.58 приведены результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции колебательных моделей стационарных случайных процессов, один из которых задержан относительно другого на некоторое количество интервалов дискретизации. Объём выборки $M=2000$.

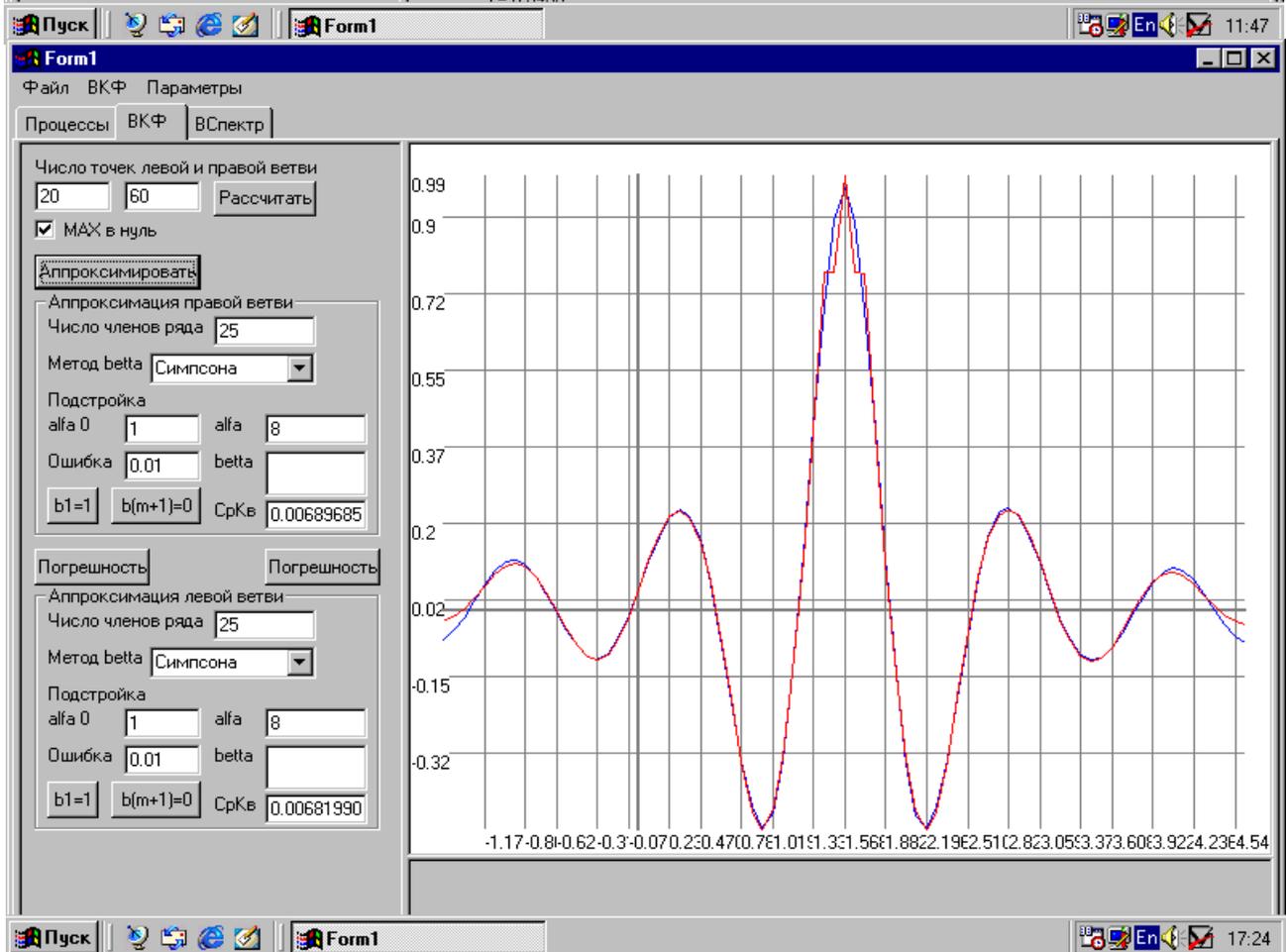
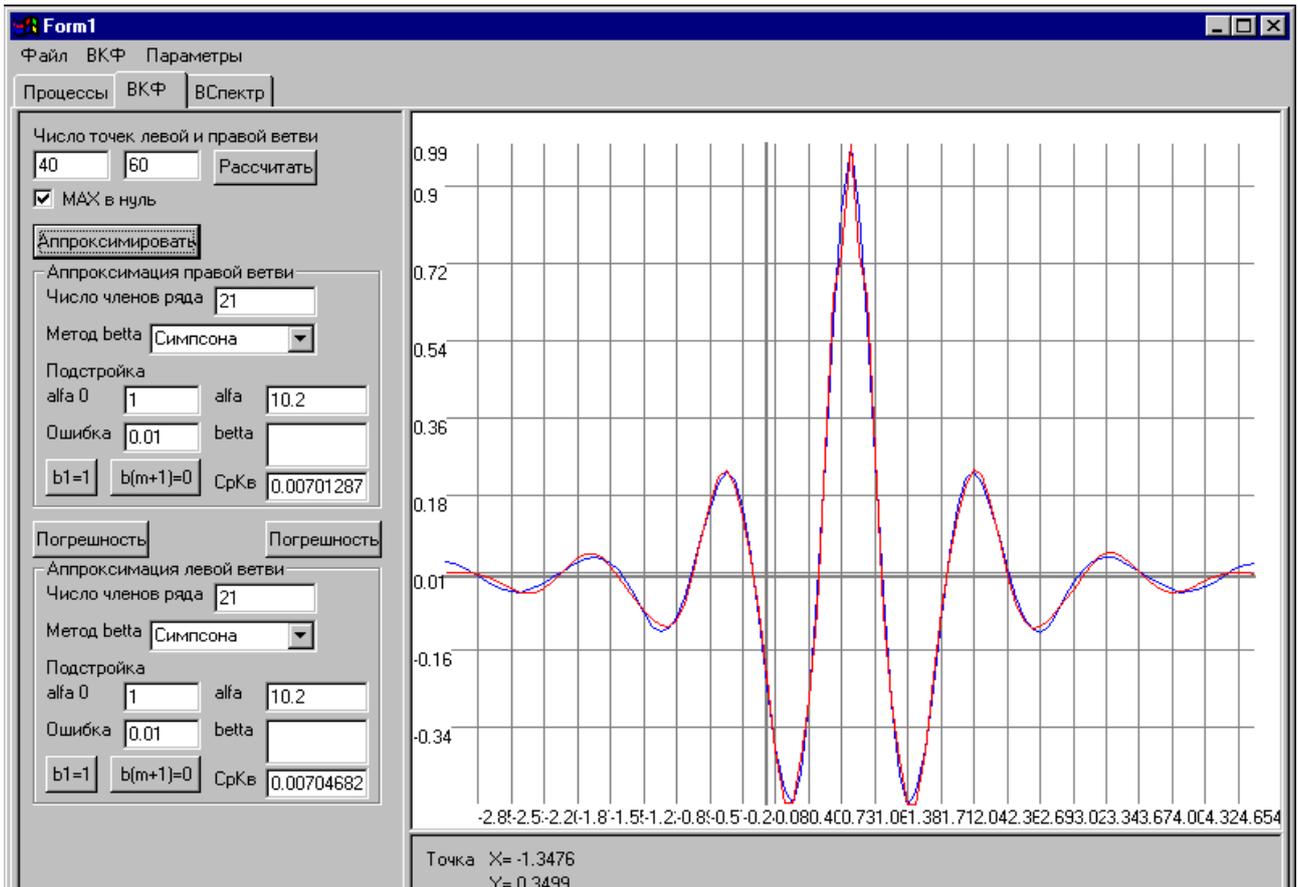


Рисунок 6.58 Результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций колебательных моделей

6.4. Аппроксимация спектральных плотностей мощности

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности (см. таблицу 6.4), вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [109].

Запишем квадратическую погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса $S_x(\omega)$ функцией заданного вида $S_a(\omega)$:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \quad (6.95)$$

Раскрыв квадратные скобки в (6.95), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \quad (6.96)$$

Подставим в (6.96) значения $S_x(\omega)$ и $S_a(\omega)$, полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [114]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (6.97)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (6.99)$$

Из выражения (6.99) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.100)$$

На рис. 6.59 приведен пример аппроксимации корреляционной функции и спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда со следующими параметрами: объём выборки регулярного ряда $N=1000$, число отсчётов корреляционной функции $M=39$, $\mu=5$, вероятность оставления отсчёта в потоке $p=0,15$.

Анализ рисунка показывает, что, даже при небольшом отношении $\Psi=M/N$, возможна аппроксимация спектральных плотностей мощности параметрическими моделями.

$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

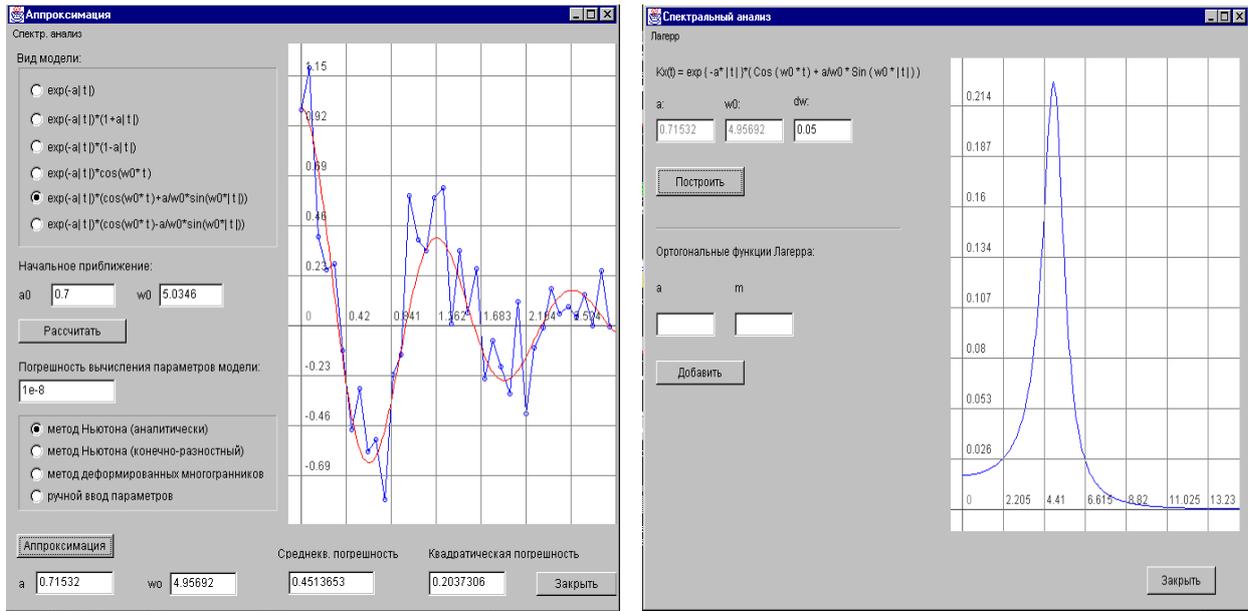


Рисунок 6.59. Аппроксимация корреляционной функции и спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда

Все сказанное выше относится и к модели корреляционной функции, представленной в виде ряда по ортогональным функциям Лагерра.

Определив параметры модели корреляционной функции (6.75) β_0, \dots, β_m , α оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (6.75) в выражение для определения спектральной плотности мощности

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.101)$$

с учётом определения ортогональных функций Лагерра (6.74), получим:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left(\frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (6.102)$$

Введем обозначение $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$. Тогда

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{1 + j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi - 1}{j\operatorname{tg}\varphi + 1} \right)^k + \frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi} \left(\frac{j\operatorname{tg}\varphi + 1}{j\operatorname{tg}\varphi - 1} \right)^k \right]. \quad (6.103)$$

Или

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi - \cos\varphi}{j\sin\varphi + \cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - j\sin\varphi} \left(\frac{j\sin\varphi + \cos\varphi}{j\sin\varphi - \cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (6.104)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (6.104) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[\frac{1}{e^{j\varphi}} \left(\frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left(\frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] =$$

$$= \frac{\cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \left[e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi} \right] = \frac{2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (6.105)$$

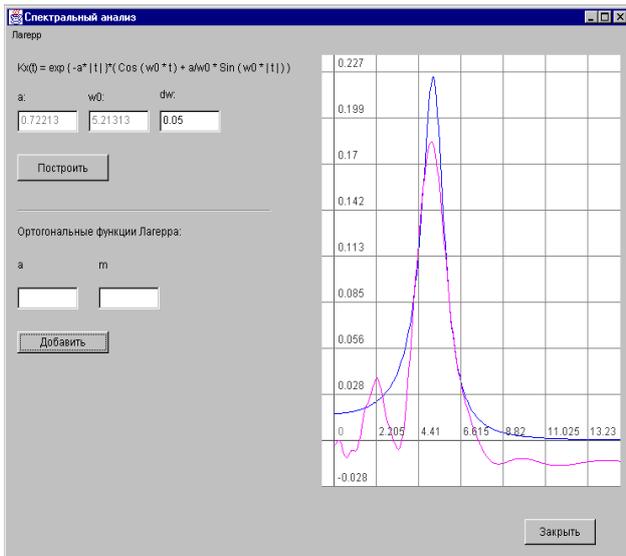


Рисунок 6.60. Результаты аппроксимации

где $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$.

Рассмотрим пример оценки $S_x(\omega)$ узкополосного случайного процесса с

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

параметры которой равны: $\sigma_x^2 = 1$, $\lambda = 0,722 \text{ сек}^{-1}$ и $\omega_0 = 5,213 \text{ сек}^{-1}$.

Параметры модели (6.74): $\alpha = 9,229 \text{ сек}^{-1}$, $m = 23$.

На рис. 6.60 приведены графики спектральной плотности мощности, построенной по параметрам модели (нижний график), и спектральной плотности, построенной по параметрам модели, соответствующей рассматриваемой корреляционной функции (верхний график).

Из анализа графиков можно сделать следующий вывод, что модель спектральной плотности достаточно хорошо приближает спектральную плотность мощности анализируемого процесса, позволяя выделить частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности. На рис. 6.61 в) приведены результаты определения модели спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда, полученного после p -преобразования псевдослучайной последовательности с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \text{ сгенерированной на ЭВМ, с параметрами}$$

$N=1000$, $M=38$, $p=0,15$, $\sigma_x^2 = 1$, $\lambda=0,926 \text{ сек}^{-1}$ и $\omega_0 = 4,630 \text{ сек}^{-1}$.

Верхний график соответствует аппроксимации спектральной плотности мощности функцией заданного вида (рис. 6.61 а), - нижний - аппроксимации ортогональными функциями Лагерра с параметрами $\alpha=9,408 \text{ сек}^{-1}$ $m=42$ (рис. 6.61 б)).

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

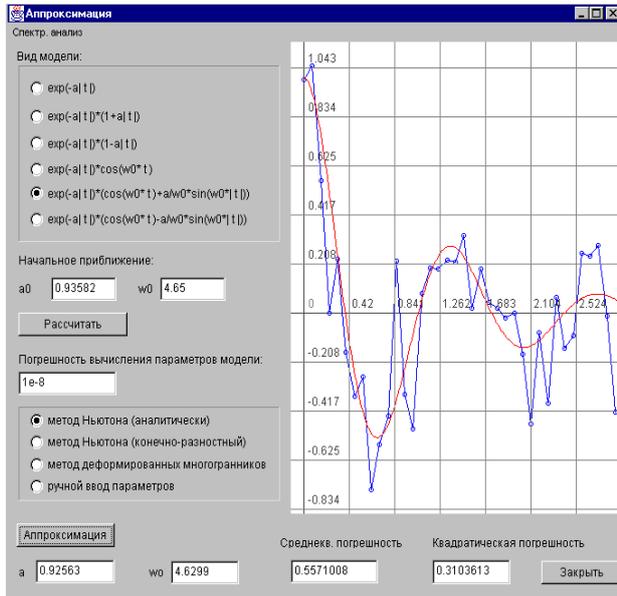
$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.106)$$

Отсюда

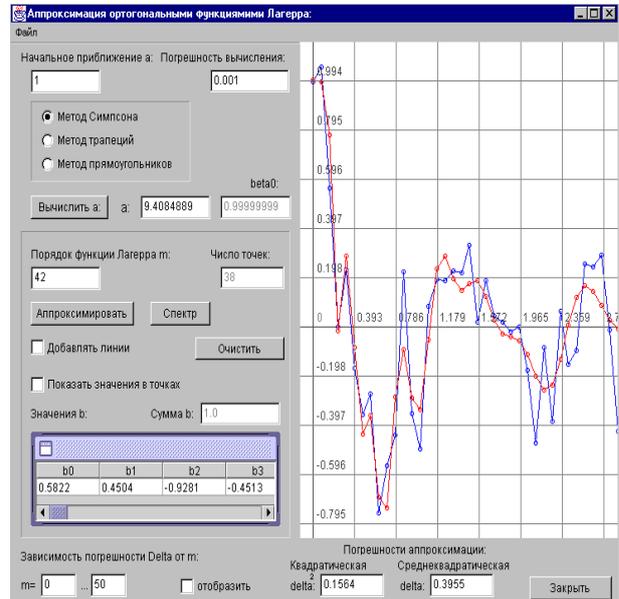
$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.107)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

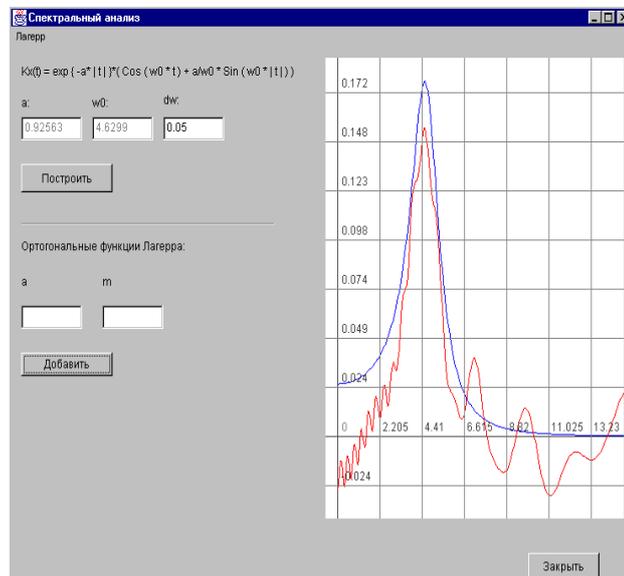
$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (6.108)$$



а)



б)



в)

Рисунок 6.61. Результаты аппроксимации

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (6.109)$$

Воспользовавшись соотношениями (6.108)-(6.109), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \text{Re } S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (6.110)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \text{Im } S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau \, d\tau. \quad (6.111)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (6.112)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (6.113)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [61, 62]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (6.114)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (6.115)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} d\tau = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (6.116)$$

Воспользовавшись выражением (6.116) и результатами, представленными в таблице 6.4, можно определить аналитические выражения взаимной спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций.

Из выражения (6.116) видно, что

$$\text{Re}[S_{axy}(\omega)] = \cos \omega \tau_m S_{ax}(\omega), \quad (6.117)$$

а

$$\text{Im}[S_{axy}(\omega)] = \sin \omega \tau_m S_{ax}(\omega). \quad (6.118)$$

Если аналитическая модель взаимной корреляционной функции представлена в виде

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\lambda} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2), \quad (6.119)$$

аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности с учётом (6.106) и свойств ортогональных функций Лагерра примет вид:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos \varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi_1] + \frac{\cos \varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \exp[j(2k+1)\varphi_2] \right], \quad (6.120)$$

$$\text{где } \varphi_1 = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_1}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{2\omega}{\alpha_2}.$$

С учётом (6.120), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}S_{\text{axy}}(j\omega) = & \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_2 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \sin(2k+1)\varphi_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\pi} \sin(2k+1)\varphi_2 \right]; \end{aligned} \quad (6.121)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}S_{\text{axy}}(j\omega) = & \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_2 - \right. \\ & \left. - \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m_1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m_2} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_2 \right]. \end{aligned} \quad (6.122)$$

С целью упрощения модели взаимной корреляционной функции, представим её в виде:

$$K_{\text{axy}}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,\pi} 1(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha) + \sum_k \beta_{k,\pi} 1(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha). \quad (6.123)$$

Тогда модель взаимной спектральной плотности мощности будет равна:

$$\begin{aligned} S_{\text{axy}}(j\omega) = & \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[\frac{\cos\varphi}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi] + \right. \\ & \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[j(2k+1)\varphi] \right]. \end{aligned} \quad (6.124)$$

С учётом (6.124), выражения для оценки вещественной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}S_{\text{axy}}(j\omega) = & \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \left[\cos\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} + \beta_{k,\pi}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ & \left. - \sin\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} - \beta_{k,\pi}) \sin(2k+1)\varphi \right]; \end{aligned} \quad (6.125)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}S_{\text{axy}}(j\omega) = & \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \left[\cos\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} - \beta_{k,\pi}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ & \left. - \sin\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} + \beta_{k,\pi}) \sin(2k+1)\varphi \right]. \end{aligned} \quad (6.126)$$

На рис. 6.62-6.64 приведены результаты аппроксимации спектральной плотности мощности для различных типов нерегулярной дискретизации:

- рис. 4.62 – p-преобразование;
- рис. 4.63 – «дрожание»;
- рис. 4.64 – аддитивная случайная дискретизация.

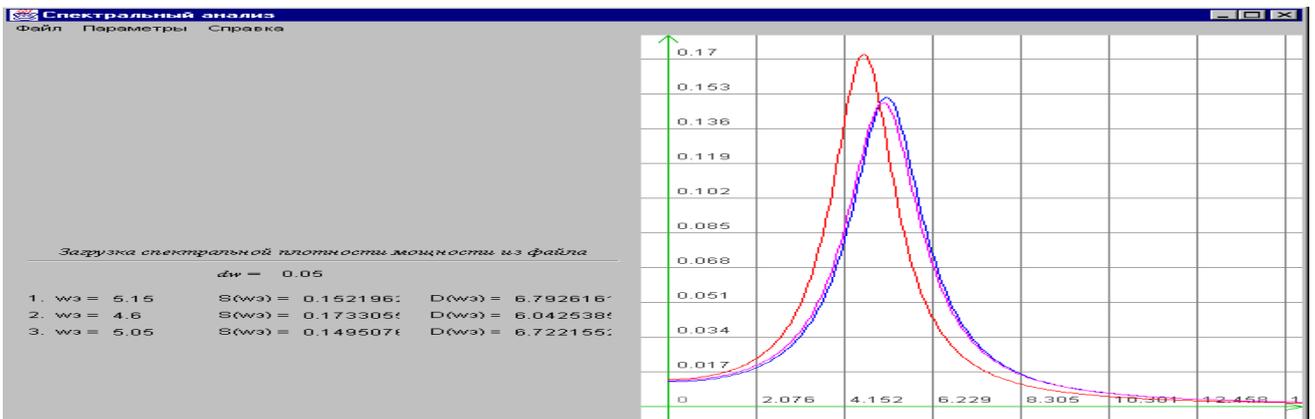
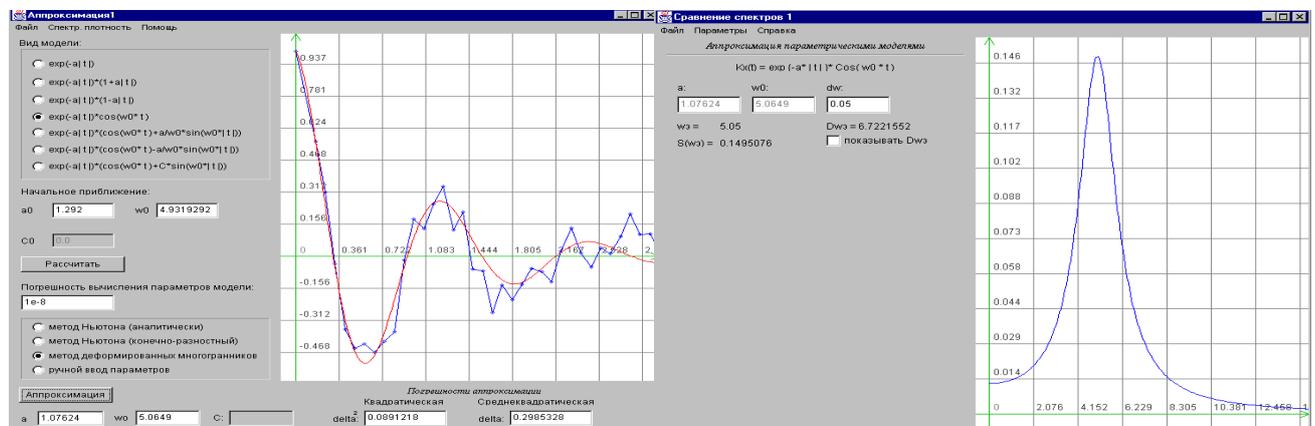
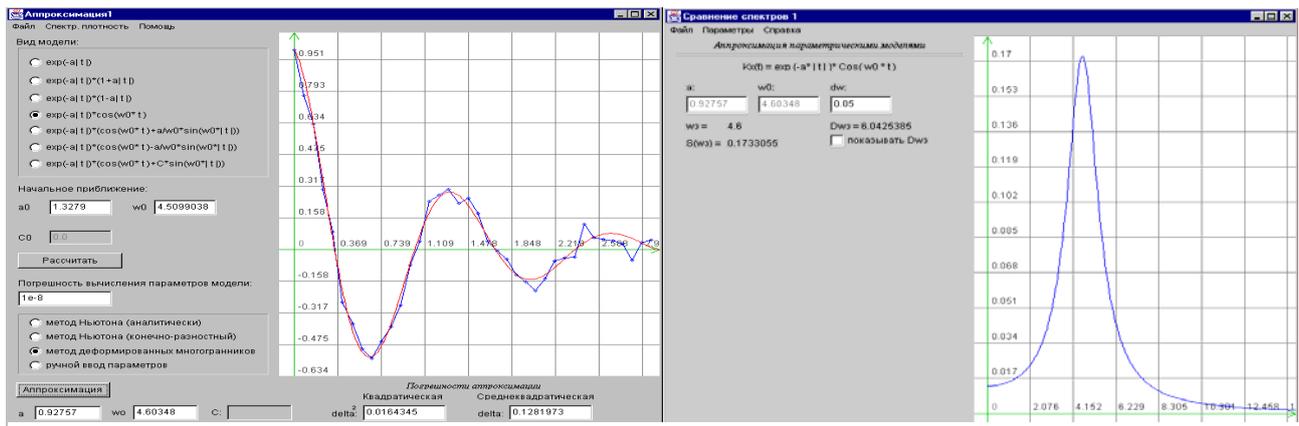
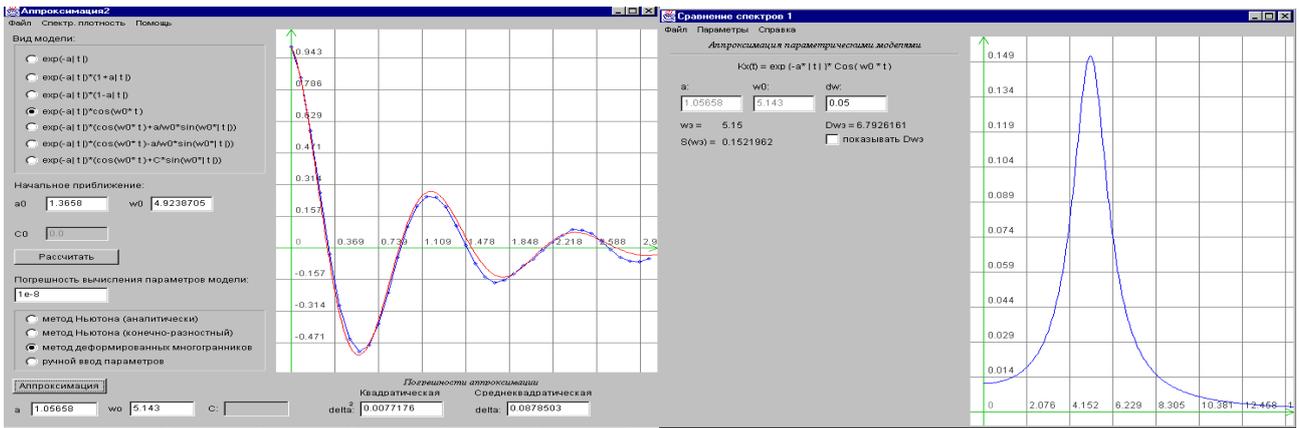
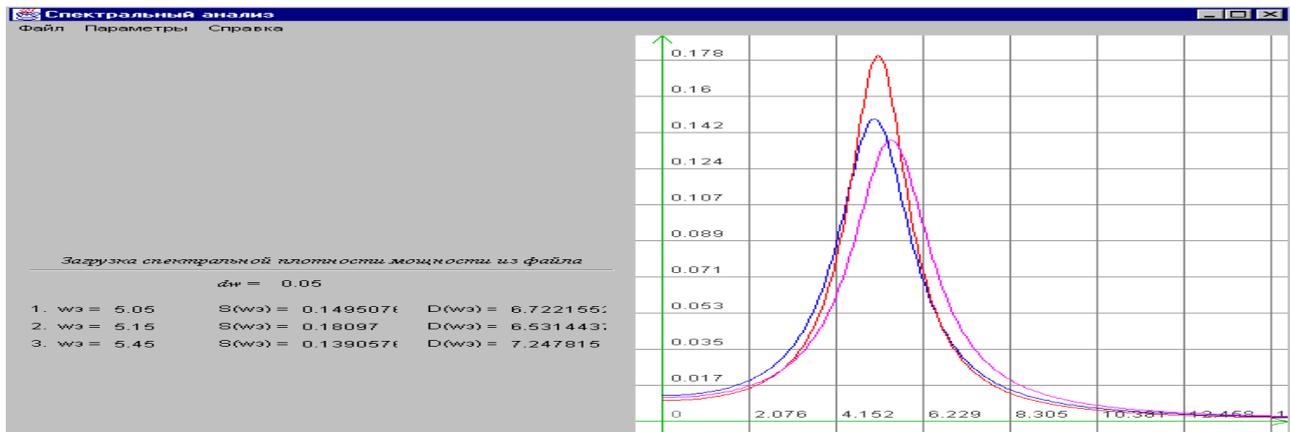
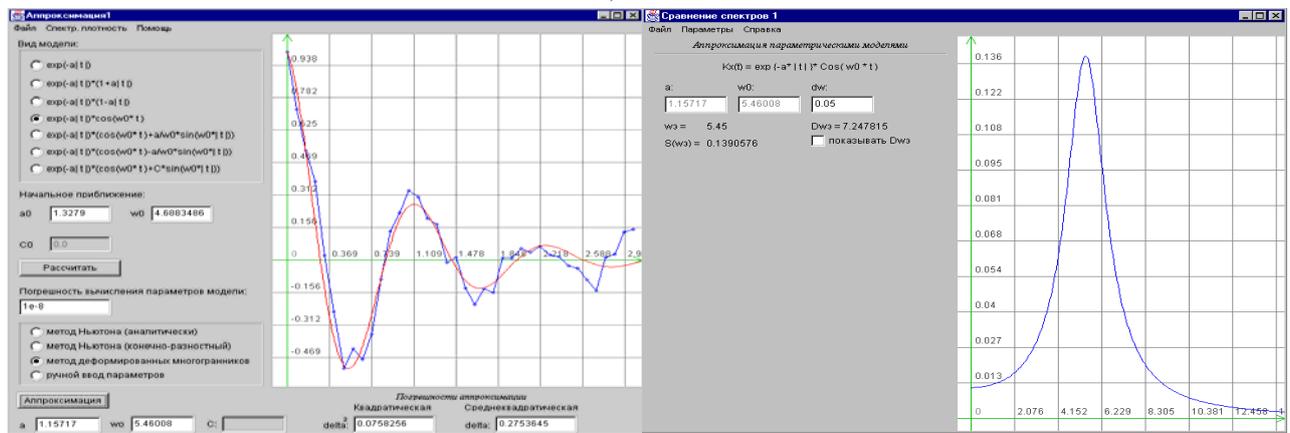
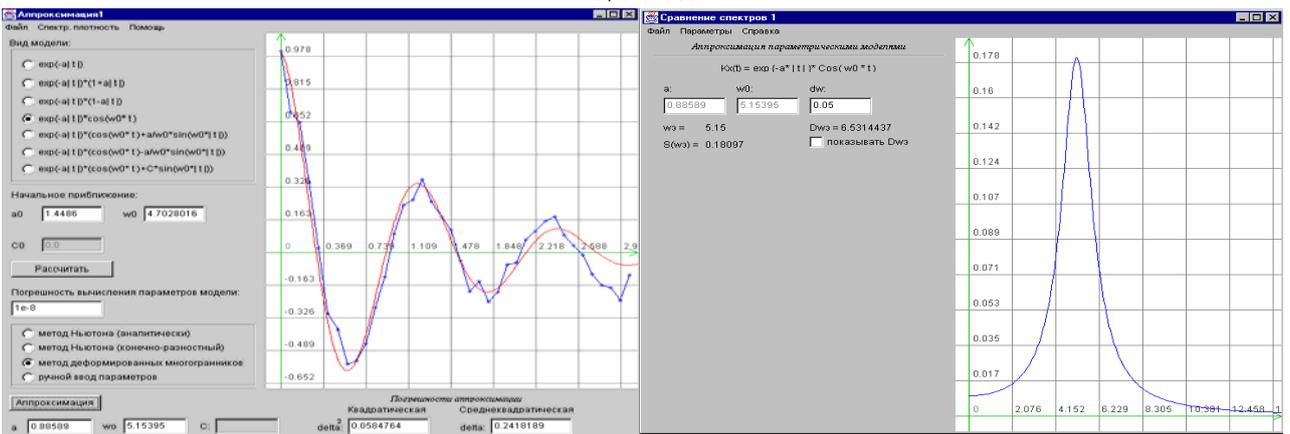
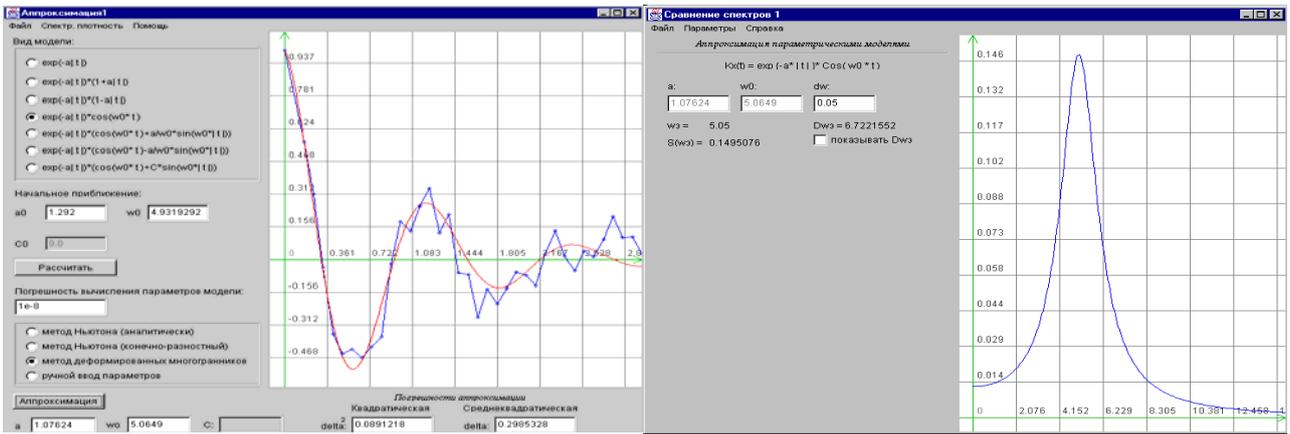
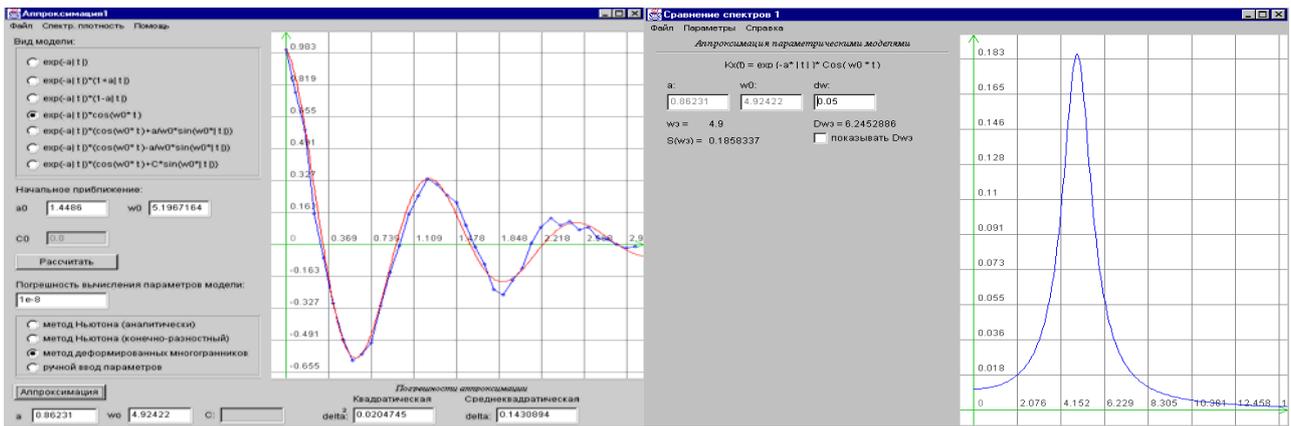
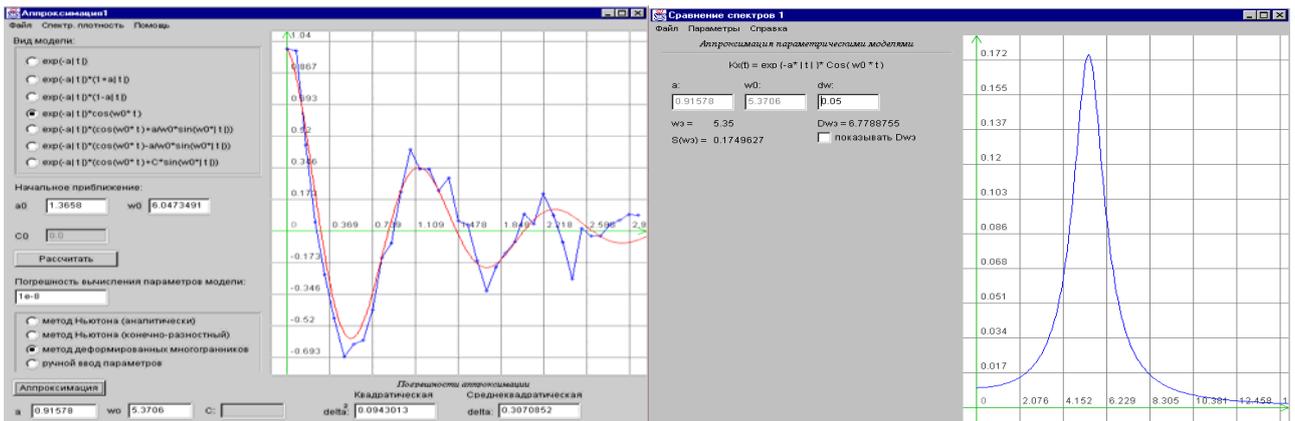


Рисунок 6.62. Аппроксимация спектральных плотностей мощности (p-преобразование)

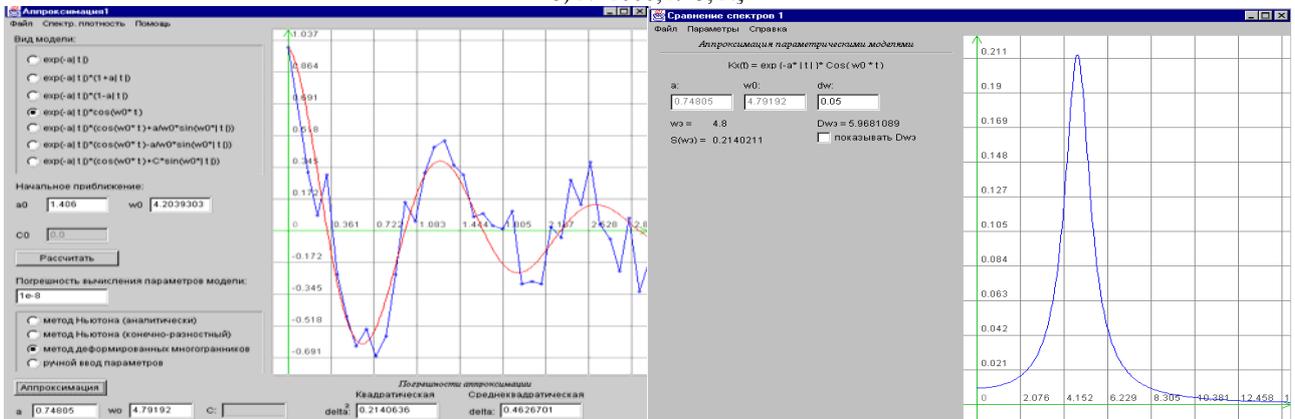




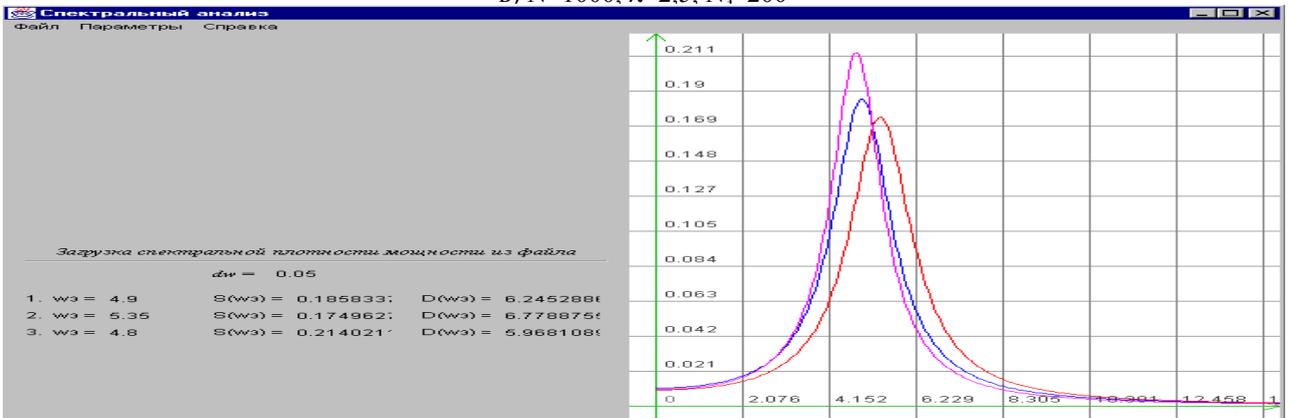
а) $N=1000, \lambda=10, N_3=891$



б) $N=1000, \lambda=5, N_3$



в) $N=1000, \lambda=2.5, N_3=200$



г) Наложение спектров

Рисунок 6.64. Аппроксимация спектральной плотности мощности (аддитивная случайная дискретизация)

7. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

7.1. Оценка обобщенных корреляционных характеристик

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [27, 28, 46, 96, 123]:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

7.1.1. Оценка показателя колебательности

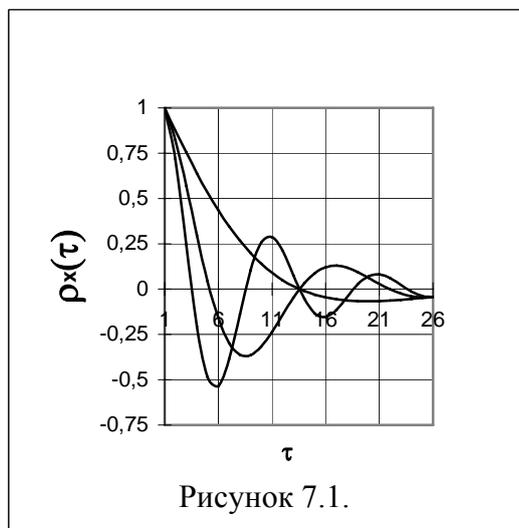


Рисунок 7.1.

Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$. Введем безразмерную величину $\mu = \omega_0 / \alpha$, равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 7.1 представлены три нормированные корреляционные функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно.

Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси τ на максимальном интервале корреляции. Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей

погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам. На рис. 7.2 приведены примеры оценки показателя колебательности для различных колебательных моделей корреляционных функций. Он равен числу пересечения фазового портрета оси τ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами $(0,0)$.

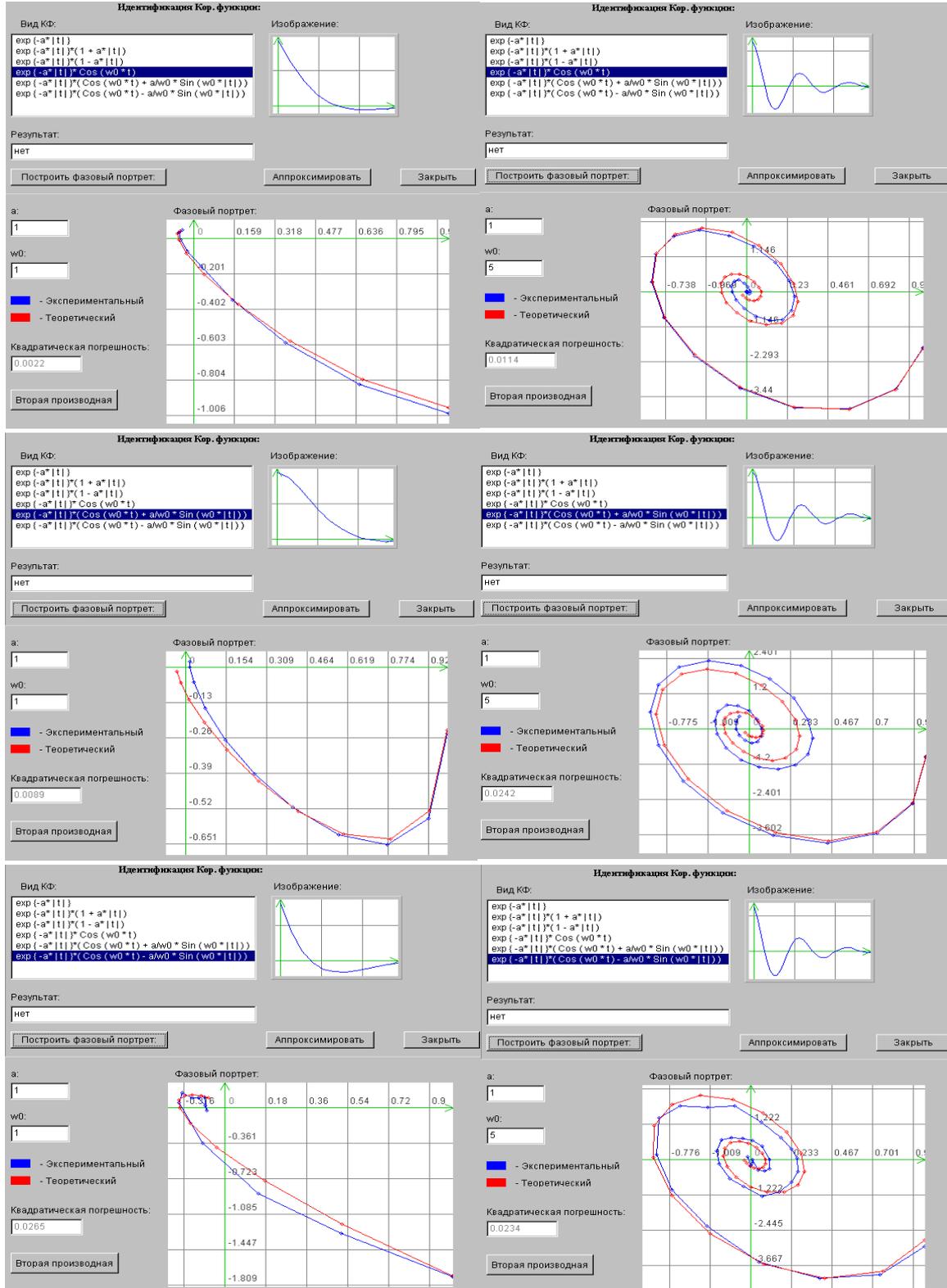
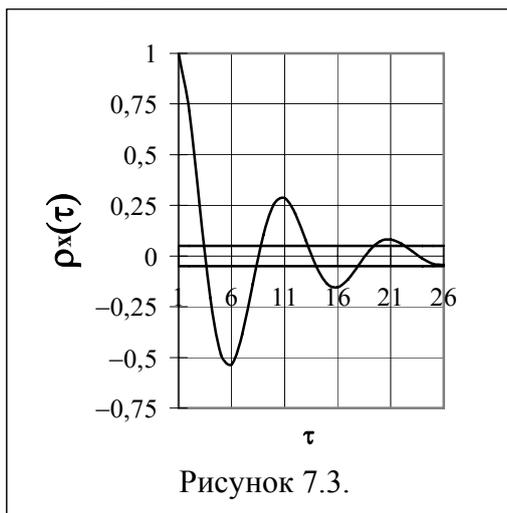


Рисунок 7.2. К определению показателя колебательности

Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения интервалов дискретизации случайных процессов (см. таблицу 3.1), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д. [107].

7.1.2. Оценка интервала корреляции

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции.**



Максимальный интервал корреляции $\tau_k^{(1)} = \tau_{kmax}$ определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 7.1.) [123]:

$$|\rho(\tau \geq \tau_{kmax})| \leq \Delta. \quad (7.1)$$

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ и $-\Delta$, после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рис. 7.3 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \text{ при } \alpha=1, \omega_0=5, \Delta=0,05.$$

Аналитические выражения τ_{kmax} для типовых моделей $\rho_x(\tau)$ приведены в таблице 7.1.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 7.1

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [123]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (7.2)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов $\tau_k^{(2)} = 0$, что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает $\tau_{k\max} > 0$.

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции $\tau_k^{(2)}$ целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (7.3)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (7.4)$$

Анализ выражений (7.1) и (7.6) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение $\tau_k^{(4)}$. Поэтому, несмотря на то, что $\tau_k^{(4)}$ дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем $\tau_k^{(3)}$. Значения интервалов корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 7.2.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 7.2

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

В таблице 7.3 показано, во сколько раз $\tau_{k\max}$ больше $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ ($\Delta = 0,05$).

Таблица 7.3

№	Наименование	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	6
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	2,375	3,8
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	∞	16,56
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	2,22	3,38
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$3(1+\mu^2)$	$\frac{2(1+\mu^2)}{2+\mu^2}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$1,5(1+\mu^2)$	$\frac{12(1+\mu^2)}{(5+\mu^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	∞	12

Отсюда видно, что $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ дают сильно заниженный результат по сравнению с $\tau_{k \max}$.

В качестве оценки интервалов корреляции предлагается использовать интервалы корреляции экспоненциальной функции $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$, аппроксимирующей нормированную корреляционную функцию по минимуму квадратической погрешности аппроксимации [107, 109].

При этом,

$$\hat{\tau}_x^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/\alpha; \quad (7.5)$$

$$\hat{\tau}_x^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/2\alpha; \quad (7.6)$$

$$\hat{\tau}_{k \max} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (7.7)$$

Результаты оценки интервалов корреляции приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4

$\rho_x(\tau)$	$\tau_x^{(2)}$	$\tau_{xa}^{(2)}$	$\tau_x^{(4)}$	$\tau_{xa}^{(4)}$
$e^{-\lambda \tau }$	$1/\lambda$	$1/\lambda$	$1/2\lambda$	$1/2\lambda$
$e^{-\lambda \tau } (1+\lambda \tau)$	$2/\lambda$	$2,14/\lambda$	$1,25/\lambda$	$1,07\lambda$
$e^{-\lambda \tau } (1-\lambda \tau)$	0	$0,364/\lambda$	$0,25/\lambda$	$0,182\lambda$
$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\pi/2 \Delta\omega_3$	$\sqrt{3}/\Delta\omega_3$	$\pi/2 \Delta\omega_3$	$\sqrt{3}/2 \Delta\omega_3$

Исследования показали, что предложенный способ оценки интервала корреляции наиболее целесообразно применять при исследовании широкополосных процес-

сов ($\mu < 3$), спектральная плотность мощности которых обладает следующим свойством $S_x(0) \neq 0$ [107].

Для примера в таблице 7.5 приведены результаты расчёта погрешностей оценки интервалов корреляции для $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$:

$$\delta_1 = \frac{\tau_k^{(4)} - \tau_a^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}; \quad \delta_2 = \frac{\tau_k^{(4)} - \hat{\tau}_k^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}, \quad (7.8)$$

где $\tau_a^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha) d\tau = 1/2\alpha$; (7.9)

$$\hat{\tau}_k^{(4)} = 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau - 1/2\alpha. \quad (7.10)$$

Погрешности оценки $\tau_k^{(4)}$

Таблица 7.5

$\rho_x(\tau)$	δ_1	δ_2	$\alpha = f(\lambda)$
$e^{-\lambda \tau }$	0	0	$\alpha = \lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)$	0,143	0,06	$\alpha = 0,467 \lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)$	0,27	0,16	$\alpha = 2,75 \lambda$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau, \mu=1$	0,215	0,05	$\alpha = 1,7 \lambda$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau, \mu=3$	0,58	0,4	$\alpha = 4,3 \lambda$

Анализ результатов таблицы показывает, что $\epsilon_k^{(4)}$ позволяет с большей точностью, чем $\tau_a^{(4)}$, оценивать $\tau_k^{(4)}$, особенно для широкополосных процессов.

Определив параметры модели корреляционной функции в виде (3.6) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки $\tau_k^{(2)}$ примет вид:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} L_k(\tau) d\tau. \quad (7.11)$$

Выполнив все необходимые преобразования, с учётом свойств ортогональных функций Лагерра, получим выражение для оценки интервала корреляции:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha \sigma_x^2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k. \quad (7.12)$$

Конечное число членов разложения ряда (6.75) m приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{\text{см}} = \frac{\epsilon_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (7.13)$$

Рассмотрим пример определения интервала корреляции для корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|}$:

$$\epsilon_k^{(2)} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda}\right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (7.14)$$

Отсюда погрешность от смещенности равна:

$$\gamma_{\text{см}} = -\left(\frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda}\right)^{m+1}. \quad (7.15)$$

Анализ полученного выражения показывает, что погрешность от смещенности зависит от числа членов разложения ряда m , величины параметра α . При произвольной величине параметра α погрешность от смещенности может принимать достаточно большие значения. Рассмотрим два алгоритма определения параметра α [107]:

$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$ и $\beta_{m+1} = 0$. Решения этих двух уравнений совпадают: $\alpha = 2\lambda = \frac{2}{\tau_k^{(2)}}$.

Подставив полученное решение в (7.15), увидим, что погрешность от смещенности равна нулю.

Однако в общем случае, погрешность от смещенности имеет место. Так, для корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau|)$ и параметра α , определенного в результате уравнения $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$,

$$\gamma_{\text{см}} = -\frac{(m-1)}{2(\sqrt{2}+1)^{m+1}} (-1)^m. \quad (7.16)$$

Отсюда видно, что погрешность от смещенности равна нулю, если $m=1$ или $m \rightarrow \infty$.

Решение задачи для колебательной модели корреляционной функции: $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, - показывает, что выражения для оценки погрешности от смещенности различны для четных $m=2n$ и нечетных $m=2n+1$ и, кроме того, зависят от показателя колебательности μ . Так для $m=2n$

$$\gamma_{\text{см}} = (-1)^{n+1} \mu \left(\frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}, \quad (7.17)$$

а для $m=2n+1$

$$\gamma_{\text{см}} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}. \quad (7.18)$$

Анализ погрешности от смещенности показывает, что для повышения точности оценки интервала корреляции целесообразнее выбирать нечётное число членов разложения ряда.

Аналогичные выводы можно сделать, проанализировав погрешности от смещенности оценки интервалов корреляции других колебательных моделей корреляционных функций.

Таким образом, при оценке интервала корреляции по алгоритму (7.12) для обеспечения допустимых погрешностей от смещенности необходимо выбирать величину параметра функции Лагерра либо в соответствии с алгоритмом $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$, либо $\beta_{m+1} = 0$. При анализе же корреляционных функций с большим показателем колебательности с точки зрения уменьшения этой погрешности необходимо выбирать нечётное число членов разложения ряда (6.75).

Воспользовавшись выражением для определения погрешности аппроксимации корреляционной функции рядом (6.75)

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, \quad (7.19)$$

можно с абсолютной погрешностью $\frac{\Delta}{\sigma_x^4}$ в качестве оценки интервала корреляции

принять выражение:

$$\epsilon_k^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha \sigma_x^4} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (7.20)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (6.75). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в разделе 6.3.5.

7.1.3. Оценка моментов корреляционных функций

Моменты корреляционных функций вводятся по аналогии с моментами законов распределения и используются при решении различных прикладных задач. Определим начальный момент k -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (7.21)$$

Знание моментов позволяет решать задачи идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции и ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции [123]:

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (7.22)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведено в таблице 7.6.

Таблица 7.6

№	Наименование	μ_1	μ_2	μ_3
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6\frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

При аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра можно показать [44], что

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (7.23)$$

Рекомендации по выбору параметров модели α , m и β_k аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции $\hat{\tau}_k^{(2)}$. Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 7.7.

Таблица 7.7

μ_n	$\varphi_n(\alpha)$	c_{nk}
μ_0	$2/\alpha$	1
μ_1	$4/\alpha^2$	$1+2k$
μ_2	$16\alpha^3$	$1+2k+2k_2$
μ_3	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

7.1.4. Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$; (7.24)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau;$ (7.25)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau;$ (7.26)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau;$ (7.27)

- моменты корреляционных функций $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau,$ (7.28)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик и т.д.

Если в качестве модели взаимной корреляционной функции выбрать модель

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x^2 \rho_a(\tau - \tau_m), \quad (7.29)$$

где τ_m - значение аргумента корреляционной функции, соответствующее её максимуму, то значения интервалов корреляции равно удвоенному значению результатов, представленных в таблицах 7.1-7.2.

При аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра моделью

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi} 1(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\lambda} 1(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2) \quad (7.30)$$

выражения для определения интервалов корреляции примут вид:

$$\hat{\tau}_{kxy}^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha_1 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} + \frac{2}{\alpha_2 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda}; \quad (7.31)$$

$$\epsilon_{kxy}^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha_1 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi}^2 + \frac{1}{\alpha_2 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\lambda}^2. \quad (7.32)$$

Выражения для оценки моментов взаимных корреляционных функций при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра примут вид:

$$\mu_{nxy} = \varphi_n(\alpha_1) \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\pi} + \varphi_n(\alpha_2) \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\lambda}. \quad (7.33)$$

7.2. Оценка обобщенных спектральных характеристик

К обобщенным спектральным характеристикам, широко применяемым в приложениях, относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** - $\Delta\omega_3$. Существуют различные способы определения $\Delta\omega_3$, приведенные, например, в [123].

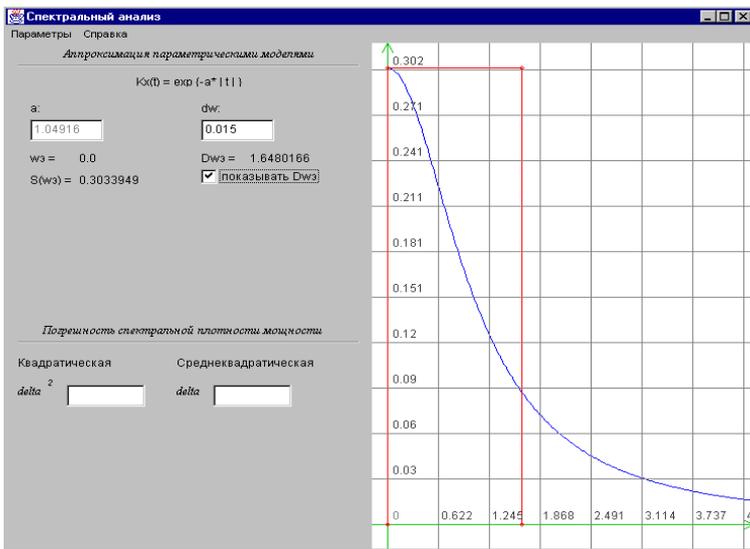


Рисунок 7.4. Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

В приложении П.8 приведены выражения эквивалентной ширины спектра мощности случайных процессов для типовых моделей.

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_3$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

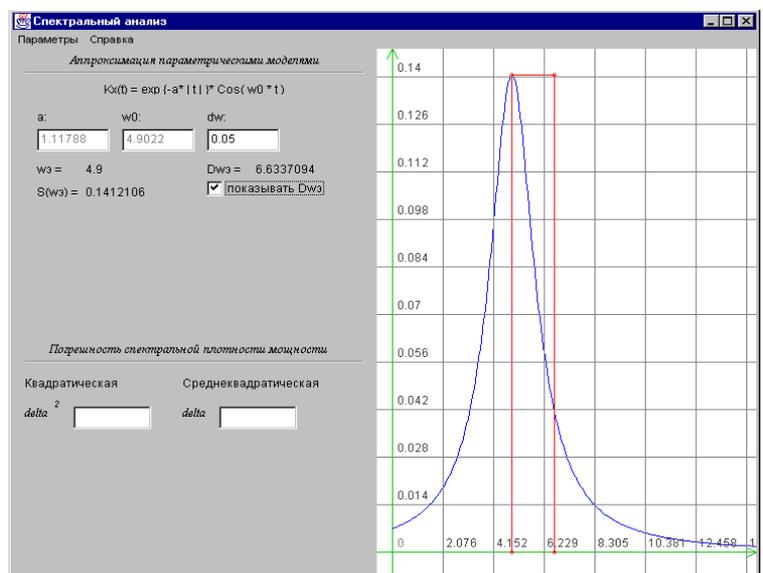


Рисунок 7.5. Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 7.4), $\Delta\omega_3$ определяют в виде:

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2 S_x(\omega)_{\max}} \quad (7.34)$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности ω_3 (рис. 7.5), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \Delta\omega_3 / 2 \quad (7.35)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2 S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_3} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (7.36)$$

где $\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2}$ - полоса пропускания линейной динамической системы.

Из выражения (7.36) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что

$$\begin{cases} \Delta\omega_3 \tau_k^{(2)} = \pi/2; \\ \Delta\omega_c \tau_i^{(2)} = \pi/2, \end{cases} \quad (7.37)$$

где $\tau_i^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\max}}$ - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы. Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (7.36) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\max}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_i^{(2)}}. \quad (7.38)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

Узкополосным случайным процессом называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты ω_0 . Условие узкополосности записывается в виде: $\Delta\omega_3 / 2 \ll \omega_0$.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности $\mu > 5$ (см. таблицу 6.3, модели 4-7).

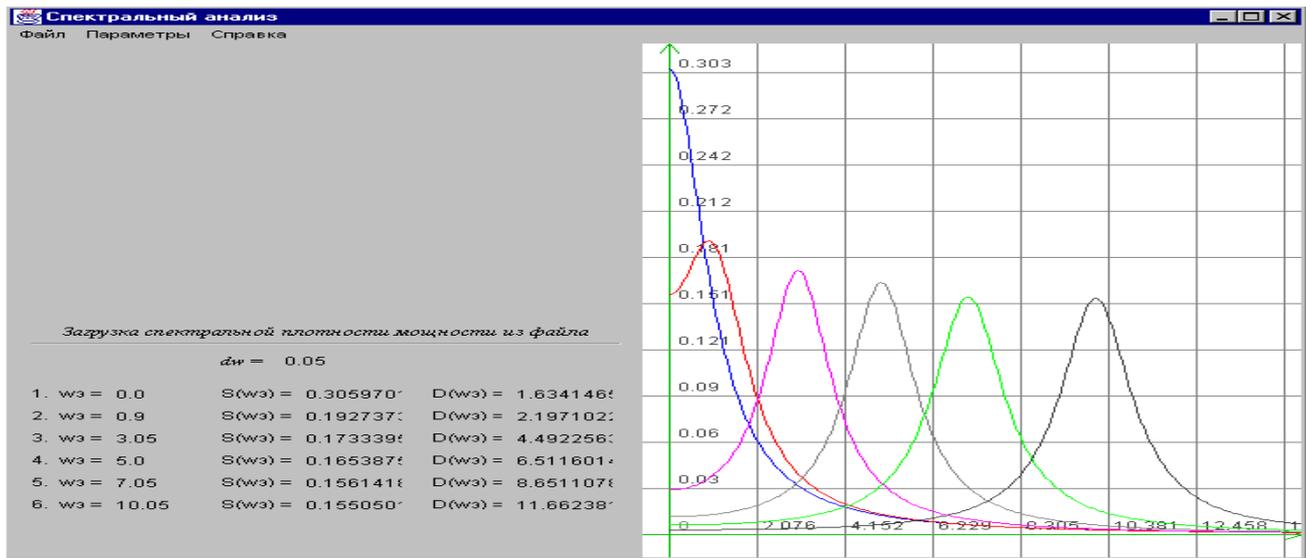
К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 6.3, причем, для моделей 4-7 $\mu < 5$.

Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 7.6.

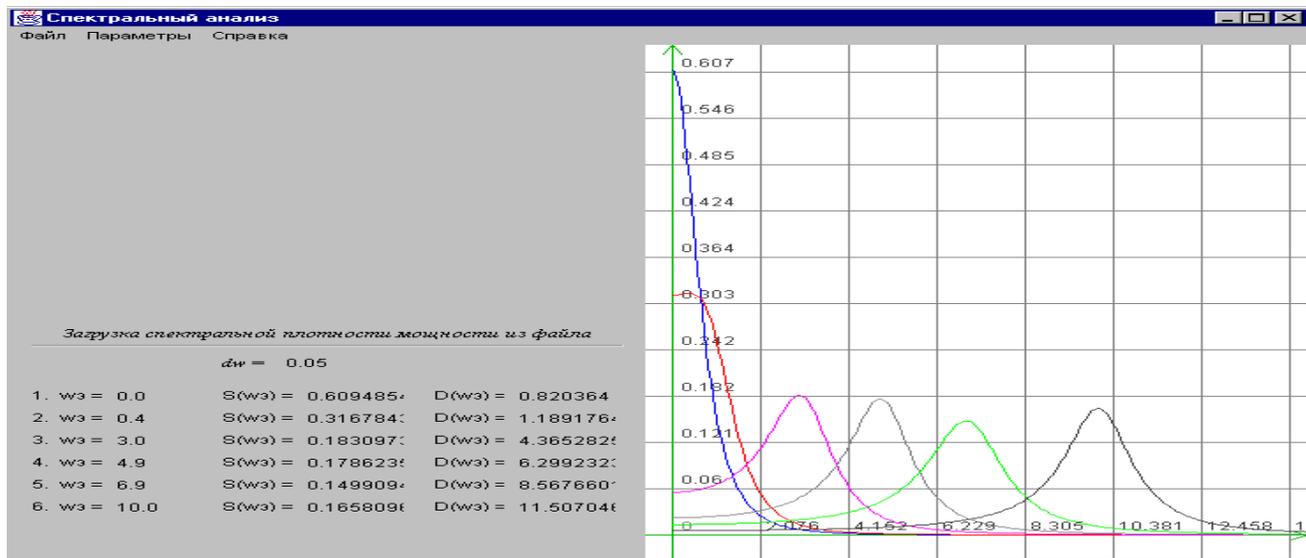
При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности ω_3 . Её можно определить в результате решения уравнения:

$$S'_x(\omega) = 0. \quad (7.39)$$

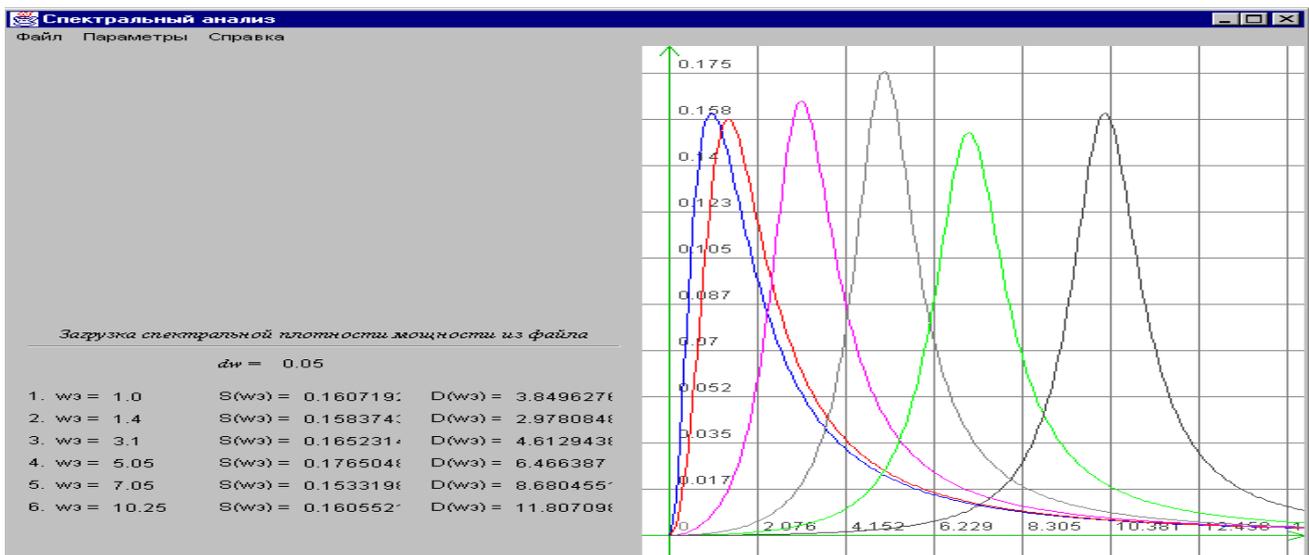
Результаты решения этого уравнения и $S_x(\omega_3)$, в виду громоздкости таблицы, представлены в приложении П.8.



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\cos\omega_0\tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 7.6. Спектральные плотности мощности колебательных моделей

8. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

8.1. АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Методы, рассмотренные в разделах 1-7, легли в основу АИС, предназначенной для определения аналитического выражения закона распределения исследуемого случайного процесса.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [75, 107, 133]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей. Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

8.1.1. Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 8.1. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. 8.2):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

Блок получения статистических данных делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из N отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

Блок оценки статистических характеристик состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности



Рисунок 8.1. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

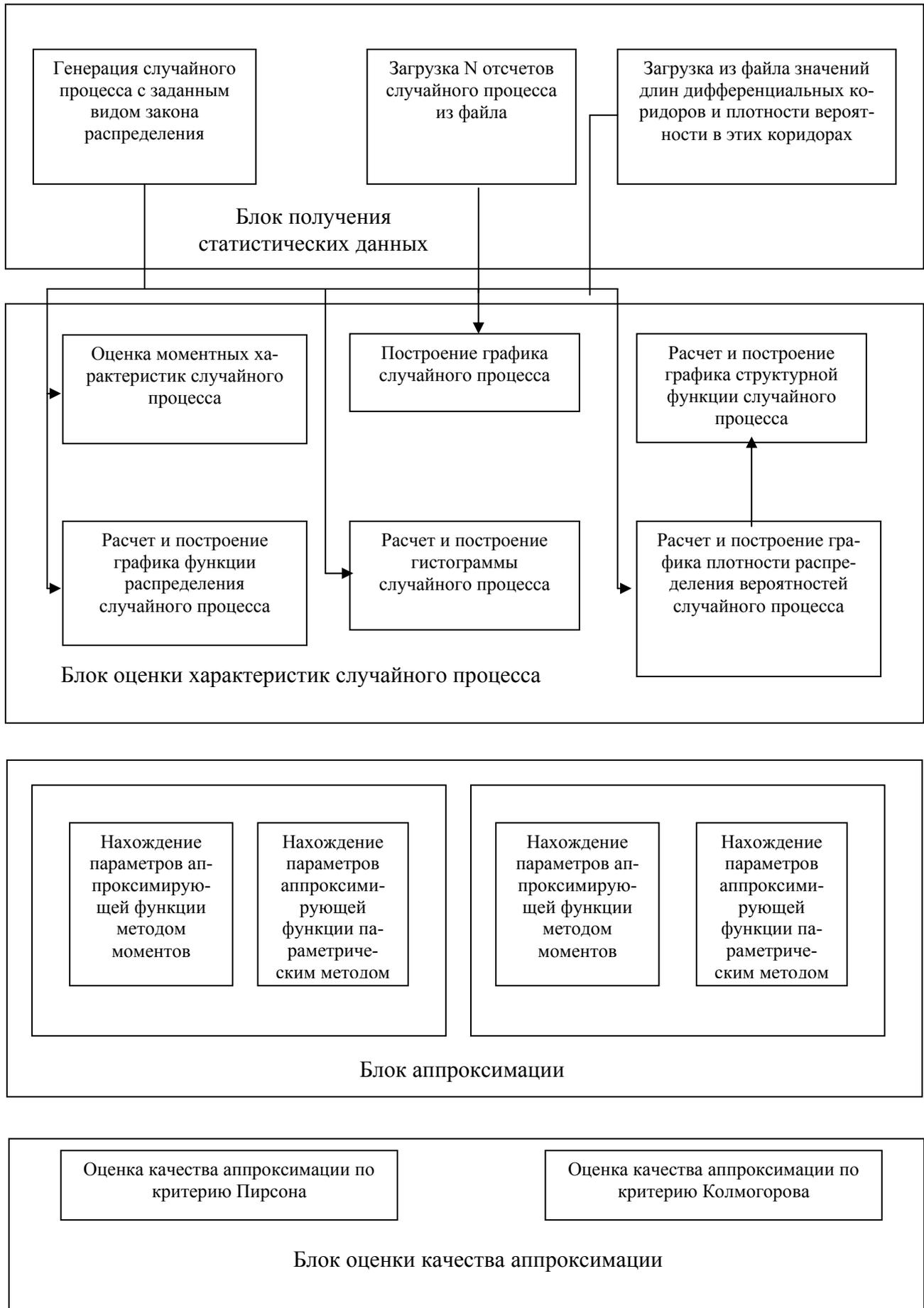


Рисунок 8.2. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

Блок аппроксимации состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

Блок оценки качества аппроксимации состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

8.1.2. Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 8.3, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

«Горячие» кнопки, при помощи которых осуществляется работа с системой

Панель 2 - задания параметров выбранного случайного процесса

Панель 1 – выбор закона распределения, генерируемого случайного процесса

Панель 6 - отображение функциональных характеристик

Выбор Переход

Числовые характеристики процесса, распределенного по закону Симпсона

Выберите закон распределения :
Симпсона

Параметры закона распределения :
 a : b :

Начальные моменты :
 Статистические : Теоретические :
 $\alpha_1=5,49102$ $\alpha_1=5,500$
 $\alpha_2=31,21109$
 $\alpha_3=183,02321$
 $\alpha_4=1103,56450$

Центральные моменты :
 Статистические : Теоретические :
 $\mu_2=1,05968$ $\mu_2=1,042$
 $\mu_3=0,00427$ $\mu_3=0,000$
 $\mu_4=2,65651$ $\mu_4=2,604$

Прочие характеристики :
 Статистические : Теоретические :
 $Ka=0,00392$ $Ka=0,000$
 $Ke=-0,63429$ $Ke=-0,600$
 $Kf=0,81986$
 $\gamma=7,73860$
 $\chi=0,18747$
 $\sigma=1,02941$

Гистограмма распределения

Гистограмма Функция распределения
 Плотность вероятности Процесс

Четов N : Коридоров M :

Панель 4 - отображение числовых характеристик выбранного закона распределения

Панель 5 - выбор отображаемой функциональной характеристики случайного процесса

Панель 3 - задание числа отсчетов генерации случайного процесса и числа дифференциальных коридоров гистограммы

Рисунок 8.3. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

На главной форме присутствуют следующие элементы:

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 8.4 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 8.5;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывает экранную форму, отображающую структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 8.7;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 8.5 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

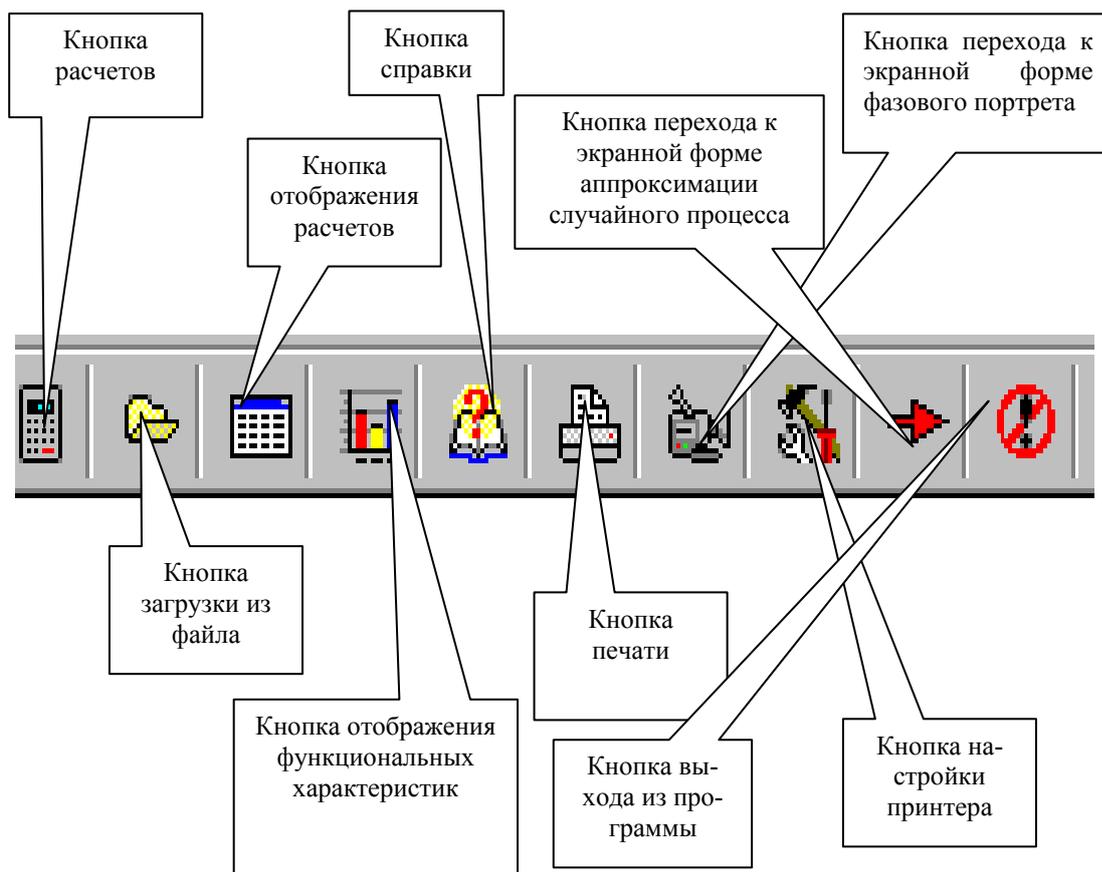


Рисунок 8.4. Панель «горячих» кнопок

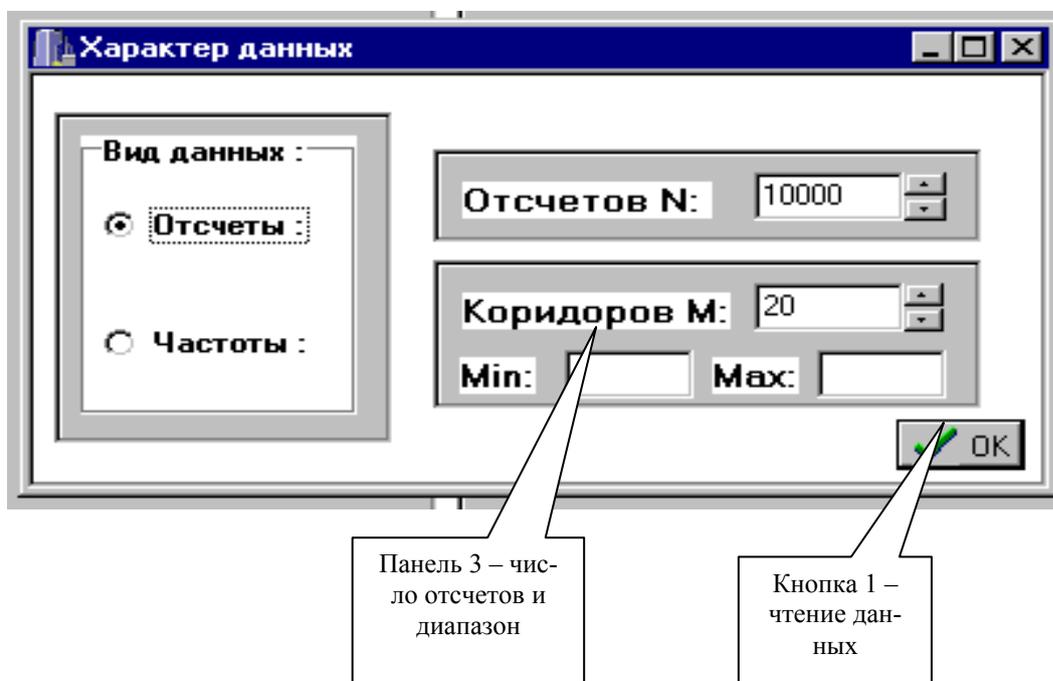


Рисунок 8.5. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 8.7 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присутствуют

панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 8.6) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

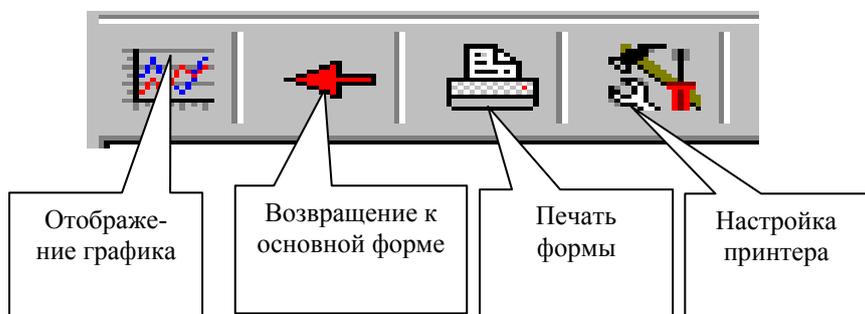


Рисунок 8.6. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

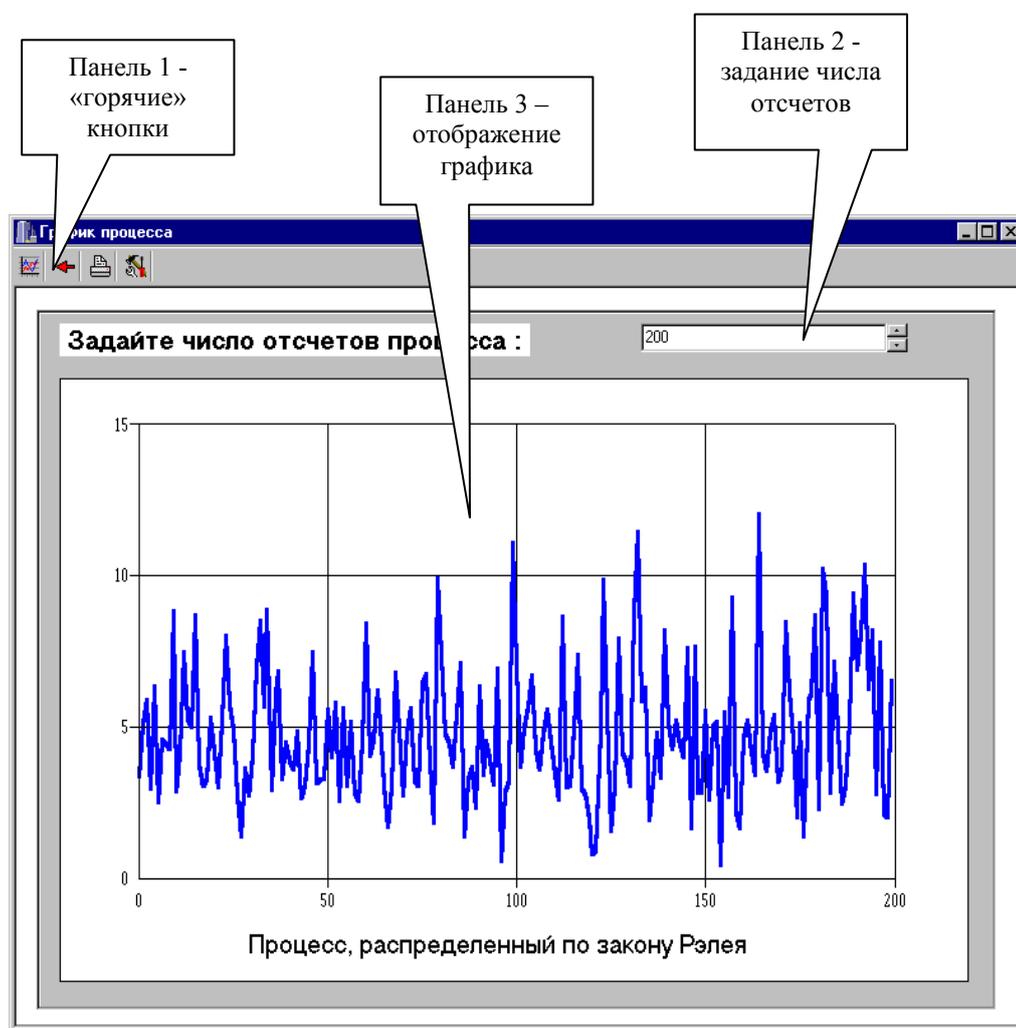


Рисунок 8.7. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. 8.8 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

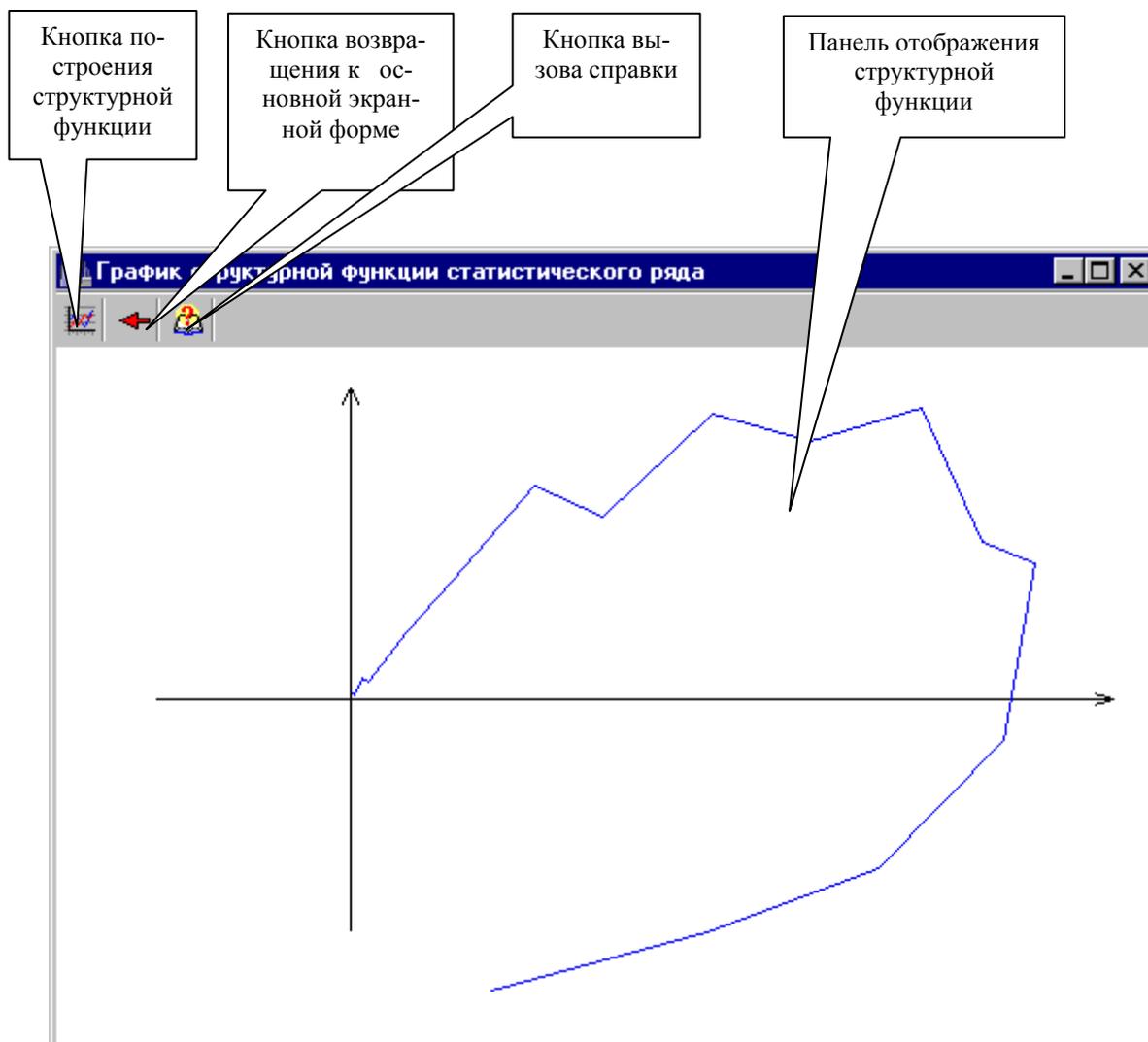


Рисунок 8.8. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 8.9, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 8.10-8.12 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

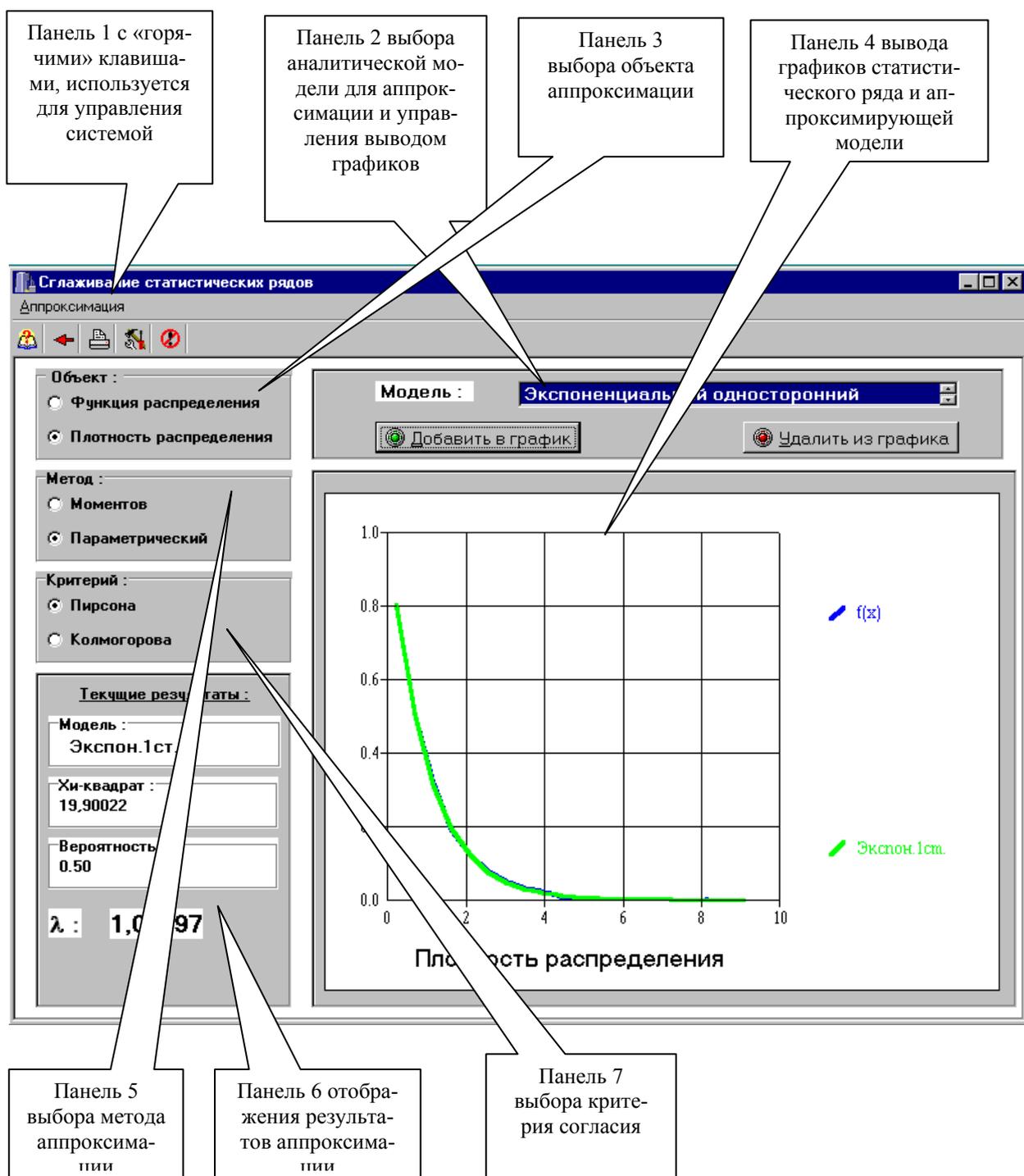


Рисунок 8.9. Общий вид формы блока аппроксимации

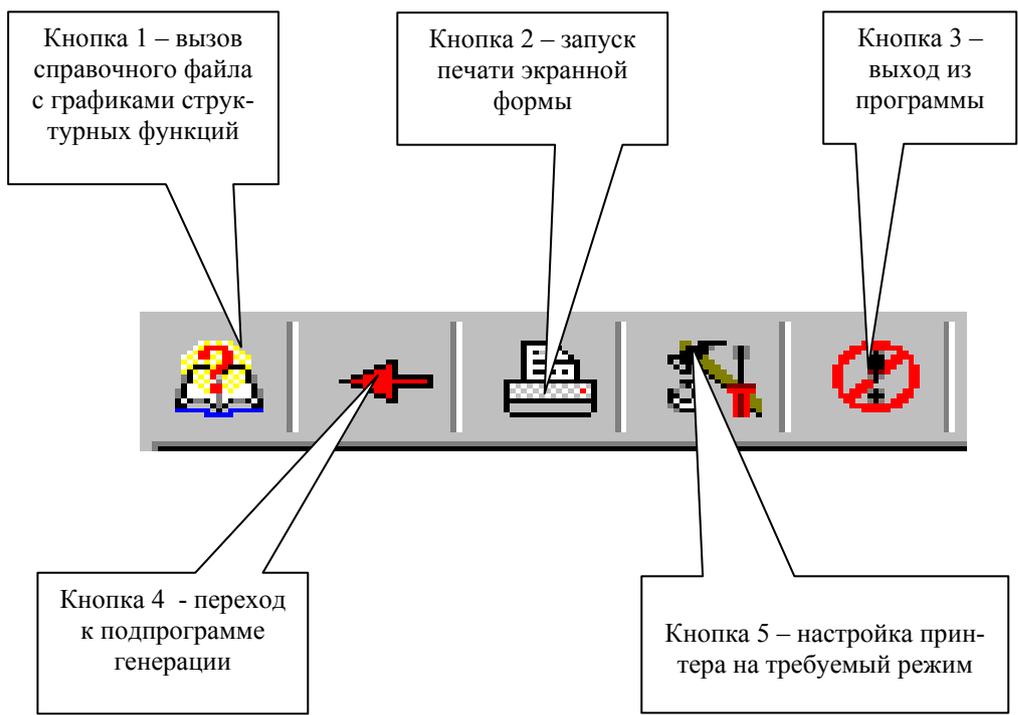


Рисунок 8.10. Панель инструментов

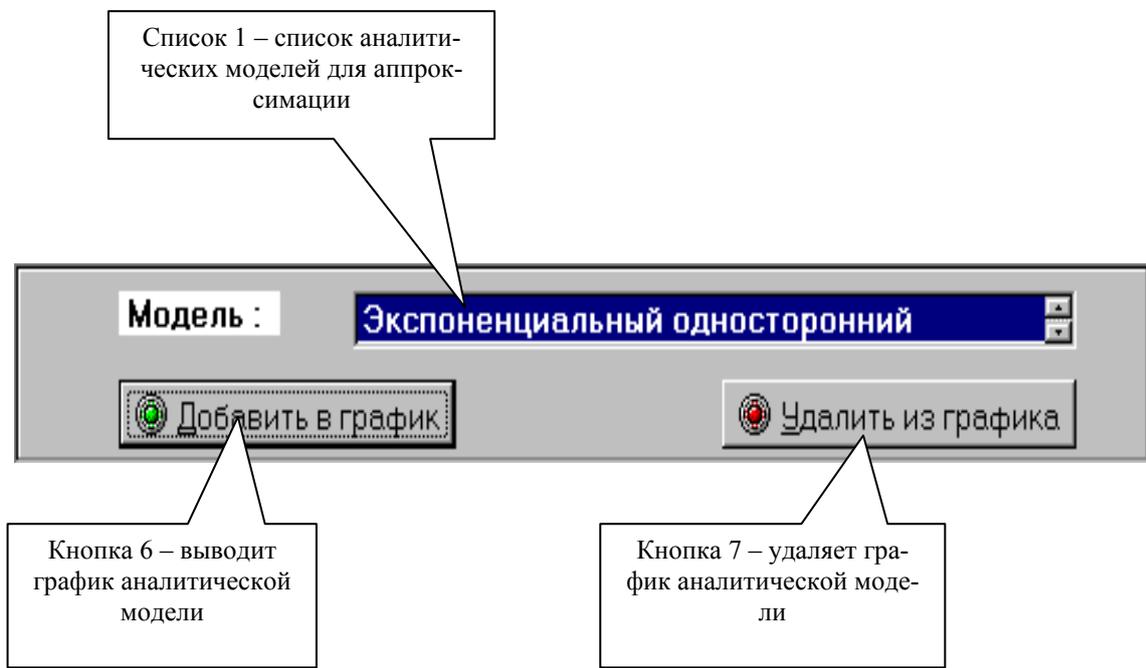


Рисунок 8.11. Панель выбора аналитической модели

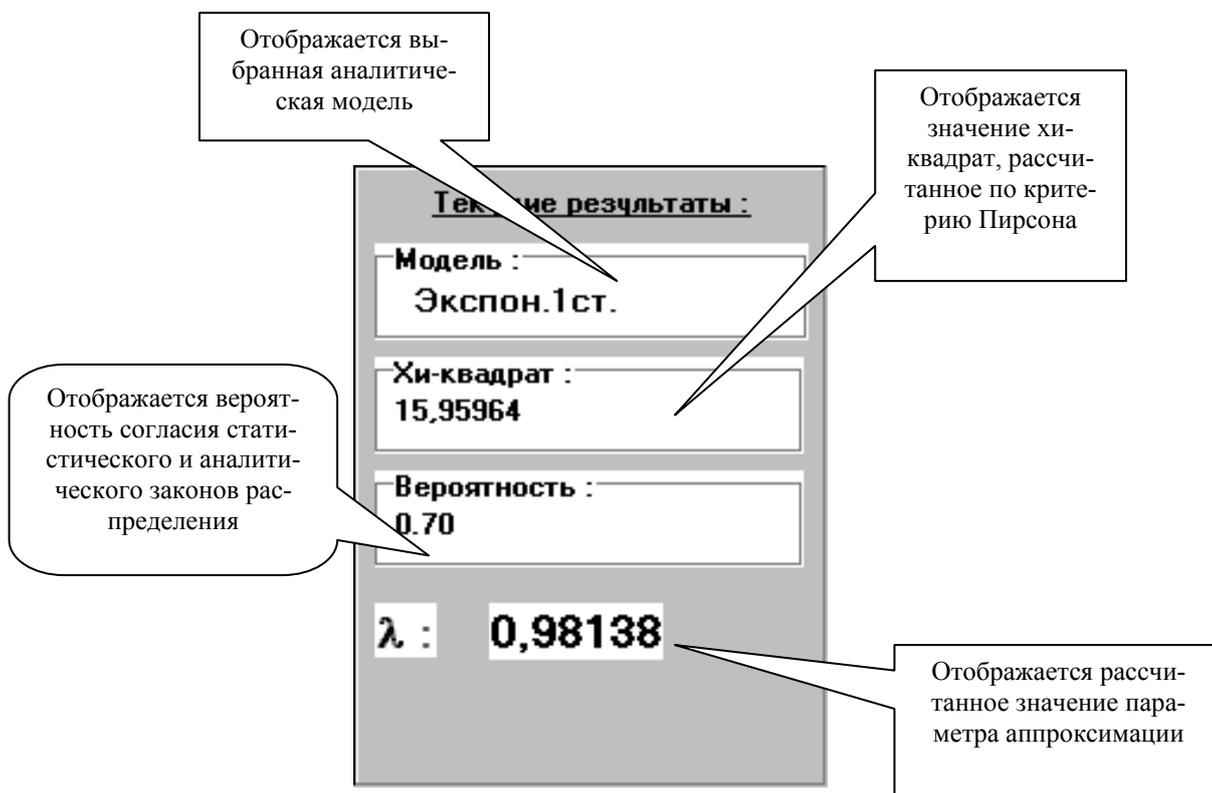


Рисунок 8.12. Панели вывода результатов

8.1.3. Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. 8.3). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет N отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 8.8).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 8.9).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение χ^2 (критерий Пирсона) или λ (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера, на рис. 8.13 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

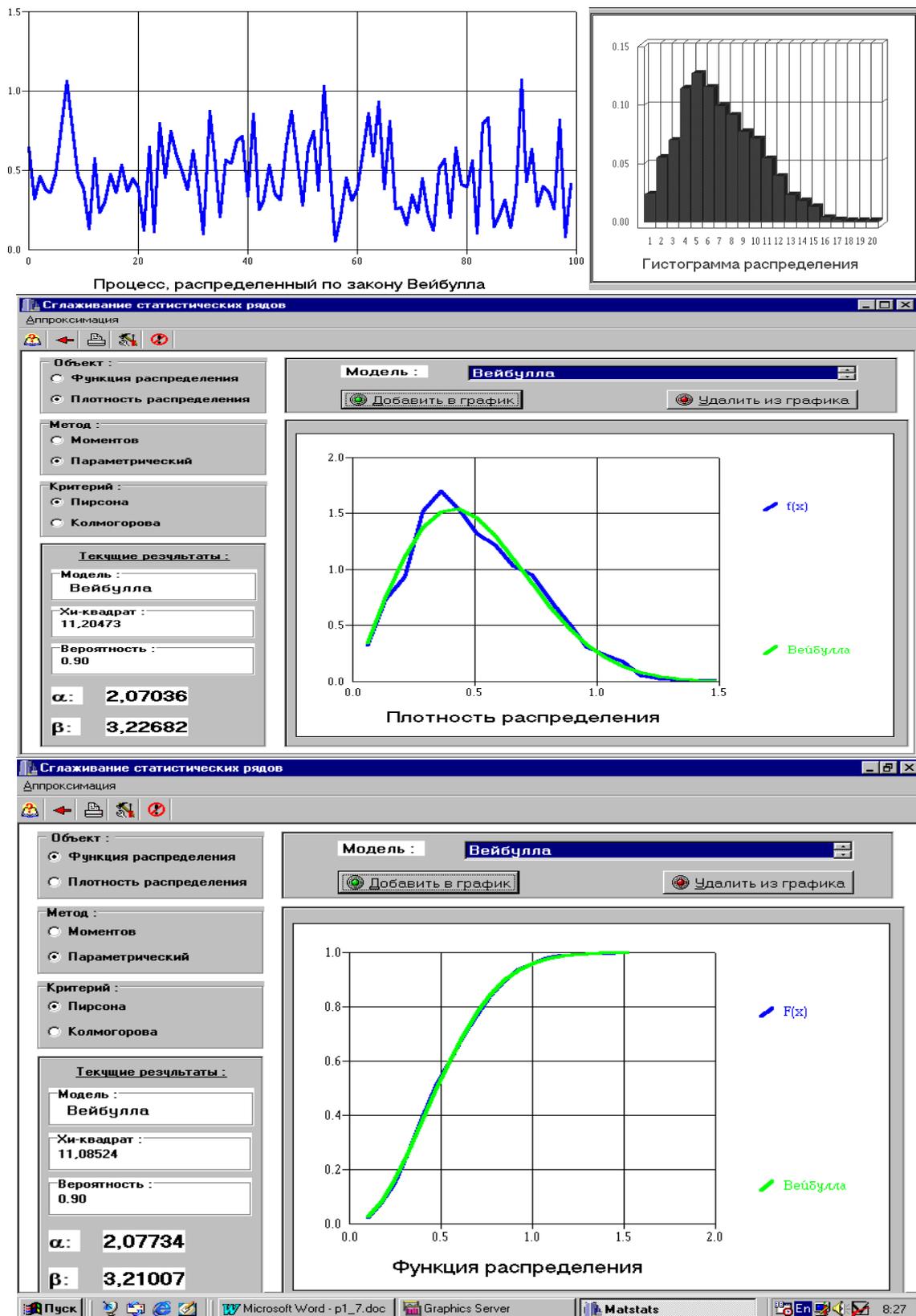


Рисунок 8.13 Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

8.2. Аппроксимативный анализ авто корреляционно-спектральных характеристик

Для проведения аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа под руководством автора была разработана автоматизированная система [2, 81, 100, 107], структурная схема которой представлена на рис. 8.14.

Автоматизированная система состоит из следующих подсистем:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР);
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации КФ;
- аппроксимативного корреляционного анализа;
- аппроксимативного спектрального анализа.

Рассмотрим функции каждой подсистемы в отдельности.

Подсистема задания входных воздействий состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности (ПСП) с заданным видом КФ [110, 195] (см. приложение П.10-П.11) и ввода данных из файла.

Данные, получаемые в первой подсистеме, поступают на вход подсистемы генерирования НВР, а также на вход подсистемы первичной статистической обработки. В обоих случаях передается объем выборки N , интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов СП.

Подсистема генерирования НВР включает в себя следующие способы получения НВР: p -преобразование, адаптивно-временная дискретизация, дискретизация с «дрожанием» и их комбинации [108]. А на выход поступают два массива: массив времен (меток времени) и массив соответствующих им отсчетов СП, а также объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 .

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 . При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции (ИКФ) [108]. Выходными данными данной подсистемы являются количество отсчетов КФ, интервал дискретизации Δt_0 и массив отсчетов КФ. Эти данные поступают на входы подсистем идентификации КФ и аппроксимации КФ.

Подсистема идентификации КФ состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации. Данные в эту подсистему поступают из подсистемы первичной статистической обработки.

Используя переданные значения отсчетов КФ, в данной подсистеме производится построение фазового портрета данной КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.



Рисунок 8.14. Структура автоматизированной системы

Подсистема аппроксимативного анализа состоит из двух частей: аппроксимация КФ функциями заданного вида и функциями Лагерра с возможностью построения спектральной плотности мощности по параметрам модели.

На вход подсистемы аппроксимативного анализа поступают отсчеты КФ и вид аппроксимирующей функции (для случая аппроксимации функциями заданного вида) или количество членов разложения (при аппроксимации функциями Лагерра).

Используя переданные значения, в данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Затем, по желанию исследователя, возможно построение спектральной плотности мощности по параметрам модели.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Схема алгоритма приведена в приложении П.9.

Программные требования системы: Microsoft Windows'98-2000; необходимые библиотеки поддержки Java.

Аппаратные требования системы: Процессор Pentium-166-MMX и выше; ОЗУ 32Мб; свободное место на диске 50Мб, разрешение монитора 1024×768 точек.

8.2.1. Программная реализация

Начало работы

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. 8.15. В первую очередь следует выбрать тип дискретизации СП (регулярная или нерегулярная) и нажать кнопку «**Новая модель**» для генерирования случайного процесса. Или же нажать кнопку «**Загрузить КФ из файла**» и выбрать нужный файл с данными.



Рисунок 8.15. Вид формы начала работы в системе

Генерирование СП с заданным видом КФ

На рис.8.16 можно увидеть вид формы генерирования СП с заданным видом КФ при регулярной дискретизации.

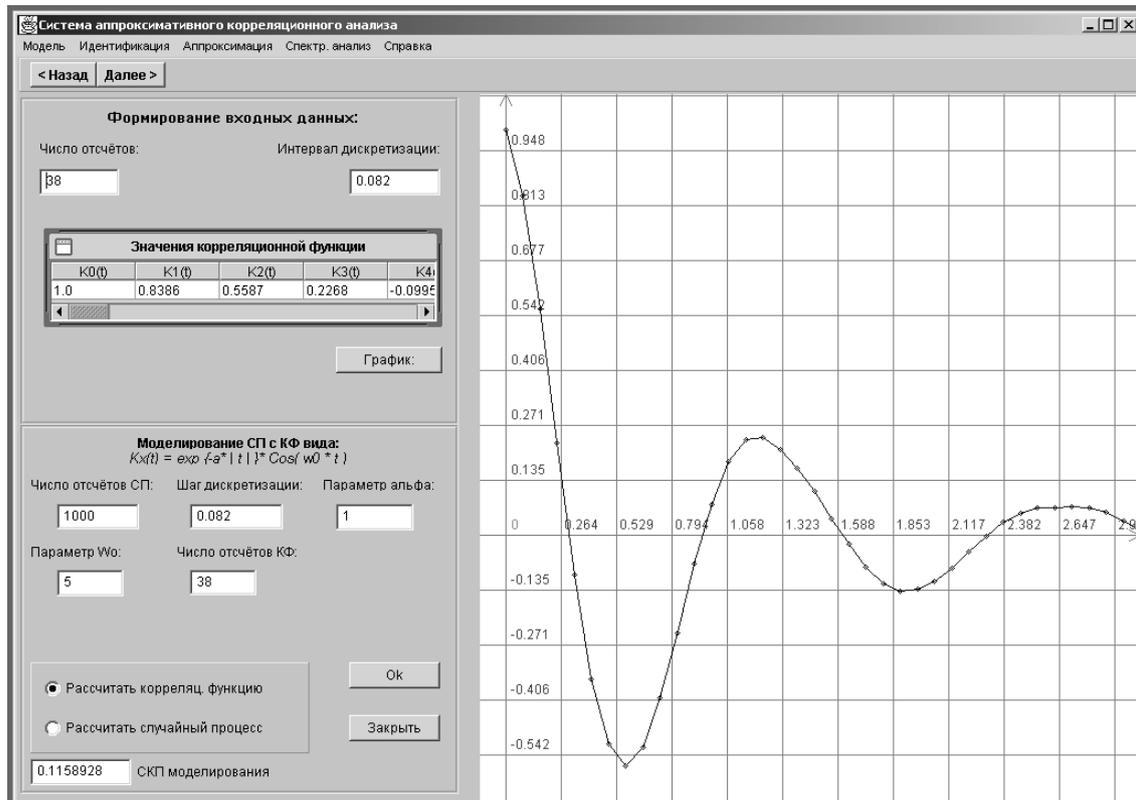


Рисунок 8.16. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет регулярную дискретизацию в форме начала работы в системе.

Основными элементами формы расчета КФ при регулярной дискретизации СП являются:

- панель главного меню,
- кнопки движения по программе,
- панель данных,
- панель задания параметров моделируемого СП,
- панель графиков функций.

Перечислим функции, которые выполняют нижеследующие пункты главного меню:

Модель – выбор вида КФ моделируемого СП (один из шести), работа с файлами (запись в файл и открытие файла), завершение работы с программой;

Идентификация – выбор способа идентификации (автоматическая – позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая – позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ);

Аппроксимация – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида – при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов, функциями Лагерра – в случае, если КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов);

Справка – предоставление справки о программе.

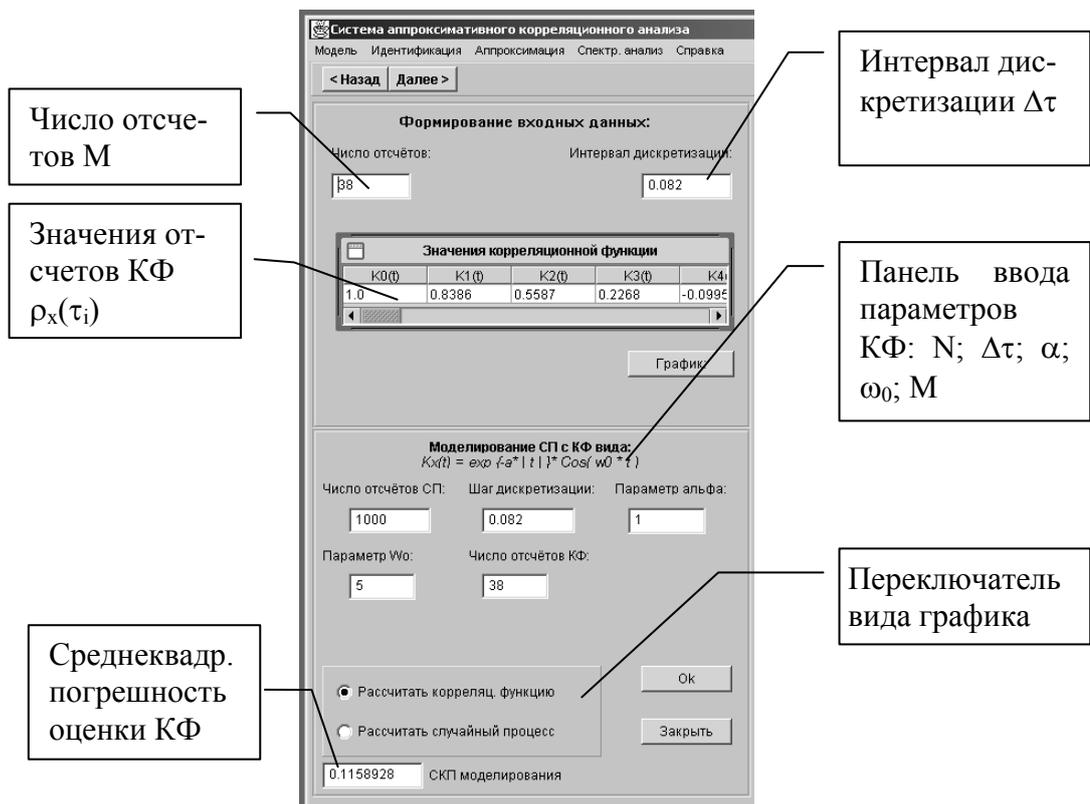


Рисунок 8.17. Описание основной формы

Кнопки движения по программе играют роль «гида», то есть позволяют пользователю, не знакомому с программой, двигаться в нужном направлении, которое соответствует последовательности действий, приведенных в схеме алгоритма (см. приложение П.16).

Панель данных предназначена для ввода и хранения отсчетов СП или отсчетов КФ (в зависимости от того, в каком положении находится переключатель вида графика). Отсчеты КФ (или СП) хранятся в таблице на панели данных (см. рис. 8.17). Данные в эту таблицу заносятся автоматически после того, как выбран вид КФ и смоделирован СП. В этом случае график КФ (или СП) строится автоматически. При желании пользователь может вручную задать значения отсчетов, тогда ему придется нажать на кнопку «График» для того, чтобы отобразить график функции, построенный по введенным отсчетам.

На панели задания параметров моделируемого СП находятся поля ввода следующих параметров:

- число отсчетов СП,
- шаг дискретизации,
- число отсчетов КФ,
- параметр α ,
- параметр ω_0 .

Для корректного расчета шага дискретизации и минимального числа отсчетов КФ необходимо щелкнуть по панели задания параметров правой клавишей «мыши» и после появления всплывающего меню выбрать нужную погрешность моделирования, после чего вышеуказанные параметры автоматически будут пересчитаны для конкретного случая.

Итак, для начала работы в данной форме необходимо выбрать в пункте меню «Модель» (подменю «Моделировать СП с КФ заданного вида:») нужный вид СП.

Затем, задав необходимые параметры модели и скорректировав шаг дискретизации и число отсчетов КФ, моделировать СП. Для этого нужно нажать кнопку «ОК».

После окончания моделирования на панели графиков появится изображение СП или соответствующей ему КФ, в таблице на панели данных будут занесены отсчеты СП (или КФ), а в поле вывода погрешности занесется среднеквадратическая погрешность моделирования.

Генерирование НВР с заданным видом КФ

Общий вид формы генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР) с заданным видом КФ дан на рис. 8.18. Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет нерегулярную дискретизацию в форме начала работы системы.

Для начала работы в данной форме необходимо сначала выбрать вид КФ моделируемого СП (пункт меню «Модель»). Задать параметры модели (α , ω_0), число отсчетов СП, интервал дискретизации и число отсчетов КФ. Далее выбрать модель и параметры нерегулярной дискретизации, например, значение вероятности p – преобразования. После данных приготовлений следует нажать кнопку «ОК» для моделирования СП с заданным видом КФ.

Идентификация вида КФ

Форму для идентификации КФ можно вызвать из пункта «Идентификация» – «Автоматически» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. 8.19. Для идентификации КФ, необходимо сравнивать саму КФ (в простейшем случае) с шестью основными видами КФ, приведенными в списке, и ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами. При выборе одной из КФ списка (щелчком мыши), появляется ее схематическое изображение. Затем, после нажатия кнопки «Построить фазовый портрет:», в области построения отобразятся портреты исходной (экспериментальной) и выбранной из списка (теоретической) КФ, синим и красным цветами соответственно. В поле «Погрешность» отобразится квадратическая погрешность сравнения фазовых портретов.

Определив примерный вид КФ, можно провести его уточнение. Задавая параметры α и ω_0 для теоретической модели КФ в полях « α :» и « ω_0 :», можно подобрать их таким образом, чтобы квадратическая погрешность была минимальной. В этом случае будет определен не только вид экспериментальной КФ, но и ее параметры, что особенно важно при аппроксимации параметрическими моделями.

Если результаты идентификации удовлетворительны, и вид КФ определен однозначно, то, нажав кнопку «Аппроксимировать», мы перейдем в форму аппроксимации КФ параметрическими моделями, где будет производиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации.

Отметим, что по найденным параметрам модели корреляционной функции можно более точно построить теоретический фазовый портрет. Это, в свою очередь, даст возможность наглядно убедиться в качестве аппроксимации.

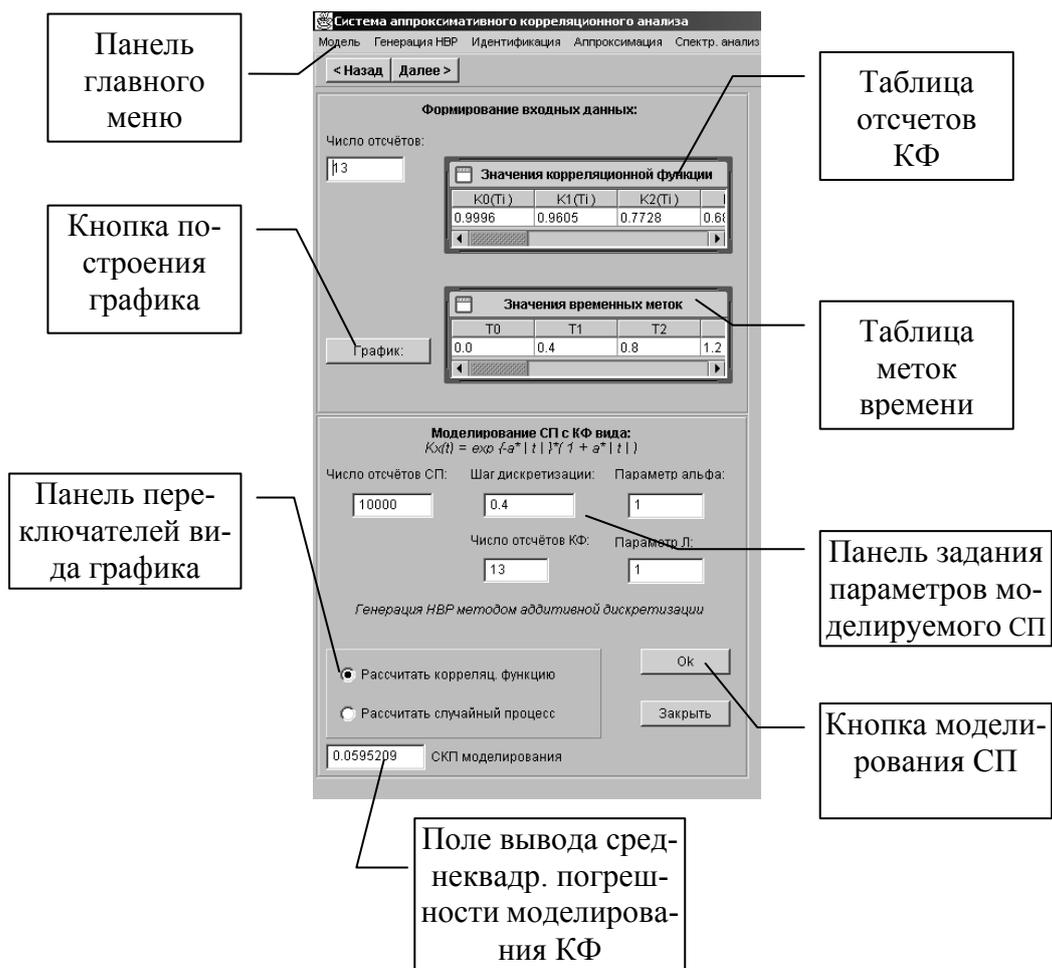
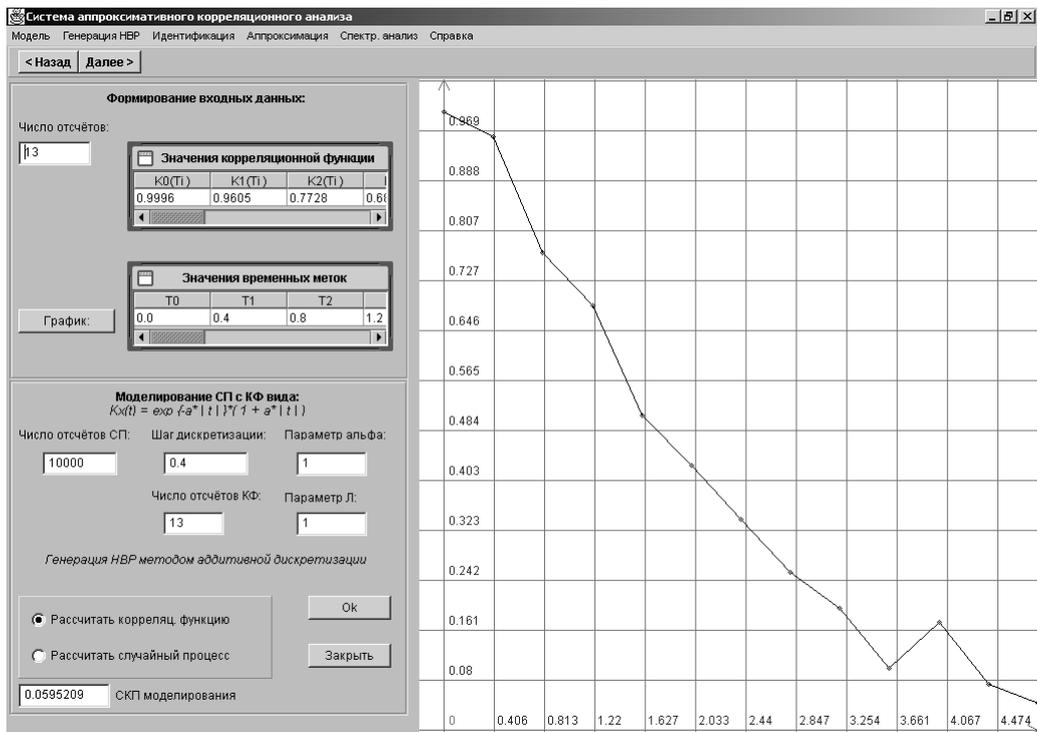


Рисунок 8.18. Вид формы генерирования НВР с заданным видом КФ



Рисунок 8.19. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо закрыть форму и производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимация КФ функциями заданного вида

В том случае, когда вид КФ известен или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

Форму для аппроксимации КФ функциями заданного вида можно вызвать из пункта «Аппроксимация» главного меню, а также нажатием кнопки «Аппроксимация» на панели идентификации КФ после выбора вида аппроксимирующей функции.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис 8.8.

При работе в данной форме в первую очередь нужно задать вид аппроксимирующей функции при помощи переключателей на панели выбора вида аппроксимирующей модели (рис. 8.20). Затем рассчитать начальные приближения параметров модели автоматически или задать вручную. Для автоматического расчета начальных приближений необходимо нажать кнопку «Рассчитать» на панели управления ходом аппроксимации. В некоторых случаях, особенно при аппроксимации методом Ньютона, процесс может не сойтись из данных точек. В таком случае следует вручную подкорректировать начальные приближения в их полях ввода (рис.8.21).

Иногда эту процедуру приходится выполнять многократно.

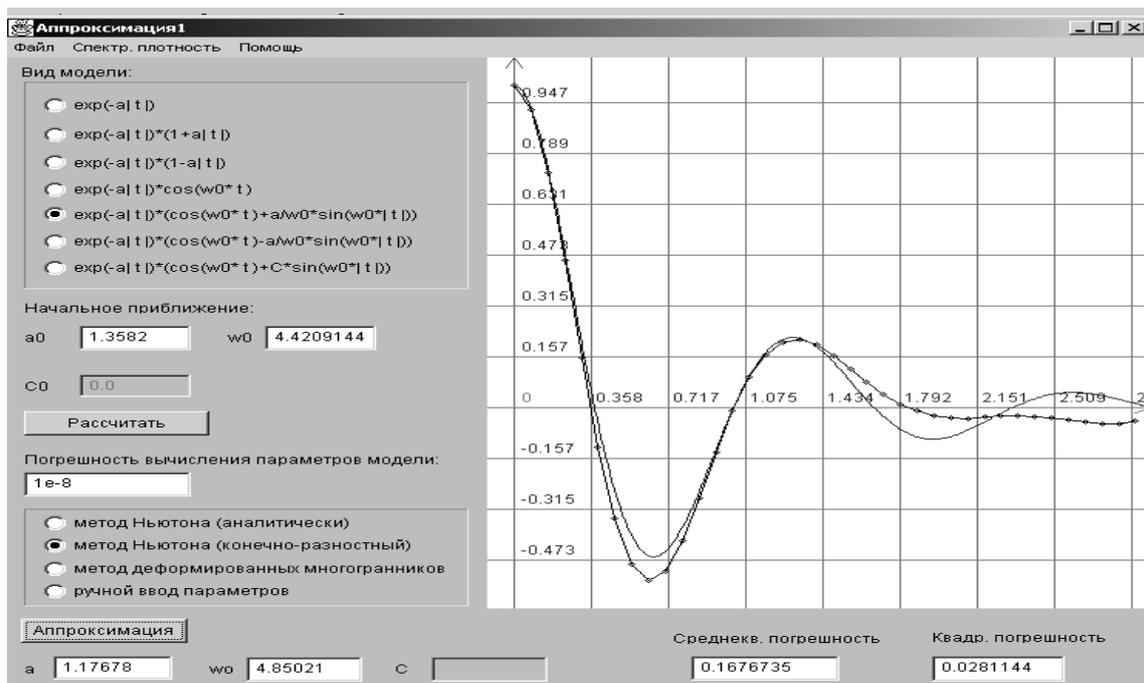


Рисунок 8.20 Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Далее следует задать значение погрешности вычислений параметров модели (критерия сходимости) в соответствующем поле (рис. 8.21). Данное значение используется как критерий окончания вычислений при аппроксимации – ε .

После задания всех вышеуказанных числовых параметров следует выбрать метод аппроксимации на соответствующей панели. На панели выбора метода аппроксимации присутствуют следующие опции:

- метод Ньютона (аналитический),
- метод Ньютона (конечно-разностный),
- метод деформированного многогранника,
- ручной ввод параметров.

При выборе опции ручного ввода параметров после нажатия кнопки «**Аппроксимация**» происходит простой перенос значений полей ввода начальных приближений в поля вывода рассчитанных параметров и строится соответствующий график аппроксимирующей функции. Таким образом, предоставляется возможность пользователю самостоятельно подбирать значения параметров аппроксимирующего выражения.

При нажатии кнопки «**Аппроксимация**» (рис. 8.20) производится запуск алгоритма аппроксимации. В поля вывода рассчитанных параметров модели заносятся значения α и ω_0 , которые были вычислены одним из методов. В поля вывода погрешности аппроксимации заносятся значения среднеквадратической и квадратической погрешности.

Отметим, что по «умолчанию» система выбирает метод деформированного многогранника, обладающий лучшей сходимостью. Выбрав в качестве начального приближения параметров найденные значения модели указанным методом, возможно дальнейшее уточнение параметров модели. Для этого необходимо воспользоваться одним из методов Ньютона.

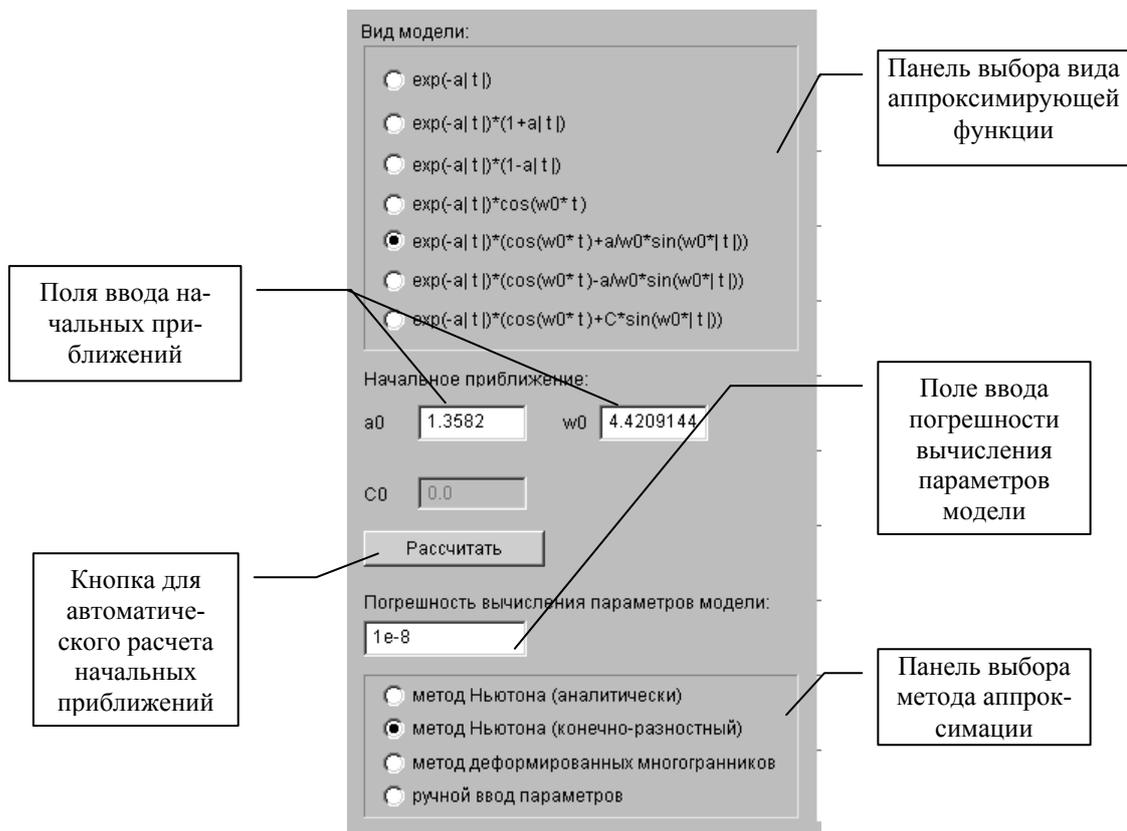


Рисунок 8.21. Панель управления параметрами аппроксимации

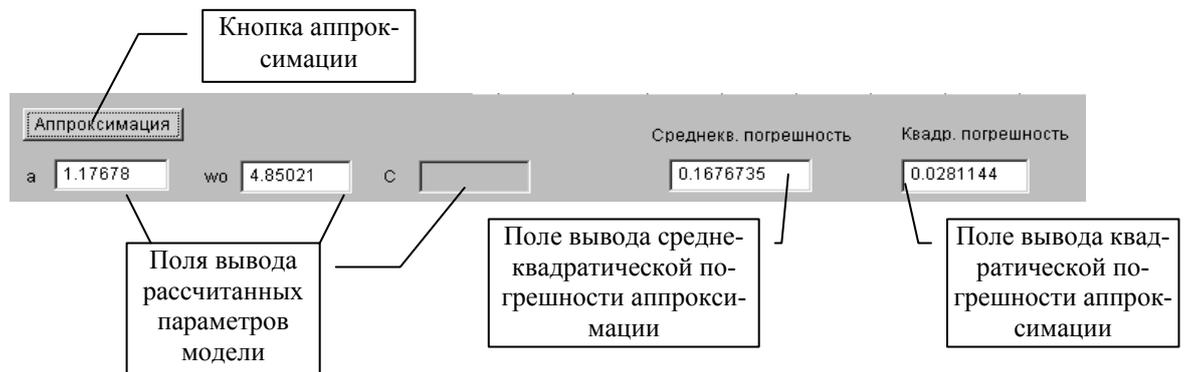


Рисунок 8.22. Панель вывода результатов аппроксимации

Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

После получения массива отсчетов КФ, производится ее аппроксимация. Форму для аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра можно вызвать из пункта «Аппроксимация» - «Ортогональными ф-ми Лагерра» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. 8.23.

Для проведения аппроксимации необходимо вычислить параметр α функции Лагерра (рис. 8.24.) Для этого требуется задать начальное приближение параметра α (по умолчанию оно равно 1), которое необходимо для реализации расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра (по умолчанию она равна 0.001) и выбрать один из методов численного интегрирования (метод Симпсона, трапеций или прямоугольников). После этого, нажав кнопку «Вычислить α », получим значение вычисленного параметра в поле « α :» (в это поле можно занести произвольное значение

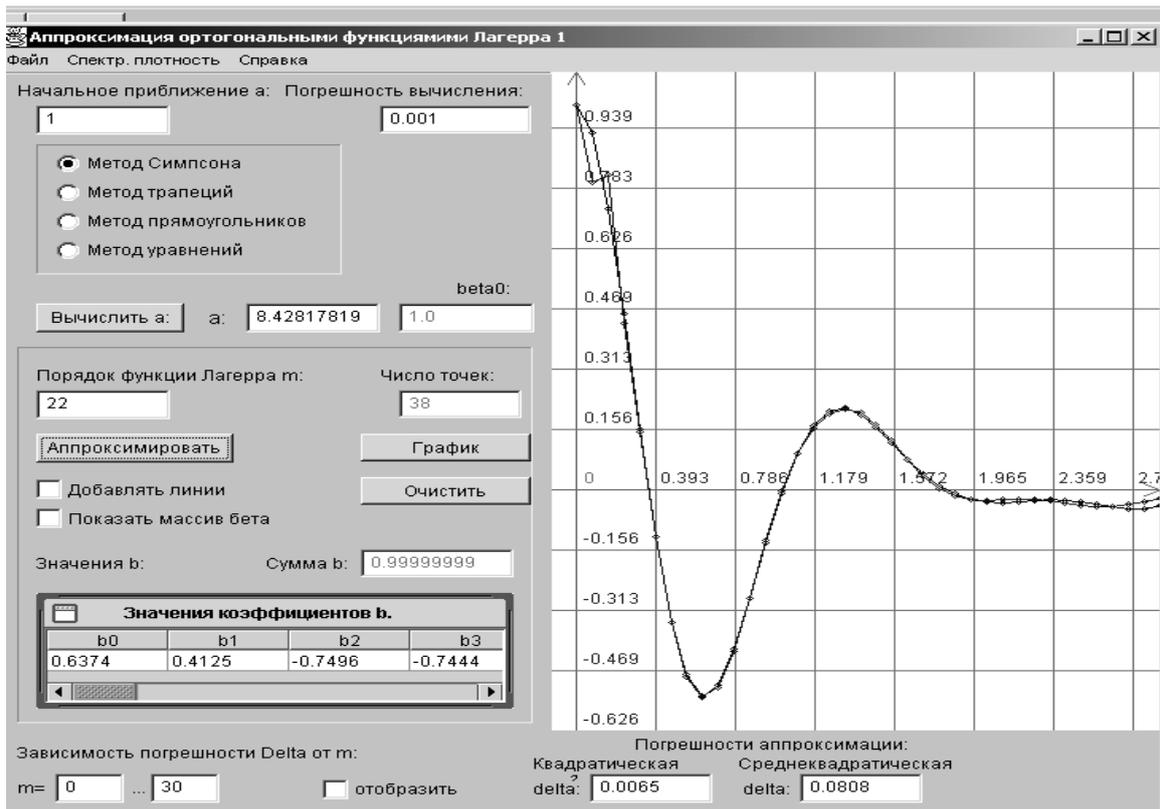


Рисунок 8.23 Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Рисунок 8.24. Описание параметров окна аппроксимации

ние вручную), а в поле «**beta0:**» появится значение коэффициента b_0 которое должно быть равно 1 и является проверкой качества расчета α .

После того, как параметр α будет вычислен (либо установлен вручную), необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра m . (В соседнем поле указывается число точек, по которым будет проводиться аппроксимация - оно равно числу отсчетов поступившей на вход КФ). После нажатия кнопки «**Аппроксимировать**», в таблицу «**Значения b:**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, в поле для построения графика к исходной КФ (она рисуется **синим цветом**) добавится график аппроксимирующей функции, а так же будут вычислены и отображены в специальном поле (рис. 8.23) квадратическая и среднеквадратическая погрешности аппроксимации δ^2 и δ . Так же отобразится значение суммы коэффициентов \mathbf{b} , которая должна быть равной 1.

Расставляя или убирая соответствующие флажки, пользователь может либо наслаивать графики один на другой, сравнивая результаты аппроксимации несколькими функциями не только по значению погрешности δ , но и визуально, либо отображать только одну функцию, а так же показывать либо скрывать значения аппроксимирующей функции в каждой точке.

Задавая начальное и конечное значение m (рис. 8.24) и устанавливая флажок «**отобразить**», пользователь может построить график зависимости квадратической погрешности аппроксимации δ^2 от порядка m функции Лагерра для данной КФ. Анализ этого графика позволит найти оптимальное значение m , при котором $\delta^2 \rightarrow \min$. (График строится с шагом по m , равным 2).

Завершение работы с формой производится ее стандартным закрытием или с помощью кнопки «**Закреть**».

По определенной модели корреляционной функции исследователь может построить график спектральной плотности мощности. Для этого необходимо нажать кнопку «**Спектр. анализ**» в форме «**Аппроксимация**» при аппроксимации параметрическими моделями (см. рис 8.20), а при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра - в соответствующем окне (см. рис.8.24) кнопку «**Спектр**», а в окне «**Спектральный анализ**» - кнопку «**Добавить**».

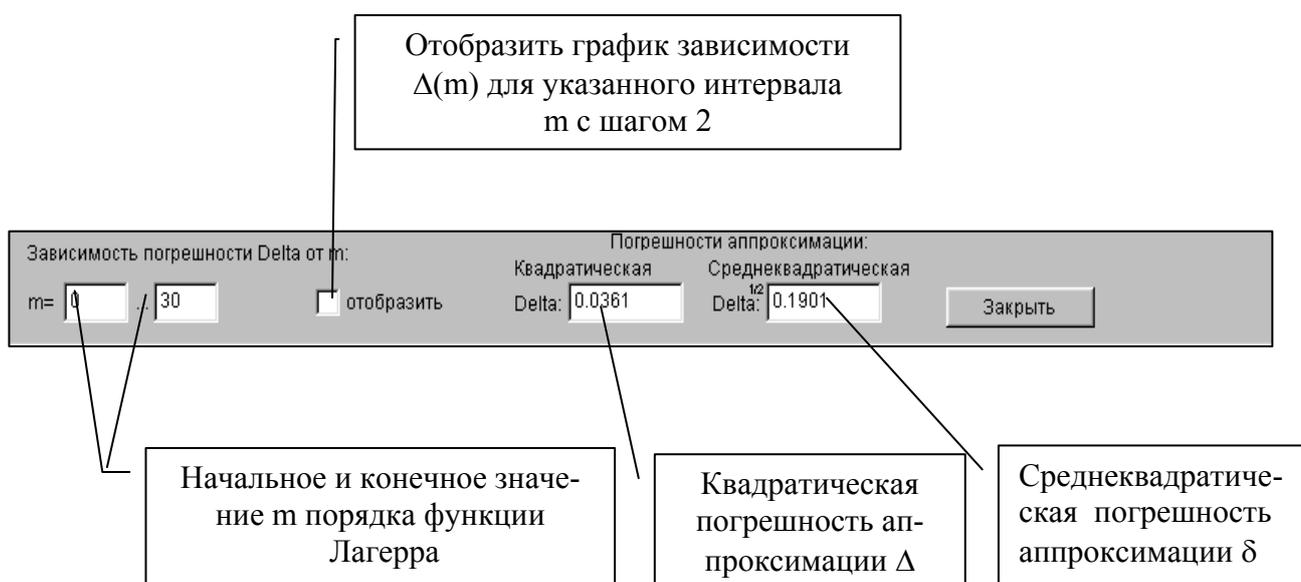


Рисунок 8.25. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

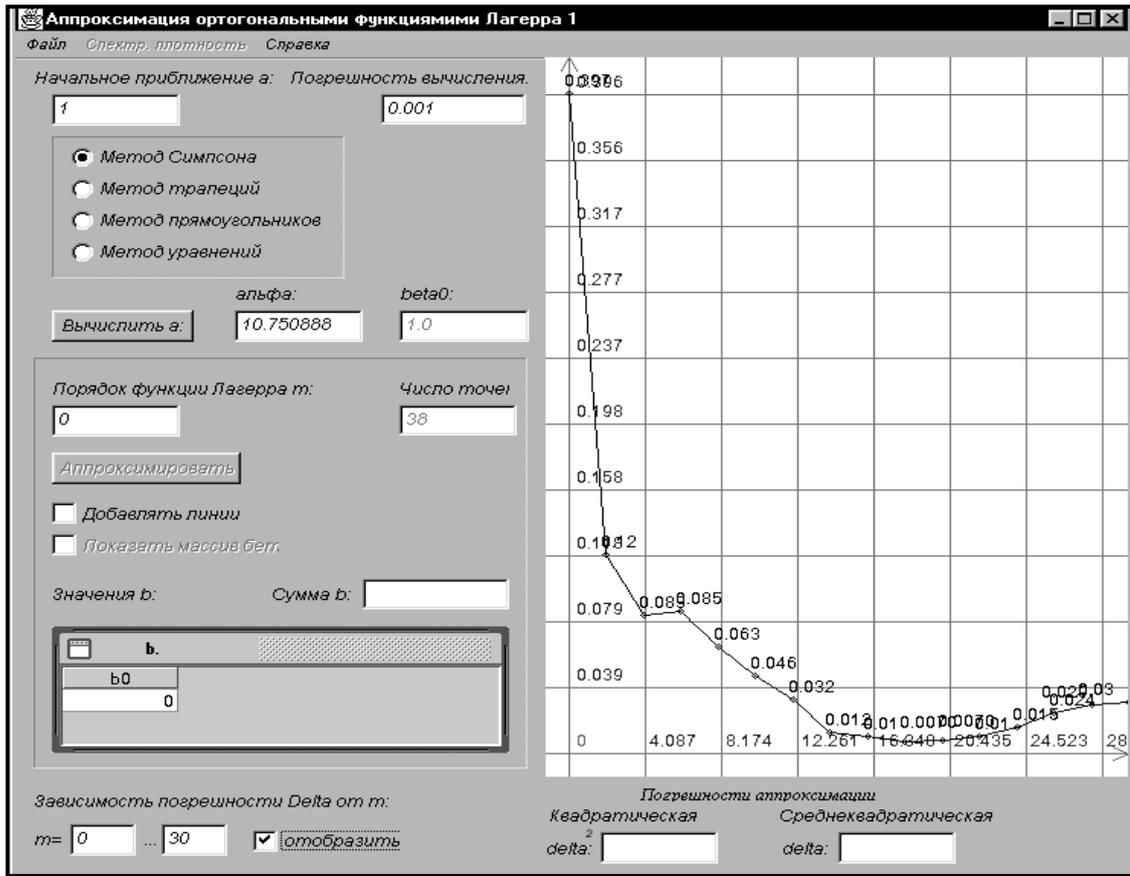


Рисунок 8.26. Поиск оптимального числа членов разложения ряда

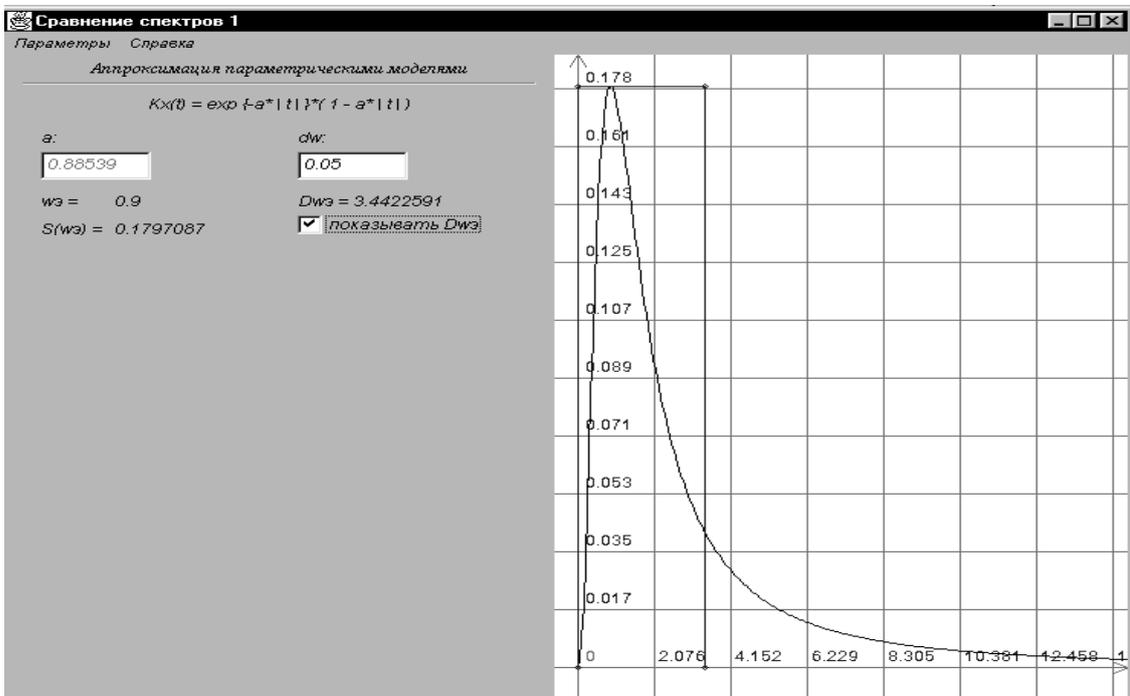


Рисунок 8.27. Форма окна спектрального анализа

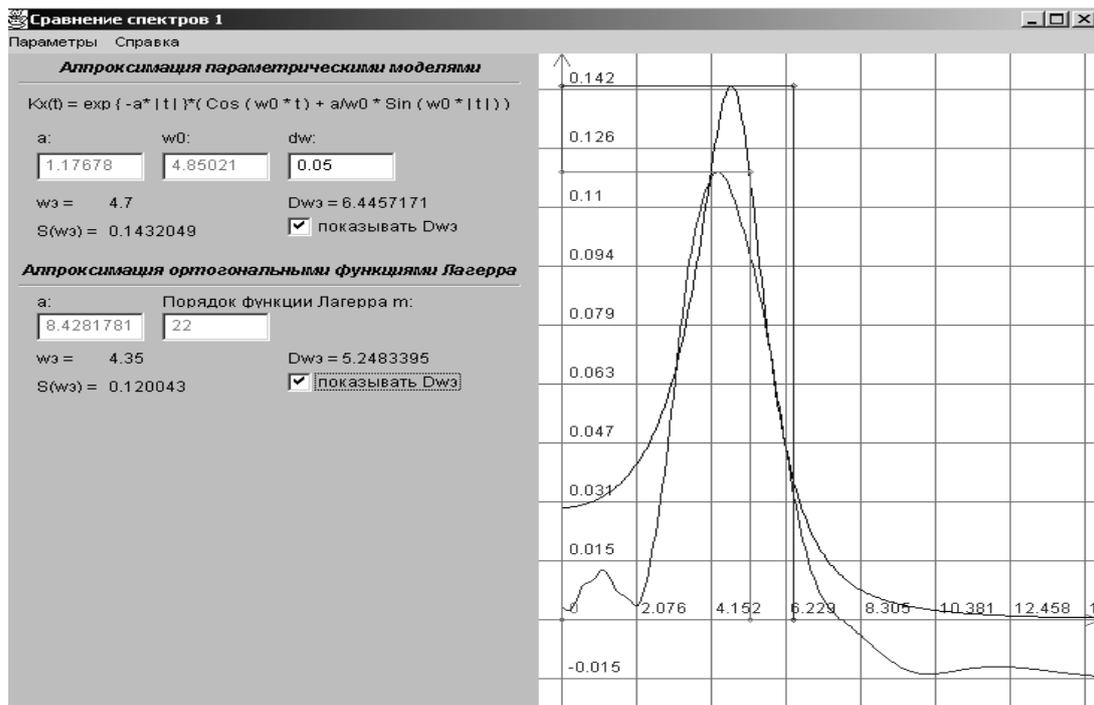


Рисунок 8.28. Форма окна спектрального анализа при аппроксимации спектра ортогональными функциями Лагерра

Отметим, что для удобства пользователей в системе предусмотрены следующие возможности:

1. при моделировании СП возможно изменение интервала дискретизации, обеспечивающего восстановление корреляционной функции с заданной погрешностью (см. рис. 8.29 а).
2. При отображении графической информации возможно изменение формы представления результатов (см. рис. 8.29 б).

Для этого необходимо нажать правую кнопку «мыши», поместив курсор в соответствующее окно.

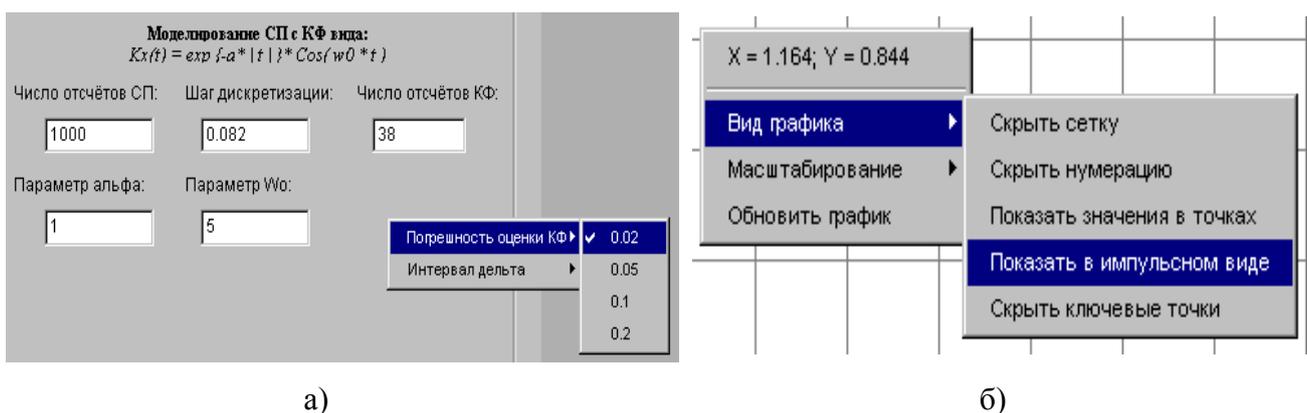


Рисунок 8.29.

Пример результатов обработки представлен на рис. 8.30-8.33, где последовательно представлены: неэквидистантный временной ряд, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

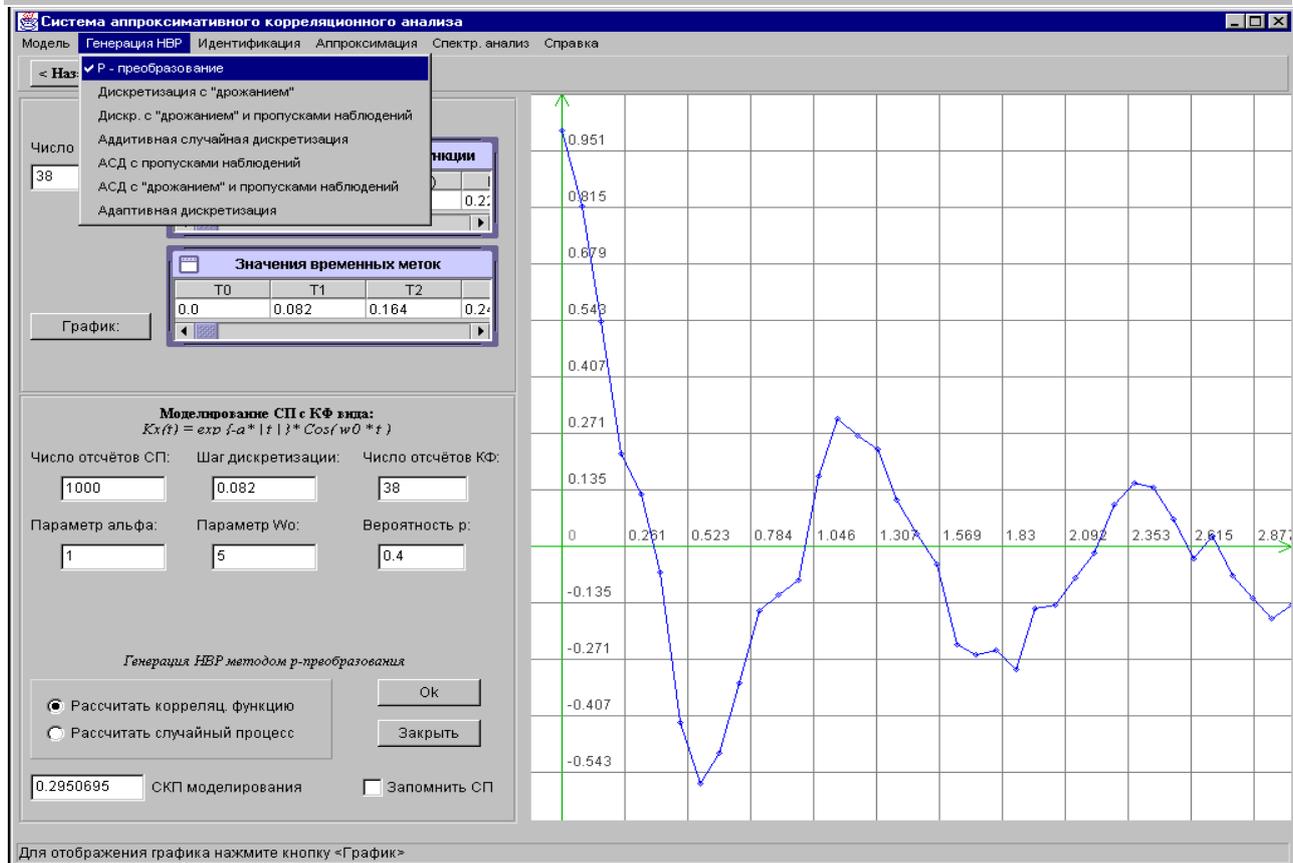
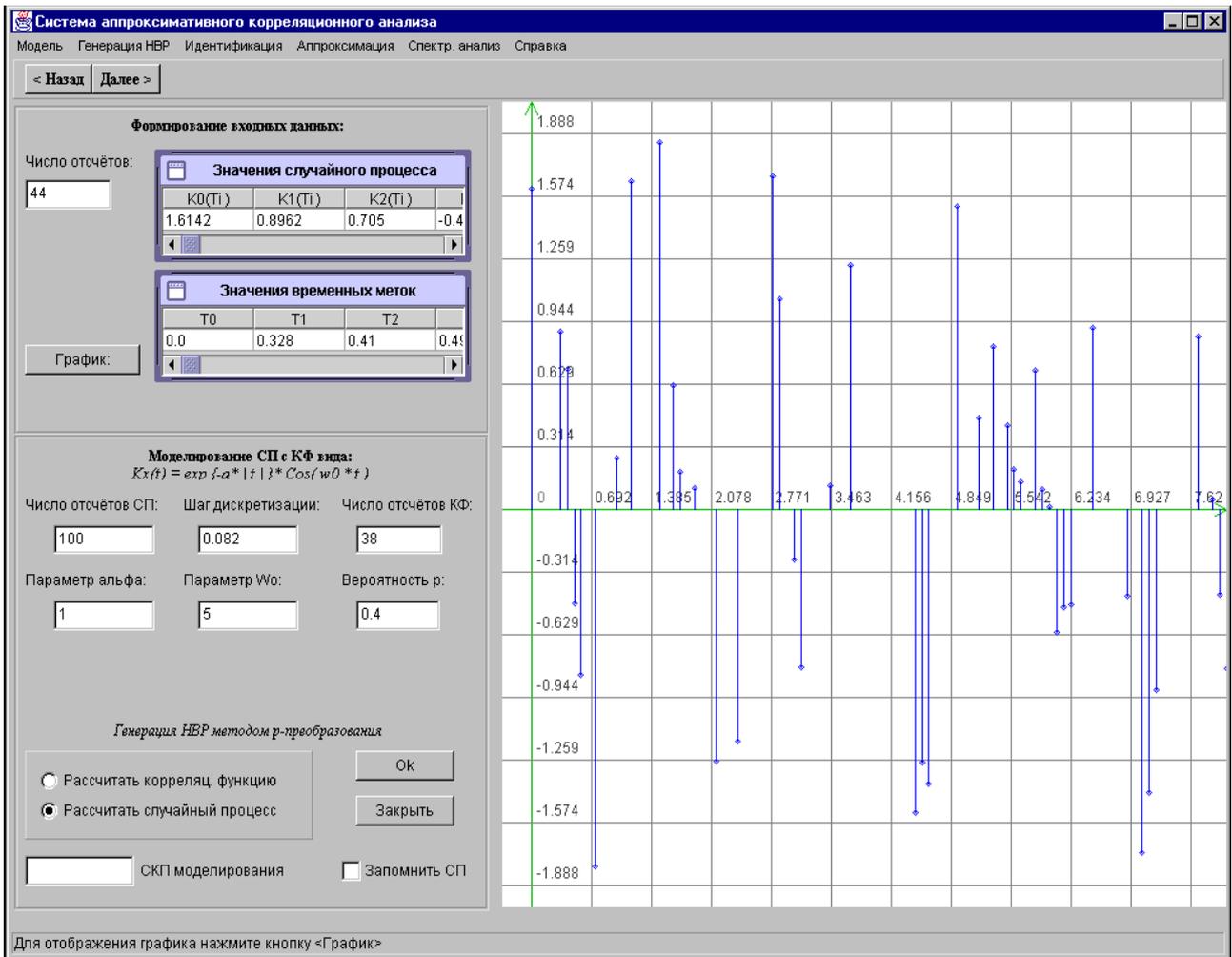


Рисунок 8.30.

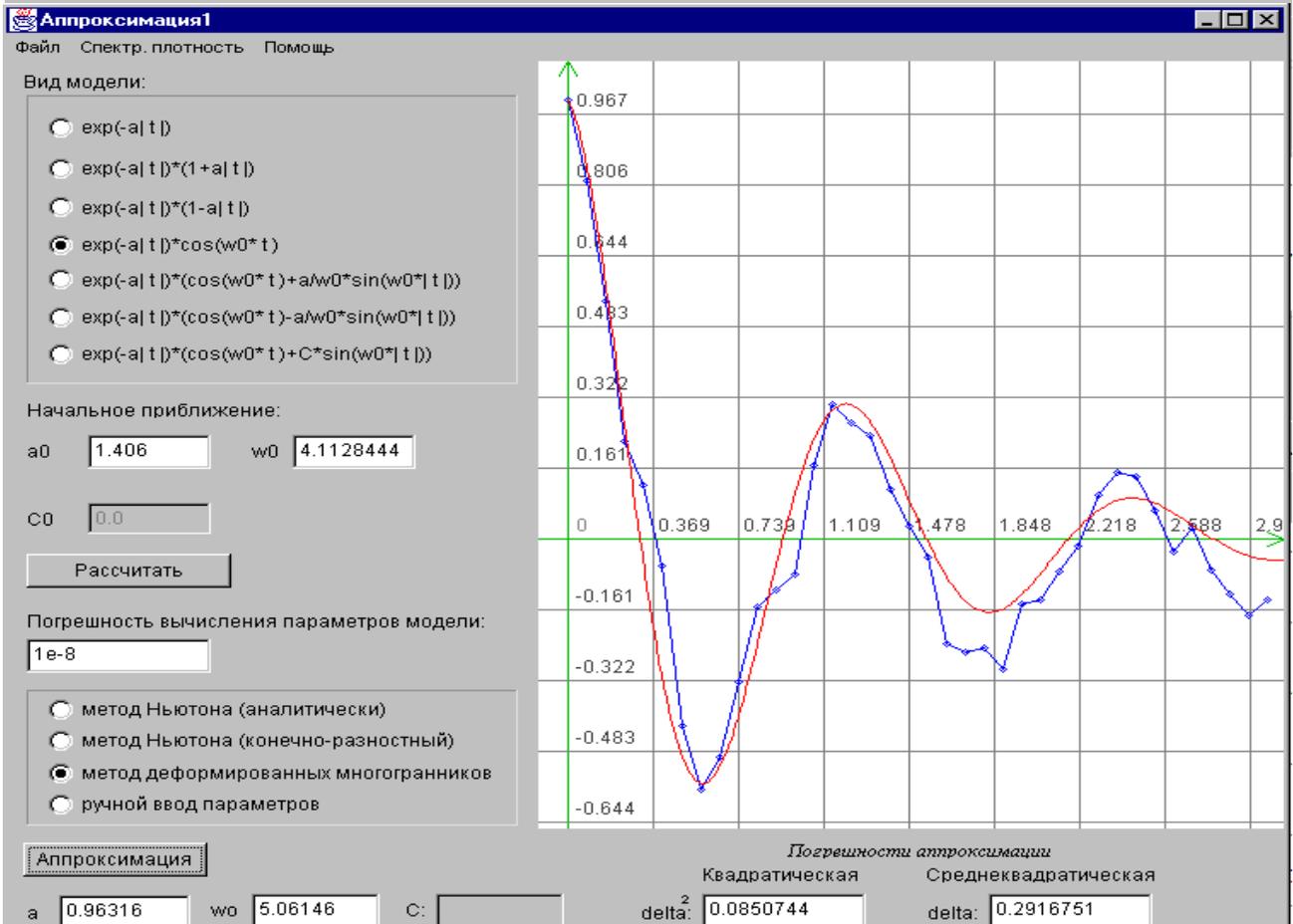
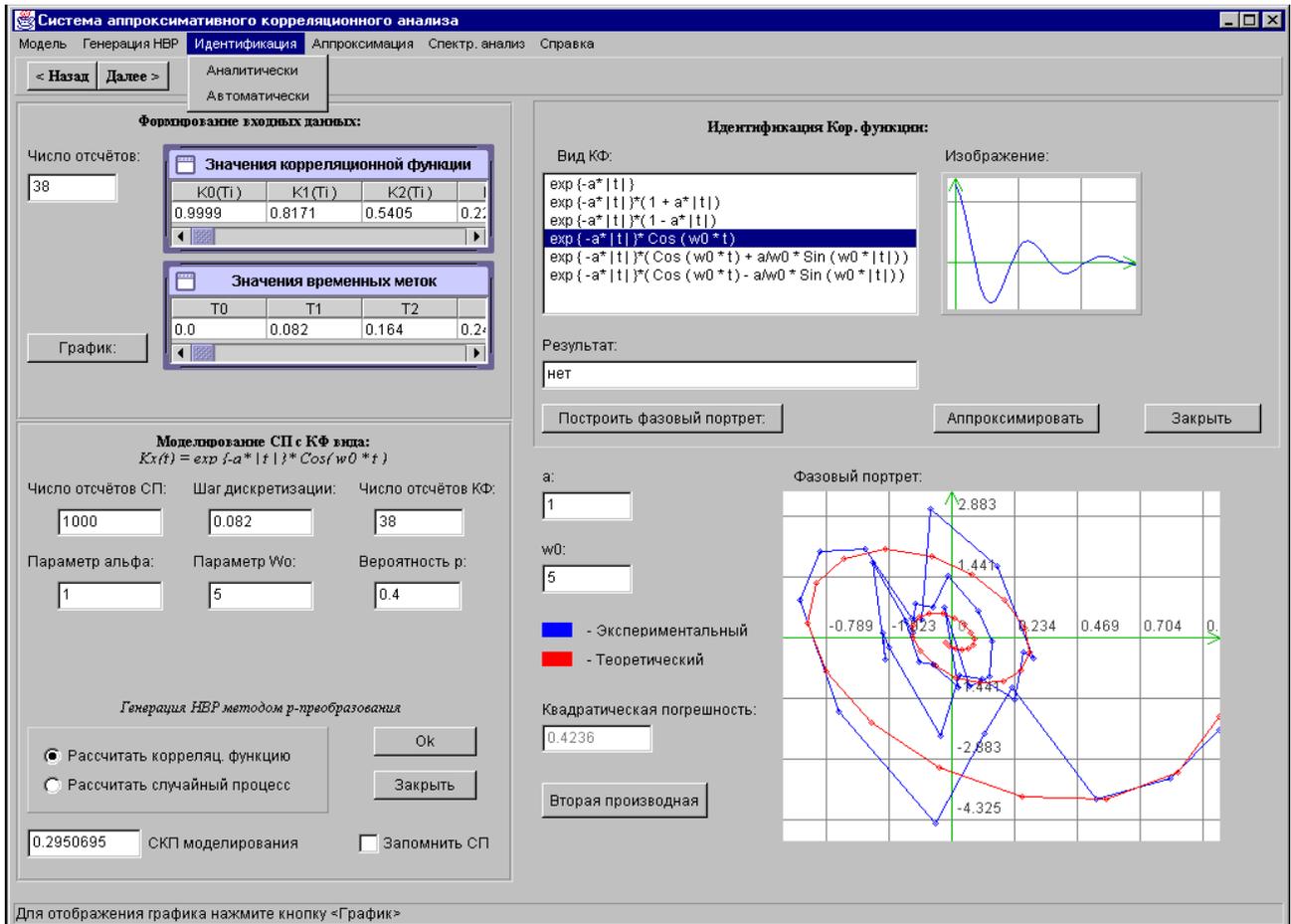


Рисунок 8.31.

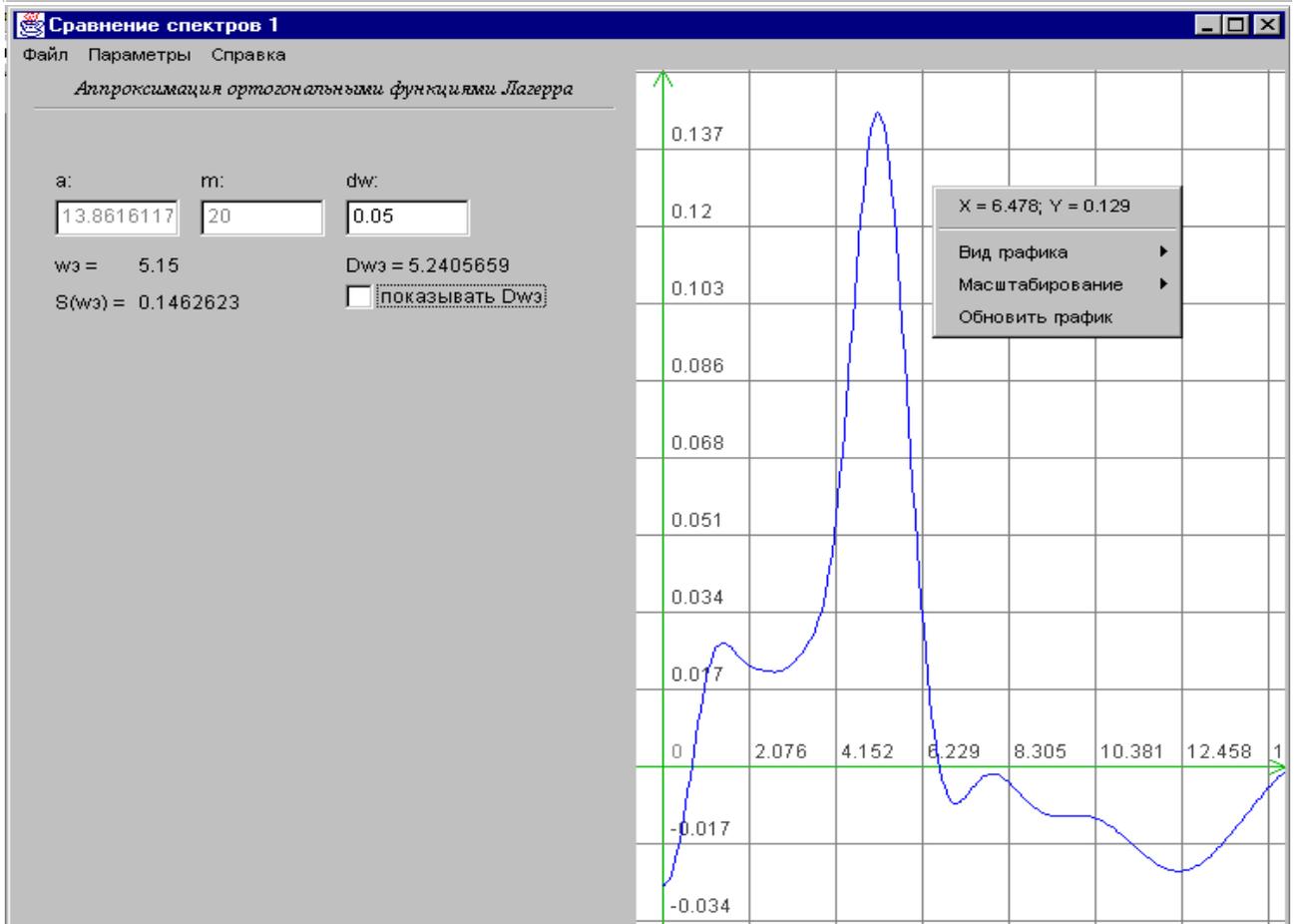
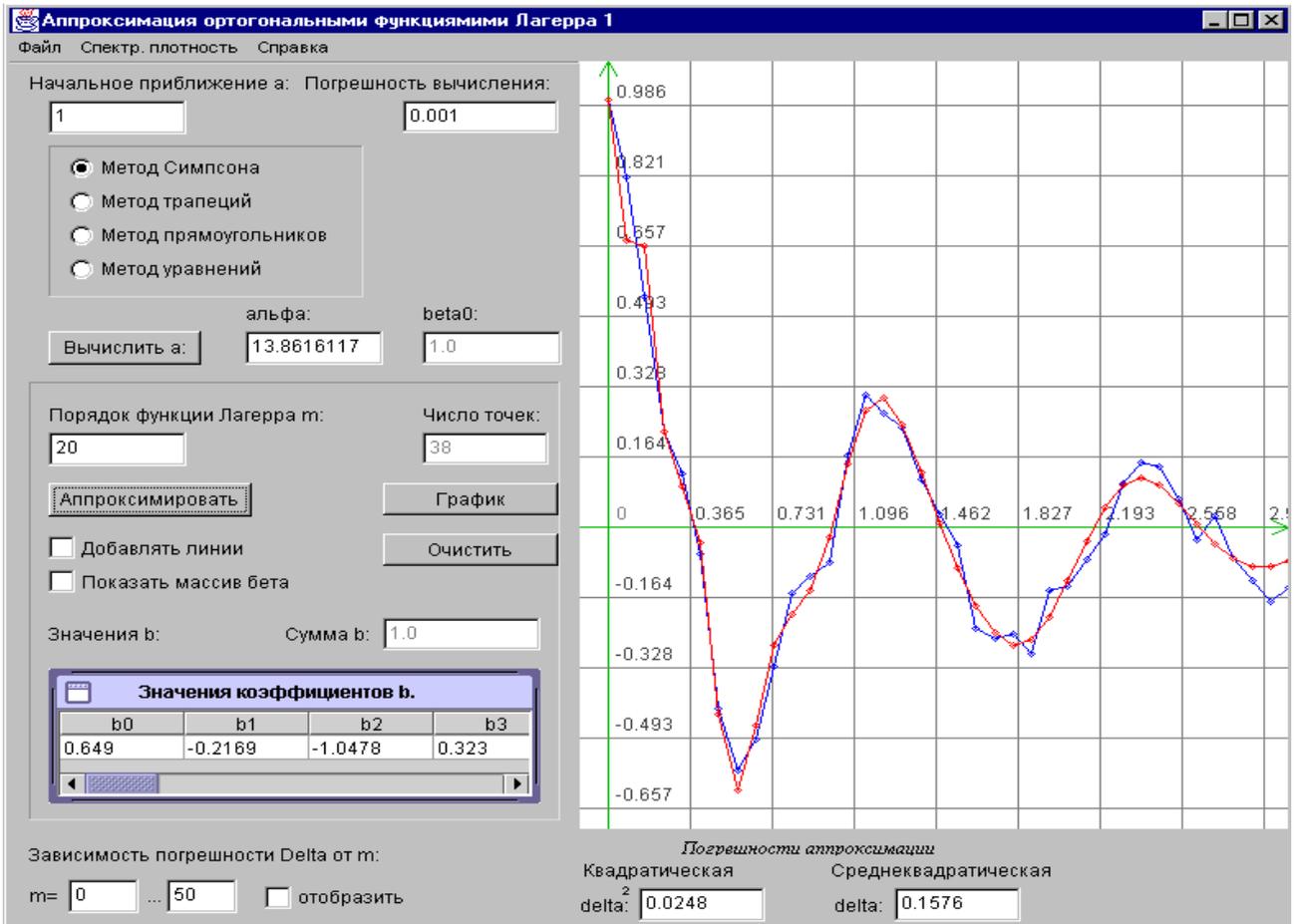


Рисунок 8.33.

8.3. Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Разработанная система служит для проведения аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов [1, 107]. Структурная схема системы приведена на рис 8.31. В соответствии с выполняемыми функциями можно выделить следующие подсистемы:

1. задания входных воздействий и генерирования НВР;
2. первичной статистической обработки;
3. аппроксимации взаимной корреляционной функции;
4. аппроксимации спектральной плотности мощности.

Подсистема задания входных воздействий и генерирования НВР состоит из двух модулей.

В первом модуле производится генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции (КФ) и получение НВР. Полученные данные: массив меток времени и соответствующие им отсчеты СП, объем выборки M и интервал дискретизации Δt_0 , - поступают на вход подсистемы первичной статистической обработки, могут служить для получения второго СП и являются входными данными для подсистемы аппроксимации взаимной корреляционной функции.

Во втором модуле производится генерирование новой псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ или обработка первого СП.

Получаемые в результате работы первой подсистемы данные поступают на вход следующих двух подсистем.

Подсистема первичной статистической обработки производит оценку числовых характеристик, центрирование, нормирование случайных процессов, оценку и построение фазового портрета КФ. При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции.

Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции состоит из двух частей: оценки ВКФ и аппроксимации ВКФ функциями Лагерра или типовыми параметрическими моделями. На вход этой подсистемы кроме данных, полученных в подсистеме 1, поступает число членов разложения и интервал, на котором производится оценка ВКФ, или начальные значения параметров параметрической модели. Затем вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации как для положительной, так и отрицательной областей определения ВКФ. Полученные аппроксимирующие выражения поступают в подсистему 4.

Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности. На основе данных, полученных в подсистеме 3, производится построение взаимной спектральной плотности мощности как в ортогональном базисе Лагерра, так и с использованием параметрических моделей.

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис 8.32.

Основными элементами формы является панель главного меню и страницы, выбирая которые пользователь переходит между частями программы.



Рисунок 8.31. Структура автоматизированной системы

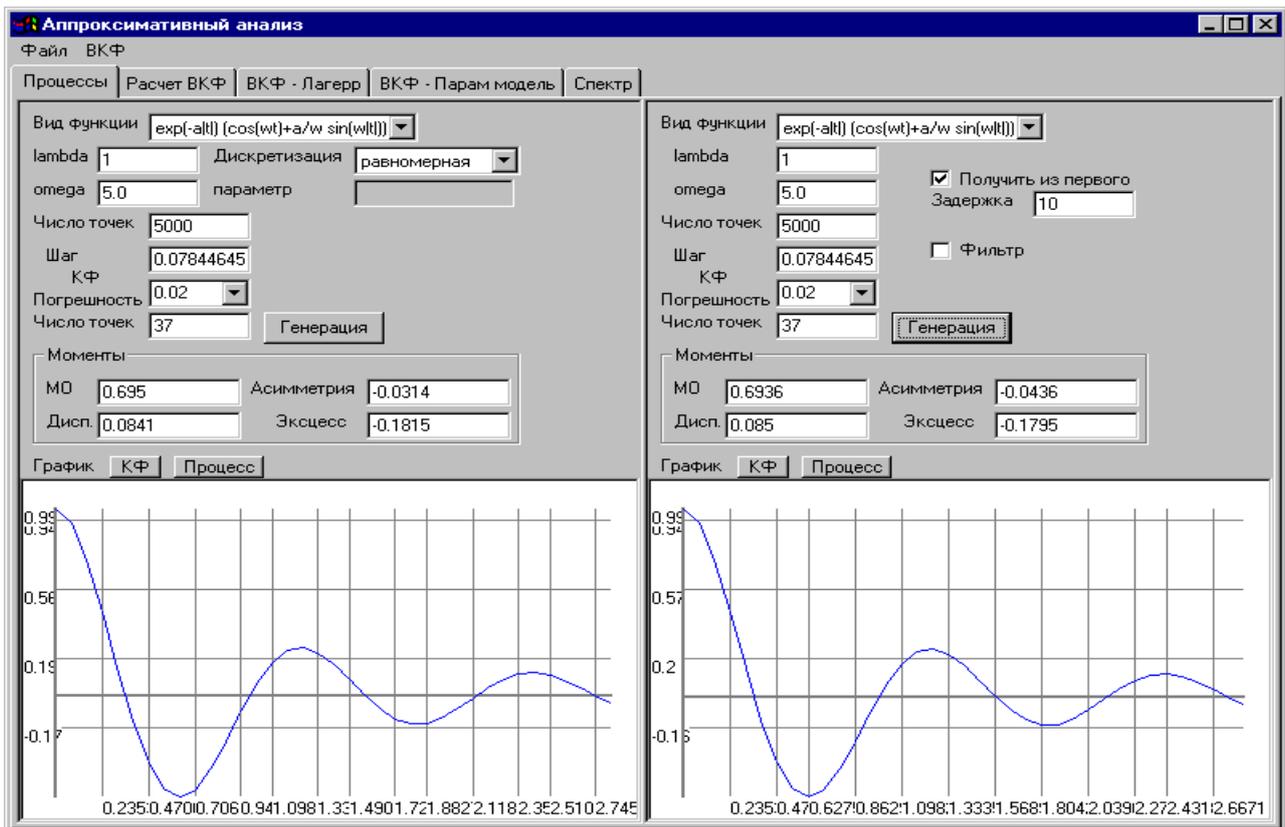


Рисунок 8.32.

Задание входных воздействий и генерирование НВР

С помощью первой страницы осуществляется задание входных воздействий, генерирование НВР и первичная статистическая обработка. Она содержит две панели: **левую** - для генерирования и первичной обработки первого процесса и **правую** - для генерирования и первичной обработки второго процесса. На левой панели необходимо ввести следующие параметры:

- число отсчетов СП;
- шаг дискретизации;
- параметры α , ω_0 ;
- погрешность моделирования.

В случае генерирования НВР необходимо ввести параметры нерегулярной дискретизации.

После нажатия на кнопку «Генерация» СП будет смоделирован. Сразу же будут рассчитаны математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс и КФ процесса и отображены на панели. Предусмотрена возможность отображения КФ и самого СП. Для этого нужно нажать на соответствующие кнопки над графиком.

Генерирование второго процесса производится на правой панели. Для этого необходимо сгенерировать СП с заданным видом КФ аналогично рассмотренному выше или установить флаг «получить из первого». При этом второй процесс будет получен из первого с помощью задержки на указанное число отсчетов.

Характеристики процесса расположены в нижней половине панели.

После генерирования двух процессов можно перейти на страницу 2, выбрав закладку «ВКФ» в левом верхнем углу формы.

Для расчета ВКФ двух сгенерированных процессов необходимо ввести количество точек левой и правой ветвей и нажать на кнопку «Рассчитать» (см. рис. 8.33).

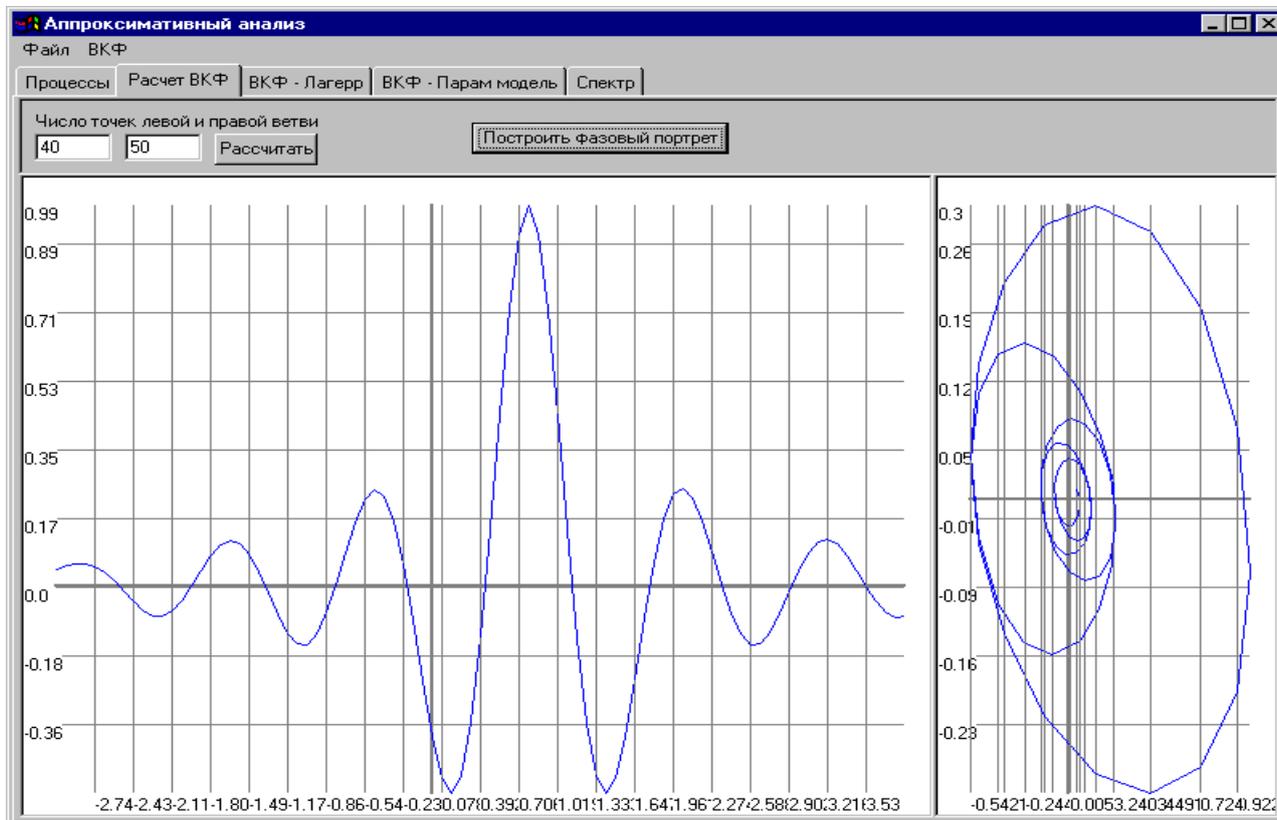


Рисунок 8.33.

Исследователь по своему усмотрению в ручном режиме может установить требуемое количество точек правой и левой ветвей взаимной корреляционной функции. Кроме этого возможно построение её фазового портрета.

После определения вида модели возможен переход либо на третью, либо четвертую страницы.

Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями Лагерра

Страница 3 состоит из двух панелей. Левая служит для ввода параметров, правая - для отображения построенных графиков. Эта страница приведена на рис. 8.34.

Для проведения аппроксимации рассчитанной ВКФ необходимо вычислить параметр α функции Лагерра. Для этого требуется задать начальное приближение параметра α , которое необходимо для расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра, выбрать один из методов численного интегрирования (прямоугольников, трапеций или Симпсона) и нажать кнопку « $b_1=0$ » или задать параметр α вручную в поле «*alfa*». Затем необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра в поле «**Число членов ряда**». Эту операцию необходимо выполнить для правой и левой ветви. После нажатия кнопки

«Аппроксимировать» в список «**beta**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, причем вид этих коэффициентов (β или b) зависит от состояния флажка «**beta/be**», а в поле графика будут отображены синим цветом ВКФ и красным аппроксимирующая функция. В поле «**СрКв**» будет отображена среднеквадратическая погрешность аппроксимации.

Установив максимальное значение порядка аппроксимирующей функции в поле «**Число членов ряда**» и нажав на кнопку «**Погрешность**» справа или слева в поле графика можно получить зависимость среднеквадратической погрешности аппроксимации для правой или левой ветви. Анализ этого графика позволяет найти оптимальное значение порядка аппроксимирующей функции. Пример графика приведен на рис 8.35.

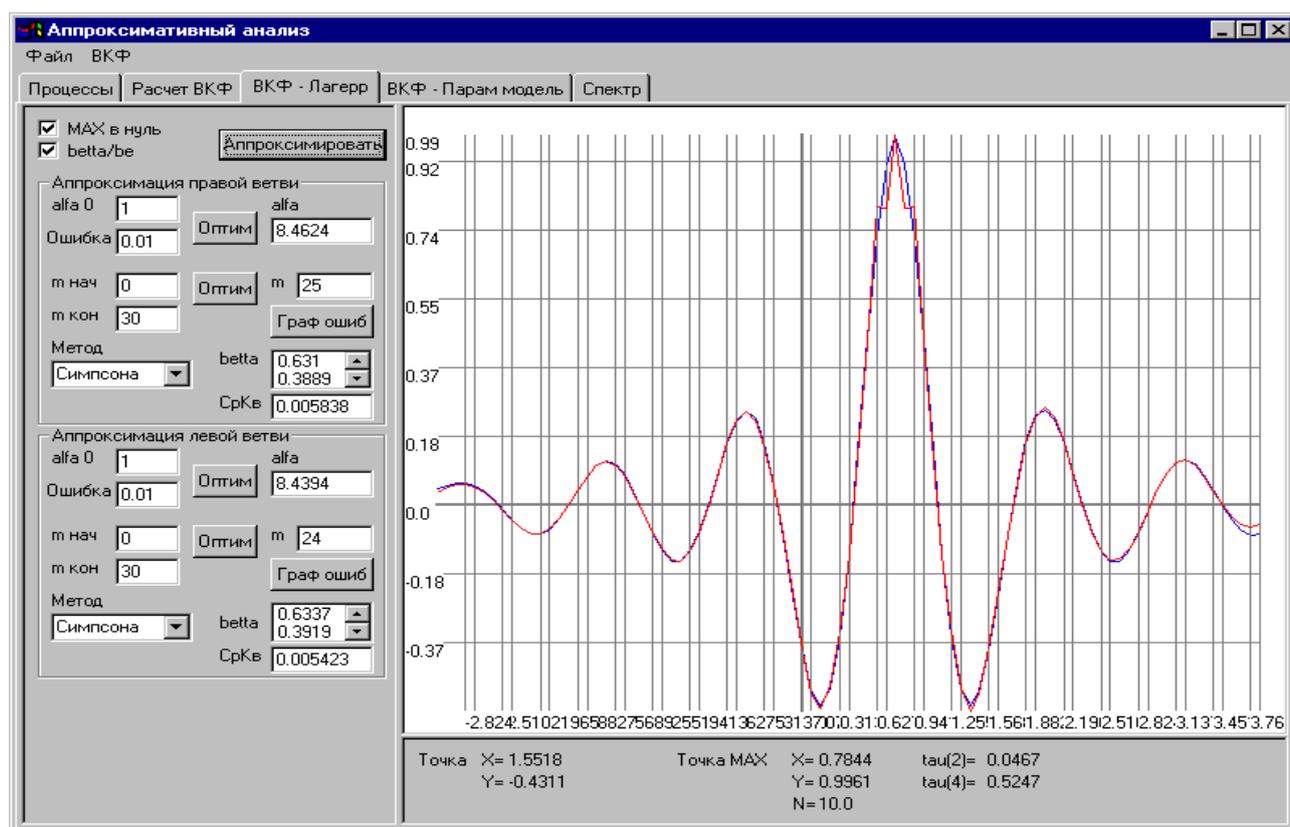


Рисунок 8.34.

Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями

Если модель взаимной корреляционной функции в результате идентификации по фазовому портрету определена, наиболее целесообразно использовать метод аппроксимации ВКФ параметрическими моделями. Для этого необходимо вызвать на экран четвертую страницу (см. рис. 8.36).

При аппроксимации ВКФ необходимо:

1. выбрать вид модели;
2. задать начальные значения её параметров (отдельно для правой и левой ветвей ВКФ);
3. установить значения погрешности оценки параметров модели;
4. если для заданных начальных значений уточнить параметры модели не удалось, необходимо ввести новые начальные значения.

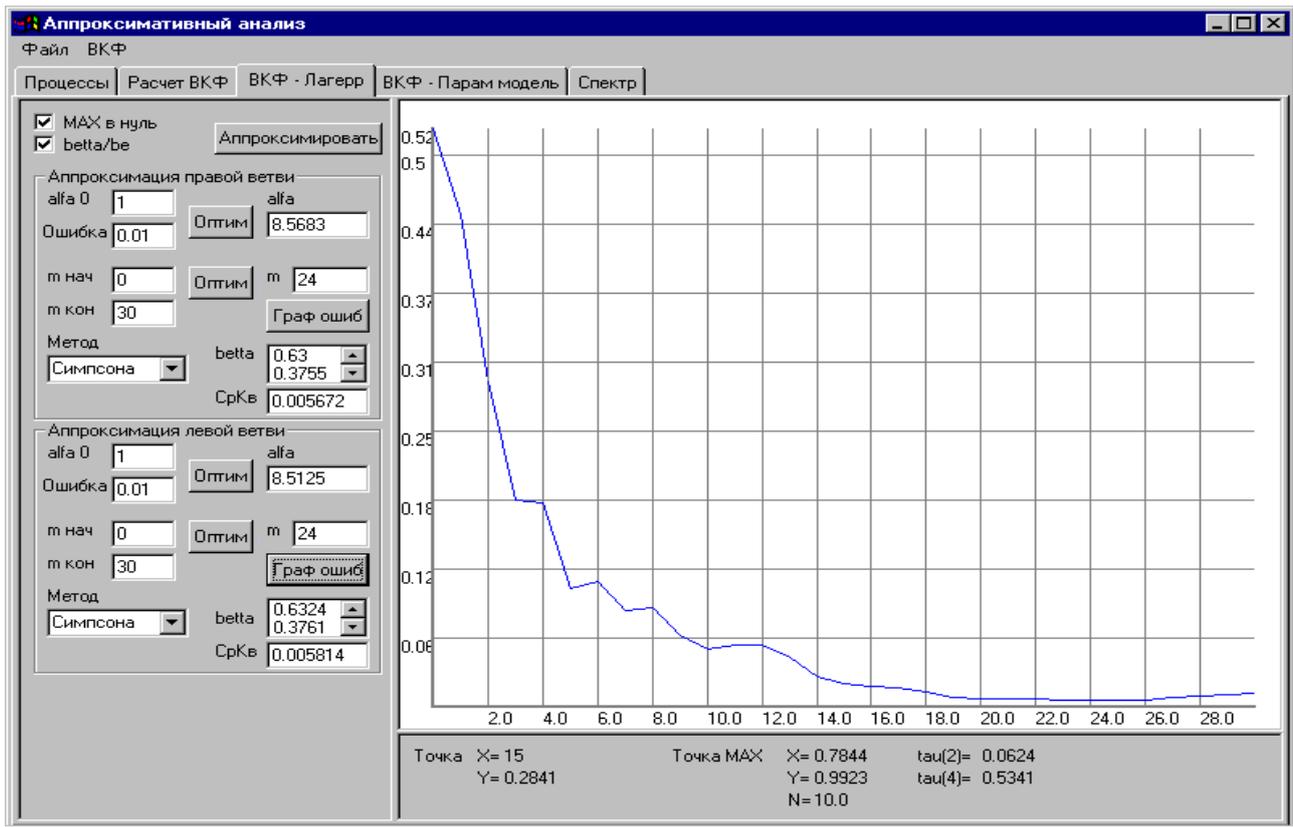


Рисунок 8.35.

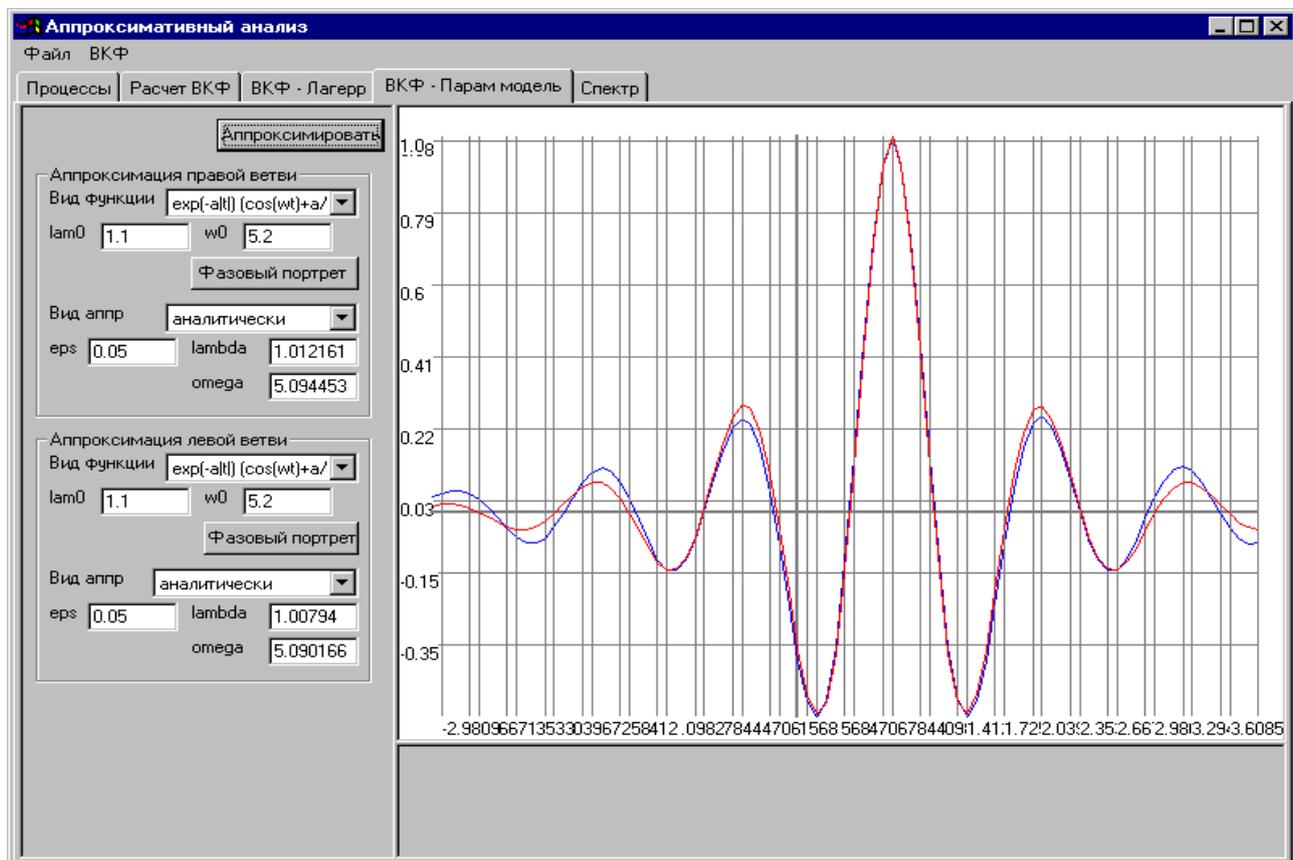


Рисунок 8.36.

В случае необходимости, после аппроксимации ВКФ с помощью этой страницы можно уточнить фазовые портреты правой (см. рис. 8.37) и левой ветвей ВКФ (см. рис.8.38).

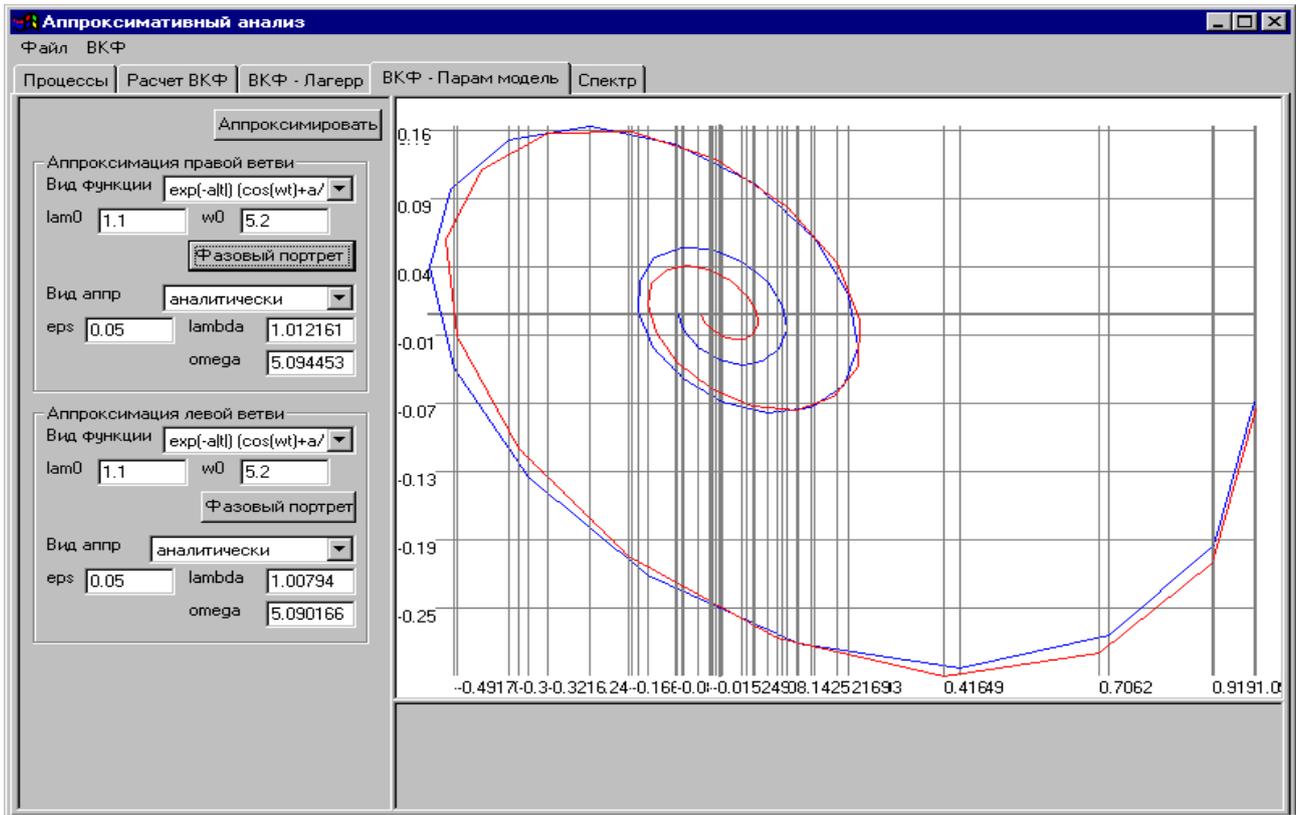


Рисунок 8.37. Фазовый портрет правой ветви ВКФ

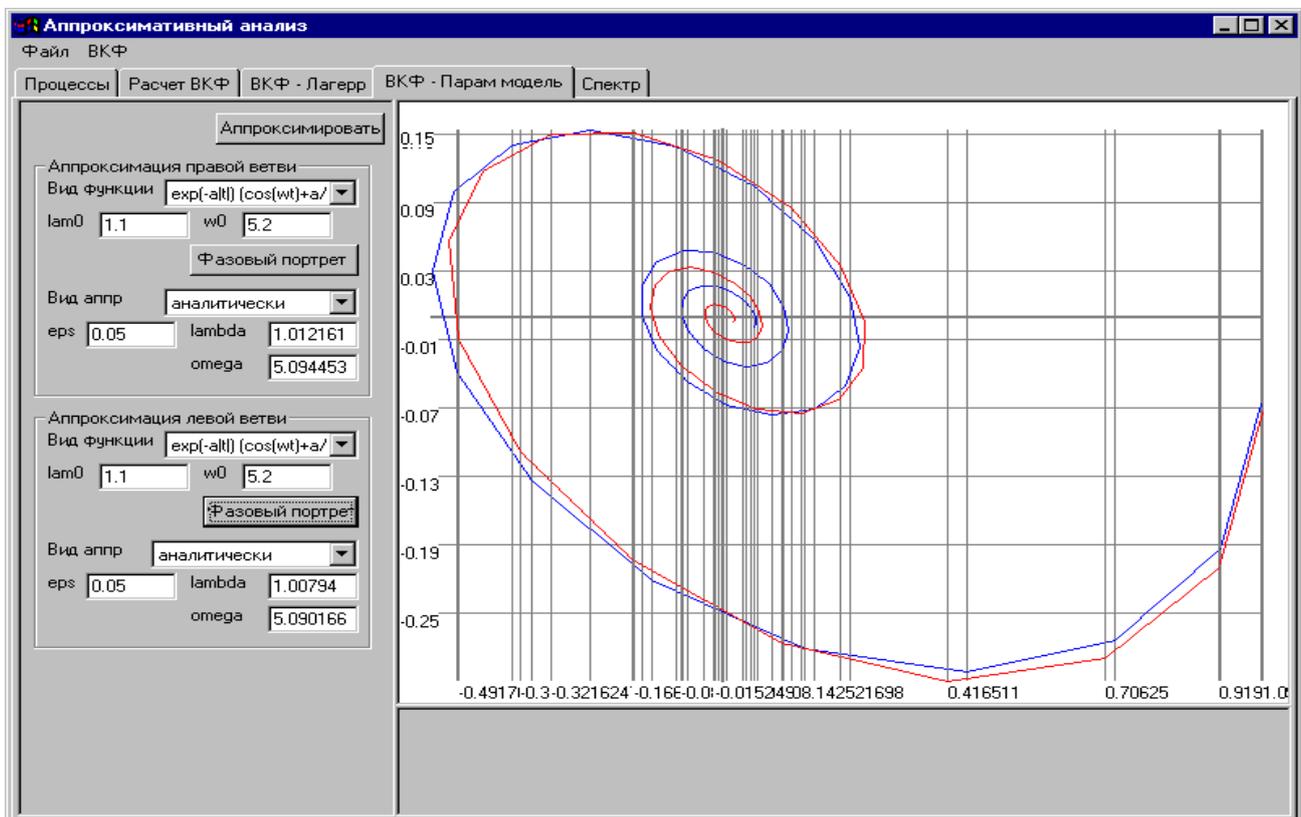


Рисунок 8.38. Фазовый портрет левой ветви ВКФ

Аппроксимация взаимной спектральной плотности мощности

На странице 5 по параметрам ортогональной функции Лагерра или параметрической модели может быть построена спектральная плотности мощности. Для этого необходимо перейти на эту страницу, выбрав закладку «**Вспектр**» и нажать на кнопку «**Спектр**» (см. рис. 8.39-8.40).

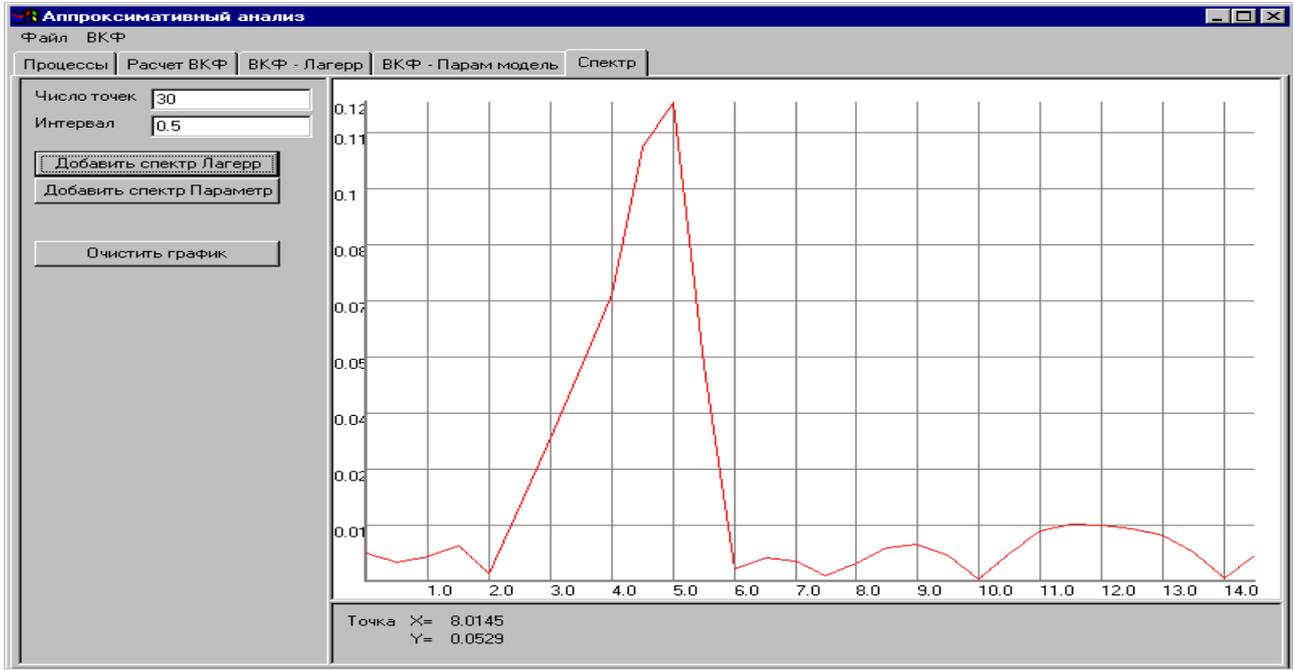


Рисунок 8.39. Модель взаимной спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лагерра

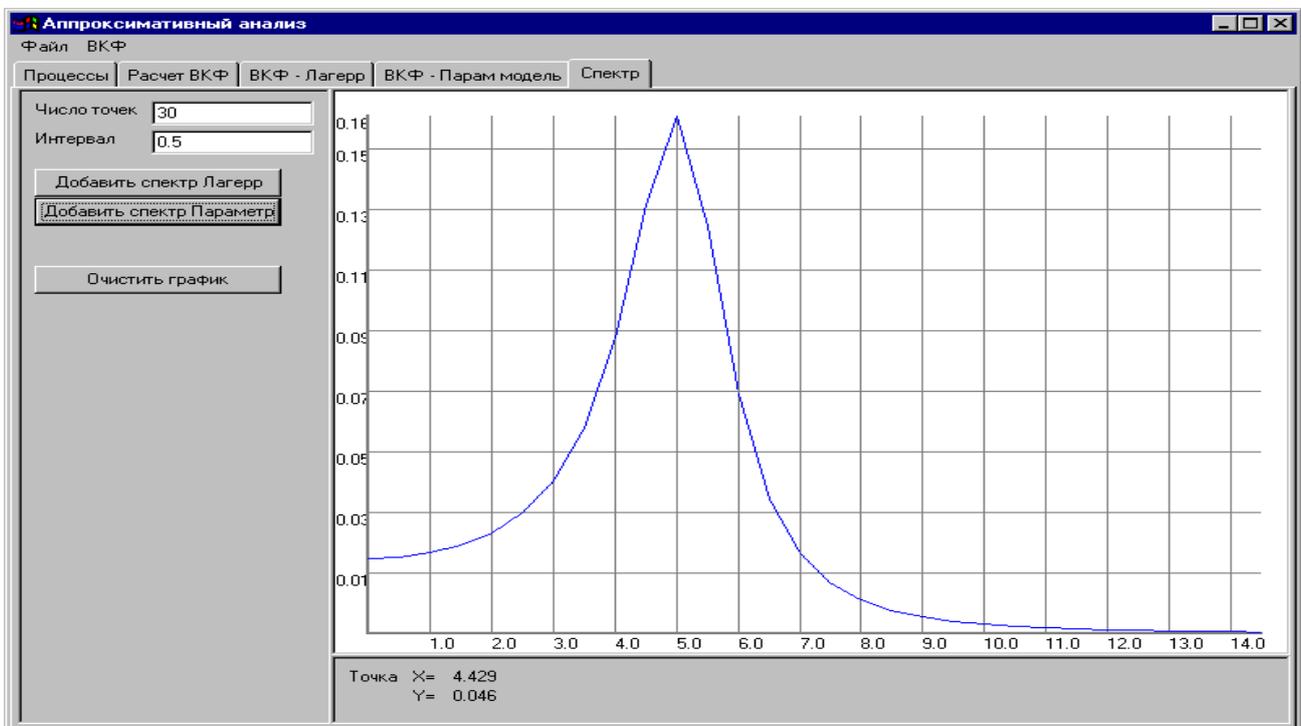


Рисунок 8.40. Параметрическая модель взаимной спектральной плотности мощности

Минимальные аппаратные требования: Процессор Pentium 100, ОЗУ 16 Мб, разрешение монитора 600x800, HighColor, Microsoft Windows 95.

8.4. Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря

Получение гидрологической и гидрохимической информации по акватории Балтийского моря производится на достаточно разветвленной наблюдательной сети, объединяющей стандартные океанографические станции и разрезы, рейдовые и береговые станции и посты, плавмаяки и эпизодические станции [118, 124]. Эта информация собирается как с равномерной, так и неравномерной дискретностью. Если для первой категории наблюдений методы обработки и анализа гидрометеорологической и гидрохимической информации достаточно хорошо разработаны [124], то для второй - требуется применение специализированных методов расчёта вероятностных характеристик. Разработанные методы вероятностного анализа по данным с неравномерной дискретизацией (см. раздел 5) открывают широкие возможности изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря.

Рассмотрим пример обработки данных эпизодических наблюдений на международной станции ВУ-5, расположенной в Борнхольмском бассейне, для анализа характерных особенностей годовой цикличности временных рядов поверхностной температуры воды, солёности, плотности и содержания кислорода [97, 107].

Поверхностный горизонт был выбран потому, что именно в верхнем слое наиболее ярко прослеживается годовая ритмика, обусловленная солнечной радиацией для температуры воды, процессами ледотаяния и годовой ритмикой стока рек для солёности, а следовательно и для плотности, и тепловым режимом вод для кислорода.

В качестве исходных данных использованы все имеющиеся наблюдения, выполненные в период с 1909 по 1983 г.г. и опубликованные в различных литературных источниках, каталогах и рейсовых отчётах (см. таблицу В.3). Данные наблюдений сформированы по следующему принципу. В информационный массив включены все эпизодические наблюдения, дополненные выборкой из данных многосуточных станций. Из многосуточных наблюдений бралось только по одному наблюдению в каждые сутки, например, в срок, когда выполняется полный комплекс гидрологических и гидрохимических наблюдений. Если в течение суток наблюдения проводились дважды по разным судам, то использовались оба наблюдения. Так как время наблюдений внутри суток не различалось, все наблюдения были отнесены к середине суток.

Таким образом, для исследования годовой ритмики гидрологических и гидрохимических параметров в качестве основного интервала дискретности были выбраны 1 сутки, что могло бы дать 365 наблюдений в год при условии ежесуточных наблюдений всем научно-исследовательским флотом прибалтийских стран, что, естественно, нереально.

В соответствии с изложенным принципом формирования временных рядов к расчёту было принято 464 значения по температуре (t^0 C) и солёности (S), 340 – по кислороду (O_2) и 257 – по плотности (σ). Некоторое различие в количестве значений температуры, солёности и плотности связано с тем, что обычно в литературных источниках приводятся только первые две характеристики, а плотность, как их функция, рассчитывается по специальным таблицам. Мы не стали приводить недостающие расчёты, так как предлагаемая методика предназначена для расчёта вероятностных характеристик с неравномерной дискретностью.

Как правило, выводы о характере годовой ритмики гидрологических элементов по данным эпизодических наблюдений на сети станций открытого моря исследователь проводит по оценкам математического ожидания и дисперсии годового хода.

Для этой цели ансамбль значений элементов сводится на годовой период, образуя «облако» точек, по которому тем или иным методом проводится кривая математического ожидания. Аналогично образуется «облако» квадратов значений, по которому вычисляется дисперсия годового хода.

Анализ видов графиков годового хода математического ожидания температуры и кислорода, опубликованных в различных источниках, свидетельствует о наличии ярко выраженной годовой ритмики, поэтому оценки среднего образа этих элементов, вычисленные различными авторами, близки между собой. Для плотности воды полной ясности о характере годовой ритмики из-за многофакторности механизма формирования годового хода и методических погрешностей расчёта вероятностных характеристик этого элемента нет. Так, встречающиеся в научной литературе оценки характеристик годового хода плотности воды рассчитываются, исходя из среднемесячных значений температуры и солёности, что даёт искаженное представление о режиме этого элемента. Существенные расхождения в оценках математического ожидания отмечается и в солёности. Здесь точки зрения на наличие годовой ритмики в колебаниях этого элемента порой принципиально различаются. Следует отметить, что все вышесказанное относится к открытой части Балтийского моря. В прибрежной зоне моря, где влияние режимобразующих факторов прослеживается четко, оценки среднего образа гидрологических и гидрологических элементов достаточно однотипны.

Наиболее показательными характеристиками, свидетельствующими о наличии годовой ритмики в изменениях исследуемых элементов, является корреляционная функция $K_x(\tau)$ и спектральная плотность мощности $S_x(\tau)$. С учётом нерегулярности входных данных оценка корреляционной функции определялась с использованием интервальной корреляционной функции в соответствии с выражением (5.12), а спектральная плотность мощности – в соответствии с выражением (6.37) после аппроксимации корреляционной функции параметрической моделью.

Так как процесс идентификации корреляционных функций затруднен, в таблице 8.1 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций t^0 , σ и O_2 различными колебательными моделями.

Результаты аппроксимации

Таблица 8.1

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		
	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ	α	ω_0	δ
t^0 C	$9 \cdot 10^{-4}$	0,0159	0,2522	$9,3 \cdot 10^{-4}$	0,0160	0,2335	$8,7 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,2743
σ	0,0030	0,0159	0,4638	0,0035	0,0165	0,4252	0,0029	0,0157	0,5323
O_2	0,0011	0,0155	0,3132	0,0012	0,0157	0,2871	0,0011	0,0154	0,3427

Анализ результатов, представленных в таблице 8.1, показывает, что:

1. как и следовало ожидать, погрешности аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями принимают большие значения, что объясняется малым объёмом выборки и непредсказуемым характером дискретизации;

2. погрешности аппроксимации принимают меньшие значения для t^0 C (M=464), большие - для O_2 (M=341) и самые большие – для σ (M=257);

3. несмотря на небольшой объем выборки, разброс параметров α и ω_0 у разных моделей небольшой, особенно у частоты колебания ω_0 , что объясняется большим значением показателя колебательности μ (см. таблицу 8.2);

4. из рассмотренных моделей корреляционных функций с точки зрения минимизации квадратической погрешности аппроксимации наиболее целесообразно выбирать модель в виде $e^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|)$;

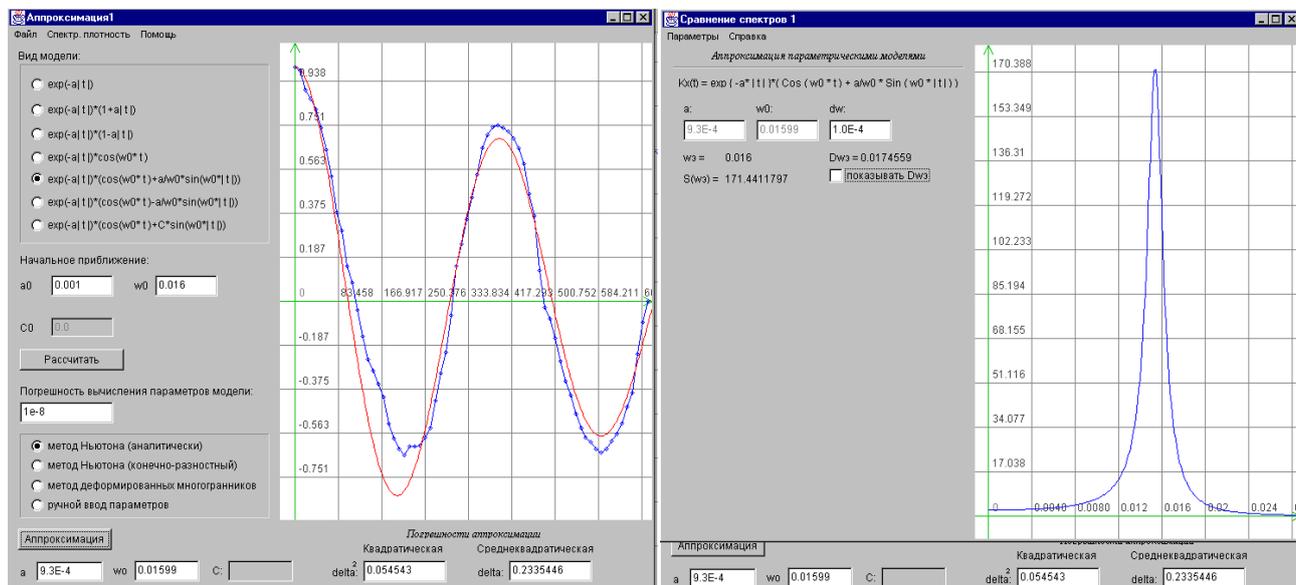
5. для рассмотренных гидрологических параметров характерна сезонная изменчивость (КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая).

Значения показателя колебательности для гидрологических параметров

Таблица 8.2

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
t^0 C	17,667	17,194	18,161
σ	5,233	5,232	5,422
O_2	13,946	13,494	14,538

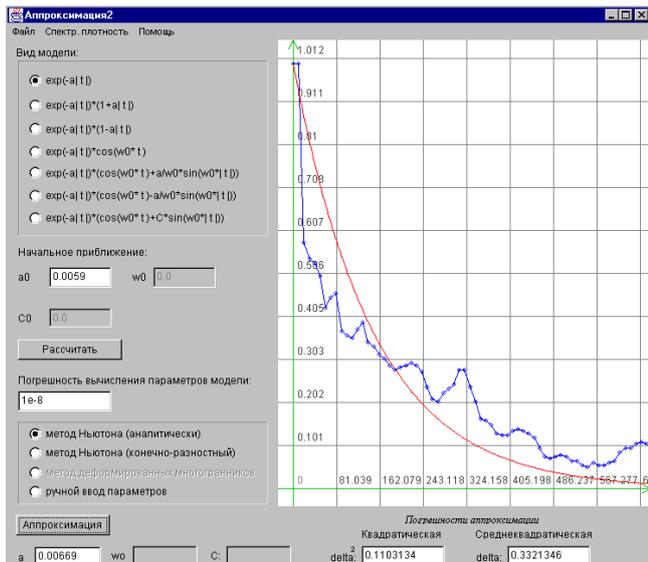
На рис. 8.41-8.42 приведены результаты аппроксимации нормированных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности температуры плотности воды и содержания кислорода моделью вида $e^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|)$ и солености - $e^{-\alpha|\tau|}$.



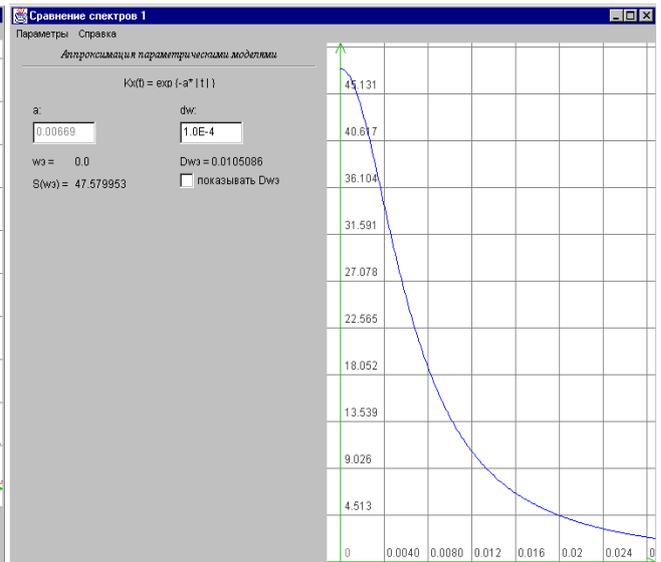
а) Корреляционная функция t^0 C

б) Спектральная плотность мощности t^0 C

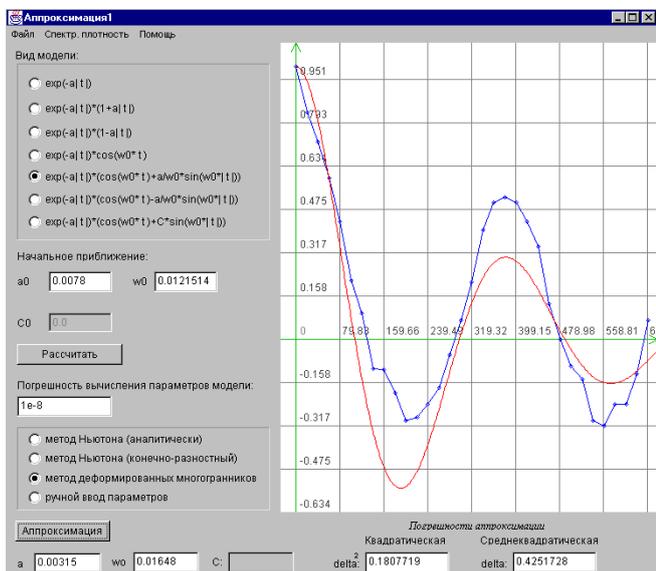
Рисунок 8.41. Результаты обработки временного ряда t^0 C



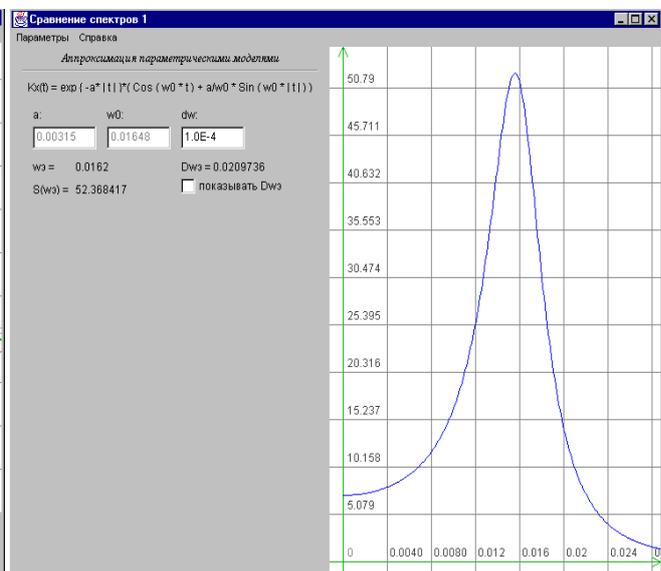
а) Корреляционная функция S



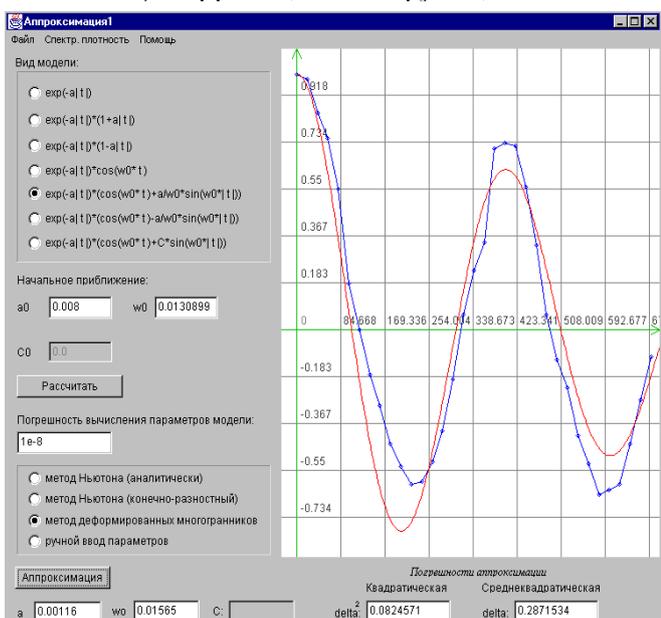
б) Спектральная плотность мощности S



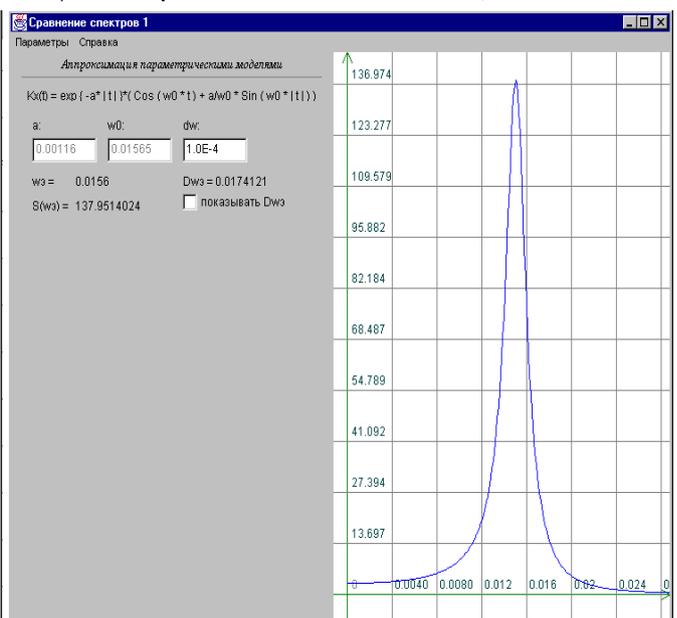
в) Корреляционная функция sigma



г) Спектральная плотность мощности sigma



д) Корреляционная функция O₂



е) Спектральная плотность мощности O₂

Рис. 8.41. Результаты обработки гидрологических параметров

Из представленных на рис. 8.41-8.42 графиков (особенно для спектральных плотностей мощности) видно, что для температуры воды и содержания кислорода достаточно ярко выражен годовой период. Спектры температуры и содержания кислорода имеют острый пик на частоте годового периода ($T=1$ год), который свидетельствует о принадлежности этих процессов к классу периодически коррелированных и необходимости применения к исследованию этих элементов методов анализа периодически коррелированных случайных процессов ПКСП анализа [118].

Корреляционная функция солености затухает без ярко выраженных биений с периодом 1 год, а спектр не имеет всплеска на частоте $\omega = 2\pi / 1$ год. Если аппроксимировать корреляционную функцию солености воды затухающей экспонентой $e^{-\alpha|\tau|}$, то $\alpha = 0,007$. Т.е. для солености воды нет периодичности, называемой годовым ходом, но тем не менее масштаб изменчивости, равный одному году, существует. Такой вид корреляционной функции свидетельствует о перемодулированности годовой ритмики. Отсутствие пика на спектре солености подтверждает интерпретацию о том, что изменчивость с годовым масштабом существует, но процесс нельзя отнести к классу периодически коррелированных. Поэтому применение методов ПКСП анализа к солености воды в открытых районах Балтийского моря, удаленных от влияния режимобразующих факторов, имеющих годовую ритмику, не дадут физически правильной информации.

Относительно плотности морской воды следует отметить, что корреляционная функция и спектральная плотность мощности занимают промежуточное положение между температурой и солености ($\mu = 5,232$) с наличием периода коррелированности $T=1$ год. Это связано с тем, что на формирование изменчивости плотности в поверхностном слое оказывает влияние температура воды, для которой характерна годовая ритмика.

Вместе с тем, географическое положение анализируемой станции ВУ-5 указывает и на влияние подтока соленых североморских вод, что и накладывает свой отпечаток на характер этих функций.

Рассматриваемую задачу можно решить, воспользовавшись аппроксимацией корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра. На рис. 8.43 представлены результаты аппроксимации корреляционных функций и спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра.

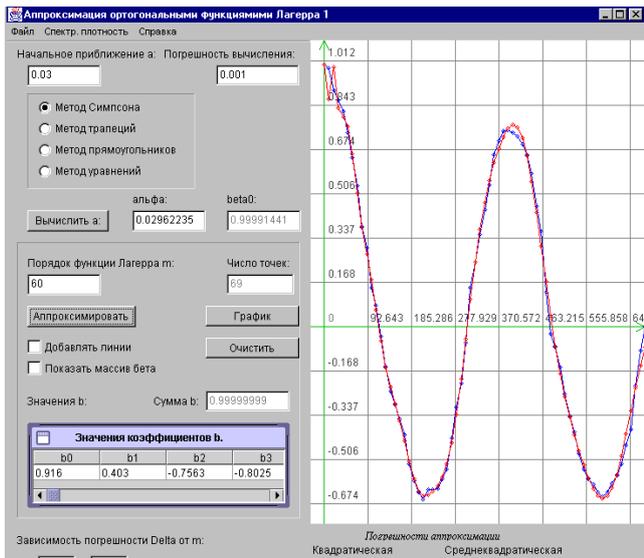
Анализ результатов показывает, что:

1. погрешность аппроксимации корреляционной функции меньше у ортогонального разложения;
2. ширина спектра меньше у параметрической модели;
3. частоты, соответствующие максимуму спектральной плотности мощности, практически совпадают (см. таблицу .8.3).

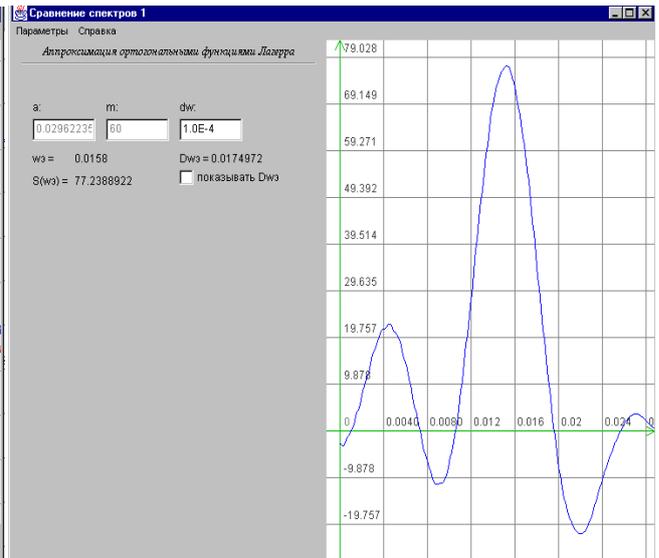
Экстремальные частоты спектральной плотности мощности

Таблица 8.3

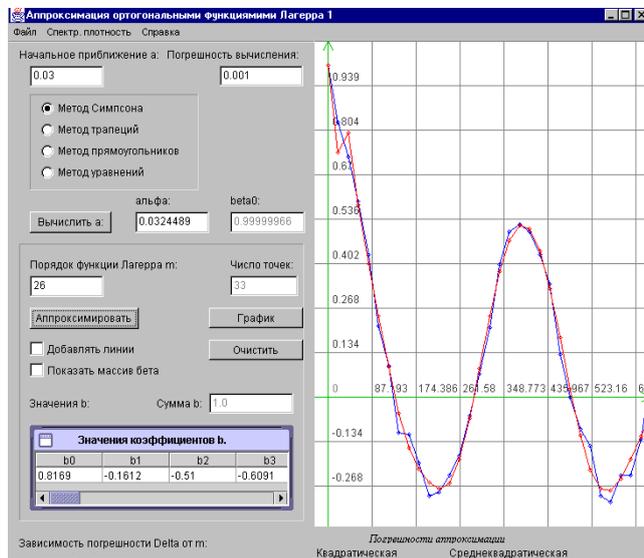
$\rho_x(\tau)$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$		$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau)$	
	ω_3	δ	ω_3	δ
t^0 C	0,0160	0,2522	0,0157	0,0600
σ	0,0162	0,4638	0,0158	0,1082
O_2	0,0156	0,3132	0,0154	0,0984



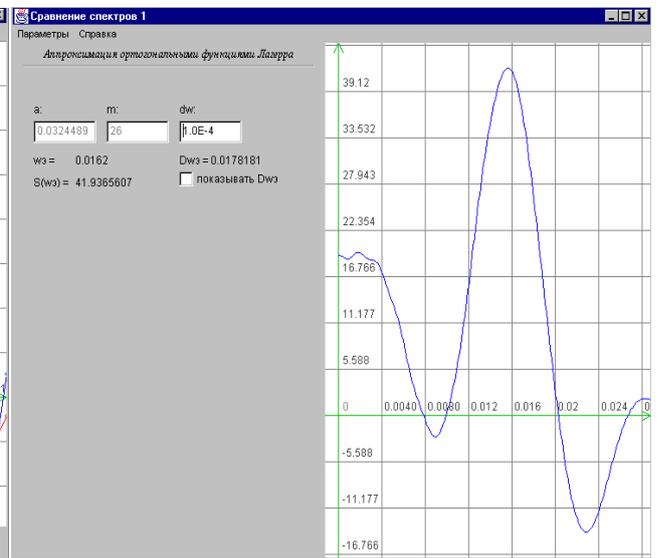
а) Корреляционная функция $t^0 C$



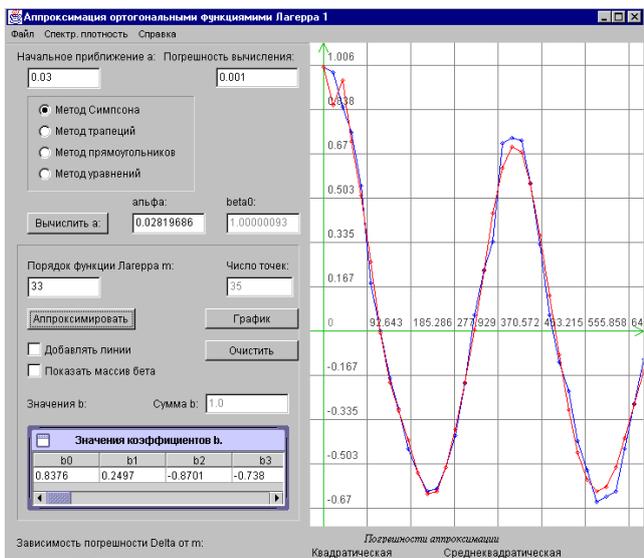
б) Спектральная плотность мощности $t^0 C$



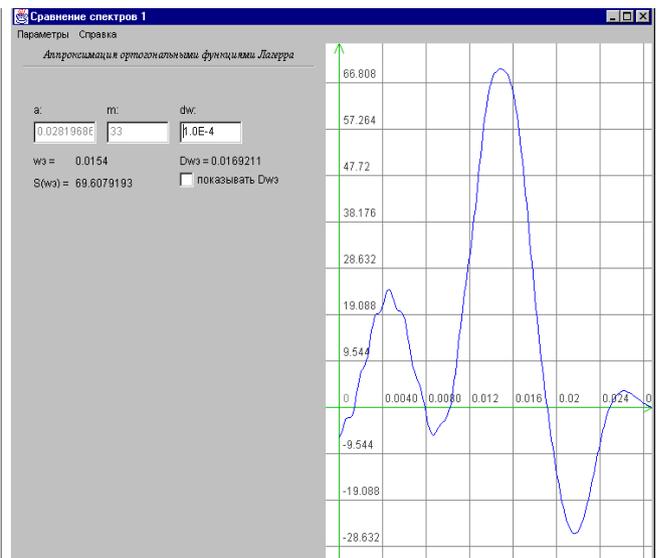
в) Корреляционная функция σ



г) Спектральная плотность мощности σ



д) Корреляционная функция O_2



е) Спектральная плотность мощности O_2

Рисунок 8.43. Результаты обработки временных рядов

Рассмотрим задачу определения сезонной изменчивости указанных параметров в зависимости от глубины. Исходными данными (см. табл. В.3) являются неэквидистантные временные ряды, представляющие собой результаты измерений параметров на различных глубинах (0-90 м) с 1909 по 1983 г. Средние коэффициенты сжатия для измеряемых параметров равны:

- кислорода - 67,13;
- температуры - 63,15;
- солености - 63,26;
- плотности - 106,64.

Отсюда видно, что большая часть информации об измеряемых параметрах безвозвратно потеряна.

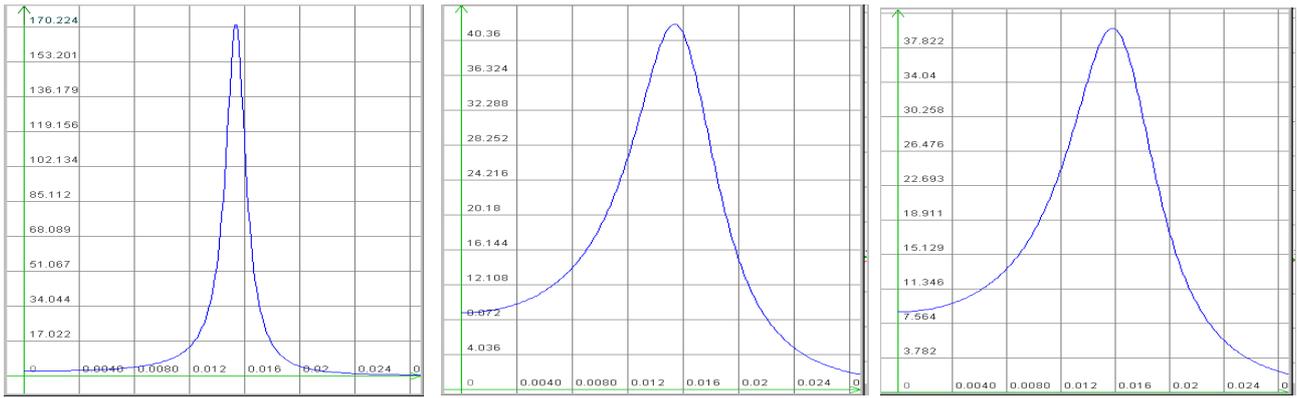
Характер неравномерности, обусловленный случайными моментами измерений, позволяет отнести модель потока к модели аддитивной случайной дискретизации. Так как алгоритм восстановления процесса на интервале дискретизации неизвестен, то, как и в предыдущем случае, наиболее целесообразно применять АИИКФ (см. подраздел 2.3) с усреднением по времени (располагаем для каждого параметра на определенной глубине одной реализацией). Следует отметить, что минимальный интервал дискретизации $\Delta t_{\min}=1$ день. Поэтому, учитывая ограниченный набор выборочных данных, и что для выявления сезонной изменчивости диапазон изменения аргумента КФ должен быть больше 2-3 лет, ширина дифференциального окна $\Delta \gg \Delta t_{\min}$. В случае сезонной изменчивости КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая, а у спектральной плотности мощности наблюдается пик на частоте, соответствующей периоду в один год. Тогда, с учетом рекомендаций [264] для обеспечения методической погрешности интерполяции КФ 2% число отсчетов КФ на периоде колебаний $n=16$, $\Delta=20 \div 25$.

Результаты оценки параметров корреляционных функций $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$ и спектральных характеристик представлены в таблице 8.4, а соответствующие графики спектральных плотностей мощности – на рис. 8.44-8.46.

Параметры аппроксимирующих выражений корреляционных функций и спектральные характеристики

Таблица 8.4

	h м	α	ω_0	$\mu = \omega_0 / \alpha$	ω_3	$S(\omega_3)$	$\Delta \omega_3$
t^0 C	0	0,00093	0,01598	17,1828	0,016	171,28	0,0175
	40	0,00399	0,01645	4,1228	0,016	42,23	0,0219
	50	0,00423	0,01694	4,0047	0,0164	39,97	0,0237
	90	0,00409	0	0	0	77,83	0,0064
σ	0	0,00315	0,01648	5,2317	0,0162	52,37	0,02097
	20	0,00262	0,01547	5,9046	0,0152	62,47	0,0192
	30	0,00715	0	0	0	44,52	0,0112
O_2	0	0,00116	0,01565	13,4914	0,0156	68,54	0,0200
	20	0,00237	0,01644	6,9367	0,0163	36,04	0,0233
	50	0,00475	0,01707	0	0,0164	30,64	0,0163

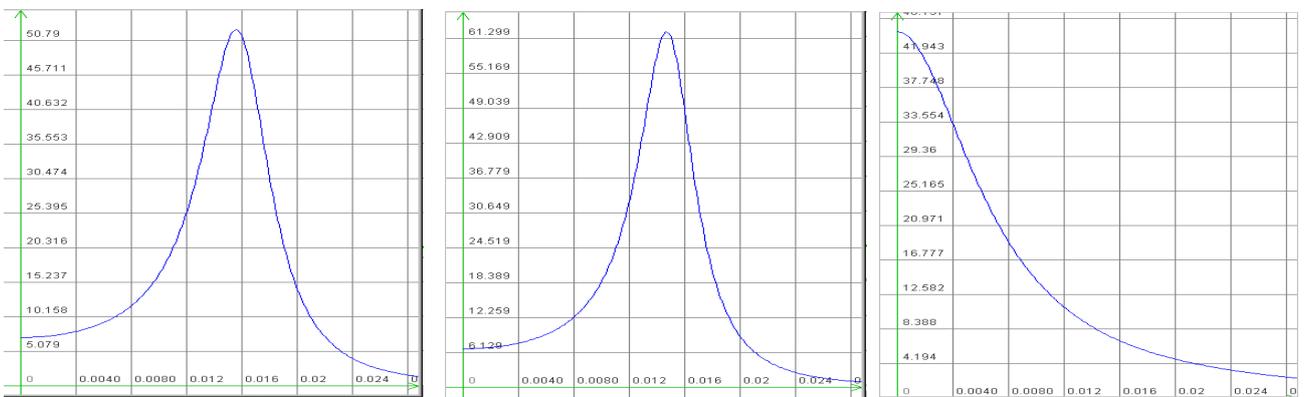


а) 0 м

б) 40 м

в) 50 м

Рисунок 8.44. Спектральные плотности мощности температуры

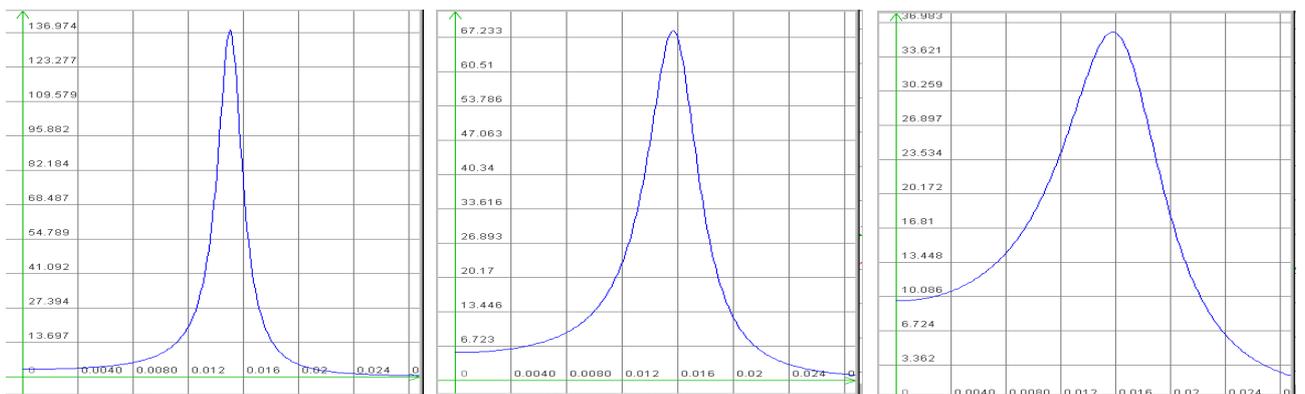


а) 0 м

б) 20 м

в) 30 м

Рисунок 8.45. Спектральные плотности мощности σ



а) 0 м

б) 20 м

в) 50 м

Рисунок 8.46. Спектральные плотности мощности кислорода

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- сезонная изменчивость наблюдается у всех параметров, кроме солёности;
- с увеличением глубины мощность колебательной составляющей уменьшается, что свидетельствует об уменьшении сезонной изменчивости;
 - переходные глубины (где еще наблюдается сезонная изменчивость) для: кислорода - 50 м, температуры - 50 м, плотности - 30 м.

На рис. 8.47-8.49 для большей наглядности приведены результаты наложения спектров.

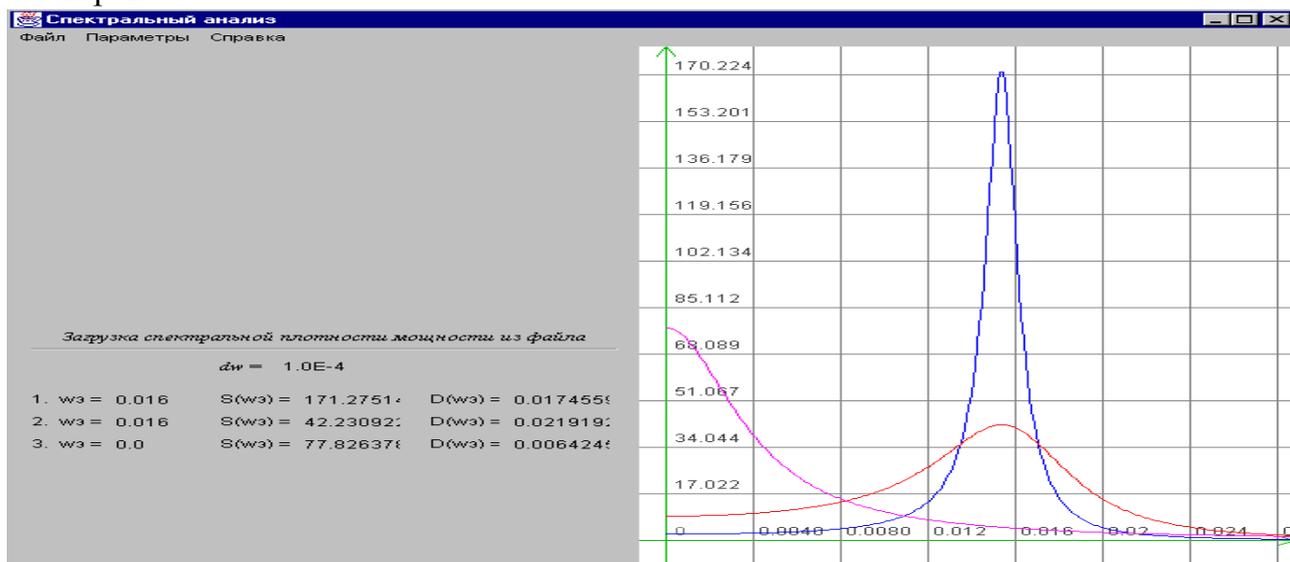


Рисунок 8.47. Спектральные плотности температуры

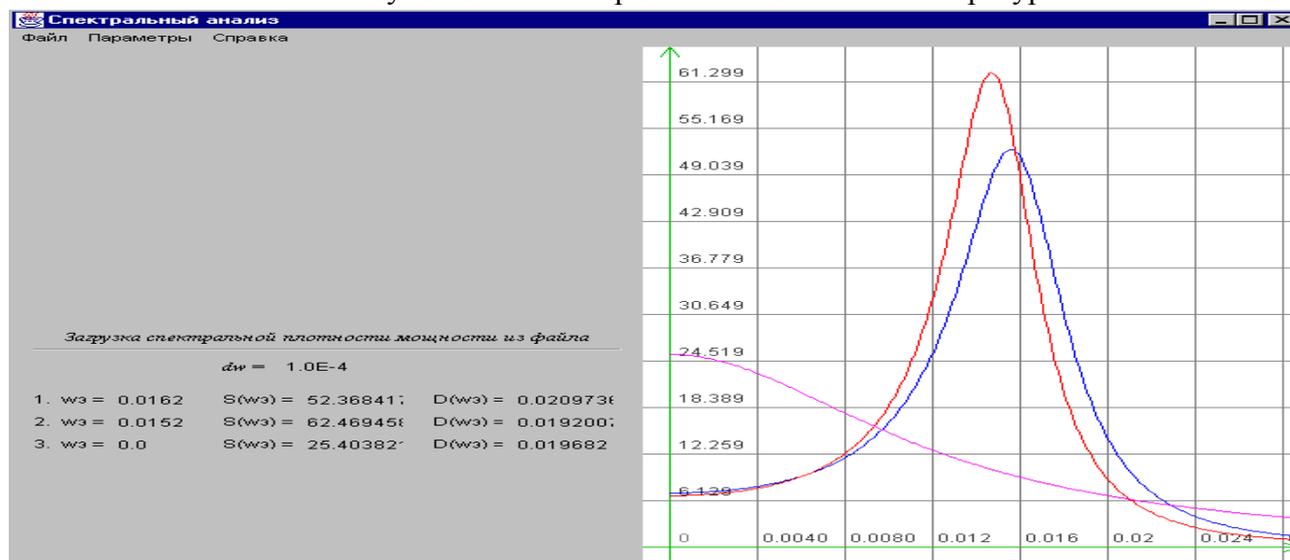


Рисунок 8.48. Спектральные плотности σ

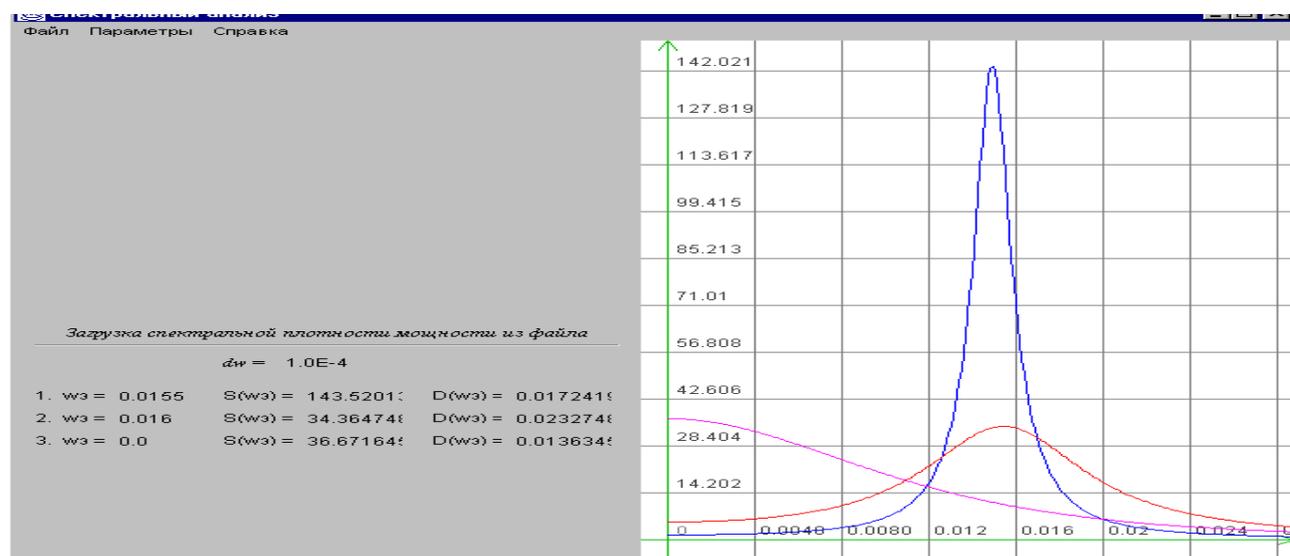


Рисунок 8.49. Спектральные плотности кислорода

8.5. Корреляционный анализ параметров течения

Одним из приборов, с помощью которого производятся комплексные измерения океанографических параметров и запись результатов на магнитную кассету, пригодную для ввода в ЭВМ с целью последующей обработки, является АЦИТТ - автономный цифровой измеритель течения, температуры, электропроводности воды, глубины погружения [89].

Параметры, указанные в таблице 8.5, измеряются поочередно один за другим. Длительность цикла измерения всех параметров составляет 25 сек. Предусмотрены следующие периоды цикличности работы прибора: 30 сек, 5, 10, 15, 30 и 60 мин. Запас магнитной ленты и источников питания рассчитан на 10 тыс. циклов измерений всех параметров, что соответствует 1 году автономной работы прибора в часовом режиме.

Характеристики АЦИТТ

Таблица 8.5

Параметры	Диапазон измерения	Дискретность измерения	Основная погрешность
t^0 воды ^0C	-2÷+38	0,01	$\pm 0,05$
Электропроводность см/м	0÷7	2×10^{-4}	$\pm 5 \times 10^{-4}$
Течение скорость см/сек	3÷200	1	$\pm 3 + 0,05v$
Течение направление 0	0÷360	1	± 10
Глубина погружения м	0÷6000	0,2÷9	$\pm (1 + 1\%N)$
Угол отклонения прибора от вертикали	0÷30	0,1	1
Контрольный параметр	Постоянная величина	-	± 1 единица кода

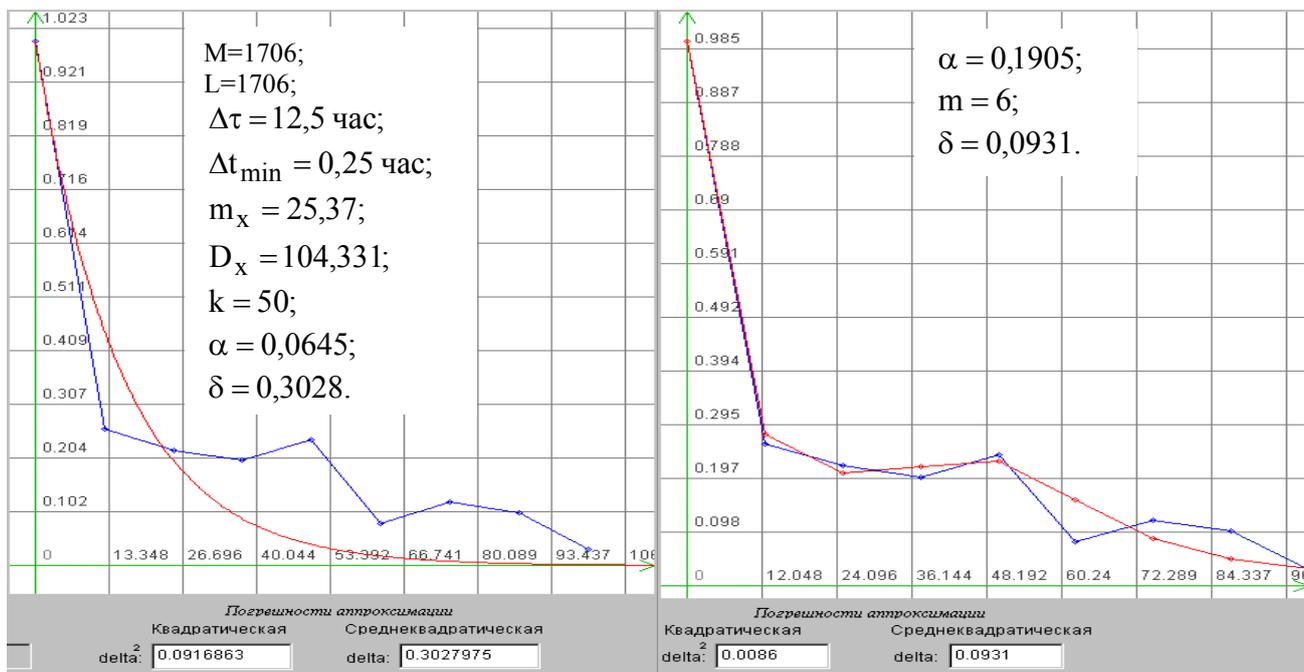
Основой измерения параметров течения является двухкомпонентный датчик, позволяющий отдельно измерять две проекции вектора скорости течения, а затем при обработке данных вычислить величину и направление скорости течения.

Преимущество двухкомпонентного датчика [89] состоит в том, что благодаря реверсивности пропеллерных вертушек автоматически отфильтровывается знакопеременная волновая составляющая течения, а также исключается влияние раскачивания несущего буйрепа. Осреднение скорости течения производится непрерывно за весь период между циклами измерений. Двухкомпонентный способ измерения течения предполагает, что угловая ориентация корпуса прибора относительно частей света известна.

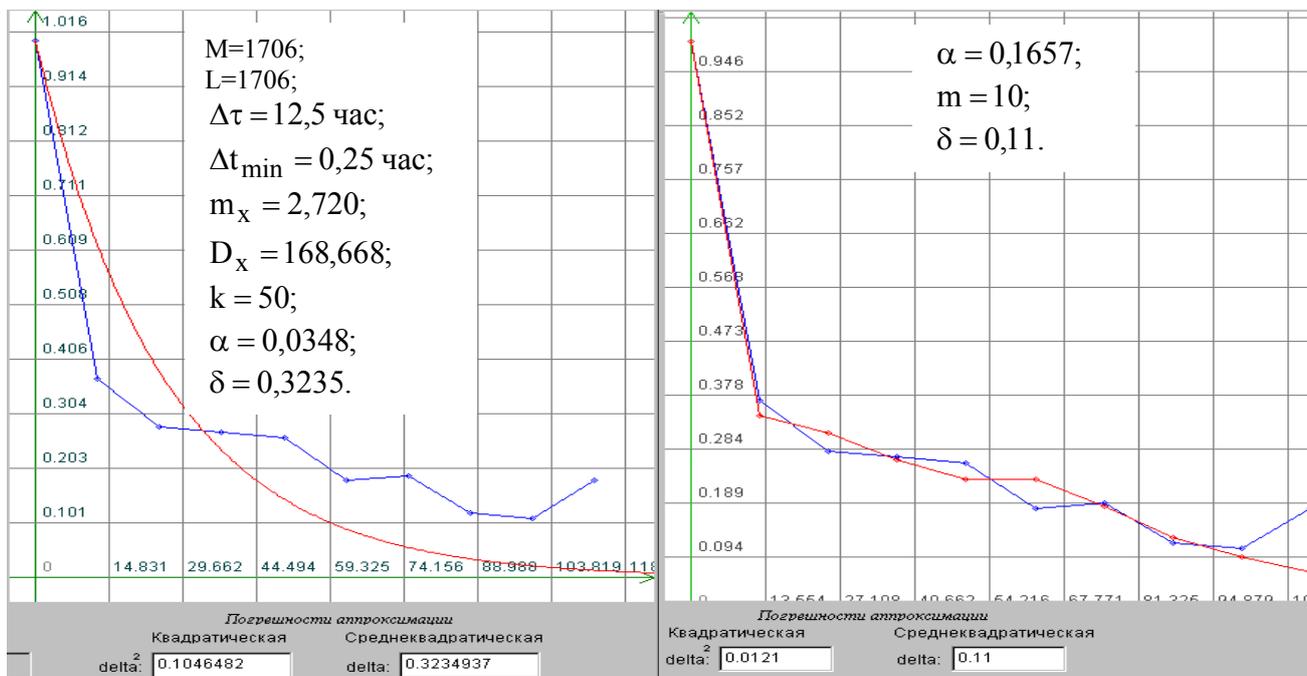
При нарушении условий эксплуатации прибора возникают неправильные показания, которые отбраковываются при первичной статистической обработке информации. Т.е. модель потока представляет собой периодически дискретизированный поток со случайными пропусками наблюдений (см. раздел 1.3.1). Так как модель восстанов-

ления процесса на интервале дискретизации неизвестна, то измерения корреляционных функций составляющих V_1 и V_2 необходимо проводить с помощью АИИКФ [108].

Примеры КФ составляющих V_1 и V_2 , представленные на рис.8.50, показывают принципиальную возможность применения АИИКФ для решения рассмотренной задачи (левые рисунки – аппроксимация корреляционной функции моделью $e^{-\alpha|\tau|}$, правые – ортогональными функциями Лагерра). Заметим, что аппроксимация ортогональными функциями Лагерра даёт меньшие погрешности.



а) составляющая V_1



б) составляющая V_2

Рисунок 8.50. Нормированные корреляционные функции АЦИТТ

9. ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

9.1. Основные понятия и определения

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathbf{x}(t_k) \}$, а также в исследовании случайных процессов и временных рядов.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ. Появилось большое количество интересных и важных монографий и статей, посвященных методологии, планированию, конструированию и собственно моделированию [65, 73, 123]. Большинство их них описывает метод, который носит название метода Монте-Карло. Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, в которой они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. 9.1.

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования автоматизированных систем для автоматизации научных исследований, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [101], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему [110]:

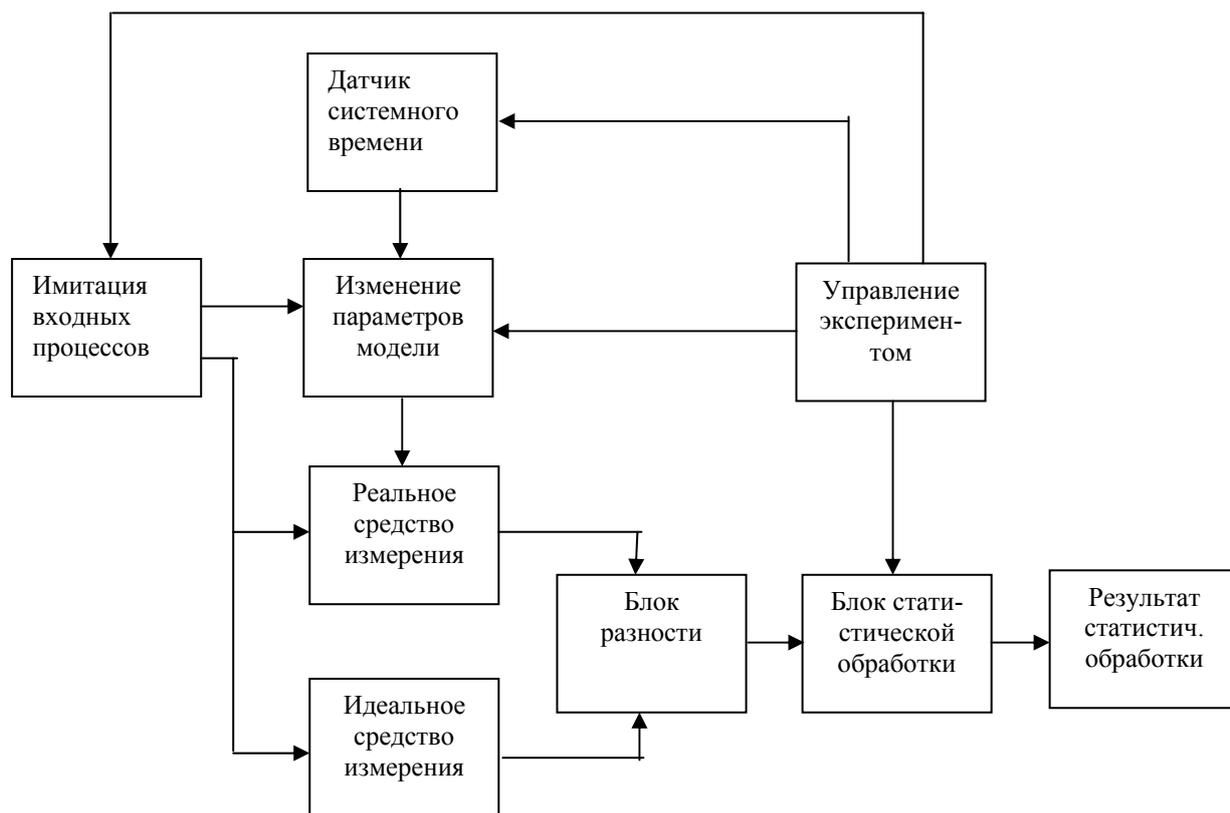


Рисунок 9.1. Функциональная схема имитационного моделирования

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинства блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [91], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \{ |\Delta_j| \} \quad j = 1, \dots, N, \quad (9.1)$$

где N-число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания характеристик неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации ;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

9.2. Исследование характеристик неэквидистантных временных рядов

С помощью разработанных автоматизированных систем возможно решение разнообразных задач анализа неэквидистантных временных рядов методом имитационного моделирования, которые сводятся к последовательному выполнению следующих этапов [108]:

1. генерированию ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне $[0,1]$;
2. генерированию ПСП с заданными статистическими характеристиками;
3. оценки статистических характеристик ПСП;
4. нерегулярной дискретизации ПСП в соответствии с заданной моделью потока событий;
5. формированию массивов данных, для оценки требуемых статистических характеристик неэквидистантного временного ряда;
6. оценки требуемых статистических характеристик неэквидистантного временного ряда;
7. отображению полученных результатов;
8. анализу полученных результатов;
9. формулировки выводов, необходимых для принятия решения.



Рисунок 9.2. Блок-схема анализа коэффициентов сжатия данных

Следует подчеркнуть, что для получения достоверных результатов, этапы 5,6 выполняются многократно. Количество испытаний зависит от принятой методики оценки достоверности результатов оценивания полученных характеристик. Воспользовавшись рекомендациями РТМ 25 139-74 [91] и задавшись доверительной вероятностью $P_d = 0,95$, число испытаний независимо от закона распределения оцениваемой характеристики равно 29.

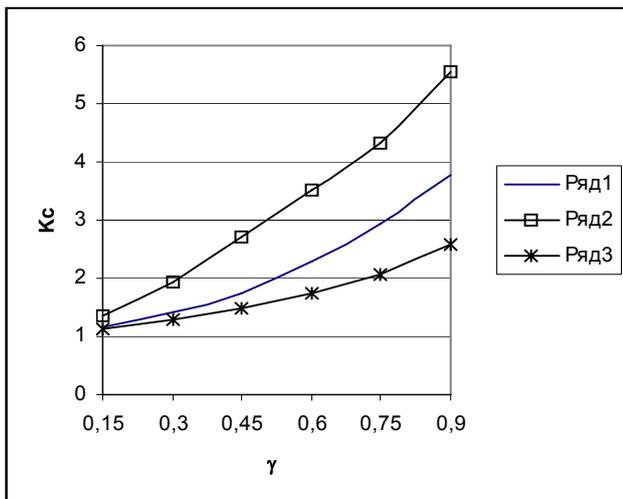
При анализе неэквидистантных временных рядов часто возникает необходимость в определении коэффициента сжатия, численные значения которого используются при метрологическом анализе результатов измерения, расчёте параметров аппаратно-программных средств и т.д. [109]. Решение этой задачи проведем методом имитационного моделирования, блок схема которого приведена на рис. 9.2.

Численное значение коэффициента сжатия, определяемого в соответствии с выражением (1.45), зависит от вида неравномерной дискретизации, модели процесса на интервале дискретизации, закона распределения, корреляционной функции и их параметров,

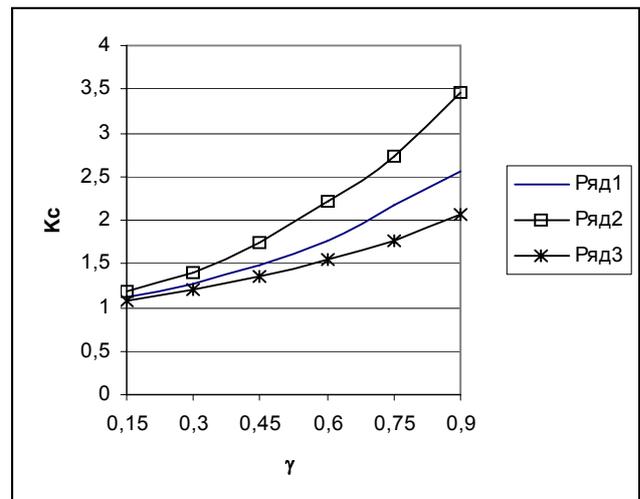
погрешности восстановления [4].

Приведем результаты имитационного моделирования. В качестве входных воздействий применялись типовые стационарные ПСП, широко используемые в приложениях. Неэквидистантный временной ряд получался в результате применения процедуры адаптивной временной дискретизации экстраполятором нулевого порядка к входной ПСП [4]. Следует подчеркнуть, что экстраполяторы обладают простотой реализации и позволяют работать в реальном масштабе времени.

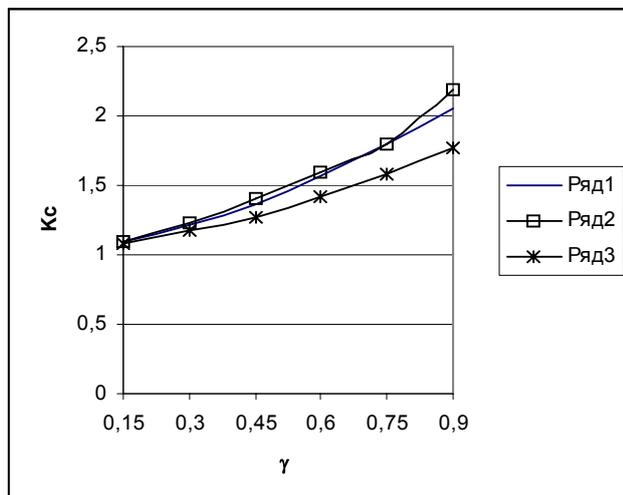
На рис. 9.3-9.4 представлены результаты определения $k_{сж}$ в зависимости от величины уставки $\gamma = \varepsilon / \sigma_x$ (ε - погрешность восстановления случайного процесса) для моделей: $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ - ряд 1, $e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ - ряд 2, $e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ - ряд 3, - для различных показателей колебательности μ и погрешностей восстановления корреляционных функций δ , определяющих интервал дискретизации входной ПСП (см. таблицу 3.1).



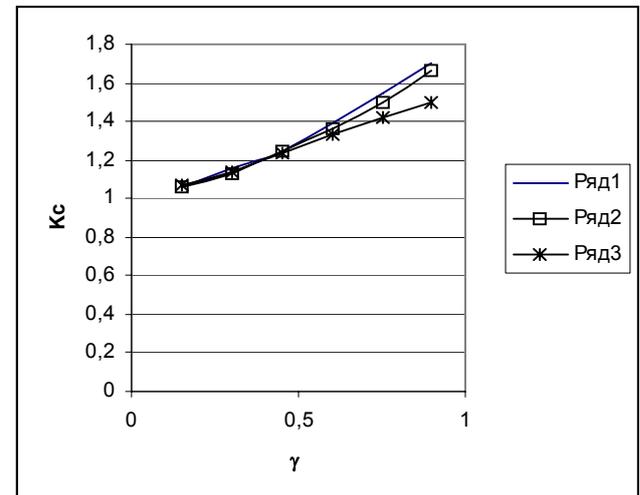
а) $\mu=2, \delta=0,02$



б) $\mu=2, \delta=0,05$

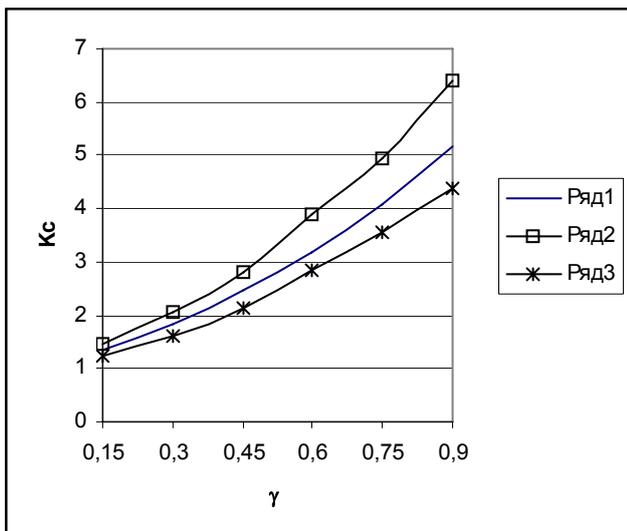


в) $\mu=2, \delta=0,10$

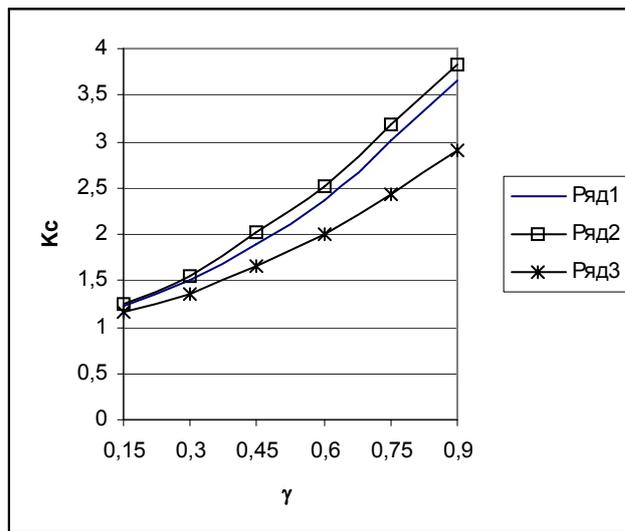


г) $\mu=2, \delta=0,20$

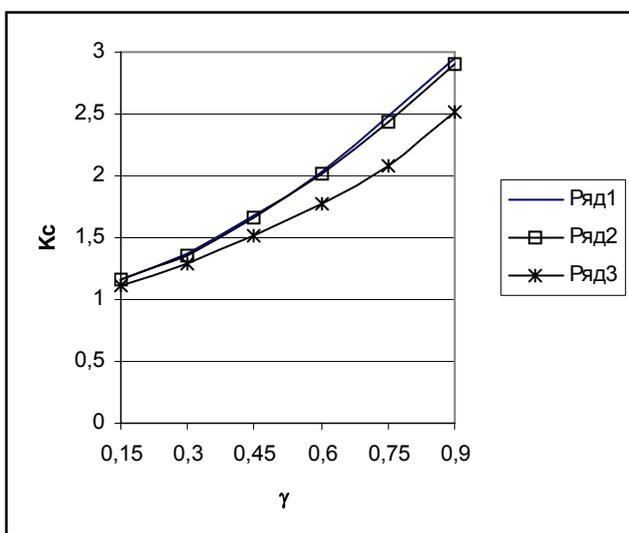
Рисунок 9.3. Результаты определения коэффициентов сжатия



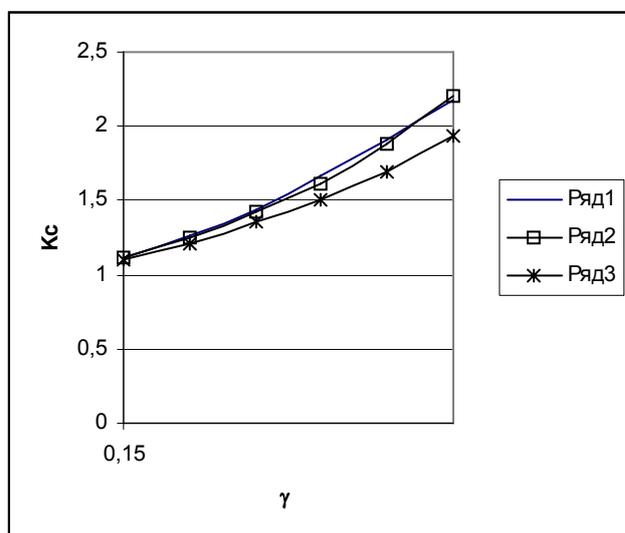
а) $\mu=6, \delta=0,02$



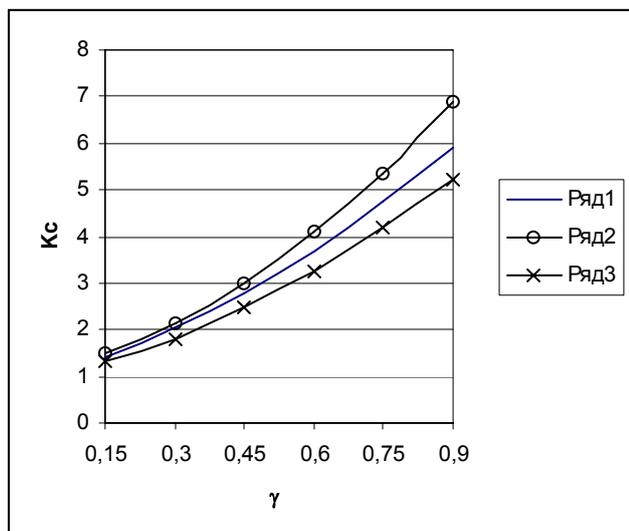
б) $\mu=6, \delta=0,05$



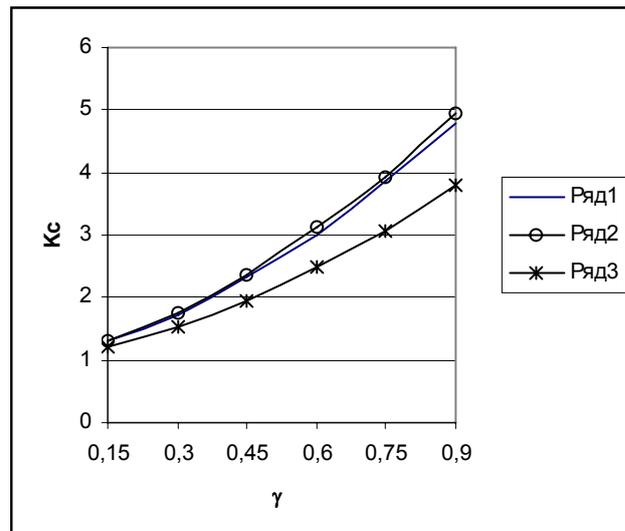
в) $\mu=6, \delta=0,10$



г) $\mu=6, \delta=0,20$



д) $\mu=10, \delta=0,02$



е) $\mu=10, \delta=0,05$

Рисунок 9.4. Результаты определения коэффициентов сжатия

Сравнительный анализ полученных результатов и результатов имитационного моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1. $k_{сж}$ при постоянной погрешности интерполяции КФ с увеличением уставки γ возрастают;
2. $k_{сж}$ возрастают с уменьшением погрешности интерполяции КФ;
3. $k_{сж}$ больше для дифференцируемых моделей КФ;
4. Для колебательных моделей КФ $k_{сж}$ растут с увеличением показателя колебательности μ КФ;
5. Наименьшие $k_{сж}$ наблюдаются для процессов, у которых $S_x(0)=0$.

Аналогичным образом с помощью имитационного моделирования определялись:

- минимальный интервал дискретизации (см. таблицу 1.2) [108];
- плотность и функция распределения вероятностей суммы интервалов дискретизации на максимальном интервале дискретизации $\tau_{k\max}$ для различных видов нерегулярной дискретизации (см. рис. 1.6, 1.9) [108];
- интервальные корреляционные функции.

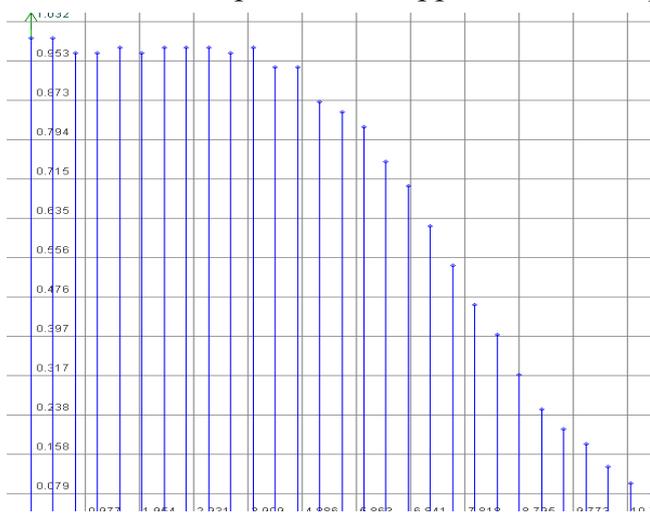


Рисунок 9.5. Интервальная корреляционная функция

На рис. 9.5 приведен пример определения интервальной корреляционной функции случайного потока, полученного после неравномерной дискретизации ПСП с $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ полиномом нулевого порядка $\gamma = 0,25$, $\Delta t_0 = 0,4$.

Из рисунка видно, что интервальная корреляционная функция достаточно постоянна на интервале $\tau_{k\max} = 3$ - интервале вычисления корреляционных функций неэквидистантных временных рядов. Это достигается соответствующим выбором числа обрабатываемых отсчётов L .

9.3. Анализ составляющих методической погрешности, образующих полную группу

Конкретный вид выражений Θ , а также Δ_i зависит от оцениваемой характеристики, алгоритма измерения.

Рассмотрим, в качестве примера, оценку составляющих методических погрешностей результатов измерения математического ожидания и дисперсии, определяемых для полиномиальных моделей сигнала нулевого и первого порядков ААСИ с усреднением по времени (см. табл. 2.2), а также по классическим алгоритмам без учета неравномерности [108].

В соответствии с выражениями (3.5)-(3.10) составляющие методической погрешности оценки математического ожидания и дисперсии (для центрированного

сигнала) для ААСИ с использованием полиномиальной модели нулевого порядка определяются в виде:

- неадекватности

$$\Delta_{\text{на}} \hat{\mu}_{mj} = \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji} - \mu_m, \quad (9.2)$$

где $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}$;

- конечности объема выборки

$$\Delta_{\text{кв}} \hat{\mu}_{m0} = \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji} - \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji}; \quad (9.3)$$

- конечности числа каналов - отсутствует;

- дискретизации

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{\Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m l_{ji} - \frac{1}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m \Delta t_{ji}; \quad (9.4)$$

- квантования

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} \eta_{ji}^m l_{ji} - \frac{\Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} x_{ji}^m l_{ji}; \quad (9.5)$$

- конечной разрядности ПРИС

$$\Delta_{\text{р}} \hat{\mu}_{mj} = \left\{ \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} \eta_{ji}^m l_{ji} \right\}_R - \frac{q^m \Delta t_0}{T_j} \sum_{i=1}^{M_j-1} \eta_{ji}^m l_{ji}; \quad (9.6)$$

Для ААСИ с использованием полиномиальной модели сигнала первого порядка соответствующие составляющие методической погрешности равны:

- неадекватности

$$\Delta_{\text{на}} \hat{\mu}_{mj} = \lim_{T_k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \mu_m, \quad (9.7)$$

- конечности объема выборки

$$\Delta_{\text{кв}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \lim_{T_j \rightarrow \infty} \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \sum_{j=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \mu_m, \quad (9.8)$$

конечности числа каналов - отсутствует;

- дискретизации

$$\Delta_{\text{д}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{\Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s - \frac{1}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s, \quad (9.9)$$

- квантования

$$\Delta_{\text{к}} \hat{\mu}_{mj} = \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s - \frac{\Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m x_{ji}^{m-s} x_{j,i+1}^s, \quad (9.10)$$

- конечной разрядности ПРИС

$$\Delta_p \hat{\mu}_{mj} = \left\{ \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s \right\}_R - \frac{q^m \Delta t_0}{T_j(m+1)} \sum_{i=1}^{M_j-1} l_{ji} \sum_{s=0}^m \eta_{ji}^{m-s} \eta_{j,i+1}^s, \quad (9.11)$$

Для классических алгоритмов оценки математического ожидания и дисперсии составляющие методической погрешности, вызванные конечностью числа каналов, дискретизацией, отсутствуют, а остальные составляющие определяются из выражений (9.2) - (9.11) при $\Delta t_{ji} = \Delta t_0$, $N = M_j - 1$.

В качестве входного процесса использовался стационарный случайный процесс с экспоненциальной КФ, подвергнутый принудительной адаптивной дискретизации полиномом нулевого порядка с заданной величиной уставки [108].

Результаты имитационного моделирования представлены на рис. 9.6 – 9.12.

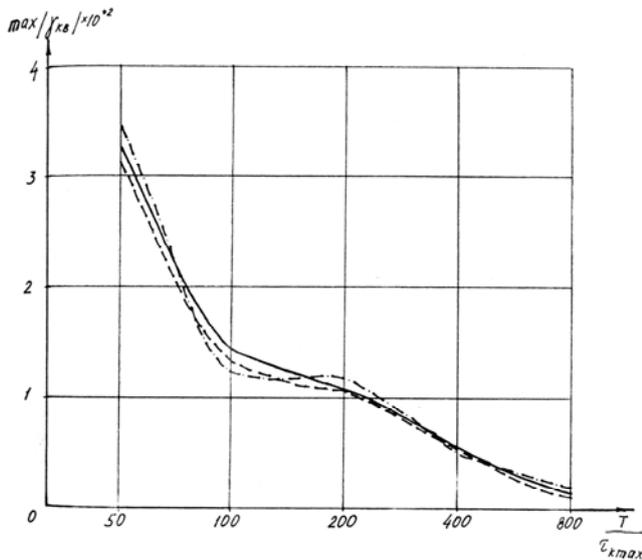


Рисунок 9.6. Погрешности конечности выборки
 — $\epsilon = 0,5$; - - - $\epsilon = 0,75$; - · - $\epsilon = 1$

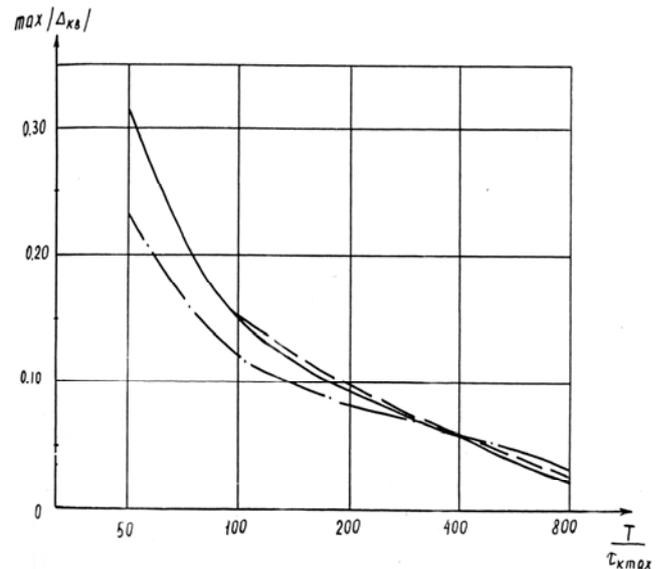


Рисунок 9.7. Погрешности конечности выборки для различных алгоритмов
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\epsilon = 0,5$

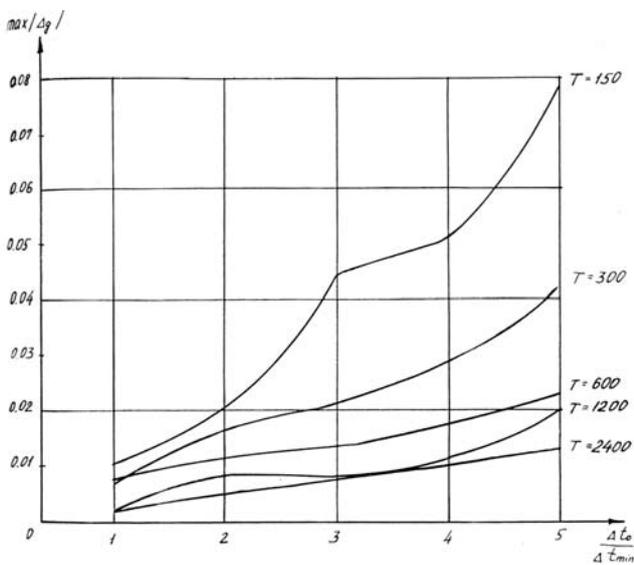


Рисунок 9.8. Погрешности дискретизации
 $N=0$; $\sigma_x = 1$; $\epsilon = 1$

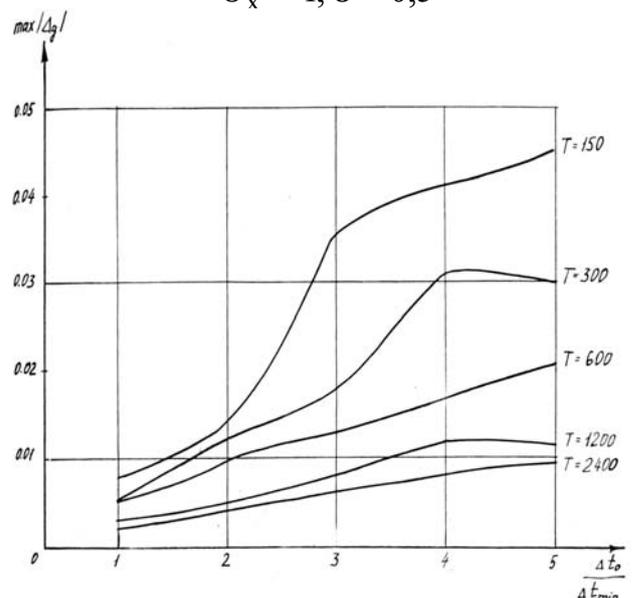


Рисунок 9.9. Погрешности дискретизации
 $N=1$; $\sigma_x = 1$; $\epsilon = 1$

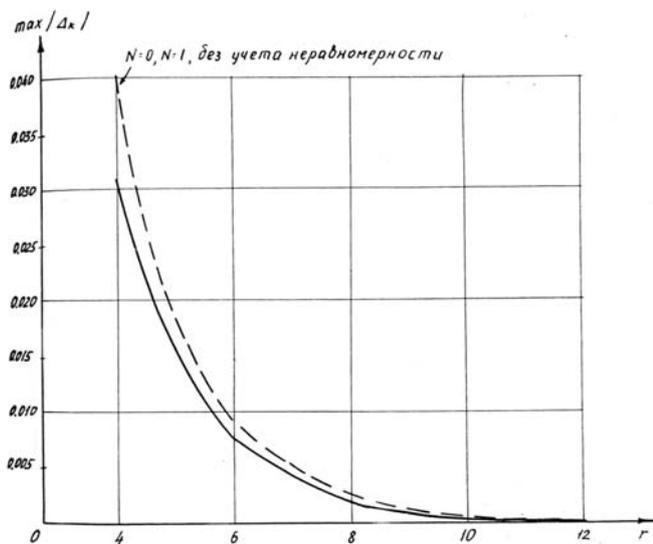


Рисунок 9.10. Погрешности квантования
 $\sigma_x = 1$; — $\varepsilon = 0,5$; - - - $\varepsilon = 1$

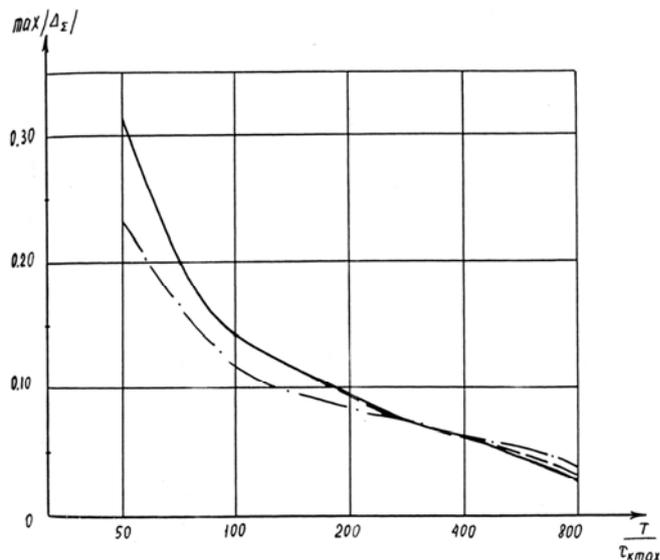


Рисунок 9.11. Полная погрешность для различных алгоритмов
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 0,5$; $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$; $r=6$

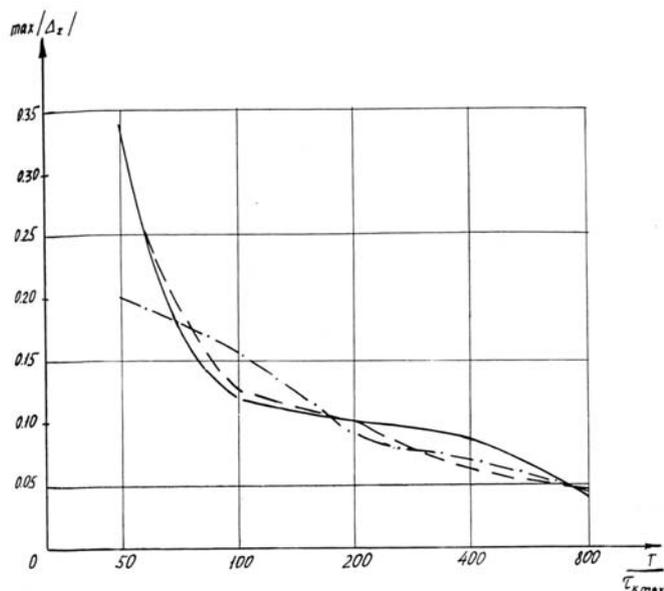


Рисунок 9.12. Полная погрешность для различных алгоритмов
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 1$; $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$; $r=6$

По результатам имитационного моделирования при оценке математического ожидания можно сделать следующие выводы:

- любой из рассмотренных алгоритмов дает асимптотически несмещенную оценку, т.е. погрешность неадекватности равна нулю;
- погрешность конечности выборки уменьшается с увеличением длительности реализации (см. рис. 9.6-9.7), становясь, например, при $m_x=0, \sigma_x^2=1, T_k/\tau_{k\max}=800$ меньше 0,05; это дает погрешность центрирования при оценке дисперсии 0,0025, что в практических случаях вполне допустимо;
- изменение значения уставки с $0,5\sigma_x$ до σ_x , сохраняя вид зависимости

погрешности от различных факторов, практически не изменяет ее значения, что дает возможность при оценке математического ожидания выбирать большую уставку (см. рис. 9.6);

- погрешность дискретизации зависит от значения интервала принудительной дискретизации Δt_0 ; выбор $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$ обеспечивает допустимые значения погрешности (см. рис. 9.8-9.9), однако, возможно увеличение $\Delta t_0 < 4 \Delta t_{\min}$, при этом $\Delta_d < 0,005$ при $T_k > 150\tau_{k\max}$ и $\varepsilon \leq \sigma_x$;

- значение погрешности квантования уменьшается с увеличением числа уровней квантования (см. рис. 9.10), при этом для обеспечения $\Delta_k < 0,01, r \geq 6$;

• полная погрешность Δ_M оценки математического ожидания $m_x=0$, $\sigma_x^2=1$, $\varepsilon=\sigma_x$, $\Delta t_0=\Delta t_{\min}$, $r=6$ и $T_k/\tau_{k\max}=800$ принимает значения $\leq 0,05$ для любого из рассмотренных алгоритмов, поэтому при оценке математического ожидания возможно применение классического алгоритма, для которого меньше время анализа (см. рис. 9.11-9.12).

Результаты имитационного моделирования при оценке дисперсии представлены на рис. 9.13 – 9.21.

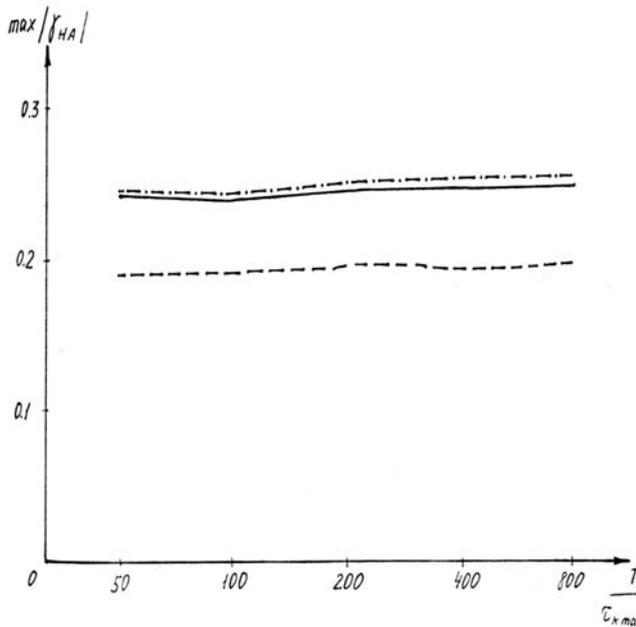


Рисунок 9.13. Погрешность неадекватности
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

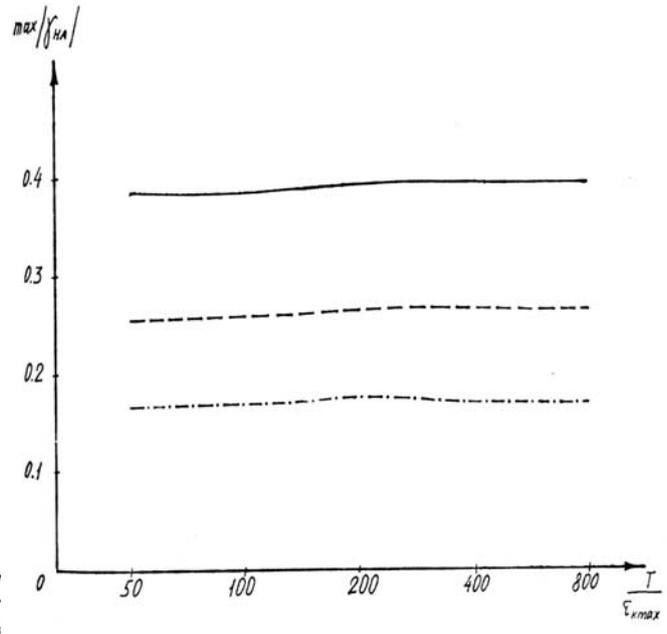


Рисунок 9.14. Погрешность неадекватности
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 1;$

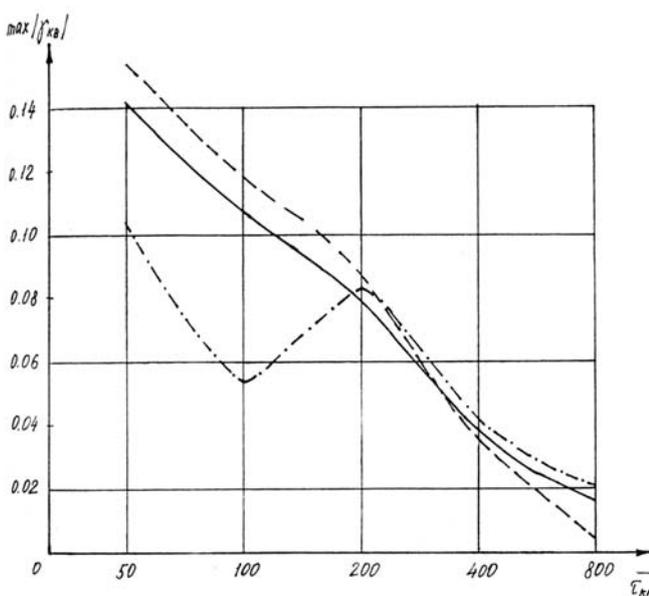


Рисунок 9.15. Погрешность неадекватности
 — N=1; - - - N=0; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

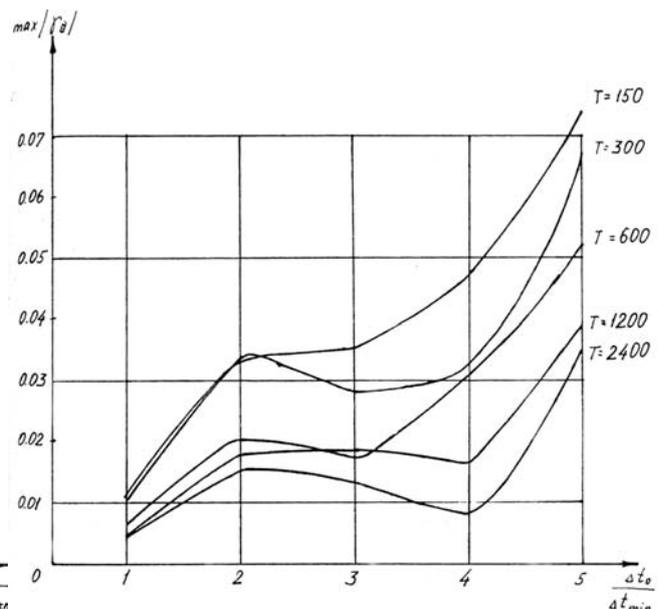


Рисунок 9.16. Погрешность дискретизации
 N=0; $\sigma_x = 1; \varepsilon = 0,5;$

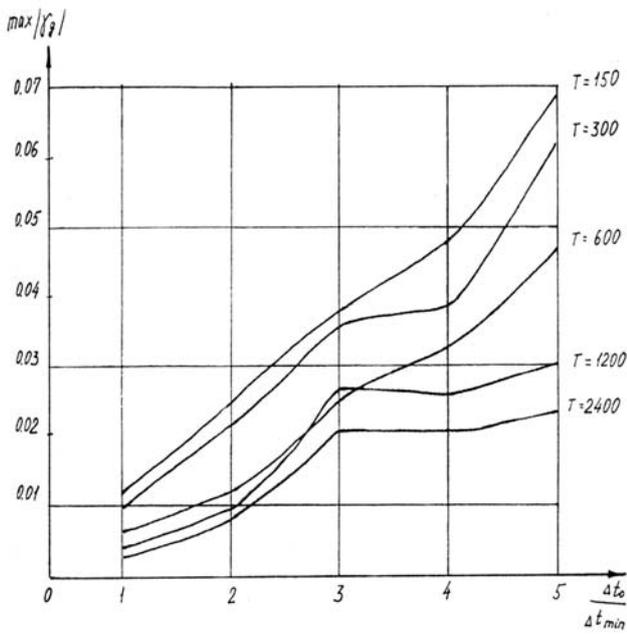


Рисунок 9.17. Погрешность дискретизации
 $N=1$; $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 0,5$;

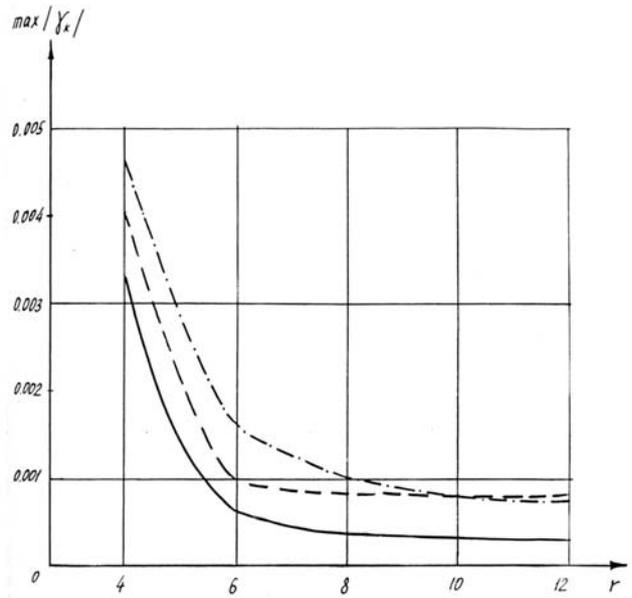


Рисунок 9.18. Погрешность неадекватности
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 0,5$;

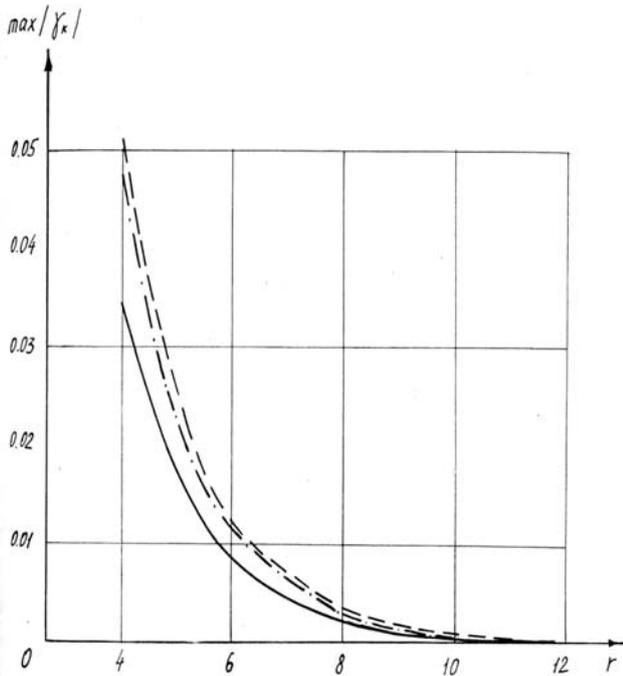


Рисунок 9.19. Погрешность квантования
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 1$

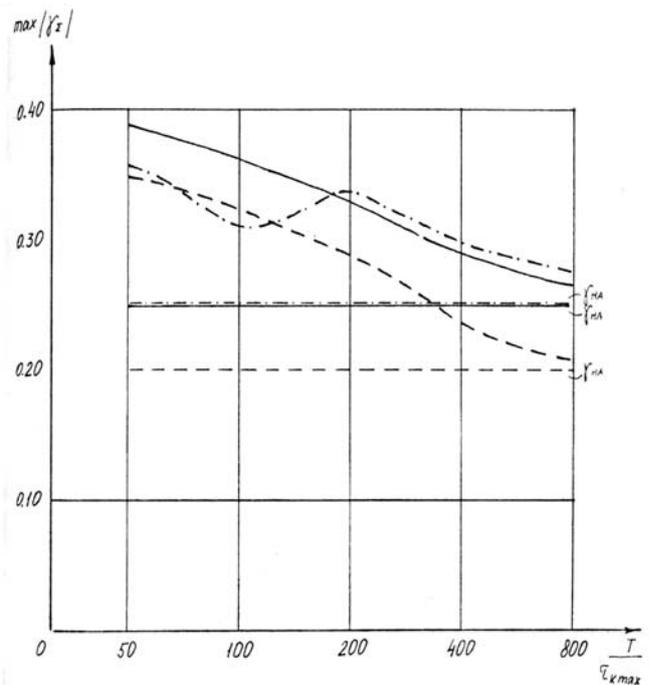


Рисунок 9.20. Полная погрешность
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 0,5$; $\Delta t_0 = \Delta t_{min}$; $r=6$

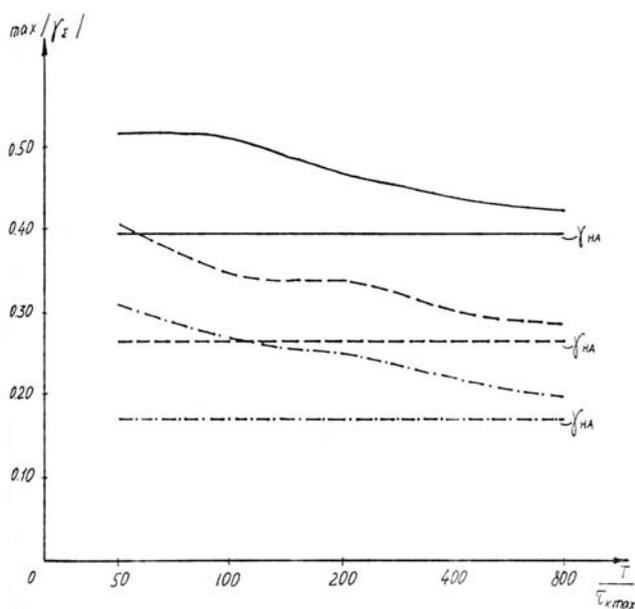


Рисунок 9.21. Полная погрешность
 — $N=1$; - - - $N=0$; - · - · - классический
 $\sigma_x = 1$; $\varepsilon = 1$; $\Delta t_0 = \Delta t_{\min}$; $r=6$

Выводы при оценке дисперсии:

- адаптивная дискретизация изменяет значение дисперсии входного сигнала ($\sigma_x^2=1$ изменяется до $\hat{\sigma}_x^2=0,74$ при $n=0$, $n=1$ при $\varepsilon=0,5 \sigma_x$), причем, тем больше, чем больше значение уставки;
- любой из рассмотренных алгоритмов дает смещенную оценку (см. рис. 9.13, 9.14);
- характер зависимостей $\Delta_{кв}$, $\Delta_{д}$, $\Delta_{к}$ при оценке дисперсии похож на характер соответствующих зависимостей оценки математического ожидания (см. рис. 9.15-9.19), появление локальных минимумов при оценке объясняется пропаданием ряда существенных отсчетов при $\Delta t_0 > \Delta t_{\min}$ и уменьшением из-за этого объема выборки;

- при увеличении T_k/τ_{kmax} значение полной погрешности стремится к значению погрешности неадекватности (см. рис. 9.20, 9.21);
- при оценке дисперсии также возможно применение классического алгоритма.

9.4. Анализ составляющей погрешности конечной разрядности процессора методом имитационного моделирования

Определим составляющую погрешности, обусловленную конечной разрядностью процессора, при измерении корреляционной функции [108, 206].

В качестве алгоритма оценки корреляционной функции применялся мультипликативный ААСИ с усреднением по времени, широко применяемый для анализа как нормальных, так и ненормальных стационарных случайных процессов [108].

Для моделирования случайного процесса применялись две процедуры:

- линейная фильтрация с импульсной характеристикой формирующего фильтра, определяемым требуемым видом корреляционной функции:

$$y(J) = \Delta t \sum_{I=1}^{N1} h(J)z(I - J), \tag{9.12}$$

где Δt - интервал дискретизации;

$h(J)$ - импульсная характеристика фильтра;

$z(I)$ - входная псевдослучайная последовательность типа «белого шума» с равномерным законом распределения;

- «S» образное нелинейное преобразование, изменяющее форму плотности распределения вероятностей:

$$x = f(y). \tag{9.13}$$

Алгоритм моделирования содержит следующие блоки:

1. **блок 1** - ввод исходных данных для моделирования:
 - N - объема выборки;
 - M - числа ординат корреляционной функции;
 - $[z_{\min}, z_{\max}]$ - диапазона генерирования псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения;
 - характеристик линейного фильтра;
 - характеристик нелинейного преобразования;
 - Δt - значения интервала дискретизации.
2. **блок 2** - генерирование псевдослучайной последовательности в диапазоне $[z_{\min}, z_{\max}]$;
3. **блок 3** - генерирование псевдослучайной последовательности с требуемым видом корреляционной функции;
4. **блок 4** - преобразование псевдослучайной последовательности в диапазоне $[0,1]$;
5. **блок 5** - нелинейное преобразование псевдослучайной последовательности;
6. **блок 6** - первичная обработка: центрирование, нормализация и т.д.;
7. **блок 7** - проверка характеристик сгенерированной последовательности;
8. **блок 8** - ввод числа десятичных знаков после запятой;
9. **блок 9** - ограничение числа десятичных знаков после запятой псевдослучайной последовательности;
10. **блок 10** - вычисление корреляционной функции с ограниченным числом десятичных разрядов после запятой;
11. **блок 11** - вычисление погрешности конечной разрядности при определении корреляционной функции.

Замечания:

- для моделирования коррелометра с различной разрядностью необходимо повторить блоки 8-11.
- при анализе нормальных последовательностей блоки 4 и 5 должны быть опущены.

Результаты моделирования для различных программ моделирования и различных параметров представлены в таблицах 4.1-4.3.

Случай 1.

Основные параметры моделирующей программы:

- объем выборки $N = 5000$;
- интервал дискретизации $\Delta t = 0,3$;
- импульсная характеристика формирующего фильтра

$$h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau / T);$$

- постоянная времени $T = 1$;
- число ординат импульсной характеристики $N1 = 15$;
- число ординат корреляционной функции $M = 10$;
- нелинейная функция преобразования: $x = 1 - e^{-\alpha y} (1 + \alpha y + \alpha^2 y^2 / 3)$;
- коэффициент асимметрии k_a ;
- коэффициент эксцесса k_ε ;
- погрешность

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{s=0}^M [K_x(s\Delta t) - K_{xl}(s\Delta t)]^2}{\sum_{s=0}^M K_x^2(s\Delta t)}}; \quad (9.14)$$

- число десятичных разрядов после запятой l .

Результаты моделирования представлены в таблице 9.1.

Таблица 9.1

α	k_a	k_ε	l	δ
0,1	0,09	-0,20	2	0,01
			1	0,06
0,5	0,65	-0,07	2	0,01
			1	0,06
6	-1,89	2,56	2	0,01
			1	0,05

Случай 2.

Основные параметры моделирующей программы:

- $N = 5000$;
- $\Delta t = 0,3$;
- $h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau/T)$;
- $T=1$;
- $N1=15$;
- $M=10$;
- $x = 1 - \exp(-\alpha y)$.

Результаты моделирования представлены в табл. 9.2

Таблица 9.2

α	k_a	k_ε	l	δ
0,0005	-0,08	-0,48	2	0,01
			1	0,09
1	-0,38	-0,29	2	0,01
			1	0,06
7,5	-2,43	8,07	2	0,01
			1	0,08
10	-3,51	17,39	2	0,01
			1	0,07

Случай 3.

Основные параметры моделирующей программы:

- $N = 5000$;
- $h(\tau) = \frac{1}{T} \exp(-\tau/T) \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{1+T^2 \omega_0^2} - 1}{T \omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$;
- $T = 1$;
- $x = 1 - \exp(-\alpha y)$.

Результаты моделирования представлены в табл. 9.3

Таблица 9.3

Δt	ω_0	N1	α	k_a	k_e	l	δ
0,1	5	30	5	-0,66	0,50	2 1	0,01 0,09
0,1	5	30	10	-1,61	3,52	2 1	0,01 0,10
0,1	5	30	15	-2,34	8,71	2 1	0,01 0,09
0,05	10	60	0,0015	0,02	-0,18	2 1	0,01 0,10
0,05	10	60	10	-0,91	1,33	2 1	0,01 0,09
0,05	10	60	15	-1,79	5,42	2 1	0,01 0,09

Результаты моделирования показали, что для обеспечения погрешности конечной разрядности 0,01 необходимо обеспечить две десятичные цифры после запятой (при нормализации последовательности по среднеквадратичному отклонению), что соответствует 7-8 битам. Результат не зависит существенным образом от вида корреляционных функций, плотности распределения вероятности и их характеристик.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы прикладного анализа неэквилидистантных временных рядов, в результате чего:

1. проведен сравнительный анализ моделей при неравномерной дискретизации случайных процессов и определены параметры моделей, используемые как при синтезе алгоритмов оценивания, так и при метрологическом анализе результатов оценивания (измерения) и инженерном расчёте параметров статистических анализаторов и программного обеспечения;

2. показано, что при описании потоков событий возможно применение рекуррентных потоков, позволяющих определить верхнюю границу оценки погрешностей результатов измерения;

3. разработана классификация методов измерения, позволившая все существующие и вновь разрабатываемые методы условно разбить на три класса: классический, аппроксимативный и с использованием интервальной корреляционной функции;

4. показано, что при известном алгоритме восстановления случайного процесса на интервале дискретизации целесообразно применение классических либо аппроксимативных алгоритмов, позволяющих измерять значения функциональной вероятностной характеристики в произвольной точке; если алгоритм восстановления случайного процесса на интервале дискретизации неизвестен или сложен, практически единственным методом решения задачи является метод с использованием интервальной корреляционной функции;

5. показано, что при реализации ААСИ для процессов, близких к нормальным, с помощью аппаратно-программных средств и достаточном объеме памяти предпочтение следует отдавать дескрипторным ААСИ, уменьшающим как время обработки одного отсчета, так и общее время анализа при предварительной буферизации входных массивов выборочных данных за счет сокращения числа операций умножения при незначительном увеличении объема памяти, при этом погрешность измерения остается такой же, как и для ААСИ;

6. разработана методика анализа погрешностей статистических измерений и её составляющих при неравномерной дискретизации случайных процессов, используемая как для аналитических исследований, так и для имитационного моделирования;

7. Показано, что при анализе неэквилидистантных временных рядов даже при применении адекватных алгоритмов оценки вероятностных характеристик, в большинстве случаев, получаются смещенными, что объясняется использованием модельных значений сигнала (восстановленных) на интервале дискретизации неэквилидистантного временного ряда; погрешности конечности выборки при применении аппроксимативных алгоритмов, в общем случае, больше соответствующих погрешностей при равномерной дискретизации на величину, зависящую от отношения дисперсии шума адаптивно-временной дискретизации к дисперсии процесса; при применении алгоритмов с использованием интервальной корреляционной функции оценки получаются несмещенными, а дисперсия оценки больше соответствующей дисперсии при равномерной дискретизации на величину равную $C_x^{1/2}(J)$;

8. разработаны структуры специализированных и процессорных статистических анализаторов, а также соответствующее программное обеспечение для оценки разнообразных вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов;

9. разработаны алгоритм проектирования и инженерного расчёта параметров статистических анализаторов и программного обеспечения;

10. рассмотрены вопросы аппроксимативного анализа законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности, обобщенных корреляционно-спектральных характеристик параметрическими моделями в виде функций заданного вида и ортогональными функциями Лагерра;

11. разработаны автоматизированные информационные системы для аппроксимативного анализа вероятностных характеристик временных рядов, в том числе, и неэквидистантных, что позволило:

- идентифицировать случайные процессы по виду функциональной вероятностной характеристики с использованием её фазового портрета;

- получить аналитические выражения вероятностных функциональных характеристик в виде параметрических моделей как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации, удобные для дальнейших исследований и хранения результатов, что особенно важно при большом объёме статистических испытаний;

- без существенных вычислительных затрат определить обобщенные корреляционно-спектральные характеристики: интервалы корреляции, корреляционные моменты, эквивалентную ширину спектра мощности и т.д. – по параметрам модели;

- в сомнительных случаях с помощью разработанных автоматизированных систем произвести аппроксимацию функциональной характеристики различными параметрическими моделями с использованием различных численных методов, включая аппроксимацию ортогональными функциями Лагерра;

- за счёт встроенных подсистем имитации случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками отладить и включить в системы новые алгоритмы аппроксимации;

- сравнить результаты аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации случайных процессов;

- за счёт визуализации имитации случайных процессов, идентификации и аппроксимации функциональных характеристик, использования ручного и автоматизированного режимов работы, применять автоматизированные системы в учебном процессе при подготовке специалистов по специальностям, связанным со статистической обработкой информации, автоматизацией научных исследований.

12. с помощью разработанных систем проведена обработка гидрологических параметров Борнхольмского бассейна Балтийского моря, позволившая выявить наличие сезонной изменчивости, а также параметров течений с помощью АЦИТТ.

На наш взгляд представляет практический интерес решение следующих задач:

- расширение круга моделей неэквидистантных временных рядов для решения разнообразных научно-технических задач;

- разработка и исследование новых алгоритмов и численных методов для оценки вероятностных характеристик, обладающих лучшей сходимостью;

- совершенствование методики метрологического анализа результатов измерения, особенно для косвенных и совокупных методов оценивания;

- разработка новых и совершенствование автоматизированных систем для аппроксимативного анализа характеристик неэквидистантных временных рядов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик/ С.А. Прохоров, А.В. Иващенко// Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 135-141 с.
2. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Прохоров С.А., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Шевченко Д.В.//Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 142-156 с.
3. Автоматизированные системы научных исследований /Прохоров С.А., Фурсов В.А., Кривошеев А.О., и др.:НПЦ «Авиатор», Самара, 1995. - 137 с.
4. Адаптивные телеизмерительные системы /Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В./ Л.: Энергоатомиздат, 1981. - 246 с.
5. А.С. № 962976 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления корреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3250521/18-24, Заявлено 18.02.81; Оpubл. 30.09.82, Бюл. № 36. - С.7.
6. А.С. № 968819 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3291998/18-24, Заявлено 25.02.81; Оpubл. 23.10.82, Бюл. № 39. - С.7.
7. А.С. № 980101 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3306092/18-24, Заявлено 26.06.81; Оpubл. 07.12.82, Бюл. № 45. - С.5.
8. А.С. № 982011 СССР, G 09f 15/336. Устройство для вычисления взаимокорреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3292246/18-24, Заявлено 21.05.81; Оpubл. 15.12.82, Бюл. № 46. - С.4.
9. А.С. № 1020835 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3393333/18-24, Заявлено 15.02.82; Оpubл. 30.05.83, Бюл. № 20.- С.7.
10. А.С. № 1022167 СССР, G 06f 15/336. Автокоррелятор/Прохоров С.А., Мартовой В.П., Белолипецкий В.Н., Сухинин В.П. /СССР/.-№ 3380810/18-24, Заявлено 16.11.81; Оpubл. 07.06.83, Бюл. № 21. - С.5.
11. А.С. № 1042030 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3402977/18-24, Заявлено 23.02.82; Оpubл. 15.09.83, Бюл. № 34. - С.5.
12. А.С. № 1104529 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3565484/18-24; Заявлено 18.03.83; Оpubл. 23.07.84, Бюл. № 27. - С.8.
13. А.с. № 1166135 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления структурной и интервальной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3693028/24-24; 3694521/24; Заявлено 24.01.84; Оpubл. 07.07.85, Бюл. № 25. - С.8.
14. А.С. № 1173419 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3703968/24-24, 3701886/24-24; Заявлено 20.02.84; Оpubл. 16.08.85, Бюл. № 30. - С.5.
15. А.С. № 1183985 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения моментов k-го порядка /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3745812/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 07.10.85, Бюл. № 37. - С.5.

16. А.С. № 1224806 СССР, G 06f 15/336. Коррелометр /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3747492/24-24; 3745813/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 15.04.86, Бюл. № 14. - С.6.
17. А.С. № 1257663 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750867/24-24; Заявлено 04.06.84; Оpubл. 15.09.86, Бюл. № 34. - С.5.
18. А.С. № 1288715 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной взаимоструктурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750851/24-24; Заявлено 06.06.84; Оpubл. 07.02.87, Бюл. № 5. - С.10.
19. А.С. № 13005710 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3954265/24-24; Заявлено 16.09.85; Оpubл. 23.04.87, Бюл. № 15. - С.6.
20. А.С. № 1355978 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения производной структурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4007833/24-24; Заявлено 15.01.86; Оpubл. 30.11.87, Бюл. № 44. - С.6.
21. А.С. № 1361577 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения взаимной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4101653/24-24; Заявлено 26.05.86; Оpubл. 23.12.87, Бюл. № 47. - С.6.
22. А.С. № 1387012 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления интервальной взаимокорреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4139478/24-24; Заявлено 28.10.86; Оpubл. 07.04.88, Бюл. № 13. - С.5.
23. А.С. № 1444813 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4253803/24-24; Заявлено 28.04.87; Оpubл. 15.12.88, Бюл. № 46. - С.6.
24. Артамонов Г.Т., Тюрин В.Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. -М.: Энергия, 1977. - 112 с.
25. Бабкин В.Ф., Крюков А.Б., Штарьков Ю.М. Сжатие данных //Аппаратура для космических исследований. -М.:Наука,1972.-С.172-209.
26. Белолипецкий В.Н. Алгоритмы и устройства корреляционного анализа неравномернорискретизированных сигналов. Дисс.... канд. техн. наук - Куйбышев, 1984. - 233 с.
27. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. - М.:Наука,1965.-464с.
28. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. - М.:Мир,1974.-464с.
29. Билинский И.Я., Микелсон А.К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. -Рига:Зинатне,1983.-292с.
30. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971
31. Величкин А.И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. - М.:Сов.радио,1970.-294с.
32. Венедиктов М.Д., Марков В.В., Эйдуc Г.С. Асинхронные адресные системы связи. -М.:Связь,1968.-271с.
33. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.:Наука.-1969.-576с.
34. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1965. - 368 с.
35. Вероятностный анализ и моделирование океанологических процессов//Сб. статей п/р Рожкова В.А. - Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 164 с.
36. Виленкин С.Я. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. -М.:Сов.радио,1967.-200с.

37. Витгих В.А. Сжатие данных в информационно-измерительных системах: Синтез алгоритмов и проектирование устройств. -Дисс. ... д-ра техн. Наук - Куйбышев,1975.-291с.
38. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. К вопросу построения аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида //Информационно-измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974.- С.151-156.
39. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Корреляторы с аппроксимацией параметрическими моделями //Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Тез. докладов VII Всесоюзного симпозиума. - Л. - 1975.- С.60-64.
40. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов.//ИВУЗов СССР «Радиофизика». - т. XVI.- №11. - 1973. - С.1770-1771.
41. Волков И.И., Прохоров С.А. Анализ статистических погрешностей при аппаратурной аппроксимации корреляционных функций однопараметрическими моделями //Информационно- измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974. - С.151-156.
42. Волков И.И., Прохоров С.А. Батищев В.И. Способ построения аппаратуры для определения методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XXI. - №8- 1978. - С.24-29.
43. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XVII. - №7- 1974. - С.66-72.
44. Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. Методы и аппаратура для аппроксимативной оценки корреляционных характеристик с применением функций Лагерра. - Куйбышев, КПТИ, 1977. - 55 с.
45. Волков И.И., Якимов В.Н. Знаковый коррелятор с применением специального аналого-цифрового преобразования // Статистические измерения и применение микромашиных средств в измерениях. Тез. докл. II Всесоюзного симпозиума. -Л.:1984.-С.36-40.
46. Галушкин А.И., Зотов Ю.Я., Шикун Ю.А. Оперативная обработка экспериментальной информации. -М.:Энергия,1972.-360с.
47. Гладкий В.С. Вероятностные вычислительные модели. -М.:Наука,1973.-300с.
48. Глова В.И., Кирьянов Б.Ф. Стохастические вычислительные машины (обзор и проблемы) // Сб. тр. Иркутского политехнического института. Автоматизированные системы управления (АСУП). Теория, методология, моделирование, технические средства. -Иркутск,1974.-.53-69.
49. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания.- М.:Наука.-1966.-431с.
50. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. Радио, 1973. - 368 с.
51. Горбачевич Е.Д. Коррелометры с аппроксимацией. - М., «Энергия», 1971. - 125с.
52. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. - М.: Радио и связь, 1982. - 256 с., ил. (стат. теория связи. Вып. 17)
53. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.
54. Грибанов Ю. И., Веселова Г.П., Андреев В.Н. Автоматические цифровые корреляторы. – М.: Энергия, 1971. – 240 с., ил.

55. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового корреляционного анализа. -М.:Радио и связь,1984.-160с.
56. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. - М.: Энергия, 1974. - 240 с., ил.
57. Губарев В.В. Алгоритмы статистических измерений. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 272 с.
58. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.- М.:Наука.-228с.
59. Дельта модуляции / М.Д. Венедиктов, Ю.П. Женевский, Г.С. Эйдус. - М.:Связь,1976.-272с.
60. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: «Наука», 1970.
61. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. - М.:Мир,1971. -320 с.
62. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.Ч.2. - М.:Мир,1972. -288 с.
63. Домарацкий А.Н., Иванов Л.Н., Юрлов Ю.И. Многоцелевой статистический анализ случайных сигналов. -Новосибирск: Наука, Сибирское отд-ние,1975.-164с.
64. Духон О.И., Ильинский Н.Н. Средства управления летательными аппаратами. -М.:Воениздат,1972.-432с.
65. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971, 327 с.
66. Заездный А.М. Основы расчётов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969. - 447 с.
67. Инженерные изыскания на континентальном шельфе. ВНН 51.2- 84. Рига: 1985. - 72 с.
68. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений.- М.: Энергия, 1974. - 375 с.
69. Калашников И.Д., Степанов В.С., Чуркин А.В. Адаптивные системы сбора и передачи информации. -М.: Энергия,1975. - 240 с.
70. Кантор А.В., Толмаджаева Т.А. Исследование избыточности телеметрической информации автоматических лунных станций «Луна-9» и «Луна-13»//Аппаратура для космических исследований.-М.:Наука,1972.-С.78-90.
71. Кей С.М., Марил С.Л. Современные методы спектрального анализа. ТИИЭР т. 69, № 11, 1981, С. 3-47.
72. Клигман Э. Проектирование микропроцессорных систем. – М.: Мир, 1980. – 575 с.
73. Кнут Д.Е. Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, 1976, 724 с.
74. Коварцев А.Н. Автоматизация разработки и тестирования программных средств/Самар. гос. аэрокосм.ун- т. Самара, 1999. - 150 с.:ил
75. Козлов А.Н. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа. каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 94 с.
76. Кокс Д., Смит В. Теория очередей.-М.:Мир,1966.-72с.
77. Кокс Д., Теория восстановления.-М.:Сов.радио.-1967.-299с.
78. Коновалов Г.В., Тарасенко Е.М. Импульсные случайные процессы в электросвязи. -М.:Связь,1973.-304с.
79. Котюк А.Ф., Ольшевский В.В., Цветков Э.И. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. -М.:Энергия,1967.-24с.
80. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. -М.:Изд-во стандартов,1970.-104с.

81. Кудрина М.А. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 116 с.
82. Курочкин С.С. Многоканальные счётные системы и коррелометры. – М.: Энергия, 1972. – 344 с., ил.
83. Кэтермоул К.В. Принципы импульсно-кодовой модуляции //Пер. с англ.//Под ред. В.В. Маркова. -М.:Связь,1974.-408с.
84. Лазаревская доплеровская анемометрия и ее применение / тез. докл. Всесоюзного семинара. -Новосибирск.-1980.-108с.
85. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Ч.1 - М.:Сов.радио,1965.-552с.
86. Лившиц А.Р., Биленко А.П. Многоканальные асинхронные системы передачи информации. М.:Связь,1974.-282с.
87. Мановцев А.П. Основы теории радиотелеметрии. -М.:Энергия.-1973.-592с.
88. Метод повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. /Батищев В.И., Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. //Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей» Л., 1975, С.60-64.
89. Методика обработки и анализа данных измерений течений АЦИИТ применительно к задачам темы П17 а.05 « Провести комплексное исследование океанографических, метеорологических и экологических условий в перспективных районах освоения минерального сырья в мировом океане» .- Л.: ЛОГОИН.- 1987. - 46 с.
90. Методическое письмо по вероятностному анализу векторных временных рядов скоростей течений и ветра. Л.: Гидрометеиздат. - 1984.- 62 с.
91. Методы нормирования метеорологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.
92. Методы синхронизации спутниковых систем связи с многостанционным доступом и временным уплотнением / П.П. Нусил, К.Э. Браун, В.Стернарт, Б. Гикопулос / Пер. с англ.. -ТИИЭР.-1977.-т.65.-№ 3.-С.181-194.
93. Мешковский К.А., Кириллов Н.Е. Кодирование в технике связи. - М.:Связь,1966.-34с.
94. Мидлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. – М: «Сов. Радио», 1961, т. 1.
95. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. -М.: Энергия,1972.-456 с., ил.
96. Мирский Г.Я. Характеристика стохастической взаимосвязи и их измерения.- М.: Энергоиздат, 1982. – 319 с.
97. Михайлов А.С., Прохоров С.А., Трапезников Ю.А. Применение метода расчета вероятностных характеристик к данным с неравномерной дискретностью для изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря//Труды ВНИИГМИ-МЦД, 1989,вып.152.
98. Михотин В.Д., Шахов Э.К. Дискретизация и восстановление сигналов в информационно-измерительных системах: Учебное пособие.-Пенза.-1982.-92с.
99. Многостанционный доступ в спутниковых системах связи./М.Д.Венедиктов, С.А. Даниэлян, В.В.Марков Г.С. Эйдус. -М.:Связь,1973.-97с.
100. Новиченкова И.Ю. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно- спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 126 с.
101. Новоселов О.Н., Фомин А.Ф. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем. -М.:Машиностроение,1980.-208с.

102. Ольховский Ю.Б., Новоселов О.Н., Мановцев А.П. Сжатие данных при телеизмерениях. -М.:Сов.радио,1971.-303с.
103. Ольшевский В.В. Основы теории статистических измерений. -Таганрог: ТРТИ,1976.-107с.
104. Орищенко В.И., Санников В.Г., Свириденко В.А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 184 с., ил.
105. Основы автоматики, автоматизация и телеуправление устройствами энергоснабжения электрических железных дорог / Под ред. Н.Д. Сухопрудского. - М.:Транспорт,1975.-352с.
106. Перспективные средства вычислительной техники и автоматизации для создания интеллектуальных АСНИ /Прохоров С.А., Дерябкин В.П., Кривошеев А.О. и др.: НПЦ «Авиатор». Самара, 1994. 99 с.
107. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 329 с.: ил.
108. Прохоров С.А. Измерение вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации. - Дисс.... докт. техн. наук - Куйбышев: 1987. - 409 с.
109. Прохоров С.А. Исследование и разработка методов и аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида.- Дисс. ... канд. техн. наук - Куйбышев: 1974, - 126 с.
110. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 198 с.: ил.
111. Прохоров С.А. Особенности статистической обработки информации с использованием ЭВМ типа «Наири». Методические разработки по курсу «Математические основы информационно- измерительной техники» .- Куйбышев, КПТИ, 1977.- 43 с.
112. Прохоров С.А. Особенности статистической обработки информации с использованием ЭВМ типа «Наири». Методические разработки по курсу «Математические основы информационно- измерительной техники» .- Куйбышев, КПТИ, 1980.- 27 с.
113. Прохоров С.А., Сухинин В.П. Аппроксимативная корреляционная ИИС на базе ИВК //Статистические измерения и применение микромашиных средств в измерениях: Тез. докл. Всесоюз. симп., секция 4, - Л.: 1982. - С. 133-137.
114. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968. - 368 с.
115. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. – М.: Физматгиздат., 1962. – 884 с.
116. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.//Пер. с англ./Под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир, 1978.-848 с.
117. Рейнхард Х. Обзор стохастической вычислительной техники // Зарубежная радиоэлектроника. -1979.-№ 5.-С.41-48.
118. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 280 с.
119. Розенберг В.Я. Введение в теорию точности измерительных систем. - М.:Сов.радио,1968.-256с.
120. Розенберг В.Я. Радиотехнические методы измерения параметров и цепей. -М.:Изд-во стандартов,1970.-308с.
121. Рози А.М. Теория информации и связи / Пер. с англ. -М.:Энергия,1971.-184с.
122. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия,1974.-176 с., ил.
123. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. -М.: Сов.радио,1968.-256 с.

124. Руководство по гидрологическим работам в океанах и морях. - Л.:Гидрометеиздат.-1977.-752с.
125. Свенсон А.Н., Смердов А.А. Системы передачи информации со статистическим усреднением. -Киев:Наукова думка,1967.-226с.
126. Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. - М.:Связь,1977.-184с.
127. Соболев В.С. Методы идентификации класса случайного процесса в адаптивных информационно-измерительных системах статистического анализа. – Дисс.... канд. техн. Наук. – Л., 1983. – 212 с.
128. Современные методы идентификации систем./п/р П. Эйкхоффа. – М.; Мир, 1983, 400 с.
129. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. – М.: Мир, 1976. – 520 с.
130. Статистическая теория связи и ее практические приложения /Под ред. Б.Р.Левина. -М.:Связь,1979, вып.13.-288с. (СТС).
131. Стил Р. Принципы дельта-модуляции // Пер. с англ. / Под ред. В.В.Маркова. -М.:Связь,1979.-368с.
132. Сухинин В.П., Прохоров С.А. Идентификация стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции //Идентификация и автоматизация технологических процессов и промышленных установок. Куйбышев. - 1982. - С. 25 - 29.
133. Учеватов С.В. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 69 с.
134. Федоров Р.Ф., Яковлев В.В., Добрис Г.В. Стохастические преобразователи информации. -Л.:Машиностроение,1978.-304с.
135. Феллер В. введение в теорию вероятностей и ее приложения.Т.2.- М.:Мир.-1967.-752с.
136. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания.-М.:Физматгизд.-1963.-236с.
137. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л: Ленинградское отд-ние Энергоатомиздата, 1984.-144с., ил.
138. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973.-128с., ил.
139. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений.-2-е изд., перераб. и доп. -Л.:Энергоатомиздат. Ленинградское отд-ние, 1986.-256с., ил.
140. Чеголин П.М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. – М.: Энергия, 1969. – 383 с.
141. Численные методы: Курс лекций/ А.Н. Коварцев. Самар. Гос. аэрокосм. Ун-т, 2000, 177 с.
142. Шастова Г.А. Кодирование и помехоустойчивость передачи телемеханической информации. -М.:Энергия,1966.-454с.
143. Шевченко Д.В. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2001.- 139 с.
144. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.
145. Яковлев В.В., Федоров Р.Ф. Стохастические вычислительные машины. - Л.:Машиностроение,174.-344с.
146. Ярлыков М.С., Черняков М.В. Оптимизация асинхронных адресных систем радиосвязию -М.:Связь.-вып.1.-216с. (СТС).

147. Яценко В.В. Разработка и исследование методов определения вероятностных характеристик сигналов, представленных нерегулярной выборкой. Дисс.... канд. техн. наук. -Л.:1986.-164 с.
148. Akaike H. Autoregression Model Fitting for Control. Ann. Inst. Statist. Math. 23, 1969, pp. 163-180.
149. Akaike H. Fitting Autoregression for Prediction. Ann. Inst. Statist. Math. 21, 1969, pp. 243-247.
150. Balakrishnan A.V. On the problem of time-jitter in sampling // IRE Trans on Inform. Theory.-1962.-vol. IT-8.
151. Beuter F.J. Recovery of randomly sampled signals by simple interpolators // Inform.Control.-1974.-vol.26.-N4.-P.312-340.
152. Beutler F.J. Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes // IEEE Trans. Inf. Theory.-1970/-IT-16.-N2.-P.147-152.
153. Beutler F.J., Leneman O.A.Z. On the statistics of random pulse processes // Inform. and Control.-1971.-vol.18.-N4
154. Beutler F.J. Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples // SIAM Rev.-1966.-vol.8.-N3.-P.328-335.
155. Beutler F.J., Leneman O.A.Z. The theory of stationary point processes // Acta Math.-1966.-vol.116.-P.159-197
156. Beutler F.J., Leneman O.A.Z. Random sampling of random processes: stationary point processes // Inform. and Control/-1966.-vol.9.-N4.-P.325-346.
157. Beutler F.J., Leneman O.A.Z. The spectral analysis of impulse processes// Inform.and Control.-1968.-vol.12.-N3.-P.236-258.
158. Bloomfield P. Spectral analysis with randomly missing observations//J.Roy.Statist.Soc.Ser.B.-1970.-vol.32.-№ 3.-P.369-381.
159. Brown W.M. Sampling with random jitter // SIAM J/ Appl. Math.-1963.-vol.11.-P.460-473
160. Butto M., Colombo G., Taggiasco G., Tonietti A. Models for the performance evaluation of a packet switching networks with retransmission time-out // NTC'77.-Conf.Record.-1977.-v.1.-NewYork:N.Y.-12.3/1-12.3/6.
161. Chow J.C. On the Estimation the Orders of an Autoregressive Moving Average Process with Uncertain Observations. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-17, 1972, pp. 386-387.
162. Chu D/C/ Time interval averaging^ theory, problems and solution // Hewlett - Packard J.-1974.-June.-P.12-15.
163. Cox D.R. and Lewis P.A.W. The statistical analysis of Series of Events// Methuen, London.-1966.
164. Daudpota O.T., Dowrick G. Greated C.A. Estimation of moments a Poisson Sampled random processes//J.Phjs. A: Math. Gem.-1977.-vol.10.-№ 4.-P.471-483.
165. Gaines B.R. Stochastic computer thrives on noise // Electronics. -1967.-№ 14.-P.2-79.
166. Gaster M., Roberts J.B. Spectral analyses of randomly sampled signals// J.Inst.Maths.Applics.-1975.-vol.15.-№ 2.-P.195-216.
167. Gaster M., Roberts J.B. The spectral analyses of randomly sampled records by a direct transform// Proc.R.Soc.Ser.A.-London:1971.-vol.354.-P.27-28.
168. Halliwell J. Stochastic computer solves more problems faster // Electron. Eng. -London:1970.-vol.42.-№ 512.-P.63-65.
169. Hiltz F.F. and Pardoe C.T. A correlator of time intervals between pulses//IEEE Trans. Biomed. Eng.-1965.-BME-12.-P.113-120.
170. Jayant N.S. Digital coding of speech wave-form: PCM.DPCM and DM quantizers // Proc. IEEE.-1974.-vol.62.-P.611-632.

171. Jayant N.S., Rabiner L. The application of dither to the quantization of speech signals // Bell System. Techn.J.-1972.-vol.51.-№ 6.-P.1293-1304.
172. Jones R.N. Spectral analyses with regularly missed observations// Ann.Math.Stat.-1962.-vol.23.-№ 2.-P.455-461.
173. Jones R.N. Spectrum estimation with missing observations// Ann.Inst.Statist.Math.-1971.-vol.23.-№ 3.-P.387-398.
174. Lam Simon S. Delay analysis of a packet switched TDMA system // NTC'76.- Nat. Telecommun.Conf.: Commun. and knowledge. Partners in Progress.-Dallas. Tex.- NewYork:N.Y.-v.1.-16.3/1-16.3/6.
175. Lam Simon S. Delay analysis of a time division multiple access (TDMA) channel // IEEE Trans. Communs.-1977.-v.25.-N12.-P.1489-1494.
176. Lampard D.G. A new Method of determining Correlation Function Stationary Time Series. "Proceedings of the Institution of Electrical Engineers", vol. 102, part. C. March, 1955, London, №1.
177. Leneman O.A.Z. Correlation function and power spectrum of randomly shaped pulse trains // IEEE trans. Aerospace and Electr. Syst.-1967.-AES-3
178. Leneman O.A.Z. On 'error bounds for jittered sampling' // IEEE Trans. Automat. Control.-1966.-vol.AC-11.-N1.-P.150
179. Leneman O.A.Z. On some results in random pulse trains // IEEE Trans. Automatic.Control.-1966.-volAC-12.-N2
180. Leneman O.A.Z. Random sampling of random processes: impulse sampling // Inform. and Control.-1966.-vol.9.-N4.-P.347-363.
181. Leneman O.A.Z. Random sampling of random processes: optimum linear interpolation // J.Franklin Inst.-1966.-vol.281.-N4.-P.302-314.
182. Leneman O.A.Z., Lewis J.B. On mean-square reconstruction error // IEEE Trans. Automat. Control.-1966.-vol.AC-11.-N2.-P.324-325.
183. Leneman O.A.Z., Lewis J.B. Random sampling of random processes: meansquare comparison of various interpolators // IEEE Trans. Automat. Control.-1966.-vol AC-11.-N3-P.396-403.
184. Masry E. Alias-free sampling: An alternative conceptualization and its applications// IEEE Trans.Inform.Theory.-1978.-vol.IT-24.-№ 3.-P.317-324.
185. Masry E. Poisson sampling and spectral estimation of continuous-time process// IEEE Trans.Inform.Theory.-1978.-vol.IT-24.-№ 3.-P.173-183.
186. Masry E. Random sampling and reconstruction of spectra// Inform.Contr.-1971.-vol.19.-P.275-288.
187. Masry E., Klamer D., Mirabile C. Spectral estimation of continuous-time processes Performance comparison between periodic and Poisson sampling schemes // IEEE Trans. Automatic Control.-1978.-vol. AC-23.-N4.-P.679-685
188. Masry E., Lui M.C. A consistent estimate of the spectrum by random sampling of the time series//SIAM J.Appl.Math.-1975.-vol.28.-P.793-810.
189. Masry E., Lui M.C. Discrete-time spectral estimation of continuous-parameter processes.-A now consistent estimate// IEEE Trans.Inform.Theory.-1976.-vol.IT-22.-№ 3.-P.298-312.
190. Moore G.P., Perkel D.H. and Segundo J.P. Statistical Analysis and Functional Interpretation of Neural Spike Data//An. Rev. Physiol.-1966.-№ -28.-P/493-522.
191. Ng S.F.W., Mark J.W. Multi-access model for packet switching with a satellite having processing capability: delay analysis // IEEE Trans. Communs.-1978.-v.29.-№ 2.-P.283-290.
192. Pandya R.N. Delay analysis for Datapac - a packet switched network with two priority classes // Fifth Data Commun. Symp.-1977.-Snowbird.-Utah.-P.3/143/21.

193. Parzen E. On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation // *Sankhya.-Indian. J. Stat. Ser.A.*1963.-vol.25.-N4.P.383-392.
194. Poppelbaum W.J. What next in computer technology? // *Advances in Computers.* -1968.-vol.9.-P.1-21.
195. Prokhorov S. Manual for the Simulation of Random Processes and Dynamic Systems. - IRB.- Zagreb. - 1980.- 62 p.
196. Rabiner L., Johnson J. Perceptual evaluation of the effects of dither on low bit rate PCM system // *Bell System. Techn.J.*-1972.-vol.51.-№ 7.-P.1487-1497.
197. Ribeiro S.T. Random - pulse machines // *IEEE Trans. Electron. Comput.* - 1967.-vol.EC-16.-№ 3.-P.261-276.
198. Roberts L.G. Picture coding using pseudo-random noise // *IRE Trans. Inform. Theory.*-1962.-vol.IT-8.-P.145-154.
199. Rubin J. A group random access procedure communication channels // *NTC'77.-Conf.Record.*-1977.-v.1.-New York:N.Y.-P.12/5/1-12/5/7.
200. Shapiro H.S., Silverman R.A. Alias - free sampling of random noise // *J.Soc.Ind. Appl.Math.* -1960.-vol.8.-N2.-P.225-248.
201. Shaw L. Spectral estimates from nonuniform samples // *IEEE Trans. Audio. Electroacoust.*-1971.-vol.AU-19.-N1.-P.24-31
202. Sheinok P.A. Spectral analysis with randomly missed observations: the bionomical case // *Ann.Math.Stat.*-1965.-vol.36.-N3.-P.971-977.
203. Smith D., Meadows D.M. Power spectra from random-time samples for turbulence measurements with a laser velocimeter // *Internat. Workshop on Laser Velocimetry, 2-nd.-West Lafayette, Ind.March 27-29.-1974.-Proceedings.*-vol.1.-P.27-44
204. Soucek B. and Carlson A.D. *Computers in Neurobiology and Behaviour* (John Wiley, New York, 1976).
205. Soucek B., Prokhorov S. Amplitude Correlator Based on Small Computers//*Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80».*- Budapest. - 1980. - P.264-267.
206. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlation and Real-Time Microcomputer Systems//*Microprocessing and Microprogramming.* - vol. 11 (1983).- № 1. - North Holland Publishing Company. - P. 23-29.
207. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlator Based on Small Computers//*Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80».*- Budapest. - 1980. - P.264-267.
208. Thompson J.E., Sparkes J.J. A pseudorandom quantizer for television signals // *Proc. IEEE.*-1967.-vol.55.-№ 3.-P.353-355.
209. Thompson Rory O.R.Y. Spectral estimation from irregularly spaced data // *IEEE Trans.Geosh.Electr.*-1971.-vol.GE-9.-N2.-P.107-110.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$			$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	μ	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	$\mu = \alpha_1;$ $\lambda = \sqrt{2/\mu_2};$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); & \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \beta^{-2/\alpha}$	$[\Gamma(1+3/\alpha) - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \Gamma(1+2/\alpha) + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \beta^{-3/\alpha};$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$	$[\Gamma(1+4/\alpha) - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \Gamma(1+1/\alpha) + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \beta^{-4/\alpha};$ $\mu_4 / \mu_2^2 - 3;$	
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0,43\sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times \sigma^3\sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4}\sigma^4;$ $\approx -0,3;$	$\sigma \approx 0,8\alpha_1$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	$\alpha = 1/\alpha_1$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\mu_2}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	a	σ^2	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	λ/α	λ/α^2	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$	$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 (0 \leq x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[(1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
	α_1	μ_2	
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$		$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	α/β	α/β^2	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2/\mu_2;$ $\beta = \alpha_1/\mu_2;$	
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$	
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$	
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$	
	α_1	μ_2	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$	

Характеристические функции

№	Название закона	$f_x(x)$	$\varphi_x(u)$
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$\frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	$-\frac{4}{u^2(b-a)^2} (e^{iub/2} - e^{iua/2})$
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{e^{iux}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$	$\exp[iu\mu - a u]$
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\frac{\exp(iu\mu)}{1+u^2/\lambda^2}$
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^2}{k!} \beta^{-k/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$1 - \frac{u\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} (u\sigma\sqrt{2})^{2k+2} + i \frac{u\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp(-u^2\sigma^2/2)$
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha - iu}$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{i\pi}{2a \operatorname{sh} \frac{u\pi}{2a}}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\exp(iua - u^2\sigma^2/2)$

11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp(-x^2 / 2\sigma^2), x > 0 \end{cases}$	$\exp(u^2\sigma^2 / 2) \times \left[1 + \Phi\left(\frac{iu\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right];$ $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(1 - iu/\alpha)^\lambda}$
13	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}$
14	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - iu\beta)^{\alpha+1}}$
15	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\frac{1}{(1 - iu)^{m+1}}$

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8 \sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}}$	$3.4 \sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i - a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1) \sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	X_3 определяется из уравнения $\left(x^2 + a^2 - \sigma_x^2\right) \operatorname{ch} \frac{ax}{\sigma_x^2} - 2ax \operatorname{sh} \frac{ax}{\sigma_x^2} = 0;$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^3} \left[(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a)e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$3,15 \sigma_x$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a),$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2 \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	α^2	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{\alpha^2 \sqrt{\lambda-1} (\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма- распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha}(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}{\beta^2\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	$9,5\beta$
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	$4,1\sigma_x$
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{[\sigma_x \sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]^{n-2}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} [\sqrt{8n-7}-1] \times$ $\times e^{-\frac{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}{2}}$	$3,8\sigma_x$
11	«m- распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m)\sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{\sigma_x^2} e^{-3/2}$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
12	Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\sqrt{m} \frac{(m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m - \sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha - 1} (\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})^{\alpha-2}}{(\alpha - 1)!} e^{-(\alpha - 1 - \sqrt{\alpha - 1})}$	
14	Гиперэкспоненциальный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Таблица χ^2 распределения

r\p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5

Параметрические модели корреляционных функций

На верхнем рисунке графики соответствуют (сверху вниз): $\rho_{x4}(\tau)$ (ряд 1), $\rho_{x2}(\tau)$ (ряд 2), $\rho_{x1}(\tau)$ (ряд 3), $\rho_{x3}(\tau)$ (ряд 4).

На нижнем рисунке и далее верхняя кривая соответствует модели

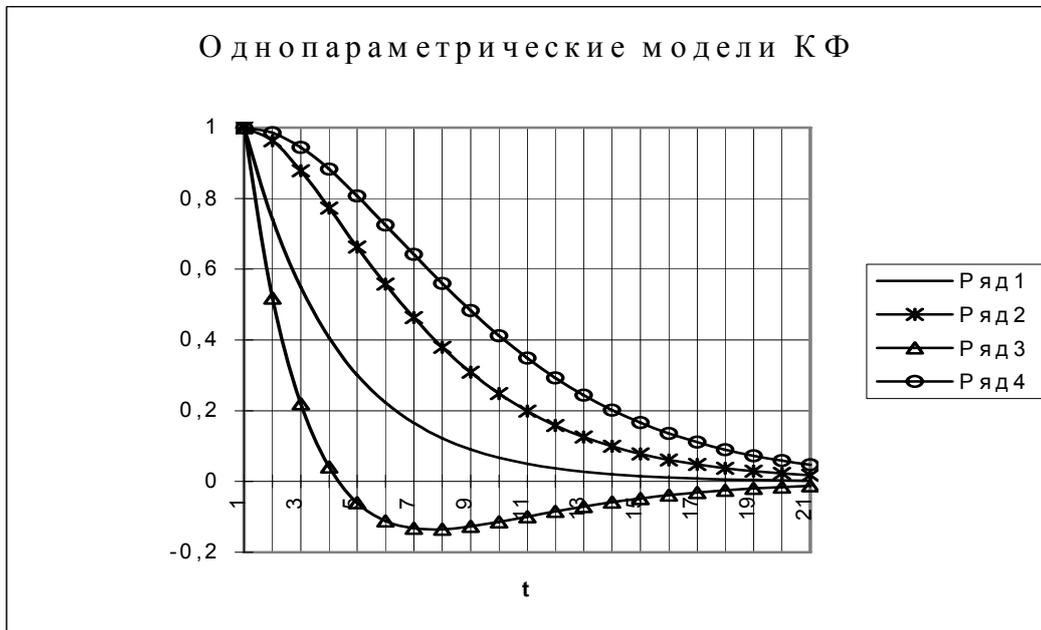


Рис. П.12.1

$$\rho_{6x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right), \text{ средняя-} \rho_{5x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \text{ нижняя-}$$

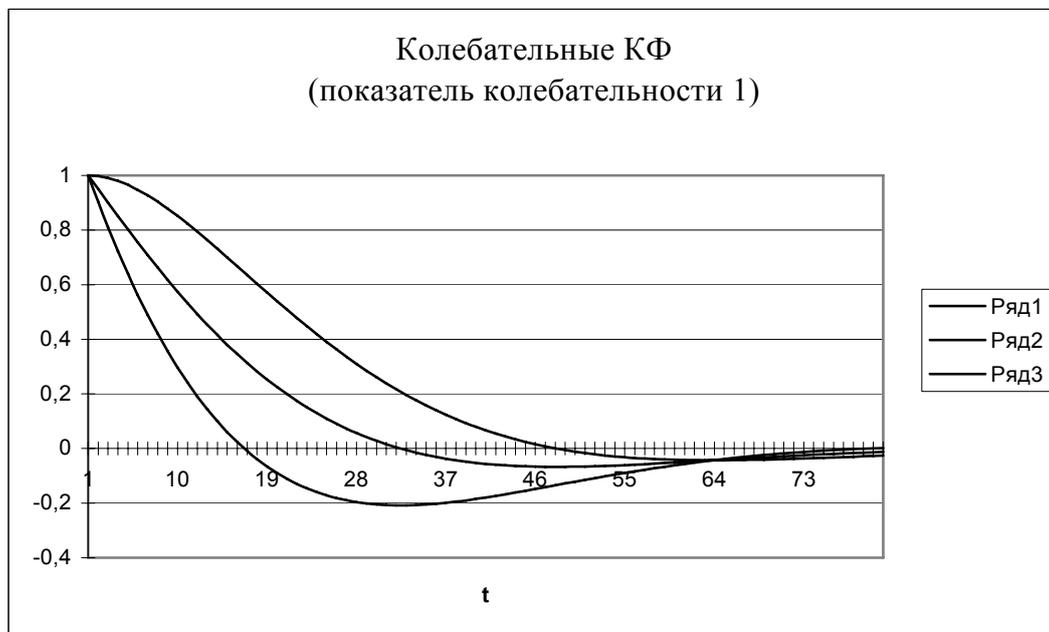


Рис. П.12.2

$$\rho_{7x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$



Рис. П.12.3

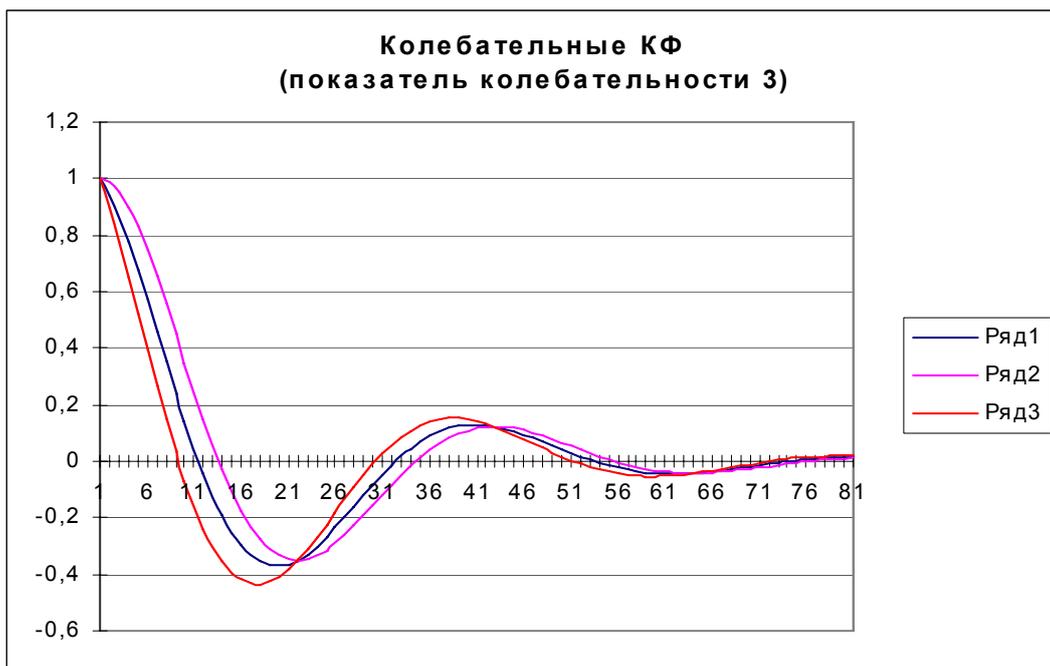
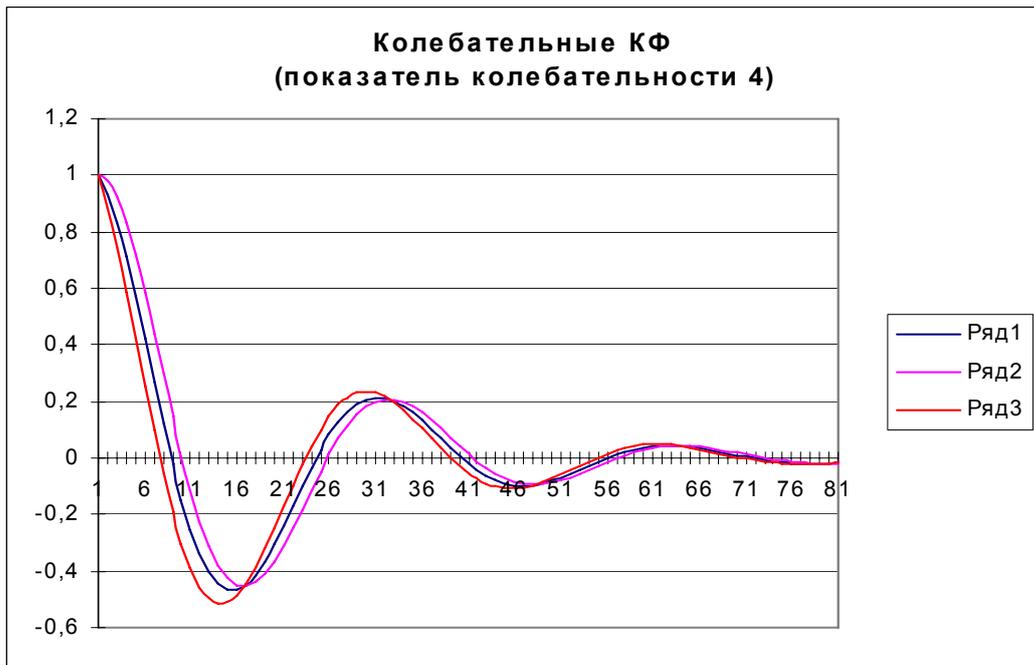


Рис. П.12.4



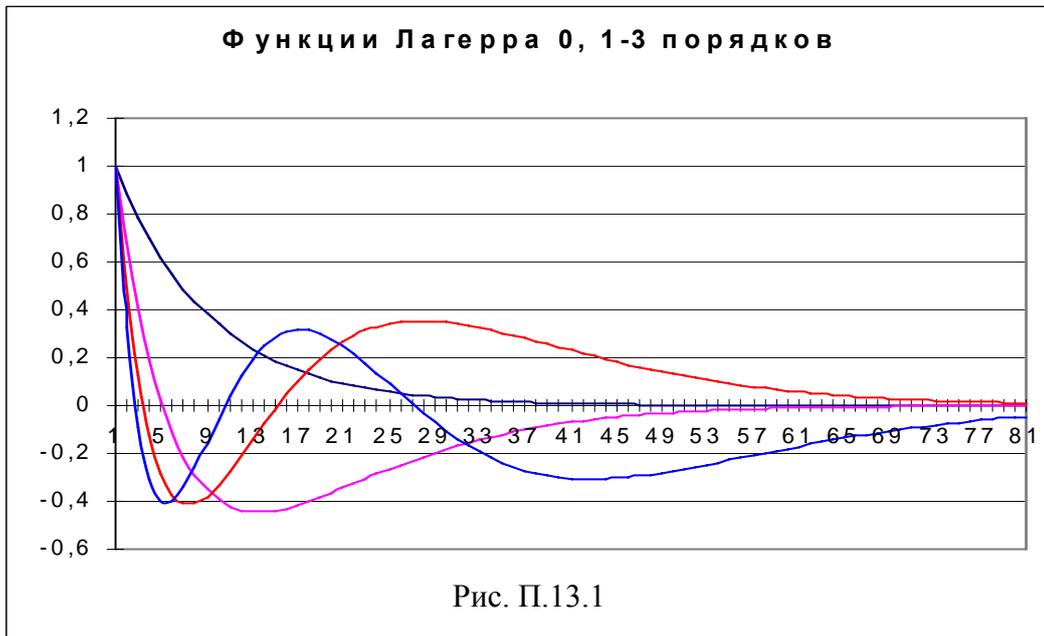
Ортогональные функции Лагерра

Ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2},$$

удовлетворяют следующему свойству: $\int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{при } k = n. \end{cases}$

Вид первых 6 ортогональных функций Лагерра приведен ниже.



Обобщенные спектральные характеристики

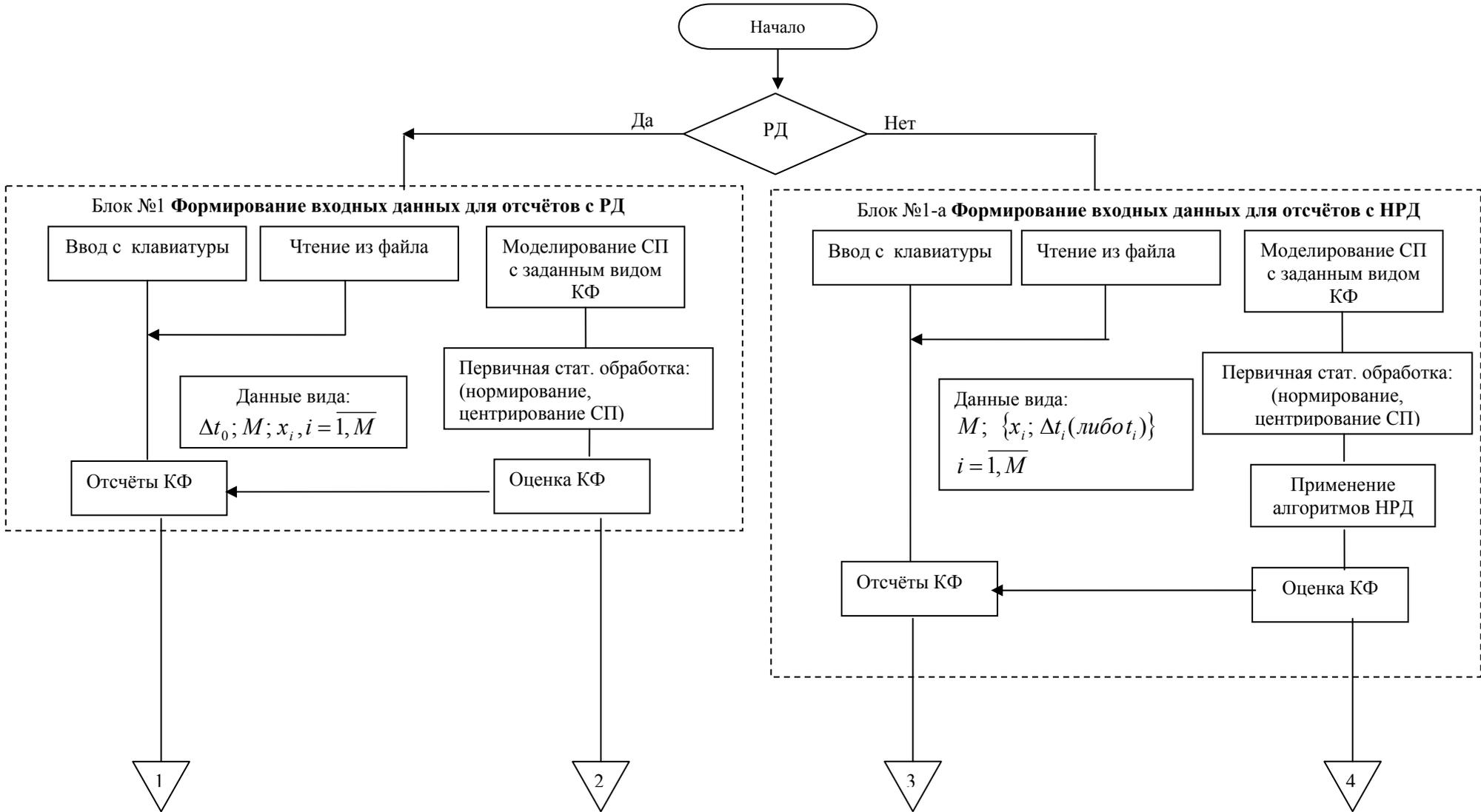
Таблица П.8.1

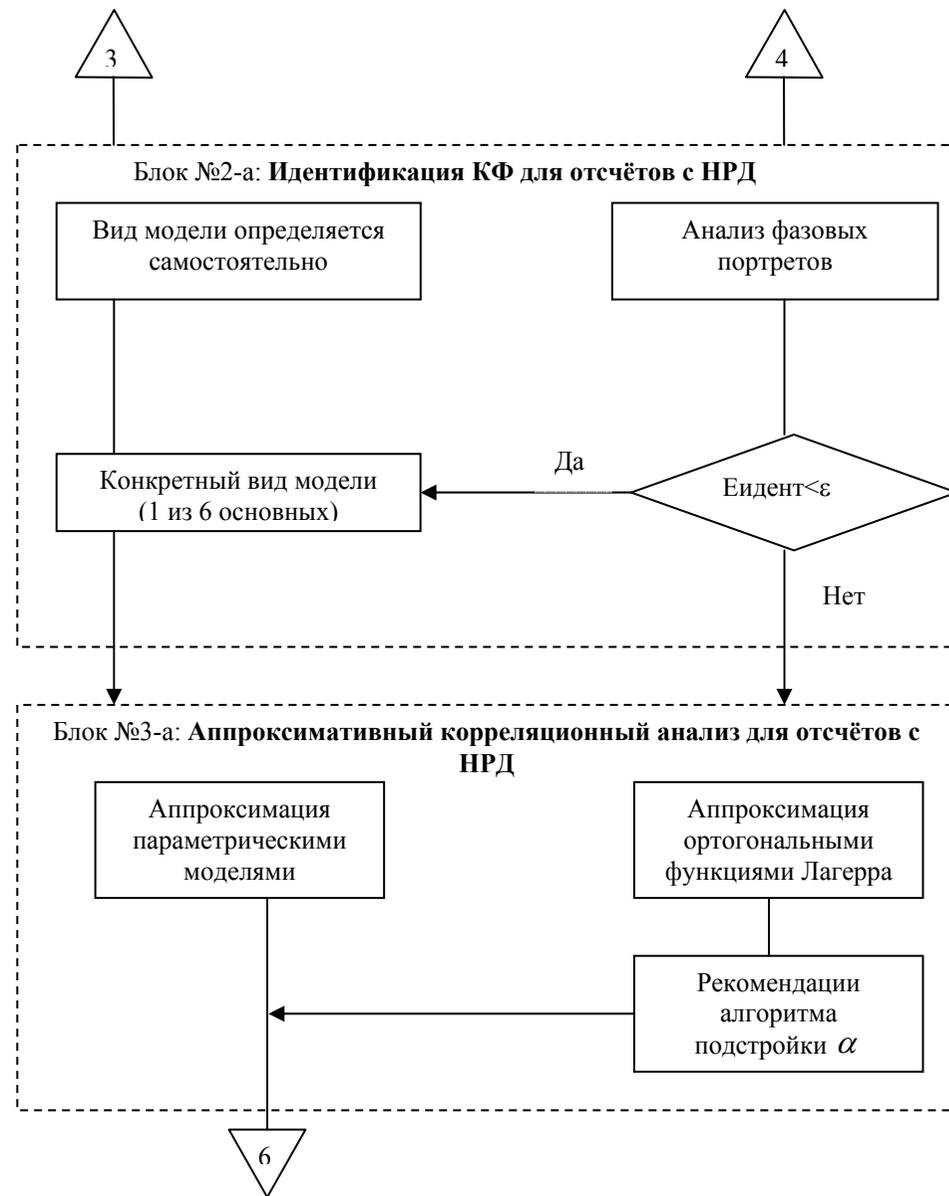
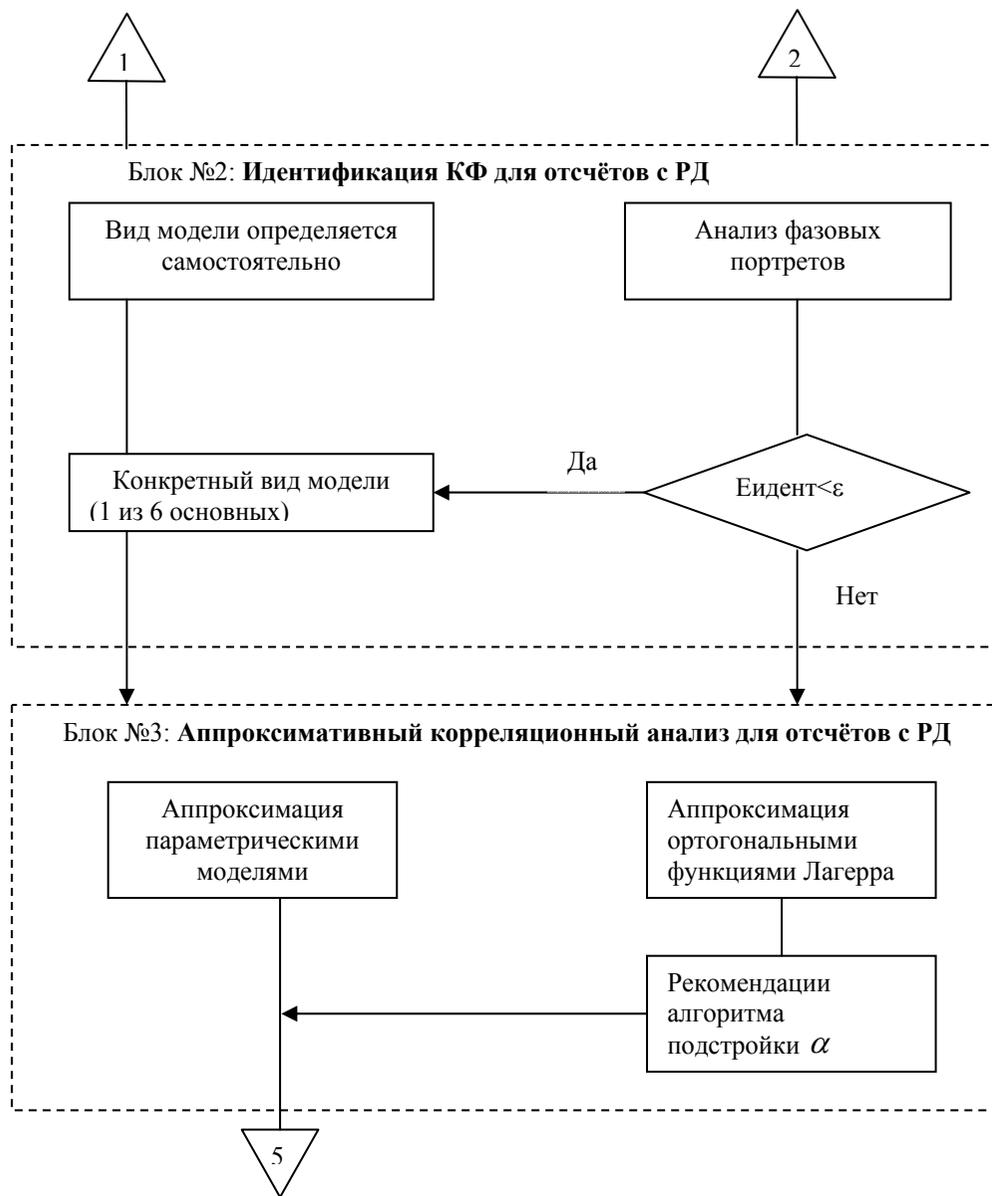
№	$K_x(\tau)$	ω_0	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - (\omega_0^2 + \alpha^2)}$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + (\omega_0 - \omega_0)^2 \right] \left[\alpha^2 + (\omega_0 + \omega_0)^2 \right]} \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \omega_0^2}{\left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[\alpha^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}$

Продолжение таблицы П.8.1

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0)^2]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0)^2]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

Блок- схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа





5

Блок №4: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с РД**



Блок №5: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с РД**



Блок №6: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с РД**

6

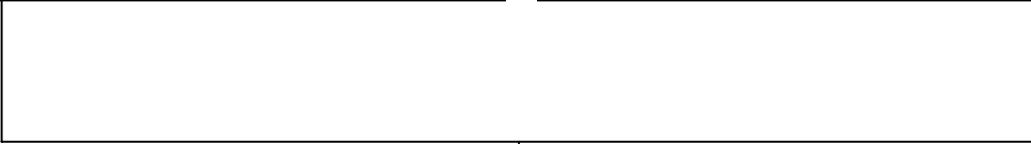
Блок №4-а: **Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с НРД**



Блок №5-а: **Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с НРД**



Блок №6-а: **Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с НРД**



Конец

Научное издание

Прохоров Сергей Антонович

Прикладной анализ неэквилибрированных временных рядов

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров

Подписано в печать 25.06.2001 г.
Формат 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 50. Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии ТОО «Экспо»
417000, г. Уральск, пр. Ленина, 244/1

Самарский научный центр Российской академии наук.
443001 Самара, Студенческий переулок, 3 А.