



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Затверджено на засіданні кафедри
загальної механіки і динаміки машин
як конспект лекцій з дисципліни
«Теорія пластин і оболонок».
Протокол № 1 від 07.09.2010 р.

Суми
«Видавництво СумДУ»
2010

Теорія пластин і оболонок: конспект лекцій / укладач
І.В. Павленко.– Суми: Видавництво СумДУ, 2010.– 67 с.

Кафедра загальної механіки і динаміки машин

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП	5
1 ТЕОРІЯ ПЛАСТИН У ПРИКЛАДНІЙ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	12
1.1 Основні визначення і гіпотези	12
1.2 Чистий вигин пластини	14
1.3 Диференціальні рівняння пружної серединної поверхні пластини	15
1.4 Види граничних умов	22
1.5 Визначення напружень і умови міцності	28
1.6 Потенціальна енергія вигину пластини	31
1.7 Границі застосування формул	34
1.8 Чисельні методи дослідження вигину пластин	35
1.9 Поєднання вигину з розтягуванням (стисканням) пластини, втрата стійкості	37

2	ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК	44
2.1	Види оболонок	44
2.2	Поняття про розрахунок оболонки	45
2.3	Безмоментна теорія напруженого стану оболонок	46
2.4	Розрахунок оболонки, навантаженої внутрішнім тиском	47
2.5	Визначення напружень і умови міцності	51
2.6	Диференціальні рівняння вигину симетрично навантаженої оболонки	52
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	65

ВСТУП

Відповідно до потреб сучасного машинобудування, розрахунки на міцність, жорсткість та стійкість стають більш актуальними, відіграючи найважливішу роль у процесі створення новітніх конструкцій. Розв'язання більшості задач при цьому є доступним лише кваліфікованим спеціалістам. Питання, пов'язані з проектними розрахунками елементів конструкцій, розглядаються в традиційних дисциплінах «Опір матеріалів», «Теорія пружності», «Стійкість де формівних систем» тощо. Вивчення дисципліни «Теорія пластин і оболонок» як логічного продовження попередніх має на меті вивчення з єдиних позицій основних методів розрахунків однойменних елементів машин, формування логічного і алгоритмічного мислення майбутнього фахівця з динаміки та міцності. При цьому слід приділяти належну увагу отриманню навичок побудови розрахункових схем і математичних моделей, застосуванню сучасних методів досліджень напруженого стану пластин і оболонок.

Слід зазначити невичерпний вклад вчених у сучасну теорію пластин і оболонок, яка відрізняється різноманітністю і складністю задач, що мають практичну

значущість. Велика кількість праць, присвячених теорії циліндричних оболонок із застосуванням спрощуючих гіпотез, належить С.П.Тимошенку, І.Г.Бубнову, Б.Г.Галеркіну. У роботах В.В.Соколовського і А.Л.Гольденвейзера викладена безмоментна теорія довільним чином навантажених оболонок обертання. Інженерний напрямок у дослідженнях пластин і оболонок належить В.З.Власову. Урахування моментів згину та перерізуючи сил в елементах поперечного перетину висвітлені в роботах С.Н.Кана. Вплив початкових прогинів на стійкість оболонок досліджено А.С.Вольміром, В.А.Агаміровим, В.Є.Мінєєвим. Над нелінійною теорією пластин і оболонок працювали Х.М.Муштарі, В.В.Новожилов. Велика кількість праць, присвячених теорії анізотропних оболонок, належить С.Г.Лехницькому, С.А.Абарцумяну, Е.І.Григолюку.

У процесі експлуатації споруджень і машин їх елементи схильні до дії різних за природою сил. Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості, стійкості.

Під *міцністю* розуміють здатність конструкції та її елементів витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

Під *жорсткістю* розуміється здатність конструкції та її елементів протистояти зовнішньому навантаженню по відношенню до деформації (зміни форми і розмірів): деформації не повинні перевищувати граничних значень.

Стійкістю називається здатність конструкції або її елементів зберігати початкову форму пружної рівноваги.

В огляді на велику різноманітність видів конструктивних елементів, що мають місце в спорудженнях і машинах, теорія пластин і оболонок оперує порівняно невеликою кількістю основних форм: оболонками і пластинами.

Оболонкою називається тіло, обмежене криволінійними поверхнями, розміщеними на невеликій відстані одна від одної (рисунок 1).

Поверхню, яка ділить навпіл товщину оболонки, називають *серединною поверхнею*. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні (рисунок 1а), конічні (рисунок 1б), сферичні (рисунок 1в) та інші. До оболонок відносяться стінки тонкостінних резервуарів,

куполи архітектурних споруд, обшивка фюзеляжу та інших частин літальних апаратів, корпуси підводних човнів тощо.

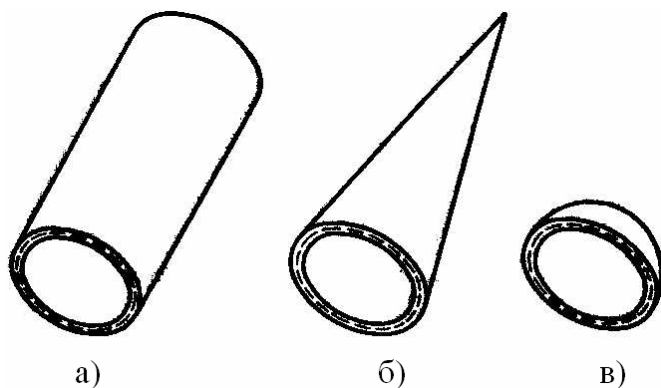


Рисунок 1 – Види оболонок

Якщо серединна поверхня є плоскою, то розрахунковий об'єкт називається *пластиною* (рисунок 2). За формою контуру серединної поверхні пластини бувають прямокутні (рисунок 2а), круглі (рисунок 2б) тощо.

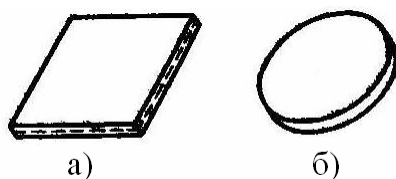


Рисунок 2 – Види пластин

До пластин можна віднести плоскі днища і кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд, диски турбомашин та інші елементи конструкцій.

Теорія пластин і оболонок, як і споріднені їй дисципліни «Опір матеріалів» і «Теорія пружності», розв'язує свої основні задачі, базуючись на теоретичних і експериментальних даних. Для побудови теорії пластин і оболонок беруть базові гіпотези, які стосуються структури та властивостей матеріалів, а також характер деформації.

Гіпотеза суцільного матеріалу передбачає нехтування атомістичною структурою дискретної будови речовини. Завдяки цій гіпотезі стає можливим використання диференціального та інтегрального числень у побудові та подальшому дослідженні математичних моделей.

Гіпотеза малих деформацій передбачає, що деформації елементів конструкції значно менші за розміри конструкції. Ця гіпотеза враховується лише в рамках лінійної теорії, дозволяючи складати рівняння рівноваги для недеформованого тіла.

Гіпотеза абсолютної пружності має місце лише в лінійній теорії пружності і передбачає відсутність

залишкових деформацій елементів конструкцій після зняття навантаження.

Гіпотеза лінійної залежності між деформаціями і навантаженнями дозволяє записати лінійні фізичні співвідношення у формі закону Гука.

Гіпотеза прямих нормалей передбачає, що перпендикуляр до серединної поверхні залишається після вигину пластини чи оболонки прямим і нормальним до zdeформованої серединної поверхні.

Гіпотеза відсутності поперечного тиску передбачає відсутність нормального тиску між слоями пластини чи оболонки, паралельними до серединної поверхні.

Останні дві гіпотези дозволяють знехтувати деякими елементами тензорів напружень і деформацій, значно зменшуючи порядок системи рівнянь, що описує математичну модель поставленої задачі.

Залежно від геометричних співвідношень розрізняють декілька видів пластин і оболонок.

Плита – пластина, відношення товщини якої до характерного розміру перевищує 0,2.

Мембрана – пластина, відношення товщини якої до характерного розміру не перевищує 0,025.

Жорстка пластина – пластина, відношення найбільшого прогину до товщини якої не перевищує 0,2.

Тонка оболонка – оболонка, відношення товщини до одного з радіусів кривини серединної поверхні якої не перевищує 0,05.

Залежно до вказаних геометричних співвідношень, а також характеру навантаження вибирається відповідна теорія розрахунку.

1 ТЕОРІЯ ПЛАСТИН

У ПРИКЛАДНІЙ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1.1 Основні визначення і гіпотези

Пластиною називається тіло призматичної або циліндричної форми, у якого один з розмірів значно менший за інші: $h \ll a$, $h \ll b$ (рисунок 3).

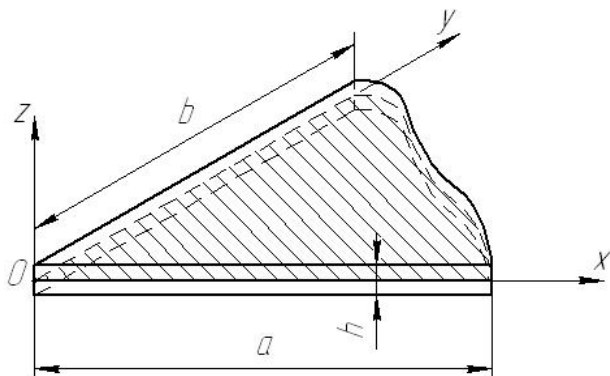


Рисунок 3 – Пластина

Товщина пластини може бути як постійною $h = const$, так і змінною $h = h(x, y)$.

Площина, рівновіддалена від верхньої та нижньої сторін пластини, називається *серединною площиною*. Після згину серединна площина перетворюється у серединну поверхню.

У теорії пластин застосовують як прямокутну Декартову (x, y, z) , так і циліндричну (r, φ, z) . При цьому перші дві з координатних осей належать недеформованій серединній площині; координатна вісь z спрямована перпендикулярно до серединної площини.

У теорії пластин поряд з гіпотезами прямих нормалей і відсутності поперечного тиску додатково використовують зведення довільної системи сил, які діють на поверхні пластини, до еквівалентної системи сил, які діють на серединну площину (рисунок 4).

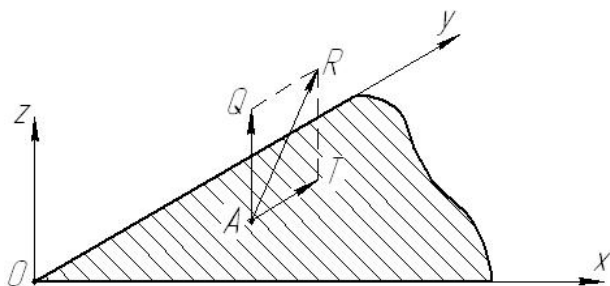


Рисунок 4 – Розкладання сил

У загальному випадку на пластину може діяти довільна просторова система сил R , яку доцільно розкласти на складові у двох характерних напрямках. Перша складова T є сукупністю сил, лінії дії яких

належать серединній площині, і називається *ланцюговими зусиллями*. Друга складова Q є сукупністю сил, лінії дії яких перпендикулярні до серединної площини, і називається *перерізуючим зусиллям*.

Ланцюгові зусилля призводять до розтягування (стискання), а перерізуючі – до згину серединної площини.

1.2 Чистий вигин пластини

Виділимо з пластини двома парами площин, перпендикулярних до осей x і y , одиничний елемент, висота якого дорівнює товщині пластини (рисунок 5а).

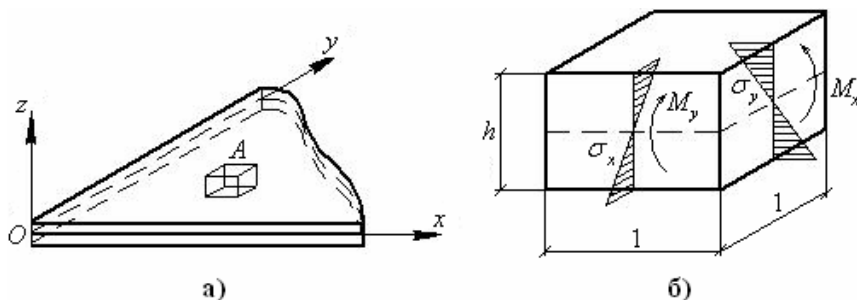


Рисунок 5 – Чистий вигин пластини

Якщо на бокові грані виділеного елемента діють лише нормальні напруження σ_x і σ_y , які зводяться до пар сил з моментами M_x і M_y відповідно (рисунок 5б), то

такий вид напруженого стану буде відповідати *чистому вигину*. В теорії чистого вигину бокові грані виділеного елемента залишаються плоскими, а серединна поверхня відіграє роль нейтрального (не напруженого) шару.

Задача про чистий вигин пластини є двовимірною і дозволяє у багатьох випадках отримати аналітичний розв'язок на відміну від тривимірних задач теорії пружності.

1.3 Диференціальне рівняння пружної серединної поверхні пластини

Розглянемо пластину постійної товщини h , на поверхня якої навантажена зовнішнім нормальним довільно розподіленим навантаженням $p(x, y)$ (рисунок 6). Об'ємними силами знехтуємо.

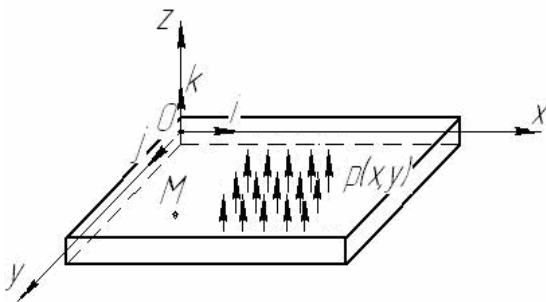


Рисунок 6 – Розрахункова схема

Вектор переміщення $\vec{s}$ будь-якої точки M пластини можна розкласти за трьома компонентами u, v, w :

$$\vec{s} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}, \quad (1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей x, y, z відповідно (рисунок 7).

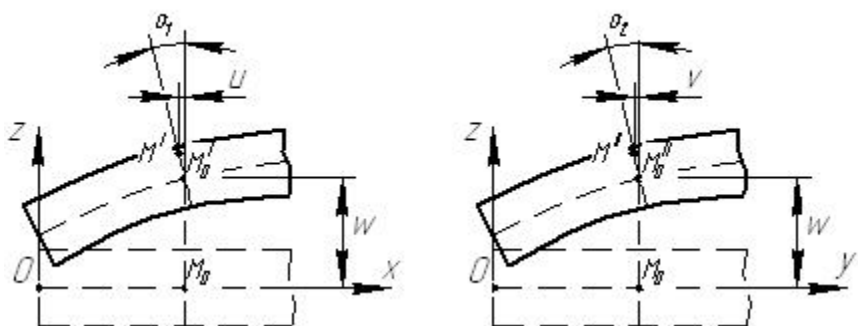


Рисунок 7 – Визначення компонент вектора переміщень

Вертикальна складова переміщення MM' точки M дорівнює вертикальному переміщенню $M_0M'_0 = w$ точки M_0 . Горизонтальні складові переміщення дорівнюють:

$$\begin{cases} u = -M'_0M' \sin \alpha_1; \\ v = -M''_0M'' \sin \alpha_2, \end{cases} \quad (2)$$

де кути α_1 і α_2 визначаються із співвідношень:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

Враховуючи малість переміщень, запишемо формули (2) у вигляді

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (4)$$

З урахуванням останніх залежностей визначимо компоненти тензора деформації:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (5)$$

Отримані залежності є геометричними рівняннями задачі про вигин пластини.

Складемо фізичні рівняння у вигляді закону Гука, який у зворотній формі для плоскої задачі теорії пружності має такий вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \end{cases} \quad (6)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; E і G – модулі пружності першого і другого родів, пов’язані між собою співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7)$$

Підстановка рівнянь (5) в формули (6) дає змогу визначити компоненти тензора напружень через компоненти вектора переміщення:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (8)$$

Як видно з отриманих залежностей, закони зміни нормальних σ_x, σ_y і тангенціального τ_{xy} напружень є лінійними по товщині пластини (рисунок 8).

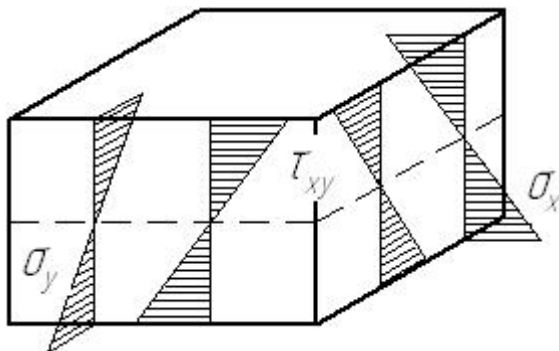


Рисунок 8 – Епюри напружень

Запишемо диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Останнє рівняння записане для загальної задачі теорії пружності за відсутності об'ємних сил. Компоненти тензора напружень $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ мають бути враховані для подальшого задоволення граничних умов задачі (для верхньої і нижньої поверхонь пластини).

Підставляючи залежності (8) в перші дві формули (9), після нескладних перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \end{cases} \quad (10)$$

Інтегруємо останні рівняння:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + f_1(x, y); \\ \tau_{yz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) + f_2(x, y). \end{cases} \quad (11)$$

Для визначення невідомих функцій f_1, f_2 застосуємо граничні умови задачі. Для верхньої і нижньої поверхонь пластини ($z = \pm h/2$) відсутні ланцюгові зусилля ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$). Таким чином:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \\ f_2(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \end{cases} \quad (12)$$

Попереднє рівняння отримає вигляд:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{3}{2} \frac{D}{h^3} (h^2 - 4z^2) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \\ \tau_{yz} = -\frac{3}{2} \frac{D}{h^3} (h^2 - 4z^2) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w), \end{cases} \quad (13)$$

де D – циліндрична жорсткість, яка визначається за формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (14)$$

Таким чином, закони зміни дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz} по товщині пластини є параболічними.

Застосуємо третє рівняння рівноваги (9), яке з урахуванням виразів (13) перетворюється у диференціальне співвідношення:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{D}{h^3} (h^2 - 4z^2) \cdot \nabla^2 \nabla^2 w. \quad (15)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\sigma_z = \frac{3}{2} \frac{Dz}{h^3} \left(h^2 - \frac{4}{3} z^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 w + f_3(x, y). \quad (16)$$

Невідому функцію f_3 отримаємо з наступних граничних умов на верхній ($z = h/2$) і нижній ($z = -h/2$) поверхнях пластини:

$$\begin{cases} \sigma_z(x, y, h/2) = \frac{1}{2} D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + f_3(x, y) = p(x, y); \\ \sigma_z(x, y, -h/2) = -\frac{1}{2} D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + f_3(x, y) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Склавши два останні рівняння, отримаємо

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2} p(x, y). \quad (18)$$

Віднімаючи друге рівняння (17) від першого, матимемо диференціальну залежність між функцією прогину $w(x, y)$ і зовнішнім розподіленням навантаженням $p(x, y)$:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}. \quad (19)$$

Отримане бігармонічне диференціальне рівняння – *основне рівняння* теорії вигину пластин за відсутності ланцюгових і об’ємних сил – має назву *рівняння Софі Жермен*.

1.4 Види граничних умов

Задача інтегрування рівняння Софі Жермен (19) не може бути розв’язана однозначно без задоволення граничним умовам на опорному контурі. З’ясуємо, як складаються граничні умови на контурі прямокутної пластини (рисунок 9).

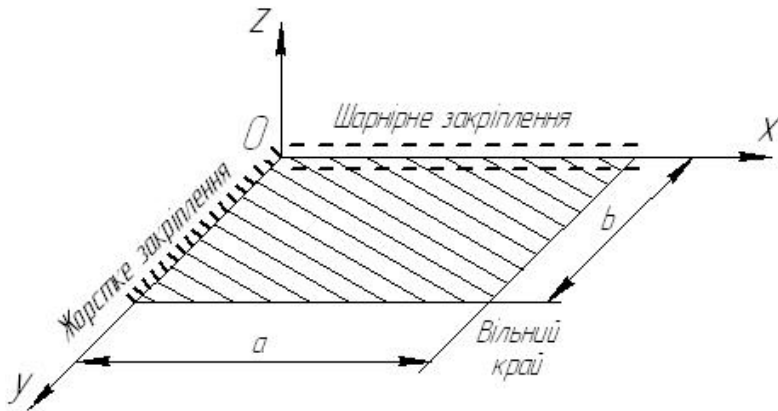


Рисунок 9 – Основні види закріплень

Для жорстко закріпленої частини контуру ($x = 0$) прогин w та кут нахилу $\partial w / \partial x$ повинні дорівнювати нулю:

$$\begin{cases} w = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Для шарнірно закріпленого контуру ($y = 0$) слід вимагати, щоб прогин w , нормальні напруження σ_y і дотичні напруження τ_{yx} дорівнювали нулю. На підставі рівнянь (8) отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0; \\ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

На вільному краї $x = a$ повинні дорівнювати нулю напруження $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, тобто з урахуванням формул (8) і (13) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \\ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

На вільному краї $y = b$ повинні дорівнювати нулю напруження $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \\ \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) = 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

Слід зауважити, що у випадках, коли достатньо складно підібрати рівняння $w = w(x, y)$, яке б задовольняло усім граничним умовам (20) – (23), можна дещо «пом'якшити» граничні умови. Так, наприклад, можна з достатньою для практики точністю відмовитися від умови $\tau_{xy} = 0$, оскільки у середньому (в інтегральному сенсі) по товщині пластини дотичні напруження дорівнюють нулю:

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = 0. \quad (24)$$

Взагалі задовольнити граничним умовам в інтегральній формі легше, ніж для кожної точки контуру, то є сенс попередньо ввести інтегральні по товщині пластини силові фактори.

Перерізувачі зусилля характеризують інтенсивність поперечних сил (рисунок 10а) і обчислюється за формулою:

$$\begin{cases} Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \end{cases} \quad (25)$$

Моменти згину є результатом дії нормальних напружень (рисунок 10б):

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz; \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz. \end{cases} \quad (26)$$

Скручувальні моменти (рисунок 10в) визначаються за такою формулою:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz; \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{yx} dz. \quad (27)$$

Враховуючи формули (8) і (13), можна отримати наступні залежності для інтегральних силових факторів (25) – (27):

$$\begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w); \\ M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_{xy} = M_{yx} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (28)$$

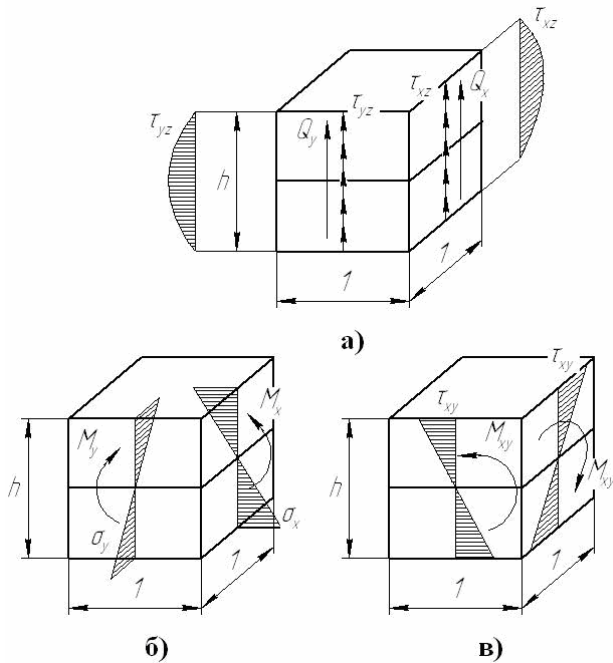


Рисунок 10 – Інтегральні внутрішні силові фактори

Застосовуючи принцип Сен-Венана, умовно можна об'єднати дотичні напруження на контурі пластини (τ_{xz} або τ_{yz}) з дотичними напруженнями від скручування τ_{xy} . Тоді отримаємо так звані *зведені перерізуючі зусилля*:

$$\begin{cases} V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \\ V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[(2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \end{cases} \quad (29)$$

Таким чином, оперуючи поняттям зведеного поперечного зусилля, на контурі пластини замість трьох граничних умов типу (22) можна задовольняти лише двом наступним:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0. \end{cases} \quad (30)$$

1.5 Визначення напружень і умови міцності

Враховуючи рівняння (8) і (28), запишемо зв'язок між нормальними напруженнями σ_x, σ_y і моментами згину M_x, M_y , а також зв'язок між дотичним напруженням τ_{xy} і скручувальним моментом M_{xy} :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \\ \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \\ \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{h^3}. \end{cases} \quad (31)$$

За допомогою формул (13) і (28) зв'язок між дотичними напруженнями τ_{xz}, τ_{yz} і перерізуючими зусиллями Q_x, Q_y має вигляд:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{h^2 - 4z^2}{h^3} Q_x; \\ \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{h^2 - 4z^2}{h^3} Q_y. \end{cases} \quad (32)$$

Максимальні нормальні напруження, які мають місце на поверхні пластини ($z = \pm h/2$), а також максимальні дотичні напруження у серединній поверхні ($z = 0$) визначаються за такими формулами:

$$\begin{cases} \sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2}; \\ \tau_{xz}^{\max} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \tau_{yz}^{\max} = \frac{3Q_y}{2h}. \end{cases} \quad (33)$$

Енергетична теорія Губера-Мізеса-Генки у загальному випадку тривимірного напруженого стану конструкції встановлює наступну умову міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma], \quad (34)$$

де $[\sigma]$ – граничне значення напруження; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження, які визначаються як корені кубічного рівняння:

$$\sigma^3 - \sigma_I \sigma^2 + \sigma_{II} \sigma - \sigma_{III} = 0. \quad (35)$$

Напруження $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ у останньому рівнянні є так званими інваріантами тензору напружень, пов'язані з елементами останнього наступними залежностями:

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \sigma_{II} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ \sigma_{III} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases} \quad (36)$$

У теорії пластин можна знехтувати нормальним напруженням σ_z і тангенціальним напруженням τ_{xy} . При цьому інваріанти тензору напружень визначатимуться за спрощеними формулами:

$$\begin{cases} \sigma_I = \sigma_x + \sigma_y; \\ \sigma_{II} = \sigma_x \sigma_y + \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2; \\ \sigma_{III} = -\sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2. \end{cases} \quad (37)$$

В окремому випадку, для точок серединної поверхні пластини ($z = 0$) матимемо:

$$\begin{cases} \sigma_I = 0; \\ \sigma_{II} = \frac{9}{4h^2} (Q_x^2 + Q_y^2); \\ \sigma_{III} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Таким чином, рівняння (35) перетворюється в спрощене рівняння:

$$\sigma^3 + \frac{9}{4h^2}(Q_x^2 + Q_y^2)\sigma = 0, \quad (39)$$

корені якого дорівнюють:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{3}{2h}\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}; \\ \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 = -\frac{3}{2h}\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}. \end{cases} \quad (40)$$

Таким чином, умова міцності (34) матиме вигляд:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2h}\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \leq [\sigma] \quad (41)$$

Аналогічним чином можна отримати умови міцності для точок пластини, які належать її поверхні ($z = \pm h/2$):

$$\frac{6}{h^2}\sqrt{\frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2)} \leq [\sigma] \quad (42)$$

1.6 Потенціальна енергія вигину пластини

При розв'язанні задач теорії пружності застосовують як методи аналітичного інтегрування диференціальних рівнянь, так і різноманітні види чисельних методів. Одним із поширених сучасних засобів розв'язання складних задач прикладної теорії пружності, зокрема при дослідженні напружено-деформованого стану

пластин, є застосування варіаційних методів. Перше місце серед варіаційних методів займає *принцип мінімуму потенціальної енергії*, згідно з яким пружне тіло знаходиться у стані рівноваги за умови, якщо воно має мінімальне значення повної потенціальної енергії E . Враховуючи, що повна потенціальна енергія консервативної системи складається з внутрішньої енергії деформації U і потенціалу зовнішніх сил $\Pi = -A$ (де A – робота зовнішніх сил на переміщеннях точок системи), можна записати умову рівноваги дружньої системи у наступному вигляді:

$$\delta(U - A) = 0. \quad (43)$$

Внутрішня енергія деформації тривимірного тіла визначається за формулою:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_{(\Omega)} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz = \\ &= \iiint_{(\Omega)} G \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (44)$$

де потрібний інтеграл береться по об'єму тіла Ω .

Визначимо енергію U для пластини постійної товщини. У даному випадку відповідно до узагальненого

закону Гука, а також з урахуванням гіпотези відсутності поперечного тиску ($\sigma_z = 0$) маємо:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (45)$$

Підставивши формули (6), отримаємо:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (46)$$

Враховуючи гіпотезу прямих нормалей ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), знайдемо вираз для внутрішньої енергії деформації пластини:

$$U = G \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{(\Sigma)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy, \quad (47)$$

де Σ – площа поверхні пластини.

Після підстановки залежностей (5) у результаті нескладних перетворень маємо:

$$U = \frac{1}{2} D \iint_{(\Sigma)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (48)$$

У разі навантаження пластини нормальним тиском інтенсивністю $p(x, y)$ робота A визначається за наступною формулою:

$$A = \iint_{(\Sigma)} p w dx dy. \quad (49)$$

Таким чином, варіаційна задача теорії пластин зводиться до відшукування функції прогину $w(x, y)$, яка надає мінімуму повній потенціальній енергії пластини:

$$E = \iint_{(\Sigma)} \left\{ \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - p w \right\} dx dy. \quad (50)$$

1.7 Границі застосування формул

Теорія пластин, побудована на ряді припущень, прийнятих без доказів, протягом багатьох років проходила перевірку досвідом, шляхом проведення експериментальних досліджень. З'ясовано, що формули, отримані для прогину пластин, дають задовільні результати у випадку їх достатньої жорсткості, коли відношення максимального прогину до товщини пластини не перевищує 0,2. При великих викривленнях спостерігаються значні відхилення від лінійної залежності між навантаженнями і відповідними прогинами. Прогини при цьому зростають швидше, ніж навантаження, і

пластина стає більш жорсткою, ніж враховується в аналітичних залежностях.

Слід зауважити обставину, яка повинна братися до уваги при узгодженні експериментальних даних з результатами теоретичних розрахунків. Теорія пластин у звичному розумінні не враховує зближення сторін контуру пластини. В дійсності ж жорстке закріплення контуру призводить до появи розтягуючих зусиль в серединній поверхні. Однак для малих прогинів вплив цих зусиль незначний.

1.8 Чисельні методи дослідження вигину пластин

У випадках, коли бажано уникнути складних аналітичних перетворень як наслідок інтегрування бігармонічного рівняння Софі Жермен, застосовують наближені методи. При цьому розв'язок неухильно виходить менш точним, але з несуттєвими похибками. Найбільш поширеними методами наближеного розрахунку є методи Рітца і Бубнова-Галеркіна.

Розв'язання задачі вигину пластини *методом Рітца* полягає в знаходженні функції прогину у вигляді ряду:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x, y), \quad (51)$$

де f_i – сімейство n лінійно незалежних функцій, які задовольняють граничним умовам задачі; a_i – коефіцієнти ряду, які надають стаціонарного значення повній потенціальній енергії вигину пластини (50).

Метод Бубнова-Галеркіна стосовно до розрахунку пластин постає як наближений спосіб розв’язання диференціального рівняння пружної поверхні пластини (19). Цей метод заснований на знаходженні функції прогину як такої, що надає стаціонарного значення наступному функціоналу:

$$R = \iint_{(\Sigma)} \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{p}{D} \right) w dx dy. \quad (52)$$

Поряд із вищезазначеними методами інколи застосовується і *метод найменших квадратів*, суть якого полягає в знаходженні функції прогину як такої, що надає функціоналу сумарної квадратичної похибки

$$R = \iint_{(\Sigma)} \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{p}{D} \right)^2 dx dy \quad (53)$$

найменшого значення.

Справне володіння навичками застосування чисельних методів сприяє зменшенню в розрахунках відносної похибки і контролю за нею.

1.9 Поєднання вигину з розтягуванням (стисканням) пластини, втрата стійкості

Розглянемо прямокутну пластину з постійною товщиною h і розмірами в плані $a \times b$, навантажену як нормальним тиском $p(x, y)$, так і ланцюговими зусиллями на контурі $P_{x1}(y)$, $P_{x2}(y)$, $P_{y1}(x)$, $P_{y2}(x)$, $T_{x1}(x)$, $T_{x2}(x)$, $T_{y1}(y)$, $T_{y2}(y)$, як вказано на рисунку 11.

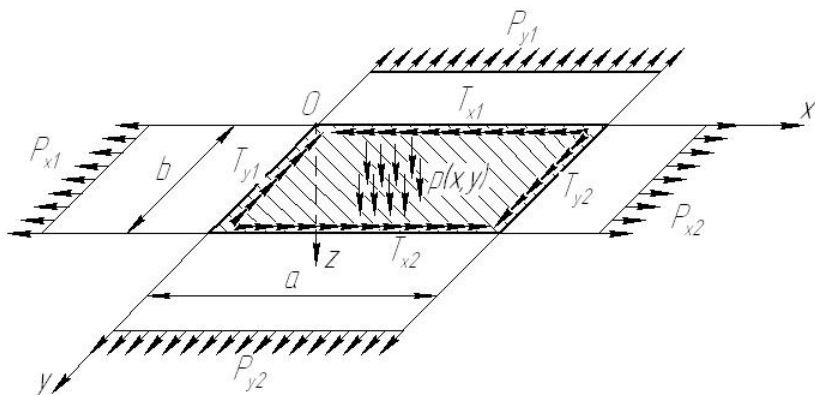


Рисунок 11 – Розрахункова схема

Виділимо нескінченно малий елемент серединної поверхні і складемо рівняння його рівноваги. Для цього попередньо введемо внутрішні погонні силові фактори: моменти згину M_x, M_y і крутні моменти M_{xy} а також

перерізуючі зусилля Q_x, Q_y (рисунок 12а), які визначаються залежностями (28); нормальні і тангенціальні ланцюгові зусилля N_x, N_y, S_{xy}, S_{yx} (рисунок 12б), які підлягають визначенню.

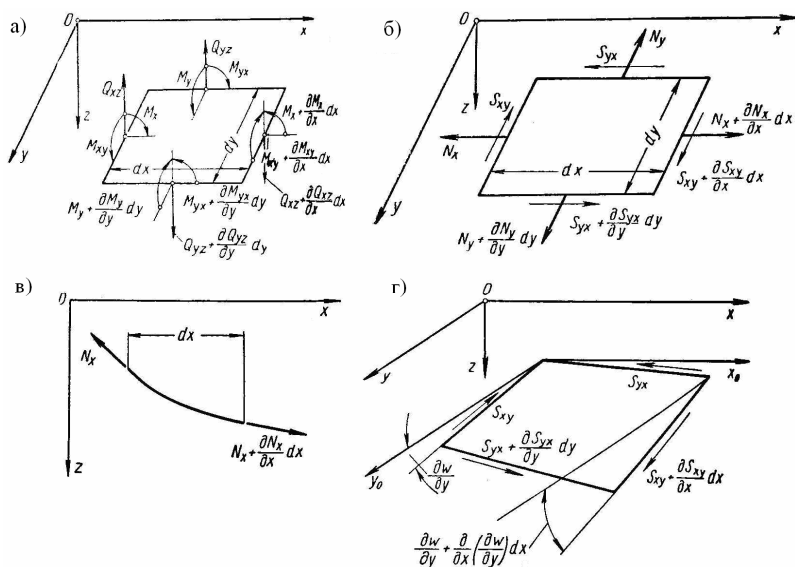


Рисунок 12 – Внутрішні силові фактори

Складемо суму проекцій усіх сил, прикладених до елемента пластини $dx dy$, на осі x і y (рисунок 12б):

$$\begin{cases} \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - N_x dy + \left(S_{yx} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - S_{yx} dx = 0; \\ \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx - N_y dx + \left(S_{xy} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - S_{xy} dy = 0, \end{cases} \quad (54)$$

або після спрощення:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Складемо суму проекцій усіх сил, прикладених до елемента пластини $dx dy$, на вісь z з урахуванням кутів прогину (рисунок 12а-г):

$$\begin{aligned} & p + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right] - N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & + \left(S_{xy} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right] - S_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & + \left(S_{yx} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right] - S_{yx} dx \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Останнє рівняння зводиться до вигляду:

$$p + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (S_{xy} + S_{yx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (57)$$

Складемо суму моментів усіх сил, прикладених до елемента пластини $dx dy$, відносно осі z :

$$S_{xy} dy dx - S_{yx} dx dy = 0, \quad (58)$$

звідки знаходимо:

$$S_{yx} = S_{xy}. \quad (59)$$

Враховуючи формули (55) і (59), перепишемо рівняння (57) у вигляді:

$$p + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (60)$$

Якщо врахувати раніше встановлені залежності для перерізуючих зусиль (28), остаточно матимемо рівняння (60) у такій формі:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (61)$$

Отримане диференціальне рівняння четвертого порядку називається *основним рівнянням викривленої серединної поверхні пластини*, в якому враховані як поперечні, так і ланцюгові навантаження.

Наявність ланцюгових розтягуючих зусиль призводить до підвищення жорсткості пластини, в той час як стискаючі ланцюгові зусилля можуть призвести до втрати стійкості конструкції. Розглянемо, наприклад, задачу про втрату стійкості прямокутної пластини, навантаженої системою сил, наведеною на рисунку 13а. Для даного випадку навантаження внутрішні силові фактори будуть

$$\begin{cases} N_x = -P; \\ N_y = 0; \\ S_{xy} = 0, \end{cases} \quad (62)$$

однаковими для усіх точок пластини.

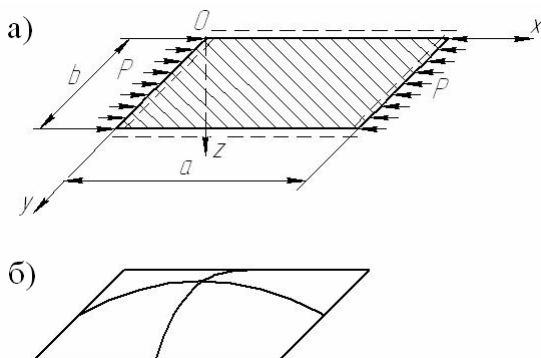


Рисунок 13 – Втрата стійкості пластини

Основне диференціальне рівняння прогину пластини набирає вигляд:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (63)$$

Граничні умови задачі такі:

$$\begin{cases} w(0, y) = w(a, y) = 0; \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0; \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0; \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0. \end{cases} \quad (64)$$

Не важко переконатися, що окремим розв'язком диференціального рівняння (63) за граничних умов (64) є

$$w(x, y) = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (65)$$

де m, n – довільні цілі числа; C – невідомий коефіцієнт.

У результаті підстановки функції прогину в рівняння (63) отримаємо:

$$C \left\{ \pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] - \pi^2 P \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0, \quad (66)$$

звідки знаходимо критичне значення інтенсивності ланцюгового стискаючого навантаження:

$$P_{кр} = \pi^2 D \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2}. \quad (67)$$

Суміжна форма рівноваги, зокрема для значень $m = n = 1$ наведена на рисунку 13б.

2 ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК

2.1 Види оболонок

Оболонками називають конструкції, які складаються з елементів, обмежених криволінійними поверхнями, розміщеними на невеликій відстані одна від одної (рисунок 14).

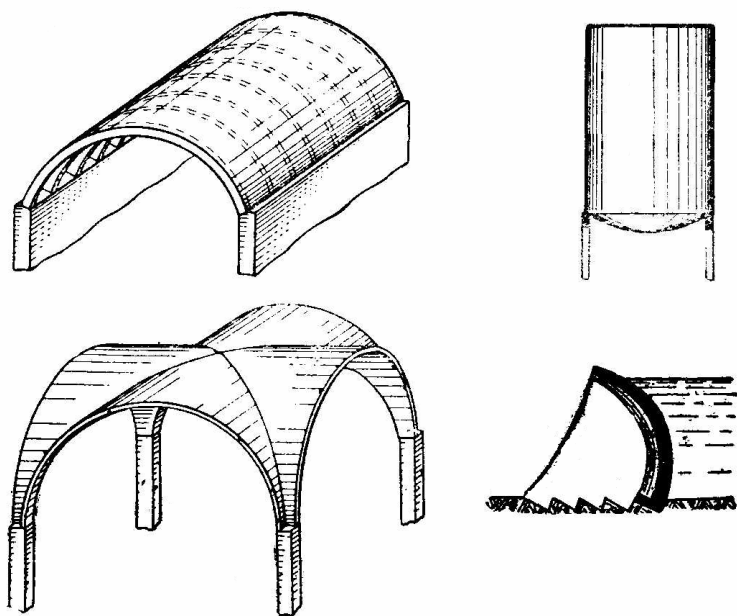


Рисунок 14 – Види оболонок

Оболонки мають один з розмірів (товщину), значно менший порівняно з іншими, та являють собою викривлені пластини.

Оболонка вважається тонкою, якщо її товщина значно менша (у 20 і більше разів) за інші розміри. Товщина оболонки може бути постійною та змінною. Характер навантажень, прикладених до оболонки, може бути яким завгодно. Залежно від форми серединної поверхні розрізняють такі види оболонок: з відкритим або закритим контуром; куполи (головні радіуси кривини одного знаку); сферичні оболонки (головні радіуси кривини однакові); гіперсферичні (головні радіуси кривини різних знаків); циліндричні (один з головних радіусів кривини дорівнює нескінченості) тощо.

2.2 Поняття про розрахунок оболонки

У зв'язку з великою різноманітністю оболонок достатньо важко визначити єдиний спосіб їх розрахунку: кожний вид оболонок потребує окремого підходу.

Залежно від форми серединної поверхні, характеру і навантаження і закону його розподілення, способу закріплення застосовують або спрощену безмоментну

теорію, або більш точну – моментну теорію оболонок. При цьому у перелік гіпотез входять усі гіпотези теорії пластин.

Можна зазначити, що застосування сучасних методів дослідження напружено-деформованого стану (варіаційні методи, реалізовані на ЕОМ) дозволяє розглядати теорію оболонок з позицій узагальненої тривимірної задачі теорії пружності. Такий підхід не потребує введення додаткових гіпотез (прямих нормалей, відсутності поперечного тиску тощо), але натомість пов'язаний з великим об'ємом інформації, що потребує опрацювання.

2.3 Безмоментна теорія напруженого стану оболонок

Безмоментна теорія оболонок базується на припущенні, що оболонка не опирається згину, і в кожній точці прямої нормалі до серединної поверхні мають місце лише напруження, спрямовані по дотичній до серединної поверхні й рівномірно розподілені вздовж товщини оболонки (рисунок 15). Такі напруження називаються *мембранними*.

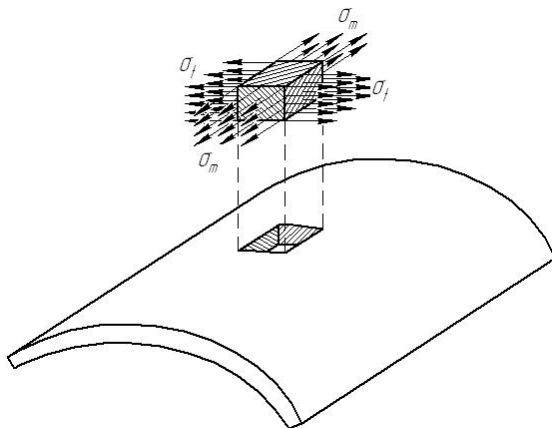


Рисунок 15 – Мембранні напруження

Границі застосування безмоментної теорії обмежені плавністю форми оболонки: у місцях стику частин оболонки різної кривизни або поблизу зони дії зосереджених сил теорія дає незадовільні результати, і необхідним є застосування моментної теорії.

2.4 Розрахунок оболонки, навантаженої внутрішнім тиском

Розглянемо резервуар, який являє собою оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання з довільною утворюючою (рисунок 16а). Товщина оболонки h є малою порівняно з радіусами кривизни. Вільний край резервуару закріплений таким чином, що на нього діють

лише зусилля, дотичні до утворюючої. Сукупність твірних ліній у теорії оболонок називається *меридіональними кривими*. На стінки резервуару діє рівномірно розподілене навантаження – внутрішній нормальний тиск p .

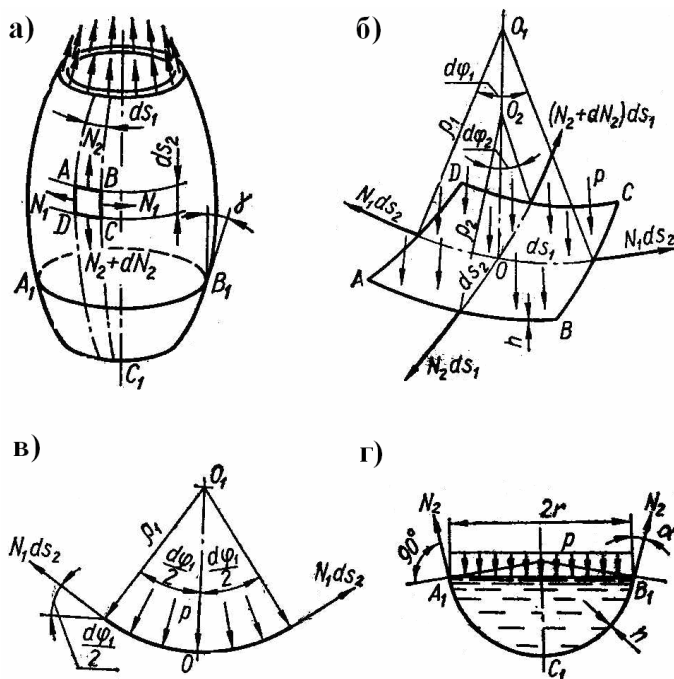


Рисунок 16 – Розрахункові схеми

Виділимо нескінченно малий елемент оболонки $ABCD$ (рисунок 16а,б). Довжини граней елемента позначимо ds_1 і ds_2 .

Відповідно до безмоментної теорії на грані елемента будуть діяти лише нормальні погонні зусилля N_1 і N_2 , які визначаються за формулами:

$$\begin{cases} N_1 = \sigma_t h; \\ N_2 = \sigma_m h, \end{cases} \quad (68)$$

де σ_t, σ_m – мембранні напруження (колові та меридіональні відповідно).

Зв'язок між довжинами сторін елемента оболонки і головними радіусами кривизни ρ_1, ρ_2 такий:

$$\begin{cases} ds_1 = \rho_1 d\varphi_1; \\ ds_2 = \rho_2 d\varphi_2, \end{cases} \quad (69)$$

де $d\varphi_1, d\varphi_2$ – центральні кути (рисунок 16б).

Запишемо одну з умов силової рівноваги елемента $ABCD$ в проекції на нормальний до елемента напрямок (рисунок 16 б,в):

$$\begin{aligned} N_1 ds_2 \frac{d\varphi_1}{2} + (N_1 + dN_1) ds_2 \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 ds_1 \frac{d\varphi_2}{2} + \\ + (N_2 + dN_2) ds_1 \frac{d\varphi_2}{2} - p ds_1 ds_2 = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Нехтуючи доданками вищих порядків малості, а також, враховуючи формули (68) і (69), отримаємо:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_1} + \frac{\sigma_m}{\rho_2} = \frac{p}{h}. \quad (71)$$

Отримана формула називається *формулою Лапласа*.

Так, у випадку сферичного резервуара радіусом R ($\rho_1 = \rho_2 = R$ і $\sigma_t = \sigma_m$) отримаємо:

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (72)$$

У випадку циліндричного резервуару радіусом R ($\rho_1 = R$ і $\rho_2 = \infty$) формула Лапласа без урахування власної ваги і ваги середовища дає змогу визначити лише колове напруження:

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (73)$$

Для визначення обох мембранних напружень в оболонці довільної форми одного рівняння Лапласа замало. Доповнимо його умовою рівноваги нижньої частини (рисунок 16 г) в проекції на вертикальну вісь обертання:

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p \cdot \pi r^2 - Q = 0, \quad (74)$$

де r – середній радіус верхнього перетину оболонки;
 α – кут нахилу дотичної до профілю оболонки; Q – вага нижньої частини оболонки, включаючи вагу внутрішнього середовища.

З урахуванням другої формули (68), маємо:

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q}{2\pi rh \cos \alpha}. \quad (75)$$

Отримане рівняння називається *рівнянням зони*.

Таким чином, система двох рівнянь (71) і (75) дозволяє однозначно визначити мембранні напруження.

Так, наприклад, для циліндричної оболонки радіусом R і незначною вагою ($r = R$ і $\alpha = 0$) отримаємо:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h} = \frac{1}{2} \sigma_t. \quad (76)$$

2.5 Визначення напружень і умови міцності

У випадку застосування безмоментної теорії у кожній точці оболонки тензор напружень має вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (77)$$

де знехтуване третє нормальне (визначене тиском p), а також тангенціальні напруження.

Таким чином, можна вважати, що оболонка знаходиться у плоскому напруженому стані, а для розрахунку його на міцність за енергетичною теорією умова міцності матиме вигляд:

$$\sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \sigma_m} \leq [\sigma], \quad (78)$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження.

2.6 Диференціальні рівняння вигину симетрично навантаженої оболонки

У циліндричній оболонці товщиною h (рисунок 17) положення будь-якої точки на серединній поверхні визначається двома координатами: відстанню від початку координат x і центральним кутом θ . Головні радіуси кривизни ρ_1 і ρ_2 дорівнюють відповідно R і ∞ .

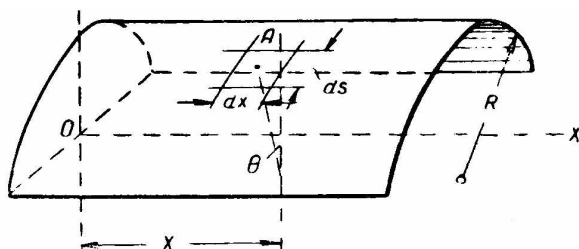


Рисунок 17 – Циліндрична оболонка

Виділимо з оболонки елементарний об'єм $h \times ds \times dx$, до якого в загальному випадку діють такі погонні (віднесені до одиниці ширини елемента) зусилля (рисунок 18): поздовжнє зусилля N , яке діє вздовж

прямолінійної утворюючої; колове зусилля S , яке діє вздовж дотичної до дуги радіусом R ; зусилля зсуву T_x, T_θ ; моменти згину в повздовжньому і поперечному напрямках M_x, M_θ відповідно; поперечні перерізуючі сили Q_x, Q_θ .

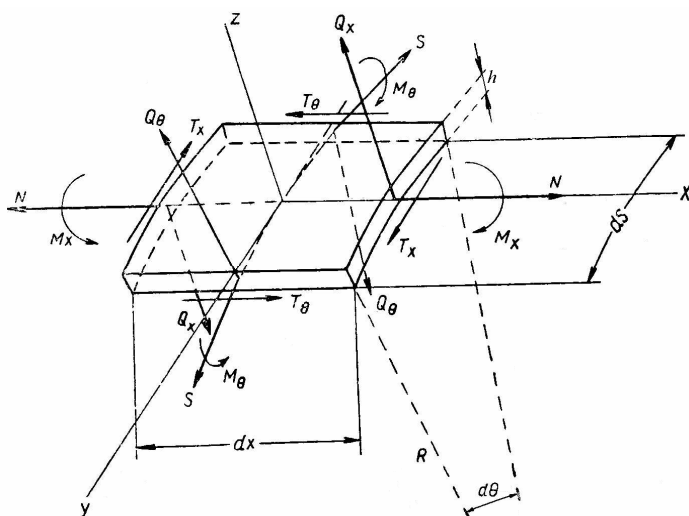


Рисунок 18 – Елемент циліндричної оболонки

Слід зазначити, що в даній фізичній моделі не враховуються скручувальні моменти: як показує досвід, вони є порівняно незначними.

При визначенні моментів M_x і M_θ будемо враховувати *правило знаків*: моменти є додатними, якщо

вони розтягують волокна зовнішньої поверхні (з боку додатних w).

Зовнішнє розподілене навантаження (на одиницю серединної поверхні пластини) задамо трьома проекціями $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ у напрямках відповідних осей координат.

Проекції переміщення точок серединної поверхні позначимо u, v, w .

На базі введених силових і геометричних параметрів складемо диференціальні рівняння, які пов'язують невідомі параметри (локальні переміщення і внутрішні зусилля) із наперед заданим зовнішнім навантаженням.

Розглянемо рівновагу елемента оболонки $h \times ds \times dx$ і складемо для нього шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_z(\overline{F_k}) = 0. \end{cases} \quad (79)$$

Для складання першого рівняння рівноваги врахуємо систему сил, подану на рисунку 19а:

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial x}\right)ds - Nds + \left(T_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial s}ds\right)dx - T_\theta dx + \bar{X}dsdx = 0. \quad (80)$$

Після скорочення маємо:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial T_\theta}{\partial s} + \bar{X} = 0. \quad (81)$$

Для складання другого рівняння рівноваги (79) врахуємо систему сил, подану на рисунку 19б:

$$\begin{aligned} &\left(S + \frac{\partial S}{\partial s}\right)dx - Sdx + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)ds - T_xds + \\ &+ \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial s}\right)dx \frac{d\theta}{2} + Q_\theta dx \frac{d\theta}{2} + \bar{Y}dsdx = 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Враховуючи співвідношення $ds = R d\theta$, після скорочення отримаємо:

$$\frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} + \bar{Y} = 0. \quad (83)$$

Третє рівняння рівноваги (79) складемо із застосуванням рисунка 19 в:

$$\begin{aligned} &-\left(S + \frac{\partial S}{\partial s}ds\right)dx \frac{d\theta}{2} - Sdx \frac{d\theta}{2} + \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial s}ds\right)dx - \\ &- Q_\theta dx + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)ds - Q_xds + \bar{Z}dsdx = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Після перетворень маємо:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial s} - \frac{S}{R} + \bar{Z} = 0. \quad (85)$$

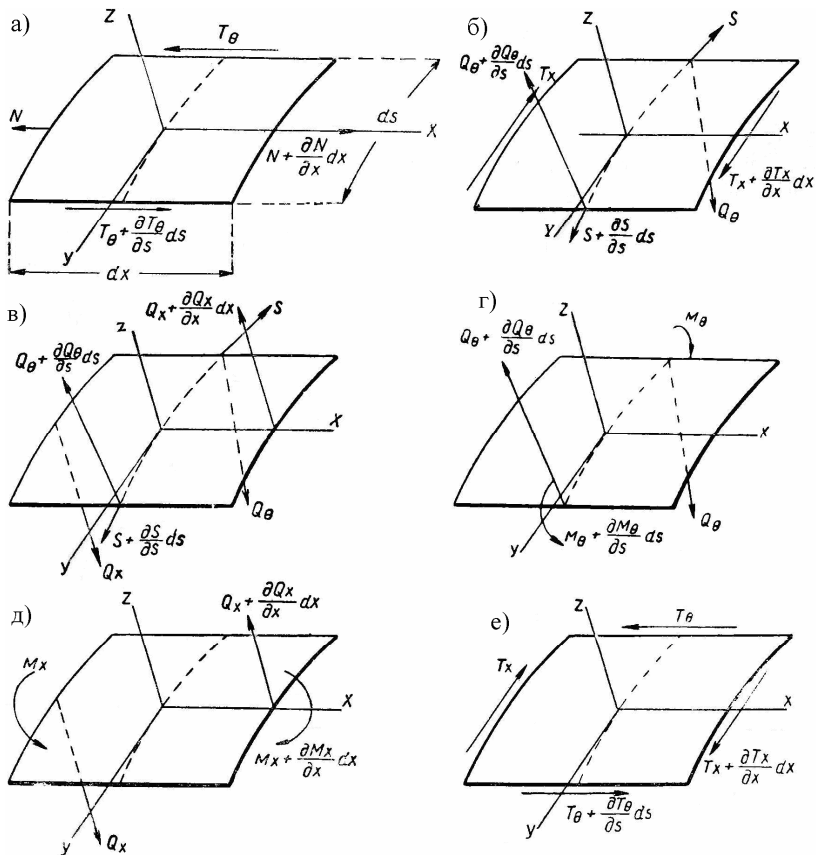


Рисунок 19 – Внутрішні силові фактори

Четверте рівняння (79) складемо на підставі
 рисунка 19г:

$$\begin{aligned}
& - \left(Q_{\theta} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial s} ds \right) dx \frac{ds}{2} - Q_{\theta} dx \frac{ds}{2} + \\
& + \left(M_{\theta} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial s} ds \right) dx - M_{\theta} dx = 0,
\end{aligned} \tag{86}$$

звідки маємо:

$$Q_{\theta} = \frac{\partial M_{\theta}}{\partial s}. \tag{87}$$

П'яте рівняння рівноваги (79) складемо за допомогою рисунка 19д:

$$\begin{aligned}
& \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) ds \frac{dx}{2} + Q_x ds \frac{dx}{2} - \\
& - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) ds + M_x ds = 0.
\end{aligned} \tag{88}$$

Після скорочень маємо:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}. \tag{89}$$

Останнє рівняння рівноваги (79) на підставі рисунка 19е матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left(T_{\theta} + \frac{\partial T_{\theta}}{\partial s} ds \right) dx \frac{ds}{2} + T_{\theta} dx \frac{ds}{2} - \\
& - \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) ds \frac{dx}{2} - T_x ds \frac{dx}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{90}$$

або коротше:

$$T_{\theta} = T_x = T. \tag{91}$$

Підставляючи значення (87), (89) і (91) у рівняння (81), (83) і (85), отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь відносно п'яти невідомих N, S, T, M_x, M_θ :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} + \bar{X} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial s} + \bar{Y} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial s^2} - \frac{S}{R} + \bar{Z} = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Для того, щоб отримана система рівнянь була замкнутою, знайдемо аналітичні вирази між погонними силами і моментами та компонентами вектора переміщень.

Позначимо відносні подовження серединної поверхні через ε_x і ε_θ відповідно до напрямку деформації, а також деформацію зсуву – через $\gamma_{\theta x}$. Виразимо вказані компоненти тензора деформацій через компоненти вектора переміщень точок серединної поверхні, тобто встановимо рівняння Коші стосовно теорії оболонок.

Подовження у напрямку x (рисунок 20а) дорівнює:

$$\varepsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (93)$$

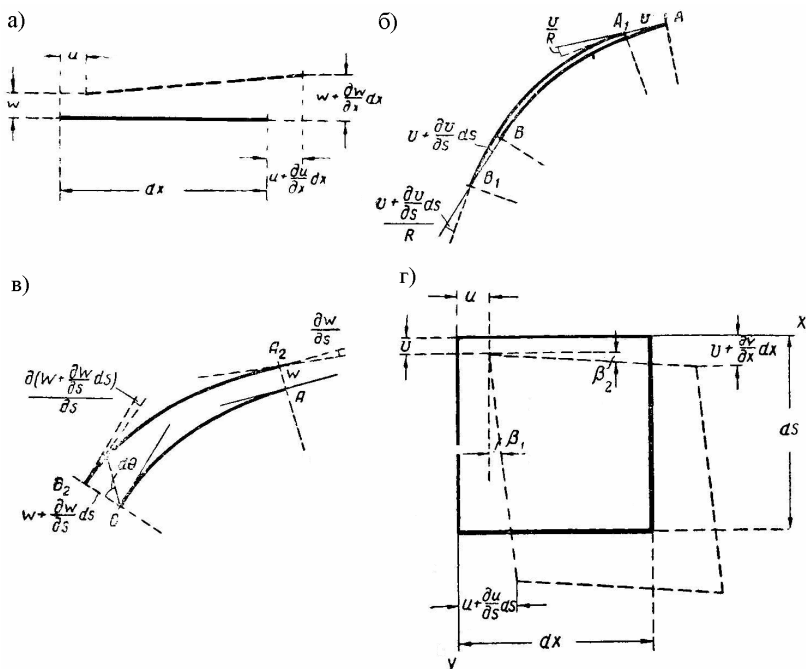


Рисунок 20 – Компоненти вектора переміщень

У зв'язку з тим, що переміщення v спрямоване по дотичній до серединної поверхні оболонки, а переміщення w – вздовж нормалі до поверхні, то відносне подовження ε_θ має залежати двох компонент: v і w .

Подовження від v (рисунок 20б) дорівнює:

$$\varepsilon'_\theta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (94)$$

Подовження від w (рисунок 20в):

$$\varepsilon_{\theta}'' = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial s} ds \right) d\theta}{ds} = w \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{w}{R}. \quad (95)$$

Таким чином, маємо:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}' + \varepsilon_{\theta}'' = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}. \quad (96)$$

Деформація зсуву на серединній поверхні оболонки (рисунок 20г) визначається таким чином:

$$\gamma_{\theta x} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial s} ds}{ds} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (97)$$

Запишемо рівняння закону Гука (6) для наших позначень:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_{\theta}); \\ \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_{\theta}); \\ \tau_{\theta x} = G \gamma_{\theta x}. \end{cases} \quad (98)$$

Враховуючи залежності (93), (96) і (97), отримаємо зв'язок між компонентами тензора напружень і вектора переміщень:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) \right]; \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right); \\ \tau_{\theta x} = G \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (99)$$

У результаті можна отримати вирази для перерізуючих зусиль:

$$\begin{cases} N = \sigma_x h = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) \right]; \\ S = \sigma_\theta h = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right); \\ T = \tau_{\theta x} h = Gh \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (100)$$

Застосовуючи загальні формули (28), визначені для теорії пластин:

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y = M_\theta = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{cases} \quad (101)$$

а також, враховуючи геометричні співвідношення з теорії криволінійних ортогональних координат (перехід від декартової системи до циліндричної):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (102)$$

запишемо вирази, які встановлюють зв'язок між моментами M_x, M_θ і переміщеннями v, w :

$$\begin{cases} M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right]; \\ M_\theta = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right). \end{cases} \quad (103)$$

Враховуючи рівняння (100) і (103), отримаємо систему диференціальних рівнянь вигину оболонки (92) у замкнутому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{D}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left(\frac{\nu D}{h^2} + Gh \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu D}{Rh^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{X} = 0; \\ \left(\frac{\nu D}{h^2} + Gh \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + Gh \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \\ + \frac{D}{R} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} \right) + \bar{Y} = 0; \\ - \frac{\nu D}{Rh^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{D}{R} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s^3} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial s} \right) - \\ - D \left(\frac{12w}{R^2 h^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} \right) + \bar{Z} = 0. \end{cases} \quad (104)$$

Отримана система диференціальних рівнянь є достатньо громіздкою. Тому оцінимо порядок членів і знехтуємо доданками вищих порядків малості.

Для запису того, що параметр A на порядок менший за параметр B візьмемо запис: $A \sim \delta \cdot B$. Таким чином можна встановити ряд співвідношень. Для пологих оболонок: $h \sim \delta \cdot R$. Не складно встановити, що $\nu D/h^2 \sim \delta \cdot Gh$. Таким чином маємо:

$$\begin{cases} \frac{D}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left(\frac{\nu D}{h^2} + Gh \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu D}{Rh^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{X} = 0; \\ \left(\frac{\nu D}{h^2} + Gh \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + Gh \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \bar{Y} = 0; \\ -\frac{\nu D}{Rh^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{D}{Rh^2} \frac{\partial v}{\partial s} - D \left(\frac{12w}{R^2 h^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \bar{Z} = 0. \end{cases} \quad (105)$$

Окрім того, для вісесиметричного навантаження маємо: $\bar{Y} = 0$, $\partial/\partial s = 0$, $v = 0$. У результаті введених співвідношень система (104), потерпаючи значних спрощень, зводиться до такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{D}{h^2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw}{dx} \right) + \bar{X} = 0; \\ -D \left(\frac{\nu}{Rh^2} \frac{du}{dx} + \frac{12w}{R^2 h^2} + \frac{d^4 w}{dx^4} \right) + \bar{Z} = 0. \end{cases} \quad (106)$$

У разі, якщо поздовжні деформації незначні ($u = 0$), з формули (106) отримаємо диференціальне рівняння вигину оболонки, навантаженої нормальним тиском ($\bar{Z} = p$):

$$D \left[\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{12w(x)}{R^2 h^2} \right] = p(x). \quad (107)$$

Останнє рівняння містить невідому функцію прогину w , яка залежить від однієї поздовжньої координати x , і може бути проінтегровано будь-яким із аналітичних або чисельних методів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.– М.: «Высшая школа», 1961.– 538с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов.– М.: ГИТТЛ, 1954.– 856с.
3. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания.– М.: Машиностроение, 1988.
4. Винокуров Л.П. Теория упругости и пластичности.– Харьков: Изд-во харьковского государственного университета им. А.М. Горького.– 1965.– 328с.
5. Жемочкин Б.Н. Теория упругости.– М.: Госстройиздат, 1957.– 256с.
6. Митинский А.Н. Сопротивление материалов.– Львов: Судпромгиз, 1959.– 296с.
7. Писаренко Г.С., Агарёв В.А. Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление материалов.– Киев: «Вища школа», 1973.– 672с.
8. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов.– Киев: «Наукова думка», 1975.– 704с.

9. Пономарёв С.Д., Бидерман В.Л., Лихарёв К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчёты на прочность в машиностроении.– М.: ГИТИМЛ, 1958.– 976с.

10. Татур Г.К. Общий курс сопротивления материалов.– Минск: «Вышэйшая школа», 1974.– 464с.

11. Тимошенко С.П. Курс сопротивления материалов.– М.: ГНТИ, 1931.– 588с.

12. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов.– Т.2.– М.: «Наука», 1965.– 480с.

13. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем.– М.: ОГИЗ, 1946.– 532с.

14. Тимошенко С.П. Курс теории упругости.– К.: Наукова думка. – 1972.–508 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів 4-го курсу
факультету технічних систем та енергоефективних технологій
денної форми навчання

Відповідальний за випуск В.А. Марцинковський
Редактор Н.А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання І.В. Павленка

Підписано до друку 15.10.2010, поз.
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 2,08. Тираж 40 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

