А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

Алгебра

и начала математического анализа

10

профильный уровень

Методическое пособие для учителя

Издательство
Мнемозина

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

Алгебра
и начала математического анализа

10 класс
(ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)

Методическое пособие для учителя

2-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень) : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 2-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 239 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01422-5

В пособии представлены: примерное тематическое планирование учебного материала в 10 классе (в трех вариантах); методические рекомендации по работе с учебником А. Г. Мордковича, П. В. Семенова «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс»; решения наиболее трудных задач из одноименного задачника.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-01422-5

Предисловие

Издательство «Мнемозина» опубликовало учебно-методический комплект для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10 классе профильной школы:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень). Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

Цель данной книги — оказать методическую помощь учителям, работающим по указанному комплекту. Здесь читатель найдет примерное тематическое планирование для 10 класса в трех вариантах — из расчета 4, 5 и 6 часов в неделю на изучение курса, методические рекомендации по всем восьми темам (главам) учебника. Содержание этих рекомендаций в пределах каждой темы не унифицировано, оно естественным образом зависит от важности и трудности темы, степени ее методической новизны. В одних случаях мы ограничиваемся отдельными методическими замечаниями и советами, в других — разговор идет на концептуальном уровне.

Во второй части пособия приведены решения большинства трудных задач из второй части комплекта (тех, которые отмечены в задачнике знаком ●).

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

I вариант — 4 ч в неделю, II вариант — 5 ч в неделю,
III вариант — 6 ч в неделю

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
Повторение материала 7—9 классов	3	3	3
Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА			
§ 1. Натуральные и целые числа	3	4	5
§ 2. Рациональные числа	1	2	2
§ 3. Иррациональные числа	2	2	2
§ 4. Множество действительных чисел	1	2	3
§ 5. Модуль действительного числа	2	2	3
Контрольная работа № 1	1	1	1
§ 6. Метод математической индукции	2	3	4
Итого:	**12**	**16**	**20**
Глава 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ			
§ 7. Определение числовой функции и способы ее задания	2	2	3
§ 8. Свойства функций	3	3	4
§ 9. Периодические функции	1	2	3
§ 10. Обратная функция	2	3	4
Контрольная работа № 2	2	2	2
Итого:	**10**	**12**	**16**
Глава 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ			
§ 11. Числовая окружность	2	2	2
§ 12. Числовая окружность на координатной плоскости	2	3	3
§ 13. Синус и косинус. Тангенс и котангенс	3	3	4
§ 14. Тригонометрические функции числового аргумента	2	3	3
§ 15. Тригонометрические функции углового аргумента	1	2	2
§ 16. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики	3	3	3
Контрольная работа № 3	1	1	1
§ 17. Построение графика функции $y = mf(x)$	2	2	2
§ 18. Построение графика функции $y = f(kx)$	2	3	3

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
§ 19. График гармонического колебания	1	2	2
§ 20. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики	2	2	3
§ 21. Обратные тригонометрические функции	3	4	5
Итого:	**24**	**30**	**33**
Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ			
§ 22. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства	4	5	6
§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений	4	5	6
Контрольная работа № 4	2	2	2
Итого:	**10**	**12**	**14**
Глава 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ			
§ 24. Синус и косинус суммы и разности аргументов	3	3	4
§ 25. Тангенс суммы и разности аргументов	2	2	2
§ 26. Формулы приведения	2	2	2
§ 27. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени	3	4	5
§ 28. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение	3	4	5
§ 29. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму	2	3	3
§ 30. Преобразование выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin (x + t)$	1	2	2
§ 31. Методы решения тригонометрических уравнений	3	4	5
Контрольная работа № 5	2	2	2
Итого:	**21**	**26**	**30**
Глава 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА			
§ 32. Комплексные числа и арифметические операции над ними	2	2	3
§ 33. Комплексные числа и координатная плоскость	1	2	3
§ 34. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	2	3	3

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
§ 35. Комплексные числа и квадратные уравнения	1	2	2
§ 36. Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа	2	2	3
Контрольная работа № 6	1	1	1
Итого:	**9**	**12**	**15**
Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ			
§ 37. Числовые последовательности	2	3	3
§ 38. Предел числовой последовательности	2	2	3
§ 39. Предел функции	2	3	4
§ 40. Определение производной	2	2	2
§ 41. Вычисление производных	3	4	5
§ 42. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции	2	3	3
§ 43. Уравнение касательной к графику функции	3	3	4
Контрольная работа № 7	2	2	2
§ 44. Применение производной для исследования функций	3	4	5
§ 45. Построение графиков функций	2	2	3
§ 46. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин	4	5	6
Контрольная работа № 8	2	2	2
Итого:	**29**	**35**	**42**
Глава 8. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ			
§ 47. Правило умножения. Комбинаторные задачи. Перестановки и факториалы	2	3	4
§ 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты	2	3	4
§ 49. Случайные события и их вероятности	3	3	5
Контрольная работа № 9	—	1	1
Итого:	**7**	**10**	**18**
Повторение	11	14	17
Всего:	**136**	**170**	**204**

ЧАСТЬ 1

Методические рекомендации по работе с учебником

Сделаем краткие комментарии к программе курса алгебры и начал математического анализа 10 класса. Первые две темы содержат материал, в значительной степени знакомый учащимся из курса алгебры основной школы. Цель изучения этого материала состоит в том, чтобы дать возможность школьникам втянуться в учебный процесс, адаптироваться в новых условиях и в то же время углубить и расширить представления о таких фундаментальных понятиях математики, как действительное число, функция, свойства функций, — понятиях, которые не всегда выводятся в основной школе на должный уровень. Расширение происходит за счет добавления элементов теории делимости, метода математической индукции, понятий обратной и периодической функции.

Следующие три темы составляют блок тригонометрии. Подход к построению тригонометрии заметно отличается от традиционного. Наиболее принципиальное отличие — в порядке ходов: по нашему учебнику сначала изучаются тригонометрические функции, затем тригонометрические уравнения и только потом технический аппарат — тригонометрические формулы. Повышенное внимание уделяется двум вещам: во-первых, основной модели, на которой строится вся школьная тригонометрия, — числовой окружности на координатной плоскости, и, во-вторых, специфическим моментам, связанным с решением простейших тригонометрических уравнений.

Шестая глава посвящена комплексным числам. Она помещена сразу после тригонометрии не случайно: и числовая окружность, и формулы тригонометрии находят активное применение при изучении тригонометрической формы комплексного числа, формулы Муавра, при извлечении из комплексного числа квадратного и кубического корней.

Одной из центральных в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса является тема «Производная». Мы не сочли необходимым насыщать раздел, связанный с элементами математического анализа, традиционными доказательствами, например, теоремы Лагранжа или достаточных условий монотонности функции. Хотя школа и профильная, она не должна подменять высшее учебное заведение. Изучение элементов анализа в школе имеет прежде всего общекультурное и общеобразовательное (а не информационное) значение.

ТЕМА 1

Действительные числа

Вся первая глава учебника — повторение, расширение и углубление математического материала, известного учащимся из курса математики 5—6 классов и из курса алгебры 7—9 классов. Практически с самого начала используются термины «необходимо», «достаточно», «тогда и только тогда». При этом основной упор делается не на формально-логическую трактовку этих терминов, а на интуицию и здравый смысл. Если учащиеся не знакомы с этими понятиями, есть смысл предложить им серию несложных утверждений, не обязательно математического характера, где вместо многоточия надо вставить нужные слова:

1) Чтобы натуральное число делилось на 2, ..., чтобы последней цифрой числа была двойка. (Ответ: достаточно, но не необходимо).

2) Чтобы натуральное число делилось на 4, ..., чтобы оно было четным. (Ответ: необходимо, но не достаточно).

3) Чтобы поступить в вуз, ..., чтобы имелся аттестат зрелости. (Ответ: необходимо, но недостаточно).

4) Чтобы поступить в вуз, ..., чтобы школа была закончена с медалью. (Ответ: не необходимо и не достаточно).

5) Чтобы плоский четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам. (Ответ: необходимо и достаточно. Эквивалентная конструкция: плоский четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам).

В § 1 речь идет об элементах теории делимости целых чисел, о делении с остатком, о простых и составных числах, в частности, о бесконечности множества простых чисел, о НОД и НОК, об основной теореме арифметики. Из признаков делимости (необходимых и достаточных) сформулированы и доказаны самые известные и наиболее часто используемые: признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 125. С их помощью и с учетом различных свойств делимости можно предложить учащимся придумать признаки делимости на 6, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 60. Например, число делится на 6 (на 18) тогда и только тогда, когда оно четное и сумма его цифр делится на 3 (на 9); число делится на 12 (на 24) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 и число, образованное последними двумя (тремя) цифрами, делится на 4 (на 8); для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3 и цифра единиц была равна 0.

При наличии времени и при достаточной подготовленности класса можно привести красивое доказательство признака делимости числа на 11. Оно состоит из нескольких шагов.

1. $(10^{2n}-1)\,⋮\,11$. В самом деле, $10^{2n}-1=\underbrace{999...999}_{2n\text{ цифр}}$. Число, состоящее из четного числа девяток (99, 9999, 999999 и т. д.), делится на 11 (получится, соответственно, 9, 909, 90909 и т. д.).

2. $(10^{2n+1}+1)\,⋮\,11$. В самом деле, $10^{2n+1}+1=10(10^{2n}-1)+11$. На первом шаге было доказано, что $(10^{2n}-1)\,⋮\,11$, но тогда, по свойствам делимости, $10(10^{2n}-1)\,⋮\,11$ и $(10(10^{2n}-1)+11)\,⋮\,11$, т. е. $(10^{2n+1}+1)\,⋮\,11$.

3. Пусть дано натуральное число $b=\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}}$, содержащее четное число цифр, и пусть $c=a_1-a_2+a_3-...+a_{2n-1}-a_{2n}$ (знакочередующаяся сумма его цифр). Покажем, что сумма $b+c$ делится на 11.

Так как

$$b=a_1\cdot10^{2n-1}+a_2\cdot10^{2n-2}+a_3\cdot10^{2n-3}+...+a_{2n-1}\cdot10+a_{2n},$$

то

$$b+c=a_1(10^{2n-1}+1)+a_2(10^{2n-2}-1)+$$
$$+a_3(10^{2n-3}+1)+...+a_{2n-1}(10+1).$$

Согласно утверждениям, полученным на первых двух шагах, $(10^{2n-1}+1)\,⋮\,11$, $(10^{2n-2}-1)\,⋮\,11$, $(10^{2n-3}+1)\,⋮\,11$, ... Значит, $b+c$ делится на 11 . Поэтому b делится на 11 тогда и только тогда, когда c делится на 11.

4. Пусть дано натуральное число $b=\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}}$, содержащее нечетное число цифр. К числу $10b=\overline{a_1a_2a_3...a_{2n-1}0}$, содержащему четное число цифр, применимо утверждение, полученное на шаге 3. Оно означает, что $10b$ делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма $a_1-a_2+a_3-...+a_{2n-1}-0$. Но делимость числа $10b$ на 11 равносильна делимости b на 11. Значит, b делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма a_1-a_2+ $+a_3-...+a_{2n-1}$.

5. Обобщая результаты, полученные на третьем и четвертом шагах, делаем вывод: натуральное число $b=\overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 число $|a_1-a_2+a_3-$ $-...+(-1)^{n-1}a_n|$.

Например, $7543965\,⋮\,11$, поскольку $|7-5+4-3+9-6+5|=$ $=11\,⋮\,11$.

В то же время число 12378694 не делится на 11, поскольку $|1-2+3-7+8-6+9-4|=2$, а 2 не делится на 11.

В § 2 речь идет о рациональных числах. Показан прием обращения бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь. Пусть, например, $a=1{,}5(23)$. Тогда $10a=15{,}(23)$,

$1000a = 1523,(23)$, $1000a - 10a = 1523,(23) - 15,(23) = 1508$. Из уравнения $990a = 1508$ находим: $a = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}$.

Учитель математики должен понимать, что в этой процедуре есть скользкий (с формально-математической точки зрения) момент: ниоткуда не следует, что при умножении бесконечной десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. запятая должна сдвигаться вправо, соответственно, на 1, 2, 3 и т. д. знака. Этот вывод был сделан в курсе математики для 5—6 классов *лишь для конечных десятичных дробей.* Сказать об этом учащимся или нет — дело учителя. Прийти к указанному выводу можно с помощью примеров. Скажем, разделив «уголком» 7 на 22, получим: $\frac{7}{22} = 0,3181818...$; разделив 70 на 22, получим: $\frac{70}{22} = 3,181818...$; разделив 700 на 22, получим: $\frac{700}{22} = 31,818181...$; разделив 7000 на 22, получим: $\frac{7000}{22} = 318,181818...$ Запятая аккуратно передвигается на один знак вправо.

Более корректен (с формально-математической точки зрения) способ обращения бесконечной десятичной дроби в обыкновенную с помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии $\left(S = \frac{b_1}{1 - q}\right)$, которая будет получена в § 38. Например, для числа 1,5(23) получаем: $1,5(23) = 1,5 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + ... = 1,5 + \frac{0,023}{1 - 0,01} = \frac{3}{2} + \frac{23}{990} = \frac{754}{495}$. Может быть, есть смысл, изучая в дальнейшем § 38, еще раз вернуться к вопросу об обращении бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь.

В § 3—5 с целью повторения собран достаточно традиционный материал: иррациональные числа, числовая прямая и числовые промежутки, свойства числовых неравенств, сравнение чисел, модуль действительного числа. Петитом в § 4 дан необязательный материал — аксиоматика множества действительных чисел. Все аксиомы, кроме одной, учащимся в том или ином виде знакомы и привычны. Указанное исключение составляет аксиома непрерывности множества действительных чисел, данная в учебнике в форме принципа разделяющего числа. Эта аксиома считается центральной для построения курса математического анализа, на ней в значительной степени базируется теория пределов, она лежит в основе доказательств свойств непрерывных функций, входит в состав определений таких фундаментальных понятий, как интегрируемость, квадрируемость, спрямляемость, кубируемость и т. д. Но оценить ее значение в школе учащиеся, разумеется, не смогут. Лишь в учебнике для 11 класса мы осмелились не очень явно использовать эту аксиому в определении степени с иррациональным показателем и в рассуждениях о площади криволинейной трапеции.

В § 6 учащиеся знакомятся с методом математической индукции. В математике встречаются рассуждения индуктивные (от частного к общему) и дедуктивные (от общего к частному). Первые ненадежны, могут привести к ошибочным выводам, но креативны, являются мощным средством открытия нового. Вторые абсолютно надежны, дают строгие обоснования, но не креативны, ничего не открывают. Дополняя друг друга, они часто идут, как говорится, рука об руку. Метод математической индукции — проявление этого паритета. *По форме* он представляется индуктивным: справедливость утверждения проверяется только в одном частном случае, при $n = 1$ (базис индукции), а вывод делается для любого натурального числа n. В то же время *по содержанию* этот метод дедуктивен, ибо основывается на общей теореме, которая в учебнике названа принципом математической индукции.

В этом параграфе приводятся различные примеры применения метода математической индукции: доказательство тождеств и неравенств, суммирование, задачи о делимости. В задачнике этот список несколько расширяется, в частности, предложены геометрические задачи, для решения которых используется метод математической индукции.

Следует подчеркнуть, что авторы в дальнейшем не забывают о методе математической индукции, он используется в курсе алгебры и начал анализа как в учебнике для 10, так и в учебнике для 11 класса.

ТЕМА 2

Числовые функции

Во второй главе учебника учащимся напоминают известные из курса алгебры основной школы определения числовой функции (§ 7) и различных ее свойств: область определения, область (множество) значений, монотонность, ограниченность, наименьшее и наибольшее значения на промежутке области определения, четность и нечетность. В § 8 дается и понятие экстремума функции. Обычно в школе это понятие вводят тогда, когда изучается тема «Производная», поскольку именно с помощью производной чаще всего исследуют функции на максимум и минимум. На самом деле можно получить достаточно четкие представления о точках экстремума и без производной, особенно в тех случаях, когда строятся графики кусочных функций. То же, кстати, относится и к понятиям наименьшего и наибольшего значений функции. Производная дает метод отыскания этих значений, но этот метод не единственный, во многих случаях ответ на вопрос о наименьшем и наибольшем значении функции можно дать с помощью элементарных приемов или с помощью графика функции (эту линию мы активно внедрили в наши учебники алгебры для 7—9 классов).

Вопреки сложившейся традиции, мы, давая определение четной или нечетной функции, не включаем в него требование симметричности области определения. Это — *необходимое условие* четности или нечетности функции, оно оформлено в виде отдельного утверждения. Определение же, как это принято в математике, должно быть минимизировано.

В связи с исследованием функций на четность обратим внимание читателя на одно принципиальное обстоятельство. Речь идет о неявном приобщении школьников к законам формальной логики, согласно которым отрицание утверждения, содержащего квантор общности, приводит к утверждению, содержащему квантор существования, и обратно. Устанавливая факт четности или нечетности функции $y = f(x)$, нужно проверить, что равенство $f(-x) = f(x)$ или, соответственно, $f(-x) = -f(x)$ выполняется *для всех* значений x из области определения функции. Устанавливая же факт отсутствия как четности, так и нечетности функции, достаточно показать, что *существует хотя бы одно* значение x, для которого $f(-x) \neq f(x)$, и *хотя бы одно* значение x, для которого $f(-x) \neq -f(x)$.

Используются также понятия выпуклости и непрерывности — на наглядно-интуитивном уровне (заметим, что понятие выпуклости в дальнейшем на уровень формального определения переведено не будет, а точное определение непрерывности мы сможем получить в **§ 39**, где речь идет о пределе функции). Двум новым свойствам функции — периодичности и обратимости — посвящены отдельные параграфы: **§ 9** и **10**.

Кроме того, во второй главе учебника напоминаются основные способы задания функции — аналитический, графический, табличный, словесный — и активно используются кусочные функции (учащиеся, которые изучали алгебру в основной школе по нашим учебникам, к этому уже приучены). Речь также идет о преобразованиях графиков: как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

Завершая разговор о второй главе учебника, обратим внимание читателя на несколько обстоятельств. В многочисленных пособиях для средней школы встречается словосочетание «функция $f(x)$». Этот жаргон, понятный математикам, вреден для правильного формирования у учащихся понятия функции. Определение функции гласит: если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X однозначно определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X, и пишут $y = f(x)$, $x \in X$. В определении подчеркивается, что, говоря о функции, надо одновременно использовать *две переменные*: x и y. Они же указывают обозначения для координатной плоскости, на которой строится график функции. Наша точка зрения: $f(x)$ — это *выражение с переменной*, а не функция, некорректно говорить о его графике (ведь даже обозначения координатных осей не указаны) или о каких-то его функциональных свойствах (некорректно, например, требовать исследовать выражение на монотонность, ограниченность и т. д.). Для функции же всюду в нашем комплекте используется обозначение $y = f(x)$.

Коль скоро мы заговорили о принятых обозначениях, упомянем еще два: с нашей точки зрения, для обозначения области определения и области значений функции целесообразнее использовать символы $D(f)$ и $E(f)$, а не $D(y)$ и $E(y)$; все-таки символом *функции* является f, а не y.

Обратите также внимание на то, что в нашем курсе, в отличие от традиционных школьных подходов, акцент сделан на *заданную*, а не на *естественную* область определения функции (эта линия проводится в наших учебниках начиная с 7 класса, особенно в кусочных функциях). В традиционных курсах учащиеся в большинстве случаев работают с естественной областью определения функции, им привычна запись типа «функция $y = \sqrt{x}$» и часто вызывает недоумение запись типа «функция $y = \sqrt{x}$, $x \in [1; 4]$». Многие из них думают, что это одна и та же функция, но заданная на различных промежутках. Следует приучать школьников к тому, что это *разные функции*, поскольку определение функции включает в себя две позиции: *область определения* и *правило соответствия*. Для совпадения двух функций нужно установить тождественность обеих указанных позиций.

ТЕМА 3
Тригонометрические функции

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности. При этом практически всем учебникам присущ один и тот же недостаток: недооценка важности изучения самой модели «числовая окружность» и сложности дидактических компонентов, которые связаны с изучением этой модели. О каких дидактических компонентах идет речь?

1) Числовая прямая изучается в школе в течение четырех лет: в 5 классе речь идет о координатном луче, в 6—7 классах — о координатной прямой, и, наконец, в 8 классе, после введения понятия действительного числа, — о числовой прямой. Числовая прямая считается изученной, когда учащиеся свободно решают задачи четырех типов: по заданному числу находят точку на прямой, по точке находят соответствующее число, умеют переходить от геометрической модели числового промежутка к аналитической записи и обратно. Числовая окружность представляет собой более сложную модель, на которой, тем не менее, надо научиться решать задачи тех же четырех типов. Это требует времени и внимания как со стороны авторов учебников, так и учителей.

2) Понятие длины дуги, которое лежит в основе любых действий с числовой окружностью, не является надежно отработанным в курсе геометрии; значит, на это следует обратить внимание.

3) И авторы учебников, и учителя должны с пониманием относиться к тем трудностям, с которыми столкнутся учащиеся в начале изучения тригонометрии: непривычная модель (числовая окружность) и непривычный, «неаналитический» способ введения новых функций (синус — ордината, косинус — абсцисса точки числовой окружности). При этом от учащихся фактически требуется умение работать одновременно *в двух системах координат*: «криволинейной», когда снимаем информацию о положении точки на числовой окружности, и декартовой, когда снимаем информацию об абсциссе и ординате точки.

Опыт показывает: недоработки с моделью числовой окружности и слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного изучения материала. Более того, на самом деле школьникам приходится изучать не одну, а две новые модели: первая — собственно числовая окружность, а вторая — числовая окружность на координатной плоскости. Подчеркнем, что речь идет именно об окружности, а не о круге, поэтому в нашем учебнике вы не найдете столь любимого многими учителями словосочетания «тригонометрический круг».

Учитывая вышесказанное, мы уделяем большое внимание подготовке к введению основных определений: в первых двух параграфах соответствующей главы учебника речь идет о моделях «числовая окружность» и «числовая окружность на координатной плоскости», а в задачнике представлены упражнения на вычисление длин дуг единичной окружности.

Для успешного овладения указанными моделями и в учебнике, и в задачнике предусмотрена система специальных «дидактических игр».

Первая «игра» — вычисление длин дуг единичной окружности. Учащиеся должны привыкнуть к тому, что длина всей окружности равна 2π, половины окружности — π, четверти окружности — $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Вторая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа π $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, например точек $M\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, $M\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$ и т. д. («хорошие» числа и точки).

Третья «игра» — отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным не в долях числа π, например точек $M(1)$, $M(-5)$ и т. д. («плохие» числа и точки).

Четвертая «игра» — запись чисел, соответствующих данной «хорошей» точке числовой окружности; например, «хорошей» является середина первой четверти, соответствующие ей числа имеют вид $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пятая «игра» — составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности. Например, если дана дуга, соединяющая середину первой четверти (начало дуги) и нижнюю точку из тех двух, что делят вторую четверть на три равные части (конец дуги), то соответствующая аналитическая запись имеет вид $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Если у той же дуги поменять местами начало и конец, то соответствующая аналитическая запись дуги будет иметь вид $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Шестая «игра» — от данной аналитической записи дуги (двойного неравенства) перейти к ее геометрическому изображению.

Заметим, что эти шесть «игр» обеспечивают умение решать задачи четырех основных типов, связанных с числовой окружностью, о которых мы упоминали выше (от числа к точке, от точки к числу, от дуги к двойному неравенству, от двойного неравенства к дуге).

Следующие «дидактические игры» относятся к модели «числовая окружность на координатной плоскости». Приступая к изучению этой модели, мы должны отчетливо сознавать, какие трудности ждут учащихся. Прежде всего от них требуется довольно высокий уровень математической культуры, достаточный для того, чтобы одновременно работать в двух системах координат — криволинейной и декартовой, — об этом уже упоминалось выше. Чтобы помочь им преодолеть указанную трудность, мы применяем новый методический прием: для точки M числовой окружности используем запись $M(t)$, если речь идет о криволинейной координате точки M, или запись $M(x;\ y)$, если речь идет о декартовых координатах точки.

Иногда в пособиях для школы с самого начала используют записи $\sin x$, $\cos x$, не учитывая, что буква x в сознании учащихся ассоциируется с абсциссой в декартовой системе координат, а не с длиной пройденного по окружности пути. В нашем учебнике при работе с числовой окружностью нигде не используются указанные записи, используются символы $\sin t$, $\cos t$.

Седьмая «игра» — отыскание координат «хороших» точек числовой окружности. Речь идет о переходе от записи $M(t)$ к записи $M(x;\ y)$. Например, $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M(0;\ 1)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{6}\right) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ и т. д.

В процессе этой игры школьники фактически учатся вычислять значения тригонометрических функций. Например, из последнего равенства следует (но об этом они узнают позже), что $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, а $\cos\left(-\frac{37\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Восьмая «игра» — отыскание знаков координат «плохих» точек числовой окружности. Если, например, $M(2) = M(x;\ y)$, то $x < 0$, $y > 0$. В процессе этой игры школьники фактически учатся определять знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности. Например, из последнего равенства следует (об этом они также узнают позже), что $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$.

Девятая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Например, если $y = \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют две точки числовой окружности, их главные имена $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$, а все имена охватываются двумя формулами: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Важность девятой игры очевидна: готовим учащихся к решению простейших тригонометрических уравнений вида $\sin t = a$, $\cos t = a$. Для понимания сути дела следует прежде всего научить школьников решать эти уравнения с помощью числовой окружности, не торопясь переходить к готовым формулам.

Еще раз обращаем внимание читателя на использование обозначений: ни в учебнике, ни в задачнике в первой главе, посвященной тригонометрии (в главе 3), не предлагается учащимся решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а предлагается решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. К традиционной записи (с переменной x) мы вернемся в главе 4, посвященной тригонометрическим уравнениям, когда начнем решать уравнения по готовым формулам без помощи числовой окружности. В обучении математике не бывает мелочей, иногда причина недопонимания кроется всего лишь в выборе неудачных обозначений.

Десятая «игра» — отыскание на числовой окружности точек, координаты которых удовлетворяют заданному неравенству. Например, если $y > \frac{1}{2}$, то этому условию удовлетворяют точки открытой дуги MP (рис. 1); числа t — прообразы этих точек — удовлетворяют неравенству $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Таким образом, мы работаем на опережение: готовим учащихся к решению тригонометрических неравенств вида $\sin t > a$, $\cos t < a$.

Фактически для решения неравенств указанного типа используется следующий алгоритм:

1) от аналитической модели $\left(y > \frac{1}{2}\right)$ переходим к геометрической модели — дуга MP числовой окружности;

2) составляем ядро аналитической записи дуги MP (это, собственно говоря, главное, чему следует научить школьников); для дуги MP получаем:

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6};$$

3) составляем общую запись:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

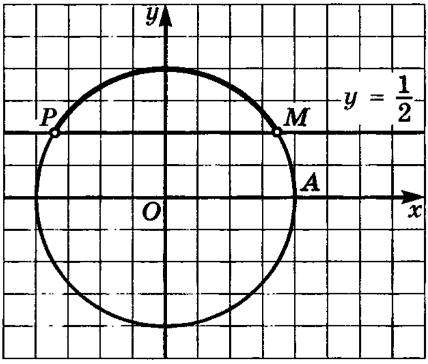


Рис. 1

Если бы речь шла о неравенстве $y < \frac{1}{2}$, то геометрической моделью служила бы дуга PM. При записи ядра нужно учесть, что точка $A(0)$ лежит внутри дуги, поэтому к началу дуги нам приходится двигаться по первой отрицательной окружности.

Следовательно, ядро аналитической записи дуги PM имеет вид $-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6}$, а общая запись такова: $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Термины «ядро аналитической записи дуги», «аналитическая запись дуги» не являются общепринятыми, они введены нами из чисто методических соображений, использовать их или нет — дело учителя.

Указанные выше 10 «дидактических игр» рассматриваются в **§ 11 и 12.** В **§ 13** вводятся названия для декартовых координат точек числовой окружности: абсцисса точки $M(t)$ — это $\cos t$, а ордината — $\sin t$. Чтобы учащиеся приняли эти определения осознанно, им предлагаются те же «игры», но в новой формулировке. Например: вычислить $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$ — переформулировка седьмой «игры»; решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$ — переформулировка девятой «игры»; определить знак числа $\sin 2$ — переформулировка восьмой «игры»; решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$ — переформулировка десятой «игры». Подчеркнем, что на первых уроках тригонометрии простейшие тригонометрические уравнения и неравенства используются не как *цель обучения*, а только как *средство* для усвоения главного — определений синуса и косинуса как декартовых координат точки числовой окружности.

Естественно, в **§ 13** появляются и новые сюжеты, например: сравнить числа $\sin 1$ и $\sin 2$ (пример 10), расположить в порядке возрастания числа $\sin 3$, $\cos 4$, $\sin 7$, $\cos 7$ (пример 11), расположить в порядке возрастания числа 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{tg} 1$ (пример 13). Такие задания, традиционно сложные для массовой школы, не должны вызывать затруднений в профильных классах.

Обратите внимание на пример 6 из **§ 13**, в котором предлагается решить уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$, $\sin t = -0{,}3$. Действуя по выработанному алгоритму, учащиеся строят прямую $x = \frac{2}{5}$ для первого уравнения и $y = -0{,}3$ для второго уравнения, затем находят на окружности по паре точек, служащих геометрическими образами корней уравнений. И тут они сталкиваются с проблемой: неизвестно, каким числам t соответствуют найденные точки, точки не относятся к числу «хороших» (типа долей $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{4}$). Учащимся сообщают, что к решению проблемы придется вернуться позднее (в главе 4). На наш взгляд, здесь соблюдены *основные критерии проблемного обучения*:

1) проблема должна появляться в естественной обстановке, причем перед учениками, а не перед учителем или автором учебника; необходимость ее решения учащиеся должны осознать сами;

2) решение проблемы должно быть не сиюминутным (что характерно не для проблем, а для проблемных ситуаций), а отсроченным по времени; проблема должна «отлежаться».

Если вы работали в 7—9 классах по нашим учебникам алгебры («Мнемозина», 1997—2007), то привыкли к такой трактовке проблемного обучения.

В **§ 13** выводятся известные свойства синуса и косинуса, а затем тангенса и котангенса. Обратите внимание на два обстоятельства.

Первое. Говоря о том, что $\sin(-t) = -\sin t$, $\cos(-t) = \cos t$, мы избегаем в этом параграфе терминов «четная функция», «нечетная функция». Дело в том, что мы еще не рассматриваем тригонометрические *функции*, а работаем только с тригонометрическими *выражениями* (об аккуратном отношении к терминам «функция», «выражение» мы говорили выше, в теме 2). Как только в **§ 16** начнем изучать тригонометрические функции, упомянутые свойства обретут свой привычный статус. То же относится к термину «периодичность».

Второе. Формулы приведения, выводимые (из геометрических соображений) в **§ 13**, носят вспомогательный характер. Формулы $\sin(t + \pi) = -\sin t$ и $\cos(t + \pi) = -\cos t$ нужны в этом параграфе для получения важных свойств тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t$. Общий разговор о формулах приведения отложен до главы 5, где они будут получены как следствия из теоремы сложения. Но и в учебнике, и в задачнике уже в главе 3 многие формулы приведения будут получены исходя из геометрических соображений; можете рассматривать это как еще одну «дидактическую игру».

Говоря в первый раз о тригонометрических функциях (**§ 14**), мы используем обозначения $u = \sin t$, $u = \cos t$, а не традиционные обозначения $y = \sin x$, $y = \cos x$. Дело в том, что (повторим еще раз) x и y к этому моменту играют другие роли: x — это абсцисса точки числовой окружности, т. е. $\cos t$, а y — это ордината точки числовой окружности, т. е. $\sin t$. Чтобы не создавать учащимся дополнительные (и явно неоправданные) трудности, мы и выбрали такой нетрадиционный для современной школы подход. К обычным обозначениям, как уже было сказано ранее, мы вернемся позднее, когда будем располагать достаточными теоретическими знаниями, чтобы каждый раз не обращаться к числовой окружности (это будет в **§ 16**).

Основная цель **§ 15**, который называется «Тригонометрические функции углового аргумента», состоит в том, чтобы собрать воедино старые и новые представления учащихся об основных понятиях тригонометрии. В курсе геометрии (да и в курсе физики) они говорили о синусе, косинусе, тангенсе *угла*, а не *числа*. Необходимо убедить их в том, что те модели, которые использовались в курсе геометрии (синус, косинус, тангенс, котангенс как отношения сторон прямоугольного треугольника), легко и естественно вписываются в новые модели более общего характера. Короче говоря, ученики должны понять, что есть только одно определение тригонометрических функций: то, которое связано с числовой окружностью. Определение, связанное с прямоугольным треугольником, — частный случай общего определения. Предпочтение, на наш взгляд, следует отдать словосочетанию «тригонометрическая функция числа» и реже употреблять компромиссное словосочетание «тригонометрическая функция угла». Например, практически нигде в учебнике мы не используем архаичное «синус двойного угла», — мы говорим «синус двойного аргумента».

В **§ 16—20** речь идет о графиках и свойствах тригонометрических функций, о преобразовании их графиков. В системе упражнений, имеющейся в соответствующих параграфах задачника, обратите внимание на реализацию идеи инвариантного ядра, которая замечается в том, что во всех параграфах наших учебников для 7—11 классов, посвященных изучению той или иной функции, представлены упражнения шести видов:

1) графическое решение уравнений и неравенств;

2) отыскание наименьшего и наибольшего значений функции на заданном промежутке;

3) преобразования графиков;

4) функциональная символика;

5) кусочные функции;

6) чтение графика.

Реализация указанного инвариантного ядра осуществляется в задачнике на трех уровнях сложности. При этом на третьем уровне вы найдете достаточно сложные и нетрадиционные для школы задания. Так, в № 16.35 в) требуется найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на промежутке [231; 238]. Графически предложено решить уравнения $\sin x = \left|\frac{3x}{2\pi} - \frac{3}{4}\right|$ (№ 16.56 а), $\cos x + \left|\frac{3x}{5\pi} - \frac{3}{10}\right| = 0$ (№ 16.56 б), $2\sin x - 1 = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}$ (№ 17.15 а), $\cos\frac{\pi x}{3} = \sqrt{1{,}5x}$ (№ 18.18 б).

В № 17.22 а) предлагается построить график функции $y = \cos x + \cos\frac{x - |x|}{2} + |\cos x|$, т. е. фактически речь идет о построении графика кусочной функции, которую можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} 2\cos x + 1, \text{ если } x \geqslant 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 0 \text{ и } \cos x < 0, \\ 3\cos x, \text{ если } x < 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0, \\ \cos x, \text{ если } x < 0 \text{ и } \cos x < 0. \end{cases}$$

Главу 3 завершает **§ 21**, посвященный обратным тригонометрическим функциям.

Если вы знакомы с нашим учебником для общеобразовательной школы (А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа, 10—11. Мнемозина, 2000—2007), то убедились в том, что изложение материала в **§ 11—20** в учебнике для профильной школы, о котором идет речь в данном пособии, во многом совпадает с изложением того же материала в первой главе учебника для общеобразовательной школы (с естественными изменениями: некоторые простые вещи удалены, некоторые более сложные и интересные вещи добавлены). Полностью новым является лишь тема «Обратные тригонометрические функции». В учебнике для общеобразовательной школы речь шла лишь об обратных тригонометрических *выражениях*, которые используются при решении тригонометрических уравнений. Здесь же обратные тригонометрические *функции* представлены в полном объеме, вплоть до реализации на этом материале в задачнике идеи инвариантного ядра.

ТЕМА 4
Тригонометрические уравнения

Из основных содержательно-методических линий школьного курса алгебры и начал анализа в качестве приоритетной в нашем курсе выбрана функционально-графическая линия. Это находит свое отражение прежде всего в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался (тригонометрические, обратные тригонометрические, степенные, показательные, логарифмические), построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме: функции — уравнения — преобразования. Тригонометрия не является исключением, и здесь мы явно, но сознательно нарушаем привычные стереотипы: в течение многих лет в наших школах тригонометрические уравнения изучаются только после того, как изучены все основные формулы тригонометрии.

Между прочим, именно по отношению к тригонометрии указанная выше схема вызывает у учителей, не знакомых с нашей концепцией, возражения. Как, спрашивают они, можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии? Серьезный вопрос требует серьезного ответа.

Почему в нашем курсе функции предшествуют преобразованиям? Ответим на этот вопрос с позиции здравого смысла: естественнее и разумнее сначала изучить «чистые» модели (таковыми в математике являются, в частности, основные элементарные функции), а затем уже учиться работать с «навороченными» моделями (таковыми в математике являются, в частности, сложные выражения, которые надо упрощать, применяя формульный аппарат). В тригонометрических уравнениях дело обстоит так же: сначала следует разобраться с «чистыми» моделями, т. е. простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов, без формул тригонометрии (используется лишь формула $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, которая автоматически следует из уравнения числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$ и определений синуса и косинуса), и только потом переходить к «навороченным» моделям, т. е. к уравнениям, которые сначала нужно долго и упорно «раскручивать», используя рутинный аппарат формул. Традиционная методическая ошибка (которую уже перестали замечать именно в силу ее традиционности) в преподавании тригонометрии в школе заключается в следующем: учащимся не дают возможности прочувствовать *специфику собственно тригонометрических уравнений* — простейших уравнений типа $\sin t = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; вместо этого они вынуждены с самого начала искать нужные формулы для упрощения заданного сложного уравнения.

В чем состоит специфика простейших тригонометрических уравнений? Во-первых, в том, что практически никогда до этого учащиеся не сталкивались с ситуацией, чтобы в уравнении было не конечное, а бесконечное множество корней; нужно дать им время, чтобы это понять, осознать и принять.

Во-вторых, никогда до сих пор структура записи корней уравнения не выглядела столь сложно и громоздко. Самое трудное, что было до сих пор, — формула корней квадратного уравнения. Теперь же они сталкиваются с записью $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$, где каждый компонент (и пресловутые «арки», и наличие параметра, и странный «хвост» πn, и «выкрутасы» типа $(-1)^n$) требует специального осмысления и отработки, для чего нужна соответствующая система упражнений. В наших пособиях эта система состоит из заданий следующего вида:

1) вычисление значений обратных тригонометрических функций (это делается заранее, в соответствующем параграфе, посвященном обратным тригонометрическим функциям);

2) решение простейших уравнений ($\sin t = a$, $\cos t = a$) с помощью числовой окружности;

3) решение простейших уравнений по готовым формулам;

4) решение уравнений вида $\sin(kx + m) = a$, $\cos(kx + m) = a$, $\operatorname{tg}(kx + m) = a$;

5) отбор корней в простейших уравнениях;

6) решение уравнений, сводящихся к рациональным после выбора в качестве новой переменной какой-либо тригонометрической функции (в частности, к этой группе заданий относятся однородные тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к однородным с помощью основного тригонометрического тождества).

Как видно из приведенного перечня, и без обилия формул тригонометрии в теме «Тригонометрические уравнения» есть чем заняться. Это ответ на часто встречающийся вопрос учителей, который мы привели выше: как можно изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии? Более того, в дальнейшем, по мере появления формул тригонометрии, каждая из них тут же используется не только для бессмысленных упрощений тригонометрических выражений или столь же бессмысленного, нужного только с обучающей, но отнюдь не с развивающей целью, доказательства тригонометрических тождеств, но и для решения уравнений. Если формула используется для решения уравнения, — она *средство* выполнения задания, если же формула используется для доказательства тождества, — она *цель* выполнения задания. Как хорошо известно из психологии, по-настоящему усваивается не то, что является целью усвоения, а то, что является средством для решения других задач. Так что в упомянутой выше схеме «функция — уравнения — формулы» есть преимущества и методического, и методологического, и психолого-педагогического плана.

В § 22 выводятся формулы для решения простейших уравнений. Обратите внимание на то, что, обсуждая решение уравнения $\sin t = a$, мы не сразу выходим на общую формулу. Сначала решения уравнения записываются в виде двух серий: $t = \arcsin a + 2\pi n$, $t = \pi - \arcsin a + 2\pi n$. И лишь после ряда примеров показываем, как эти две формулы «склеиваются» в одну: $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$. Обратите также внимание на то, что до тех пор, пока мы в своих рассуждениях опираемся на числовую окружность, мы обозначаем переменную, как уже отмечалось выше, буквой t. Как только выходим на формальный уровень, т. е. на уровень использования готовых формул для решения простейших тригонометрических уравнений, мы возвращаемся к тому, к чему привыкли учащиеся, — к предпочтительному обозначению переменной в уравнении буквой x.

Для решения простейших уравнений типа $\sin t = a$ в учебнике фактически используется трехшаговый алгоритм: составить общую формулу; вычислить соответствующее значение обратной тригонометрической функции; подставить найденное значение в общую формулу. Если сочтете целесообразным, можете на первых порах предложить этот алгоритм учащимся.

Весьма трудным в методическом плане является вопрос об отборе корней в тригонометрических уравнениях. Учащиеся не должны формально заучивать формулы решения уравнений, они должны их «прочувствовать», понять, что корней бесконечно много, что все они зависят от целочисленного параметра. А для этого отбор корней, причем именно в простейших уравнениях, не обремененных техническими «формульными» сложностями, наиболее благодатный материал. В **§ 22** и **23** учебника разобраны три примера на отбор корней, причем показаны оба известных приема: перебор по параметру (примеры 11 и 12 в § 22) и решение соответствующего двойного неравенства (пример 10 в § 23). И, разумеется, такие примеры в достаточном количестве представлены в задачнике.

В **§ 23** речь идет в основном о двух методах решения тригонометрических уравнений — о методе введения новой переменной и о методе разложения на множители. В соответствующем параграфе задачника мы выходим за эти узкие рамки, там вы найдете достаточно сложные тригонометрические уравнения, хотя и не обремененные «довеском» в виде тригонометрических формул. Укажем в качестве примеров такие уравнения: $2|x - 6|\cos x = x - 6$ (№ 22.32 б), $(x^2 + 8x + 11)\,|\cos 2x| = 4\cos 2x$ (№ 22.40 б), $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{8x - x^2 - 7} = 0$ (№ 22.41 а), $|\cos x| = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$ (№ 23.28 а), $\frac{4\sin^3 2x - 3\sin 2x}{\cos 3x} = 0$ (№ 23.30 б; здесь впервые речь идет об отсеве посторонних корней и об объединении решений), $x^2 - 2x\cos \pi x + 1 = 0$ (№ 23.32 а), $\cos^5 x + \sin^4 x = 1$ (№ 23.33 а), $2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5$ (№ 23.35 а); здесь приходится сравнивать наименьшее значение одной части уравнения с наибольшим значением другой), $\cos x + \sqrt{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = 0$ (№ 23.37 б). Решения всех этих уравнений приведены во второй части настоящего пособия.

К теме «Тригонометрические уравнения» мы возвращаемся позднее в **§ 31**, которым завершается глава 5, посвященная формулам тригонометрии. Там рассматриваются метод введения вспомогательного аргумента, универсальная подстановка и другие методы решения тригонометрических уравнений.

Завершая разговор о главе 4, ответим еще на один вопрос, который обычно беспокоит учителей, особенно в начале изучения темы «Тригонометрические уравнения»: обязательно ли при записи разных серий решений уравнения использовать в качестве параметра разные буквы? Возьмем для примера уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$. Решая его в § **23** (пример 2), мы получили: $\cos x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$. Ответ записали следующим образом: $x = 2\pi k$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. Но если бы мы использовали запись с двумя параметрами: $x = 2\pi k$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, — это тоже было бы правильно. Здесь речь идет о *совокупности уравнений*, т. е. о независимых друг от друга уравнениях. Раз эти уравнения независимы, их решение можно поручить *разным* людям, которые не обязаны согласовывать свои записи: они могут в качестве параметра случайно использовать как одну и ту же букву (например, k), так и разные (например, k и n). А вот в системах тригонометрических уравнений дело обстоит иначе: в системе уравнения связаны, зависимы, уравнения системы решает *один и тот же* человек, который обязан в разных уравнениях использовать разные буквы. В системах уравнений это принципиально, в совокупностях уравнений — не принципиально.

ТЕМА 5

Преобразование тригонометрических выражений

Пятая глава учебника посвящена выводу основных формул тригонометрии и показу многочисленных примеров их использования для упрощения тригонометрических выражений, для доказательства тригонометрических и обратных тригонометрических тождеств, для вычисления значений тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, для решения тригонометрических уравнений и т. д. Обратите внимание на то, что тригонометрические уравнения решаются постоянно во всех параграфах главы 5. На протяжении всего периода изучения этой главы отрабатывается *техника* решения тригонометрических уравнений, в то время как вся *идеология* решения тригонометрических уравнений изучена ранее, в главе 4.

Обратите внимание на то, что доказательство теоремы сложения не открывает, а завершает § **24** — начальный параграф главы 5. Мы хотим, чтобы ученик привык самостоятельно читать учебник, но для этого надо создать ему комфортные условия. Если в начале параграфа он встретит технически сложное доказательство, велика вероятность того, что он сразу же закроет книгу и не увидит главного — образцов применения новых формул. Поэтому в сложных случаях мы предпочитаем сначала показать учащемуся, как работают формулы. Пусть он к ним привыкнет. «Прочувствовав» формулы, он спокойнее воспримет сложные рассуждения, связанные с их доказательством. Та же нехитрая педагогическая уловка используется и в § 25.

Выскажем свое отношение к вопросу о запоминании многочисленных формул тригонометрии. По большому счету не следует заставлять школьников заучивать эти формулы. Пусть таблица формул в виде культурно организованной информации висит в кабинете математики, а школьники с помощью наглядного материала пусть учатся находить нужную информацию и применять ее в конкретных примерах. Наиболее важные формулы учащиеся постепенно запомнят без всякого принуждения.

Как правило, учителя математики не склонны поддерживать наш предыдущий пассаж. А как же, спрашивают они, ученики будут писать контрольные работы или сдавать экзамены, где пользоваться шпаргалками не разрешается? Это на самом деле серьезный вопрос, но ответ на него очевиден. Если ваша основная цель — обучение как подготовка к экзамену, то вы будете заставлять школьников заниматься бессмысленной зубрежкой. Если же ваша основная цель — обучение и развитие, то на первый план выйдет умение находить информацию и применять ее. Но когда придет время непосредственной подготовки к экзамену, скажите своим питомцам примерно следующее: «На экзаменах свои правила, свои законы. Половину формул тригонометрии вы выучили в процессе их непосредственного использования на практике, знаете, как структурированы основные формулы, оценили их важность. Но на экзамене не будет наглядных пособий и подручных средств, придется на этот период активизировать память».

Завершая разговор о формулах тригонометрии, обсудим еще один существенный вопрос: как помочь учащимся при решении конкретного достаточно сложного примера осуществить удачный выбор той или иной формулы. Один рецепт не вызывает сомнений: если можно использовать формулы приведения, то с них и следует начать. А как быть в остальных случаях? Оказывается, в тригонометрии, если перейти на жаргон, действуют «три тупых закона» (в том смысле, что их бездумное «тупое» применение часто оказывается путеводной звездой решения примера):

Закон № 1. «Увидел сумму — делай произведение».

Закон № 2. «Увидел произведение — делай сумму».

Закон № 3. «Увидел квадрат — понижай степень».

Удивительно, но если вы не знаете, за что «зацепиться», с чего начать преобразование тригонометрического выражения, начинайте с использования одного из этих законов, и в большинстве случаев (по крайней мере на школьном уровне) все сложится удачно.

Приведем в качестве иллюстрации пример 3 из § 28, в котором требуется решить уравнение $\cos^2 x + \sin^2 3x = 1$. Сначала применим третий закон — увидев квадрат, понижай степень:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1,$$
$$\cos 2x - \cos 6x = 0.$$

Теперь можно применить первый закон — увидев сумму, делай произведение:

$$-2 \sin 4x \sin 2x = 0;$$
$$\sin 4x = 0; \ \sin 2x = 0;$$
$$x = \frac{\pi n}{4}; \ x = \frac{\pi n}{2}.$$

И остается только учесть, что первая серия содержит в себе вторую, а потому ответ можно записать в виде $x = \frac{\pi n}{4}$.

ТЕМА 6

Комплексные числа

Появление этой темы в нашем учебнике обусловлено несколькими причинами. Во-первых, тема «Комплексные числа» традиционно входила в программы по математике для классов старшей школы с углубленным изучением математики. Вопрос о совпадении программ в классах с углубленным изучением математики (математических классах) и в классах с профильным уровнем преподавания математики к настоящему времени, к сожалению, не решен однозначно. Наш прогноз состоит в том, что профильный уровень — это в среднем несколько ниже, нежели уровень математических классов. В реальности в 10 классе с профильным уровнем математической подготовки будет много учеников, которые в основной школе просто учились по математике на «хорошо» и «отлично» и если бы не профилизация, то ни в какие математические классы не пошли бы.

Во-вторых, эта тема включена в государственный стандарт среднего (полного) общего образования по математике (профильный уровень). Для ясности приведем выдержку из стандарта (раздел «Числовые и буквенные выражения»): «Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа. *Возве-*

дение в натуральную степень (формула Муавра). Основная теорема алгебры». (Курсивом в тексте стандарта выделен материал, который подлежит изучению, но не включается в Требования к уровню подготовки выпускников.)

В-третьих, комплексные числа важны не только сами по себе, но и как область математики, в которой в полную силу работают знания и умения, полученные учащимися при обучении алгебре и тригонометрии. Если, например, в связанной паре учебных тем «Тригонометрия» и «Комплексные числа» методический акцент делать на вторую тему, то мы получаем примеры того, как в важном разделе алгебры применяются только что пройденные тригонометрические функции, уравнения и преобразования. Если же ставить во главу угла тригонометрию, то комплексные числа образуют своего рода конкретный полигон для повторения и закрепления только что полученных знаний. Например, в теореме о тригонометрической записи комплексных чисел самым серьезным образом используется подробно изученная в теме 3 числовая окружность, теорема о произведении и частном комплексных чисел основана на формулах косинуса и синуса суммы и разности двух чисел. Таким образом, тема 6 самым естественным образом продолжает темы 3—5.

Все же не стоит начинать изучение комплексных чисел с тезиса о том, что «...тут важна тригонометрия». Связь с тригонометрией естественно возникнет после геометрической интерпретации комплексных чисел на координатной плоскости. Куда более фундаментальным свойством поля (или системы) комплексных чисел является его *алгебраическая замкнутость*. Переход от действительных чисел к комплексным является последним и завершающим шагом во всем изучении понятия числа в школьном курсе математики. В сжатом виде последовательность переходов от $\boldsymbol{N}$ к $\boldsymbol{Z}$, от $\boldsymbol{Z}$ к $\boldsymbol{Q}$, от $\boldsymbol{Q}$ к $\boldsymbol{R}$ и, наконец, от $\boldsymbol{R}$ к $\boldsymbol{C}$ представлена в таблице на с. 228 учебника. Мы рекомендуем начинать введение комплексных чисел с того или иного варианта обсуждения этой таблицы. Вот краткая схема такого разговора.

а) Натуральные числа — вещь понятная и хорошая, но, например, уравнение вида $x + a = b$ может не иметь корней, если мы работаем *только* с натуральными числами. Чтобы такие уравнения всегда имели корни, вводят целые числа.

б) Целые числа обладают рядом преимуществ перед натуральными, но, к примеру, уравнение $ax = b$ (где $a \neq 0$) может не иметь корней в целых числах. Чтобы такие уравнения всегда имели корни, вводят рациональные числа.

в) В рациональных числах любые линейные уравнения $ax + b = 0$, $a \neq 0$ имеют корни. Но это может быть не так для квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Приходится расширять множество рациональных чисел, переходить к действительным числам.

г) В действительных числах квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ имеют корни, но *только если* дискриминант $D = b^2 - 4ac$ неотрицателен. Если $D < 0$, то корней нет. Например, действительных корней нет у простейшего квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$.

д) Теперь мы переходим к изучению множества $\boldsymbol{C}$ новых, комплексных чисел. Это множество включает в себя все действительные числа, но оно шире множества $\boldsymbol{R}$. Оказывается, что в этих новых числах *любое квадратное уравнение имеет корни.* Более того, и любое уравнение четвертой степени, и любое уравнение тысячной степени, и вообще любое уравнение вида $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ имеет корни в комплексных числах (основная теорема алгебры). Именно этот факт и означает *алгебраическую замкнутость* системы комплексных чисел: с алгебраической точки зрения к комплексным числам уже нет нужды что-либо добавлять.

Кратко говоря, $\boldsymbol{C}$ получается из $\boldsymbol{R}$ «добавлением» только одного нового числа i, для которого $i^2 = -1$, и всех линейных комбинаций вида $a + bi$ с действительными коэффициентами a и b. Поразительно, что при «добавлении» единственного корня специального квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$ мы переходим к числам, в которых и любое квадратное, и любое кубическое, и любое уравнение n-й степени имеют корни.

В § 32 речь идет о сложении, вычитании, умножении и делении комплексных чисел, записанных в виде $z = a + bi$. В задачнике мы отводим заметное место (№ 32.5—32.9) действиям с чисто мнимыми числами $z = bi$. Их следует отработать не торопясь, чтобы потом не возникло сложностей в арифметических действиях с числами общего вида $z = a + bi$. Хотя мы и выводим формулы для произведения $(a + bi)(c + di)$ и частного $\dfrac{a + bi}{c + di}$ и даже в учебнике заключаем их в рамочки, но настоятельно не советуем требовать от учащихся заучивать эти формулы наизусть. Самое главное, чтобы ученики прочно усвоили: в первом случае надо раскрыть скобки и использовать равенство $i^2 = -1$, а во втором случае надо числитель и знаменатель домножать на $c - di$. После отработки деления на конкретных примерах становится значительно более естественным отдельное введение понятия комплексно-сопряженных чисел: ведь они уже нам знакомы и хорошо помогали при выполнении операции деления. Хотя операция перехода к сопряженному числу крайне проста с алгебраической точки зрения, мы уделяем ей почти две страницы учебника — столько же, сколько умножению и делению. Ведь это качественно новая операция, у которой нет аналога в действительных числах. Свойства 1—6, доказанные в **§ 32**, показывают, как переход к сопряженному числу выглядит для суммы, разности и произведения комплексных чисел. Достаточно объемный соответствующий параграф задачника мы постарались организовать так, чтобы, во-первых, детально отработать умножение на мнимую единицу i и выделение действительной Re и мнимой Im частей комплексного числа, и, во-вторых, показать, как привычные типы задач (уравнения, системы уравнений, прогрессии, задачи с параметром) выглядят в новой ситуации.

§ 33 крайне прост с формальной точки зрения. В нем нет новых определений, теорем и каких-либо доказательств. По существу, речь тут идет о «рисовании». Точнее, о построении модели — геометрическом изображении комплексных чисел в виде точек координатной плоскости. Тем не менее, с методической точки зрения изложенный материал крайне важен. Он является своего рода мостиком между введенными новыми понятиями (**§ 32**) и всем дальнейшим материалом, который базируется именно на геометрической модели множества комплексных чисел. Следует максимально явно подчеркнуть аналогию «действительные числа — координатная прямая» и «комплексные числа — координатная плоскость» формальными объектами и их наглядным изображением. Важен этот материал и для закрепления связей с курсом геометрии, так как тут речь идет о векторах и об операциях над ними. Суммируя, можно сказать, что материал **§ 33** — это визуализация материала **§ 32**. Набор упражнений в соответствующем параграфе задачника представляет собой серию заданий на геометрическое истолкование различных алгебраических ситуаций: изобразить на комплексной плоскости число, множество чисел или последовательность чисел с тем или иным условием, изобразить множество решений неравенства и т. п. Активно используются обозначения Re z и Im z действительной и мнимой частей.

§ 34 — самый большой и по объему, и по количеству теорем, и по числу крайне важных новых понятий. В этом параграфе соединяются вместе алгебраические и геометрические представления о комплексных числах. Модуль, аргумент, умножение и деление комплексных чисел — эти понятия подробно разбираются как с алгебраической, так и с геометрической точек зрения. Такое соединение базируется на тригонометрической форме записи комплексных чисел. Именно здесь используются знания по тригонометрии, полученные в главах 3—5. Большинство примеров в учебнике, как и большинство заданий задачника, направлены на отработку умения постепенно переходить от алгебраической к тригонометрической форме записи. Сначала модуль, затем аргумент, их геометрический смысл, потом сама тригонометрическая форма записи. Теорема 5 об умножении комплексных чисел в тригонометрической форме («модули перемножаются, аргументы складываются») предваряется примером 5, в котором эта теорема получена для одного конкретного числа $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° + i\sin 45°$. Сначала вычисляются его степени z^2, z^3, z^7, потом они изображаются геометрически и делается пропедевтический вывод о правиле «сложения аргументов».

Периодичность косинуса и синуса делает неоднозначной тригонометрическую форму записи: $\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n) + i\sin(\alpha + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Среди всевозможных форм такой записи выделяют одну, в которой косинус и синус берутся именно от аргумента комплексного числа. Такую форму записи мы называем *стандартной* тригонометрической формой записи. Получается довольно длинный словесный оборот, и в реальной учебной практике слово «стандартная» довольно часто в разговорной речи просто пропускают. Все же крайне важно добиваться ясного понимания того, что тригонометрических форм записи одного и того же числа z много, а вот стандартная запись единственна.

Из методических тонкостей изучения этого параграфа отметим также наглядную связь между изображением комплексного числа z и обратного числа $\frac{1}{z}$. Надо точно понимать, что равенство $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ есть прямое следствие теоремы 5 и определения числа $\frac{1}{z}$. Действительно, $0 = \arg 1 = \arg\left(z \cdot \frac{1}{z}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z}\right)$. Значит, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Обращаем внимание читателя на то, что свойство 7) модуля лишь проиллюстрировано геометрически: оно сведено к неравенству треугольника. Однако это свойство можно доказать и чисто алгебраически. Делается это так. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ и доказываемое неравенство $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ запишется в виде

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат, раскрытия скобок и приведения подобных получится неравенство

$$ac + bd \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Оно, очевидно, верно, если его левая часть отрицательна. Если же левая часть неотрицательна, то после возведения в квадрат получим:

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leqslant a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2;$$
$$0 \leqslant b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2;$$
$$0 \leqslant (bc - ad)^2.$$

Последнее неравенство верно. Возвращаясь назад, получим, что верно и доказываемое неравенство.

Любопытным приложением к теореме 1 ($|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$) является хорошо известное из истории математики утверждение о натуральных числах: «Если два числа представимы в виде суммы квадратов целых чисел, то и произведение этих двух чисел также представимо в виде суммы квадратов целых чисел». Действительно, если $n = a^2 + b^2$, $k = c^2 + d^2$, то по равенству, проверенному в доказательстве теоремы 1, получаем:

$$nk = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2,$$

и из целочисленности a, b, c, d следует целочисленность $ac - bd$ и $bc + ad$. Без комплексных чисел тождество $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ выглядит искусственным.

После § **34** можно было бы сразу перейти к возведению комплексных чисел в целую степень (формула Муавра) и только после этого переходить к извлечению корней. Но мы решили шаг за шагом разобраться сначала с извлечением квадратных корней из отрицательных действительных чисел, с квадратными уравнениями с действительными коэффициентами, с квадратными корнями из комплексных чисел и с произвольными квадратными уравнениями. Ведь комплексные числа в основе своей и были введены в результате рассмотрения квадратных уравнений и квадратных корней. Весь этот «квадратный» материал собран и представлен в § **35**. Для нахождения $\sqrt{z}$ даны два способа, соответственно в алгебраической и в тригонометрической форме записи числа z (теоремы 2 и 3). Подчеркнем, что для сокращения доказательства теоремы 3 мы используем частично теорему 2. Между этими теоремами есть серьезные методические различия. Формулу из теоремы 2 тяжело запомнить, она слишком сложна по структуре. Однако на практике совсем не обязательно ее запоминать. Достаточно понимать, что нахождение $\sqrt{a + bi}$ означает нахождение корней уравнения $(x + yi)^2 = a + bi$ и, соответственно, решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b \end{cases}$$

в действительных числах. Формула из теоремы 3, напротив, проста для запоминания, которое необходимо и с практической, и с теоретической точек зрения. Для облегчения этой процедуры мы отдельно формулируем алгоритм извлечения квадратного корня $\sqrt{z}$. Этот алгоритм (правило) следует как можно более тщательно отработать на уроках. Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами не должно вызывать принципиальных трудностей. Ведь все формулы таковы же, как и для действительных чисел. С организационной точки зрения добавляется только один момент: следует отдельно решать вопрос о нахождении $\sqrt{D}$. Если в действительных числах ученики обходятся одним равенством типа $\sqrt{144} = 12$, то в комплексных числах извлечение корня (например, $\sqrt{3 + 5i}$) — это отдельная и довольно кропотливая работа. В тетрадях ее следует оформлять отдельным пунктом. Наконец, мы дважды (с. 258 и с. 261 учебника) подчеркиваем тот факт, что $\sqrt{25} = 5$, если мы рассматриваем 25 как действительное число и корень извлекаем в действительных числах. А вот если 25 понимается как комплексное число и если квадратный корень извлекают в комплексных числах, то $\sqrt{25} = \pm 5$.

§ 36 — заключительный параграф главы 6 начинается с теоремы (формулы) Муавра о возведении комплексного числа в натуральную степень. Теорема эта обладает всеми признаками великих теорем: 1) она тривиальна, поскольку все, что нужно для ее доказательства, уже доказано ранее; 2) она имеет полезные следствия. Текст на с. 267 подтверждает тезис 1: теорема на самом деле легко выводится из правила умножения комплексных чисел в тригонометрическом виде. Остальной материал параграфа можно рассматривать как подтверждение тезиса 2. И переход к целым степеням, и возведение в степень чисел на единичной окружности, и извлечение кубических корней, и формулы $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, и нахождение суммы $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$ — все это в основе своей использует формулу Муавра.

Операция извлечения кубических корней изложена в последовательности, максимально повторяющей изложение материала о квадратных корнях. Сначала конкретные примеры с двумя способами вычислений (в алгебраической и тригонометрической формах записи), затем вывод формулы для $\sqrt[3]{1}$, и только после этого формулировка теоремы про нахождение $\sqrt[3]{z}$. Разумеется, после этого та же теорема оформлена в виде некоторого правила (алгоритма). Особо отметим, что на практике этот алгоритм не всегда реализуем, в отличие от случая квадратного корня. Дело в том, что циркулем и линейкой угол всегда можно разделить пополам, но не всегда можно разделить на три равные части (проблема трисекции угла). К каждой теореме и примеру приведен рисунок или несколько рисунков. Быть может поэтому параграф имеет довольно большой объем, хотя учебный материал тут достаточно лаконичен: дело в том, что количество практических примеров с «хорошими» ответами для корней $\sqrt[3]{z}$ сравнительно невелико.

Опытный преподаватель или специалист наверняка отметит, что до завершения всей темы «Комплексные числа» (на школьном уровне) остается полшага. Не хватает только формулы для $\sqrt[n]{z}$. Мы, переносим этот вопрос в 11 класс. Там мы кратко повторим материал 10 класса, разберемся с $\sqrt[n]{z}$ и закончим изложение обсуждением вопроса об отыскании корней произвольных многочленов, т. е. основной теоремой алгебры.

ТЕМА 7

Производная

Предел, производная, интеграл... Должны эти понятия включаться в программу школьного курса математики или нет? Если должны, то зачем, в чем их воспитывающая и развивающая ценность для учеников, в каком объеме и на каком уровне строгости излагать их в школьных учебниках и на уроках алгебры и начал анализа? Эти вопросы постоянно находятся в зоне повышенного внимания педагогической общественности.

Попытаемся ответить на *первый и второй вопросы*: нужны ли современному школьнику элементы математического анализа, зачем они ему?

В методике преподавания математики есть три ключевых вопроса: *что преподавать*, *как преподавать*, *зачем преподавать*? Главный из этих вопросов — последний, но именно он долгое время был не самым актуальным. Оно и понятно: в авторитарном обществе (в котором все мы так долго жили) не обсуждают *зачем*, обсуждают только *что* и *как*. В современном обществе на первое место выходит вопрос *зачем*.

Если в недавние годы социальный заказ нацеливал педагогическую общественность на то, что главное в образовании — обучение, передача информации, то сегодня социальный заказ заключается в том, что главное в образовании — развитие. Поэтому если раньше учили *математике*, то сегодня учат *математикой* (это, конечно, полемическое передергивание, точнее будет сказать так: надо учить *математике* и *математикой*).

Ниже мы несколько раз будем ссылаться на академика *В. И. Арнольда*. Доклад одного из крупнейших математиков современности «Жесткие и мягкие математические модели» (сентябрь 1997 г.) содержит важные мысли о проблемах математического образования. По его мнению, основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Значит, нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций (что как раз и является стержневой идеей нашего курса алгебры 7—11), а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особо значимыми оказываются понятия предела и производной, так как это — основные понятия того языка, на котором говорит природа, определенный золотой фонд общечеловеческой культуры. Безусловно, выпускник средней школы должен иметь представление о пределе и производной, об их применении для исследования реальных процессов.

Обсудим третий вопрос: каким должен быть уровень предъявления школьнику элементов математического анализа?

Сейчас почти никто не оспаривает тезис о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями. В учебном предмете не обязательно соблюдать законы науки математики (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т. п.), зачастую более существенны законы педагогики и особенно — психологии. Опираясь на этот тезис, начнем с обсуждения очень трудного вопроса, который мучает и учителей, и авторов учебников, и составителей программ, и ученых-математиков, методистов, педагогов: что делать в школе с понятием предела.

Были разные варианты: от использования в школе формального определения предела до попытки вообще запретить упоминание самого термина «предел». Как всегда, требуется отбросить крайние позиции и обсудить проблему с научно-методической и психолого-педагогической точек зрения.

Почему попытка введения в школу строгого определения предела была apriori обречена на провал?

Во-первых, надо учесть, что и в истории математики формирование понятия предела шло болезненно и туго. Пределами пользовались на наглядно-интуитивном уровне за много веков до введения формального определения, предложенного О. Коши в начале XIX в. Это не случайно, ведь в обычном «$\varepsilon - \delta$ определении» того, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ $(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$, заложено внутреннее противоречие: на статическом языке (языке неравенств) описана динамическая ситуация (процесс приближения к предельному значению). Этого долго не могли постичь математики, чего уж требовать от школьников.

Во-вторых, следует упомянуть об измерении уровня сложности определений математических понятий. Один из способов измерения связан с числом кванторов в определении. Например, понятие четности функции — «однокванторное»: *для любого* $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$; в определении присутствует только один квантор общности — «для любого». Понятие ограниченности функции сверху — «двухкванторное»: *существует* число M такое, что *для всех* $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) < M$; в этом определении присутствуют два квантора: квантор существования $\exists$ и квантор общности $\forall$. Однокванторное определение посильно среднему школьнику, двухкванторное (ограниченность, экстремум, наибольшее и наименьшее значения функции, периодичность функции) требует напряжения его умственных сил и вдумчивой, неспешной работы учителя; это та планка, выше которой в общеобразовательной школе не прыгнуть. А теперь взгляните на приведенное выше формальное определение предела — это определение с тремя кванторами, т. е. по нашей условной иерархии определение третьего уровня сложности, не говоря уже о его перегруженности знаками модулей и неравенств.

Итак, совершенно очевидно, что учащемуся в силу его возрастных особенностей и недостаточной математической культуры не по силам «трехкванторное» определение предела. Значит, в школе следует отказаться от *жесткой модели* (формального определения), заменив ее *мягкой моделью* — интуитивным представлением о пределе.

В началах математического анализа есть три вида предела: предел числовой последовательности, предел функции на бесконечности и предел функции в точке. Предел функции на бесконечности в российской общеобразовательной школе в последние годы почти не рассматривается, упоминается (и то, как правило, очень невнятно) лишь предел в точке. На наш взгляд, начинать следует (после разговоров о пределе последовательности, чему посвящен § 38) именно с предела на бесконечности. Это диктуется дидактическими соображениями: если опираться на такие принципы дидактики, как связь с жизнью, связь с имеющимся опытом, то придется согласиться, что понятие предела в точке не имеет дидактической подоплеки, в то время как с пределом на бесконечности в этом смысле все в порядке. Например, процесс остывания воды в чайнике до комнатной температуры моделируется с помощью предела на бесконечности. Учащимся знакомо понятие горизонтальной асимптоты, а наличие у графика функции горизонтальной асимптоты — это геометрическая модель предела функции на бесконечности.

В § 38 и 39 упоминаются теоремы об арифметических операциях над пределами, рассматриваются несложные примеры на их вычисление. Но не это главное. Главное, чтобы учащиеся могли геометрически интерпретировать запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ как существование у графика функции $y = f(x)$ горизонтальной асимптоты $y = b$, и, обратно, глядя на график функции, имеющей горизонтальную асимптоту, переходить к аналитической модели (с использованием символа предела). Важно научить их конструировать эскизы графиков функций с заданными свойствами, например: построить график функции $y = f(x)$, для которой $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 5$, причем функция непрерывна на всей числовой прямой (рис. 2).

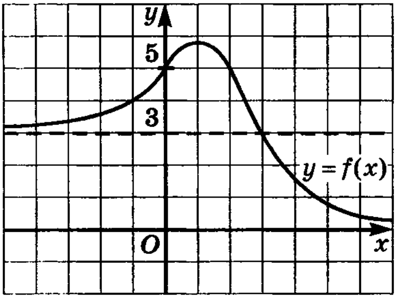


Рис. 2

Вообще любое сколько-нибудь сложное математическое понятие должно изучаться постепенно: сначала на наглядно-интуитивном, потом на рабочем (описательном) уровне, и только после этого можно выходить на формальный уровень. С понятием предела мы в школе на формальный уровень не выходим. Определение предела числовой последовательности дается в § 38 сначала на наглядно-интуитивном, а затем на рабочем уровне. Определения же предела функции как на бесконечности (§ 39, п. 1), так и в точке (§ 39, п. 2) остаются на наглядно-интуитивном уровне.

При изучении производной основное внимание следует уделить модели $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ее геометрическому и физическому истолкованию (этому посвящен § 40, но первые представления о приращении аргумента, приращении функции и о пределе их отношения даны в опережающем режиме уже в конце § 39). Вряд ли есть смысл делать акцент на отработку умений вычислять производную — это довольно бесполезное занятие, осуществляемое по готовым рецептам, ничего не дающим для развития. Гораздо важнее научить «видеть» приложения производной, опираясь на геометрические иллюстрации, именно «видеть», а не пытаться их формально доказывать, тем более что в школе попытки строгих доказательств, скажем, теоремы о том, что если $y' > 0$, то функция возрастает, или теоремы о необходимых условиях экстремума, обречены на провал. Для этого нужны теоремы Ферма и Лагранжа, которые в общеобразовательной школе строго доказать все равно не удастся;

вводить же их без доказательства, опираясь на геометрические иллюстрации, чтобы потом применять только для доказательства указанных выше теорем, нецелесообразно, — лучше использовать интуицию и наглядность непосредственно для нужных теорем. Но учащиеся должны знать, что мы лишь знакомим их с элементами математического анализа (имеющими большое общекультурное значение), что большинство проводимых рассуждений не претендуют на формальную строгость, а являются лишь правдоподобными рассуждениями, что строгие доказательства будут даны в вузе.

В. И. Арнольд пишет: «Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое — за пространственную ориентацию, интуицию и все, необходимое в реальной жизни. У “математиков-исчислителей”... гипертрофированно левое полушарие, обычно за счет недоразвития правого... Доминирование математиков этого типа и привело к тому засилью аксиоматическо-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе), на которое общество естественно и законно реагирует резко отрицательно. Результатом явилось повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее изничтожением. Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга». И последняя цитата: «Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики».

Итак, *первый лозунг*: меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! *Второй лозунг*: больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга! Преподавать в постоянном режиме жесткого моделирования легко — не надо думать ни о целеполагании, ни о мотивации, ни о пропедевтике, ни о психолого-педагогических законах обучения и развития. Использовать же в преподавании режим мягкого моделирования трудно — это требует от учителя творческого подхода. В нашем учебнике по отношению к элементам математического анализа превалирует режим мягкого моделирования; переход на формальный уровень — дело высших учебных заведений.

Итак, первые два параграфа главы 7 (§ 37 и 38) посвящены последовательностям. По большому счету материал, содержащийся в них, имеет (для школьного курса) вспомогательный характер. Здесь существенны три момента, и именно на них советуем сделать упор в обучении. Во-первых, понятие предела последовательности интуитивно воспринимается учащимися легче, чем понятие предела функции непрерывного аргумента, что целесообразно использовать при первом знакомстве с теорией пределов. Во-вторых, открывается возможность показа им важной и новой для них математической модели — бесконечной суммы (т. е. числового ряда) — на примере суммы бесконечной геометрической прогрессии. В-третьих, закладывается теоретическая база для введения в дальнейшем (в 11 классе) тонкого понятия степени с иррациональным показателем. Она представляет собой совокупность следующих фактов, сформулированных в учебнике:

1) если $0 < a < 1$, то последовательность (a^n) убывает;

2) если $a > 1$, то последовательность (a^n) возрастает;

3) если последовательность сходится, то только к одному пределу;

4) если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (*теорема Вейерштрасса*).

Первые два факта комментариев не требуют. Теорему Вейерштрасса в школе доказать нельзя. Что же касается теоремы о единственности предела, то при желании (а главное, при наличии времени) доказать ее в классе можно, причем достаточно строго и изящно. Приведем это доказательство.

Предположим, что последовательность (y_n) имеет два различных предела: $\lim y_n = b$ и $\lim y_n = c$, причем $b \neq c$, например $b < c$. Возьмем две непересекающиеся окрестности точек b и c (рис. 3). Так как b — предел последовательности, то вся последовательность, начиная с некоторого номера n_1, попадает в окрестность точки b. Так как c — предел последовательности, то вся последовательность, начиная с некоторого номера n_2, попадает в окрестность точки c. Пусть n_0 — наибольшее из чисел n_1, n_2. Тогда получается, что, начиная с номера n_0, вся последовательность содержится одновременно и в окрестности точки b, и в окрестности точки c. А это невозможно, поскольку окрестности мы с самого начала выбрали непересекающимися. Наше предположение неверно, следовательно, двух разных пределов у последовательности быть не может.

Об уровне предъявления учащимся понятий предела функции на бесконечности и в точке, чему посвящен **§ 39**, мы уже говорили выше. И вновь подчеркнем полезность примеров на конструирование геометрических моделей функций с заранее заданными свойствами, включая существование предела. Приведем пример одного из таких рекомендуемых заданий (аналогичные упражнения есть в задачнике).

Рис. 3

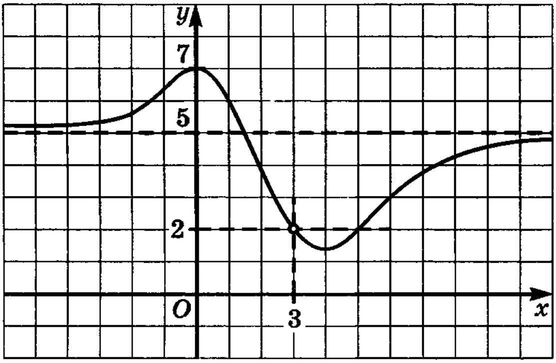


Рис. 4

Построить график функции $y = f(x)$, обладающей всеми указанными свойствами: а) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$; в) $f(3)$ не определено; г) $f(0) = 7$ (одна из возможных графических моделей представлена на рис. 4).

В школе для вычисления $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ достаточно знать три обстоятельства (все они в той или иной степени упомянуты в учебнике).

1. Все функции, которые встречаются в школьном курсе математики (рациональные, иррациональные, тригонометрические и т. д.), непрерывны в любой точке, в которой они определены. Иными словами, если $f(a)$ существует, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (см. примеры 2 и 3 в § 39).

2. Если надо вычислить

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } g(a) = 0,$$

то в случае, когда $f(a) \neq 0$, пишут

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

прямая $x = a$ является в этом случае вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Этот факт упоминается в учебнике позднее — в § 45.

3. Если и $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$ (в математическом анализе этот случай называют обычно так: «неопределенность вида $\frac{0}{0}$»), то чтобы вычислить

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

нужно выполнить тождественные преобразования дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$. В простейших случаях неопределенность исчезает в момент сокращения дроби (см. пример 4 в § 39, а также приведенное во второй части данного пособия решение № 39.32).

Весьма существенным в плане продвижения учащихся в освоении математического языка является п. 3 § 39, где проведена вся подготовительная работа по конструированию основной модели — производной. Вводятся понятия приращения аргумента и приращения функции, обозначения: Δx, Δy, $x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и даже (в примерах 6 и 7) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций $y = kx + m$ и $y = x^2$. То есть фактически опережающим образом выведены формулы для вычисления производных указанных функций (естественно, без упоминания термина и обозначения производной). Заметим, что аналогичные упражнения имеются и в соответствующем параграфе задачника.

Ключевое положение в главе 7 занимает § 40 «Определение производной». Он начинается с двух классических задач — задачи о скорости и задачи о касательной, — процесс решения которых приводит к новой математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. В учебнике вскользь сказано о том, что многие задачи из других областей знаний приводят в процессе решения к такой же модели. При возможности следует наполнить эту мысль конкретным содержанием. Приведем два физических примера.

1) Если закон изменения количества электричества выражается формулой $Q = Q(t)$, где t — время, и если через поперечное сечение проводника за время Δt проходит количество электричества ΔQ, то $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ — средняя сила тока, а мгновенная сила тока в момент времени t выражается формулой

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

2) Если закон распределения массы в линейном неоднородном стержне выражается формулой $m = m(l)$, где l — длина части стержня от начальной до текущей точки, и если на участке длины Δl сосредоточена масса Δm, то $\frac{\Delta m}{\Delta l}$ — средняя плотность

распределения массы, а линейная плотность выражается формулой

$$\rho = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}.$$

Принципиальное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи из разных областей знаний приводят к одной и той же математической модели. А что такое математика? Это наука о математических моделях. Значит, если жизнь выдвигает на повестку дня новую модель, дело математиков специально заняться освоением этой новой модели в отрыве от ее конкретного содержания. Заняться изучением новой модели означает, что нужно: 1) присвоить ей новый термин; 2) придумать для нее новое обозначение; 3) изучить правила оперирования с новой моделью и сферу ее применения. Для рассматриваемой модели используется термин *производная* и обозначение y', а правила оперирования и сфера приложимости модели изучаются в нашем учебнике в дальнейших параграфах.

В п. 2 § 40 приведен пятишаговый алгоритм отыскания производной функции $y = f(x)$, которым мы затем неоднократно пользуемся в учебнике. Сделаем два существенных комментария к нему.

1. Первый шаг алгоритма выглядит так: «зафиксировать значение x, найти $f(x)$». Казалось бы, этот шаг не нужен (как правило, в школьных учебниках его нет), поскольку и в самом задании содержится $f(x)$, и здесь используется та же запись $f(x)$. На самом деле этот шаг очень важен как с методологической точки зрения (записи $f(x)$ в исходном задании и на первом шаге одинаковы по форме, но не по содержанию: в задании x — переменная величина, а на первом шаге — постоянная), так и с психолого-педагогической точки зрения — это этап сосредоточения на задаче, вхождения в процесс решения.

2. Нельзя допускать, чтобы понятия приращение аргумента и приращение функции появились впервые при введении производной, ведь здесь указанные понятия не цель, а средство для усвоения нового понятия (производной). Поэтому мы и ввели указанные термины и «странные» обозначения с треугольником около переменной со «странным» прочтением («дельта икс») в предыдущем параграфе, чтобы учащиеся успели приобрести хотя бы небольшой опыт нахождения Δy, Δx, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и даже предела последнего отношения.

Завершая разговор о § 40, прокомментируем заключительные два абзаца этого параграфа. Очень важно научить школьников по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной). Наличие в курсе алгебры и начал анализа достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным с литературной точки зрения и многоплановым. Ученик должен уметь составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику. Мы постоянно приучали его видеть по графику область определения функции, ее четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывность, область значений функции. Было бы неплохо научить учащихся снимать с графика функции и информацию о ее дифференцируемости.

Как «на глазок» определить, дифференцируема ли функция, график которой изображен на конкретном рисунке? Ответ на этот вопрос как раз и дается в конце параграфа. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную (иногда в таких случаях говорят о «гладкости» линии, изображающей график функции, и хотя с точки зрения формальных результатов математического анализа это не совсем точно, в школе этот термин при желании можно употреблять), не параллельную оси ординат, то функция дифференцируема в точке. Если же мы имеем «точку стыка», «точку заострения» или точку, в которой касательная к графику параллельна оси ординат, то в этой точке производная функции не существует, функция недифференцируема.

В § 41 разработан технический аппарат для оперирования с новой моделью — речь идет о формулах и правилах вычисления производных. Обращаем ваше внимание на то, что набор формул дифференцирования пока крайне узок, он включает в себя всего 8 формул для отыскания производных функций $y = f(x)$, где $f(x) = C$, x, $kx + m$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$. В этом же параграфе, но позднее, добавятся формулы дифференцирования для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, а также для функции $y = x^n (n \in N)$. Традиционно на учеников сразу обрушивают все формулы, включая производные степенных, показательных и логарифмических функций. На наш взгляд, это нежелательно, за обилием формул они перестанут видеть главное — исходную математическую модель. В нашем курсе производные степенной, показательной и логарифмической функций появятся в 11 классе. Это позволит в соответствующих местах курса повторить формулы и правила дифференцирования и, что особенно существенно, разные случаи применения производной.

Советуем обратить внимание учащихся на то, что есть *формулы* дифференцирования (для конкретных функций) и есть *правила* дифференцирования (дифференцирование операций сложения, умножения, деления). Следите за тем, чтобы ваши ученики не говорили «правило дифференцирования функции $y = x^2$» или «формула дифференцирования суммы»; обратите их внимание также на то, что при вычислении производных мы фактически используем двухшаговый алгоритм: сначала применяем то или иное *правило* дифференцирования, а затем используем нужные *формулы*.

Продолжая обсуждение методических особенностей § **41**, обратим ваше внимание еще на три обстоятельства.

Первое обстоятельство. Формулы дифференцирования функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ сообщаются читателю в самом начале параграфа, а доказываются позднее, после рассмотрения ряда примеров. Это — элементарная педагогическая уловка («метод отсроченного доказательства»). Нам всем необходимо, чтобы учащиеся приобщались к чтению учебной литературы. Для этого следует создать комфортные условия, выражающиеся как в довольно мягкой манере подачи материала, так и в том, чтобы достаточно сложные вещи не появлялись в начале параграфа, не отпугивали их. Поэтому в целом ряде мест учебника мы поступаем так же: сообщаем некоторый факт, приводим примеры его использования (чтобы читатель привык к новому факту и приобрел некоторый положительный опыт его использования) и только потом приводим соответствующее доказательство (об этом мы уже говорили выше, в теме 5).

Второе обстоятельство. Обратите внимание на блочный характер построения системы упражнений в соответствующем параграфе задачника: сначала предлагается серия упражнений, где требуется найти производную заданной функции, затем значение производной в конкретной точке, потом мгновенную скорость, далее — угловой коэффициент касательной, впоследствии — угол между касательной к графику функции в заданной точке и осью абсцисс.

Третье обстоятельство. Примеры, связанные с касательной к графику функции, полезно начинать решать до того, как выведено общее уравнение касательной (точно так же, как упражнения на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции следует решать в курсе алгебры 7—9 классов, естественно, без использования производной, что мы и делали в наших учебниках и задачниках). Это даст возможность учащимся достаточно хорошо прочувствовать геометрический смысл производной и подготовиться к выводу уравнения касательной в общем виде. С этой целью и приведен пример 2 в § **41**, где требуется составить уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x = 1$ (аналогичные упражнения имеются и в соответствующем параграфе задачника). Кстати, в начале § **43**, где выводится уравнение касательной, внимание учащихся как раз и обращается на то, что некоторый опыт проведения касательных и составления уравнений касательных ими уже накоплен.

Несколько слов о **§ 43**. Обратите внимание на то, что в учебнике, вопреки сложившейся традиции, абсцисса точки касания обозначается не x_0, а буквой a. Это, конечно, не очень существенно, но полезно в более сложных случаях, когда абсцисса точки касания неизвестна и она фактически выступает в роли параметра.

В учебнике и задачнике вы найдете все основные сюжеты, связанные с задачами на касательную:

— составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику;

— проведение касательной параллельно заданной прямой;

— отыскание угла, который касательная образует с положительным направление оси абсцисс;

— проведение касательной из точки, внешней по отношению к заданному графику;

— нестандартные геометрические сюжеты, связанные с касательной (**§ 43** задачника).

§ 44 посвящен исследованию функций с помощью производной. Эта тема — своеобразная лакмусовая бумажка, с помощью которой проверяется методическая культура учителя математики. Ведь здесь речь идет о теоремах, необходимость знания которых по существу и явилась решающей причиной введения элементов математического анализа в школьный курс математики. В то же время их строгое доказательство требует знания многих фактов математического анализа, которые в школе не рассматриваются. Какой путь выбрать учителю: сообщить теоремы без доказательства и без комментариев, ограничиться наглядно-интуитивными представлениями и правдоподобными рассуждениями, попытаться дать строгие доказательства?

В учебниках и учебных пособиях для общеобразовательной школы встречаются различные варианты. Например, такой: без доказательства, но с опорой на графические иллюстрации формулируется теорема Лагранжа, а затем с ее помощью строго доказывается теорема о связи знака производной с характером монотонности функции на промежутке. С нашей точки зрения, это — не лучший вариант, он нелогичен (а по большому счету неконцептуален): зачем давать геометрическую иллюстрацию теоремы Лагранжа, если можно сразу дать геометрическую иллюстрацию того, что для школы существеннее — связи между знаком производной и характером монотонности функции? Иногда возражают, говоря, что теорема Лагранжа важна сама по себе, ведь недаром ее называют основной теоремой дифференциального исчисления. Это верно, но лишь при условии, что она активно работает (как в вузовском курсе математического анализа). В школе же она используется лишь один раз — в указанном выше случае. К чему же ломать копья?

Второй вариант, который используется в учебных пособиях: заменяют строгие доказательства правдоподобными рассуждениями, основанными на физическом или геометрическом смысле производной. С нашей точки зрения, это вполне приемлемо, но лишь при условии, что правдоподобные рассуждения не выдаются за доказательства (что, к сожалению, сплошь и рядом встречается) — такая подмена понятий наносит значительный ущерб формированию математической культуры школьника.

Именно второй вариант с указанным дополнительным условием и составляет концептуальную основу **§ 44**. Текст этого параграфа вряд ли понравится ревнителям математической строгости, они объявят изложение материала легковесным. Нас это не беспокоит. Главное, чтобы изложение нравилось учителям, было доступно учащимся (и их родителям) и фактологически не противоречило математике как науке. Давайте не забывать, что в школе мы лишь знакомим учащихся с элементами математического анализа, составляющими существенную часть общечеловеческой культуры, формальное изучение этого предмета — удел высшей математики, изучаемой в вузах (что неоднократно подчеркивается в учебнике).

В **§ 45** упоминается общая схема исследования свойств функции и построения ее графика, выработанная в курсе математического анализа (для достаточно сложных случаев, поэтому в школе мы ее во всей полноте не берем). Приведем эту схему.

1. Область определения функции.
2. Исследование функции на периодичность.
3. Исследование функции на четность.
4. Нули функции, точки разрыва, промежутки знакопостоянства.
5. Исследование поведения функции у концов промежутков области определения, отыскание асимптот.
6. Исследование функции на экстремумы и монотонность.
7. Построение графика функции по точкам (с учетом результатов проведенного исследования).

Поясним внутреннюю логику этой схемы. В п. 1—4 фактически дается ответ на вопрос, *где* следует строить требуемый график; в п. 5 и 6 дается ответ на вопрос, *как* строить график. Если мы знаем, где и как строить график, то остается лишь выполнить само построение (п. 7). Обратите внимание, что в примерах 1 и 2 в **§ 45** мы придерживаемся этой схемы (но, разумеется, с естественными купюрами).

В **§ 46** речь идет об отыскании наибольших и наименьших значений функций. За время изучения курса алгебры в 7—9 классах по нашим учебникам и задачникам ученики накопили достаточный опыт отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы решали эту задачу с помощью графика функции. В некоторых случаях могли найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. В более сложных случаях для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции используется производная. Эту мысль, высказанную в начале параграфа, следует довести до учащихся; они должны понимать, что производная в данном случае — не панацея, а лишь одно из возможных средств для достижения цели (далее мы еще раз вернемся к этому).

Наибольшую трудность у учащихся вызывают задачи на оптимизацию. Мы предлагаем решать их по обычной для наших учебников схеме — в виде трех этапов математического моделирования: составление математической модели, работа с моделью, ответ на вопрос задачи, — к чему школьники, учившиеся по нашим учебникам и задачникам в 7—9 классах, привыкли. Обратите внимание, что в учебнике для каждого из этапов даны некоторые рекомендации методического плана. Приведем их здесь и снабдим дополнительными комментариями.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину*, т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить оптимизируемую величину, примите за *независимую переменную* и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите реальные границы изменения независимой переменной (в соответствии с условиями).

3) Исходя из условий, выразите y через x. Математическая модель задачи будет составлена, если вы получите аналитическое выражение функции $y = f(x)$ и укажете ее область определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

4) Для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{наим}$ или $y_{наиб}$ (в зависимости от того, что требуется в условии).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

5) Здесь следует получить конкретный ответ на вопрос задачи (используя термины и фабулу, заложенные в условиях), опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Комментарии к пяти шагам предложенного плана.

Первый шаг плана не такой очевидный, как может показаться на первый взгляд. Задача иногда может быть сформулирована так, что не очень понятно, о какой оптимизируемой величине идет речь (хотя обычно все бывает сразу ясно: найти наибольший объем, найти наибольшую площадь, определить наименьшее время и пр.). Так, в примере **6 § 46** спрашивают: как двигаться курьеру, чтобы прибыть в райцентр в кратчайший срок? Тут учащемуся следует задуматься. В задаче речь идет о выборе маршрута, но тем не менее оптимизируемая величина — время.

Четвертый шаг плана — это самостоятельная чисто математическая задача внутри исходной задачи с реальным содержанием. На этом шаге исходная реальная ситуация нас не интересует (что типично для второго этапа математического моделирования), мы думаем только об отыскании $y_{\text{наиб}}$ или $y_{\text{наим}}$ для функции, составленной на третьем шаге, на промежутке реальных границ изменения независимой переменной, найденном на втором шаге. Естественно, что чаще всего $y_{\text{наиб}}$ или $y_{\text{наим}}$ находится с помощью производной. Но ваши ученики не должны думать, что это закон; для нарушения стереотипа мышления неплохо было бы показать им один-два примера, где наибольшее или наименьшее значение функции можно найти без производной, с помощью элементарных алгебраических или геометрических рассуждений. Вот одна из таких задач.

Задача. Из всех треугольников с данным основанием a и данным углом при вершине α найти треугольник с наибольшей биссектрисой, проведенной к основанию.

Решение. *Первый способ* (*аналитический*).

1. Оптимизируемая величина — длина биссектрисы AD (рис. 5); обозначим ее буквой y.

2. Объявим независимой переменной угол C, обозначим его буквой x; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < \pi - \alpha$.

3. По теореме синусов (для треугольника ABC) имеем:

$$\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ значит, } AB = \frac{a\sin x}{\sin\alpha}.$$

Теперь применим теорему синусов к треугольнику ABD:

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin D}.$$

Отсюда находим, что

$$y = \frac{a\sin x\sin(x+\alpha)}{\sin\alpha\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

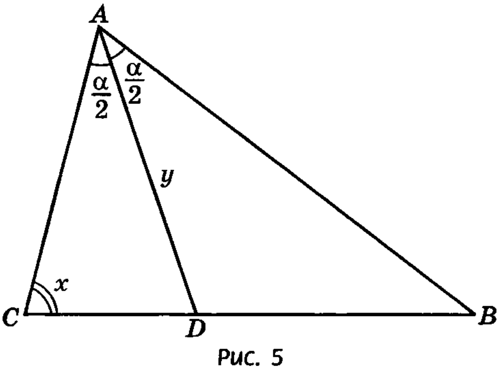


Рис. 5

4. Для функции

$$y = \frac{a \sin x \sin(x + \alpha)}{\sin\alpha \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

надо найти $y_{\text{наиб}}$ на интервале $(0, \pi - \alpha)$. Это сопряжено с определенными техническими трудностями (например, связанными с дифференцированием функции, с решением соответствующего тригонометрического уравнения).

Второй способ (геометрический). Пусть ABC — один из треугольников с заданным основанием и заданным углом при вершине (рис. 6). Опишем около него окружность, тогда вершины всех треугольников с основанием a и углом α при вершине лежат на дуге BAC; один из таких треугольников — равнобедренный, обозначим его BA_1C. Проведем биссектрису AD треугольника ABC и биссектрису A_1D_1 треугольника BA_1C. Докажем, что $A_1D_1 > AD$.

Продолжим обе биссектрисы до пересечения с описанной окружностью — точкой пересечения будет середина M дуги BC (равные вписанные углы BAM и MAC опираются на равные дуги BM и MC). A_1M — диаметр окружности, поэтому $A_1M > AM$. В то же время $MD > MD_1$, тогда

$$A_1M - MD_1 > AM - MD, \text{ т. е. } A_1D_1 > AD.$$

Итак, наибольшую биссектрису имеет равнобедренный треугольник.

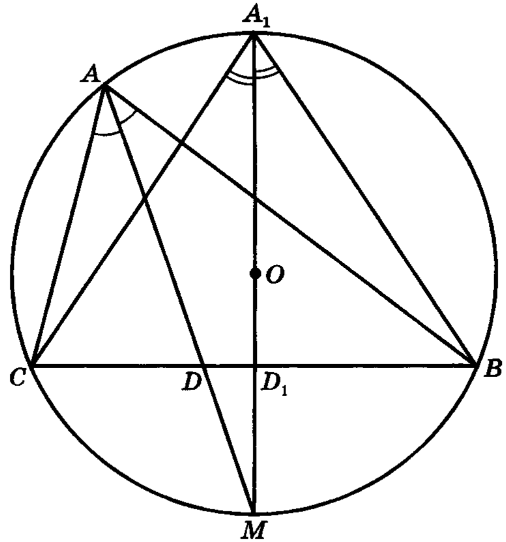


Рис. 6

ТЕМА 8
Комбинаторика и вероятность

В соответствии с письмом Министерства образования Российской Федерации от 23 сентября 2003 г. № 03-93ин/13-03, начиная с 2003/2004 учебного года в содержание школьного математического образования включены элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей, которые будут вводиться в течение трех лет, в качестве апробации. За это время должен быть накоплен опыт преподавания элементов статистики и теории вероятностей, осуществлена переподготовка учителей. В этот период задания по вероятности и статистике не должны включаться в материалы для административного контроля. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей не будут входить и в материалы для итоговой аттестации выпускников основной школы. Как сказано в этом письме, «...изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в основной и старшей школе станет обязательным после утверждения федерального компонента государственного стандарта общего образования».

Различные варианты объема и характера изложения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей (более кратко, стохастики) в средней школе неоднократно появлялись и обсуждались на протяжении последних 10—15 лет. Первые версии, входившие в проекты обязательного минимума содержания обучения математике, включали явно избыточный материал вплоть до плотностей непрерывно распределенных случайных величин, их математического ожидания и дисперсии и т. п. В действующем стандарте математического образования зафиксирован объем стохастического материала в форме, более пригодной для включения в рамки традиционных курса алгебры 7—9 и курса алгебры и начал математического анализа 10—11. Во избежание неточностей процитируем стандарт в его стохастической части, относящейся к профильной школе:

«Табличное и графическое представление данных. *Числовые характеристики рядов данных.*

Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. *Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события*».

При написании настоящей версии учебника по алгебре и началам анализа для профильной школы мы в первую очередь ориентировались на приведенную в стандарте тематику. В то же время, по нашей оценке, в ближайшие несколько лет в классах, обучающихся математике на профильном уровне, вполне может оказаться заметное количество учеников, которые практически ни в какой мере не были знакомы с элементами комбинаторики, статистики и теории вероятностей за время обучения в основной школе. Учитывая этот фактор, мы начинаем изложение этой темы с простейшего (но основного) правила комбинаторики — правила умножения. В § 47, кроме собственно правила умножения, основной акцент делается на вывод двух основных комбинаторных формул: $P_n = n!$ — для числа перестановок — и 2^n — для числа всевозможных подмножеств множества, состоящего из n элементов. Факториалы появляются раньше самого понятия «перестановка» просто как удобный способ сокращенной записи ответа во многих комбинаторных задачах, конкретные примеры которых разобраны ранее с использованием правила умножения. Мы начинаем с правила умножения, интерпретируя его как подсчет числа клеток в прямоугольной таблице, затем излагаем это же правило, используя дерево возможных вариантов. Две основные теоремы, как и правило умножения для n независимых испытаний, доказаны методом математической индукции, приведено строгое определение понятия перестановки элементов конечного множества. В соответствующем параграфе задачника, кроме комбинаторных задач, имеются и чисто алгебраические задания на вычисление значений дробей с факториалами, упрощение и преобразования буквенных выражений, решение уравнений, доказательство неравенств и т. п. Например, решить уравнение $0{,}125n! = (n - 1)! - 90$ или доказать, что $n! > 4^n$ при $n \geqslant 9$.

Если в § 47 из данного множества практически всегда выбирался *один* элемент, то следующий параграф посвящен выбору *нескольких* элементов из заданного конечного множества. § 48 начинается с обсуждения задачи о заполнении таблицы результатов встреч нескольких команд, о подсчете числа рукопожатий между встретившимися друзьями, об определении числа диагоналей многоугольника. Эти простые примеры плавно подводят к отдельному рассмотрению числа неупорядоченных выборов *двух* элементов и, соответственно, к введению символа C_n^2. Потом появляются формулы для числа A_n^2 размещений как непосредственное применение правила умножения из § 47 и устанавливается связь между A_n^2 и C_n^2. Только после этого мы вводим общее понятие числа C_n^k сочетаний. Вообще, практически везде в этой теме мы сознательно выбираем именно такую последовательность изложения: сначала конкретные примеры, затем обсуждение полученных результатов и выделение того нового понятия, которое их объединяет, и только после этого введение нового термина и обозначения. Подчеркнем, что порядок, при котором сначала вводится новый символ (например, C_n^k), его название («цэ из эн по ка»), словесная расшифровка («число выборов...»), и только после этого рассматриваются конкретные примеры и вычисления, представляется нам в этой теме методически несостоятельным.

В § 48 вводятся не только *сочетания*, но и *размещения*, достаточно подробно рассматривается *бином Ньютона*. Приведены доказательства многих комбинаторных фактов: число выборов двух элементов из n данных, формулы для A_n^k, C_n^k и связь между ними, формула бинома Ньютона. Почти во всех этих доказательствах в полной мере работает метод математической индукции и материал предыдущего параграфа. Достаточно широк список примеров и приложений. Например, формула $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ явно выводится из формул для C_n^k, а из биномиальной формулы Ньютона, примененной к частному случаю формулы Муавра $(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x$, получены выражения для $\cos 5x$ и $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Другими словами, подчеркнута и связь с темой «Комплексные числа».

В соответствующем параграфе задачника отметим упражнения 48.18—48.20, в которых требуется исследовать поведение той или иной последовательности, связанной с формулами числа сочетаний или размещений, например: $\frac{C_n^3}{A_{n-1}^3}$, $\frac{A_n^5}{C_{n-2}^3}$ или $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n+2}^4}$. В таких задачах на новом комбинаторном материале происходит повторение графиков базовых функций: квадратичной и дробно-линейной. Кроме того, имеются задания на вычисление пределов числовых последовательностей. Тем самым новый учебный материал интегрируется в рамки уже традиционных для курса алгебры и начал анализа тем.

Числа C_n^k появляются в комбинаторике трижды. Сначала как число сочетаний из n элементов по k — в задачнике такой подход используется в № 48.5—48.13 (подсчет, вычисления, сравнения по величине и т. п.) и 48.14—48.17 (непосредственное использование в комбинаторике). Затем как числовые коэффициенты при разложении выражения $(a + b)^n$ в сумму одночленов, т. е. в биноме Ньютона (в задачнике это № 48.24—48.27). Наконец, как числа, расположенные в треугольнике Паскаля (№ 48.28 и 48.29). Заключительная задача 48.30, в качестве еще одного примера использования бинома Ньютона, соединяет вместе и неравенство Бернулли и доказательство того, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, $0 < q < 1$.

Материал заключительного в этой теме § 49 «Случайные события и их вероятности» преследует различные учебные цели.

С одной стороны, это знакомство с новым понятием вероятности случайного события. Надеемся, что для значительной части учеников это будет повторением знакомых вещей. С самого начала изложения мы настойчиво подчеркиваем, что использование классической вероятностной схемы — это работа в простейшей *модели* реальности, но не в самой реальности. Первый же разобранный в § 49 пример задачи Галилео Галилея, которая, видимо, является одним из первых исторически известных примеров подсчета вероятности, показывает возможность *различных* ответов при *различном* моделировании конкретной ситуации. С другой стороны, новый вероятностный материал является тем учебным полигоном, на котором закрепляются комбинаторные знания из предыдущего § 48, в новых ситуациях повторяется и закрепляется только что пройденный материал. В-третьих, нам важно как можно естественнее подойти к независимым повторениям испытания с двумя исходами. Это наиболее важная с практической точки зрения вероятностная модель (испытания Бернулли), имеющая значительное число приложений. Более подробно испытания Бернулли будут рассмотрены в 11 классе, а в конце 10 класса важно установить «мост между прошлым и будущим», между содержанием учебного материала в двух разных классах.

И в учебнике, и в задачнике примеры и задачи можно условно классифицировать так. Сначала предложены задачи на непосредственное использование классической вероятностной схемы (№ 49.1—49.8). Подсчет вероятностей случайных событий начинается с заданий, связанных с выбором простейшего для курса математики объекта — натурального числа. Во всех случаях выбирают двузначное число. Рассмотрены также геометрические и игровые модели вероятностных ситуаций. Отметим, что в этом цикле задач для нахождения вероятностей хватает простого перебора всех возможностей без систематического использования сочетаний и размещений. Формульная комбинаторика появится в этом параграфе чуть позже. Другими словами, в этом месте учебника мы делаем второй методический концентр: сначала задачи с простым перебором возможностей, потом — с правилом умножения и только потом — с использованием формул для A_n^k и C_n^k.

Затем следует комплекс вопросов, связанный с правилом суммы и формулой вероятности суммы двух событий. Здесь, во-первых, следует отдельно и аккуратно разобраться с суммой и произведением двух событий (теоремы 1 и 2, № 49.9—49.16). Во-вторых, необходимо показать на конкретных примерах, как работает эта формула, например, тщательно отработать формулы $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, связывающие вероятность события и вероятность противоположного ему события. С этой целью рассматриваются следствия 1—5, примеры 3 и 4 учебника и

№ 48.17—48.22 задачника. Во избежание довольно часто встречающегося в вероятностных задачах излишнего тематического разнообразия, во всех этих задачах мы ограничились одной, так называемой урновой, схемой: разноцветные шары вытаскивают из темного ящика и подсчитывают вероятности различных событий. Наряду с умением вычислять вероятность, в некоторых из этих задач необходимы также знания о поведении дробно-линейной функции и владение простейшей техникой нахождения пределов последовательностей. Те пункты, в которых следует перейти к пределу при $n \to \infty$, подготавливают к изучению в дальнейшем «большого» числа независимых повторений одного и того же испытания и являются своего рода пропедевтикой введения понятия статистической устойчивости и простейших форм закона больших чисел.

Наконец, хорошо известные из истории науки две задачи де Мере (примеры 5, 6 и теорема 3 учебника) и № 49.23—49.30 по существу являются заготовкой для рассмотрения в 11 классе последовательностей испытаний Бернулли и перехода к нормальному закону распределения. Впрочем, в 10 классе эти задачи следует воспринимать как естественное продолжение предыдущего цикла задач и получение ответа на вопросы типа «А что получится, если этот процесс повторять много раз?». Типичная постановка вопроса представлена, например, в № 49.28: «Буквы русского алфавита написаны на карточках. Вы случайно вытаскиваете одну карточку, читаете букву, возвращаете карточку и повторяете выбор. Как только появится гласная буква — процедура заканчивается.

а) Какова вероятность того, что никаких повторений не потребуется?

б) Какова вероятность того, что хватит двух повторений?

в) Какова вероятность того, что хватит именно n повторений?

г) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.»

После соответствующих вычислений в пунктах а)—в) мы рекомендуем графически изобразить поведение последовательности найденных вероятностей. Тогда наглядно будет понятна асимптотика их приближения к нулю. Аналогично следует поступить и в № 49.22 в), 49.25 в), 49.27 в), 49.29 б). Решения этих задач, как и других задач, отмеченных символом ●, помещены во второй части настоящего пособия.

ЧАСТЬ 2

Решение некоторых упражнений из задачника

Глава 1

§ 1

1.21. Найти все целочисленные значения параметра a, при которых оба корня уравнения — целые числа:

б) $(a + 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$.

Решение. Поскольку в задаче речь идет о двух корнях уравнения, фактически предполагается, что уравнение — квадратное, т. е. $a + 2 \neq 0$, и, следовательно, мы имеем право преобразовать уравнение к виду приведенного квадратного уравнения: $x^2 + \frac{2a-1}{a+2}x + \frac{a^2 - 5a - 4}{a+2} = 0$. Если корни уравнения — целые числа, то коэффициенты приведенного уравнения — целые числа, в частности, $\frac{2a-1}{a+2}$ — целое число. Но $\frac{2a-1}{a+2} = 2 - \frac{5}{a+2}$, значит, $\frac{5}{a+2}$ — целое число. Это возможно при следующих значениях параметра a: $-7, -3, -1, 3$.

Рассмотрим свободный член приведенного уравнения $\frac{a^2 - 5a - 4}{a+2}$, он тоже должен быть целым числом. Нетрудно убедиться в том, что при каждом из найденных выше значений параметра записанное выражение принимает целочисленное значение. Таким образом, указанные четыре значения прошли и через второе испытание. Но целочисленность коэффициентов — лишь необходимое, но не достаточное условие существования целочисленных корней. Придется для каждого из найденных значений параметра составить квадратное уравнение и проверить наличие целочисленных корней.

Если $a = -7$, то уравнение принимает вид $x^2 + 3x - 16 = 0$, целых корней нет. Если $a = -3$, то уравнение принимает вид $x^2 + 7x - 20 = 0$, целых корней нет. Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, уравнение имеет два целых корня: 1, 2. Наконец, если $a = 3$, то уравнение принимает вид $x^2 + x - 2 = 0$, уравнение имеет два целых корня: $1, -2$.

Ответ: $-1, 3$.

1.25. г) Доказать, что если при некотором натуральном значении n число $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64, то и число $3^{2n+4} - 8(n + 1) - 9$ также делится на 64.

Р е ш е н и е. $3^{2n+4} - 8(n + 1) - 9 = 9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 64n + 64$. В полученной сумме трех слагаемых каждое слагаемое делится на 64, значит, и сумма делится на 64.

В задачнике предлагается учащимся проверить наличие делимости для $n = 1$ и подумать, для каких еще значений n имеет место делимость. При $n = 1$ выражение $3^{2n+2} - 8n - 9$ обращается в 64, т. е. делится на 64. Выше мы доказали, что если при некотором натуральном значении n число $f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64, то и число $f(n + 1) = 3^{2n+4} - 8(n + 1) - 9$ также делится на 64. Поскольку $f(1) \vdots 64$, то и $f(2) \vdots 64$; из $f(2) \vdots 64$ следует, что $f(3) \vdots 64$ и т. д. Таким образом, получаем, что факт делимости имеет место для любого натурального числа n. Это — пропедевтика метода математической индукции.

1.57. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению:

б) $36x^2 - y^2 = 27$; г) $x^2 - 7xy + 6y^2 = 18$.

Р е ш е н и е. б) Преобразовав уравнение к виду $y^2 = 9(4x^2 - 3)$, убеждаемся в том, что $y^2 \vdots 9$, а потому $y \vdots 3$, т. е. $y = 3t$, $t \in \mathbf{Z}$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $36x^2 - 9t^2 = 27$ и далее $(2x - t)(2x + t) = 3$. Произведение двух целых чисел может равняться числу 3 в четырех случаях: 1 и 3, 3 и 1, −1 и −3, −3 и −1; соответственно получаем четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - t = 1, \\ 2x + t = 3; \end{cases} \begin{cases} 2x - t = 3, \\ 2x + t = 1; \end{cases} \begin{cases} 2x - t = -1, \\ 2x + t = -3; \end{cases} \begin{cases} 2x - t = -3, \\ 2x + t = -1. \end{cases}$$

Эта совокупность систем имеет 4 решения: $(\pm1; \pm1)$, соответственно находим 4 пары значений x, y: $(1; 3)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$, $(-1; 3)$.

г) Если левую часть уравнения разложить на множители, получим $(x - y)(x - 6y) = 18$. Есть 12 возможностей для того, чтобы произведение двух целых чисел было равно 18: 1) 1 и 18; 2) 18 и 1; 3) 2 и 9; 4) 9 и 2 и т. д. Рассматривать совокупность 12 систем не очень-то приятно, есть смысл провести дальнейшие исследования. Заметив, например, что $x^2 - 7xy = 18 - 6y^2$, делаем вывод о четности числа $x^2 - 7xy$. Если в этом выражении x — нечетное число, то и y — нечетное число. Значит, пары $(x; y)$, в которых x — нечетное число, а y — четное число, можно не рассматривать. Это значит, что сразу можно отбросить пары $(1; 18)$, $(-1; -18)$, $(3; 6)$, $(-3; -6)$, $(9; 2)$, $(-9; -2)$. Остается решить совокупность шести систем. Целочисленных решений не будет ни в одной из них.

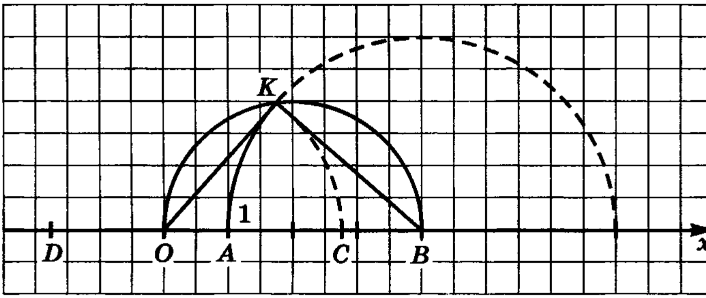


Рис. 7

§ 3

3.20. Отметить на числовой прямой точки $A(1)$ и $B(4)$. С помощью циркуля и линейки построить точку:

а) $C(\sqrt{7})$; б) $D(1 - \sqrt{7})$; в) $E\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$; г) $G(2 - \sqrt{5})$.

Решение. а) На отрезке OB как на диаметре строим полуокружность. С центром в точке B проводим дугу окружности радиусом, равным BA (т. е. радиусом 3), она пересекает полуокружность в точке K (рис. 7). Из прямоугольного треугольника OKB находим: $OK = \sqrt{7}$. Остается лишь отложить на положительной полуоси отрезок OC так, что $OC = OK = \sqrt{7}$.

б) От точки A в отрицательном направлении откладываем отрезок $AD = OC$; получим точку $D(1 - \sqrt{7})$ (рис. 7).

в) Удвоим отрезок OC, получим точку $P(2\sqrt{7})$; проведем из точки O произвольный луч и отложим на нем 7 единичных отрезков (отрезков, равных OA): $OT_1 = T_1T_2 = \dots = T_6T_7 = 1$.

Проведем прямую T_7P, а затем прямую $T_1E \parallel T_7P$. Тогда получим, что $OE = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ (рис. 8); E — искомая точка.

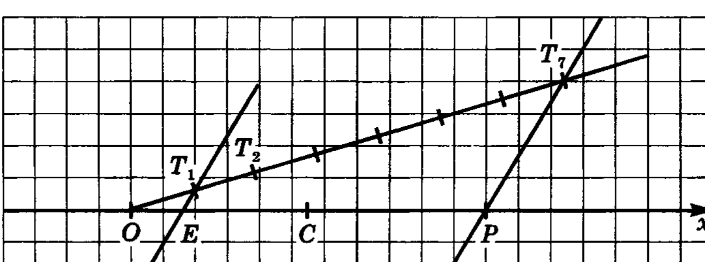


Рис. 8

г) Строим прямоугольный треугольник OAL, у которого катетами служат $OA = 1$, $OL = 2$, а гипотенуза $AL = \sqrt{5}$. Далее рассуждаем, как в пунктах а) и б).

§ 4

4.26. Решить уравнение:

а) $[x] = x$; б) $[x + 5] = 1 - x$; в) $[x] = \frac{x}{2}$; г) $\left[\frac{x+1}{4}\right] = x + 2$.

Решение. а) По определению $[x]$ — целое число, значит, и правая часть уравнения, т. е. x, — целое число. Но для любого целого числа, по определению, выполняется равенство $[x] = x$. Значит, корнем уравнения служит любое целое число.

б) Пусть $x + 5 = t$, тогда уравнение можно переписать в виде $[t] + t = 6$. Отсюда, как и в пункте а), следует, что t — целое число. Но тогда $[t] = t$, и получаем, что $t + t = 6$, т. е. $t = 3$, а $x = -2$.

в) Переписав уравнение в виде $x = 2[x]$, приходим к выводу, что x — целое число. Но тогда $[x] = x$, $x = 2x$, $x = 0$.

г) Пусть $\frac{x+1}{4} = t$, тогда уравнение можно переписать в виде $[t] = 4t + 1$. Отсюда следует, что $4t$ — целое число. Далее, по определению, $[t] \leqslant t$, а $[t] + 1 > t$, т. е. должны одновременно выполняться неравенства $4t + 1 \leqslant t$, $4t + 2 > t$. Из этой системы неравенств находим, что $-\frac{2}{3} < t \leqslant -\frac{1}{3}$, и соответственно, $-\frac{8}{3} < 4t \leqslant -\frac{4}{3}$. В промежутке $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right]$ содержится только одно целое число: число -2. Итак, $4t = -2$, а $x = 4t - 1 = -3$.

Ответ: а) любое целое число; б) -2; в) 0; г) -3.

4.27. Построить на координатной плоскости xOy график соотношения:

а) $[x] = [y]$; б) $[x] > [y]$; в) $[x] < [y]$; г) $[x - 1] > [y + 1]$.

Решение. а) Пусть $[x] = [y] = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $n \leqslant x < n + 1$, $n \leqslant y < n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$. График этой совокупности систем неравенств изображен на рисунке 9.

б) Пусть $[y] = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $[x] > n$, т. е. $[x] \geqslant n + 1$. Но $x \geqslant [x]$, значит, $x \geqslant n + 1$. Итак, речь идет о построении графика совокупности систем неравенств $x \geqslant n + 1$, $n \leqslant y < n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$. График изображен на рисунке 10.

в) Рассуждая как в пункте б), приходим к выводу, что речь идет о построении графика совокупности систем неравенств $y \geqslant n + 1$, $n \leqslant x < n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$; график изображен на рисунке 11.

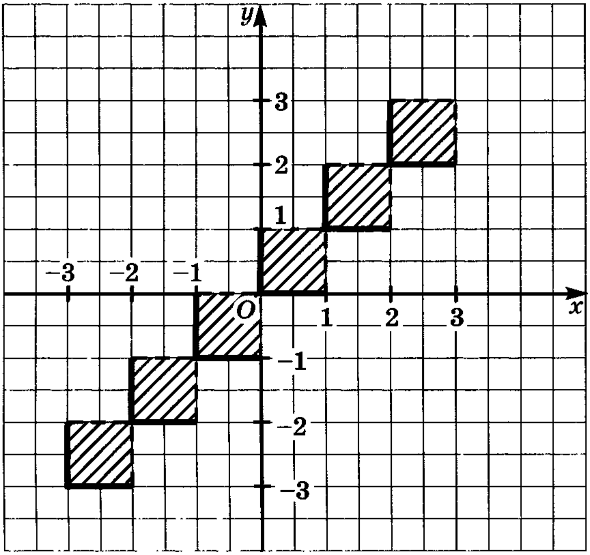


Рис. 9

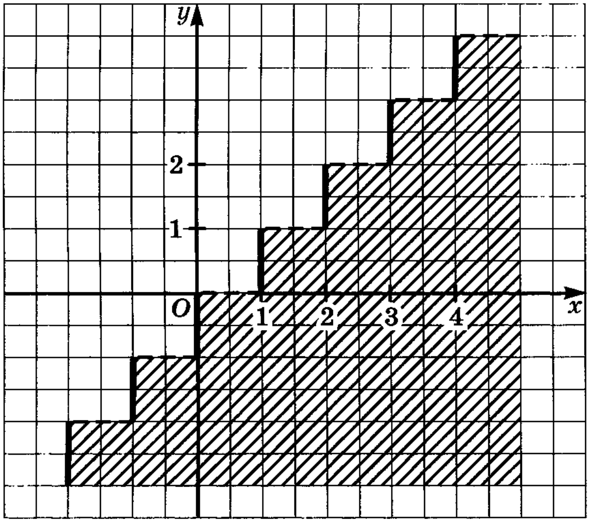


Рис. 10

г) Пусть $[y + 1] = n$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $[x - 1] > n$, т. е. $[x - 1] \geqslant n + 1$. Но $x - 1 \geqslant [x - 1]$, значит, $x - 1 \geqslant n + 1$, $x \geqslant n + 2$. Далее, из соотношения $[y + 1] = n$ делаем вывод, что $n \leqslant y + 1 < n + 1$, т. е. $n - 1 \leqslant y < n$.

Итак, речь идет о построении графика совокупности систем неравенств $x \geqslant n + 2$, $n - 1 \leqslant y < n$, $n \in \mathbf{Z}$; график изображен на рисунке 12.

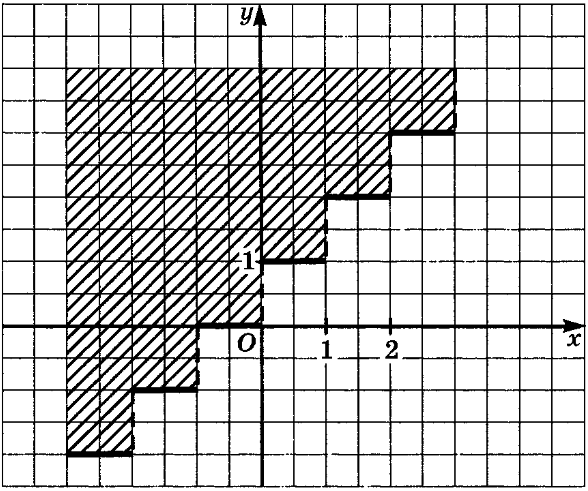


Рис. 11

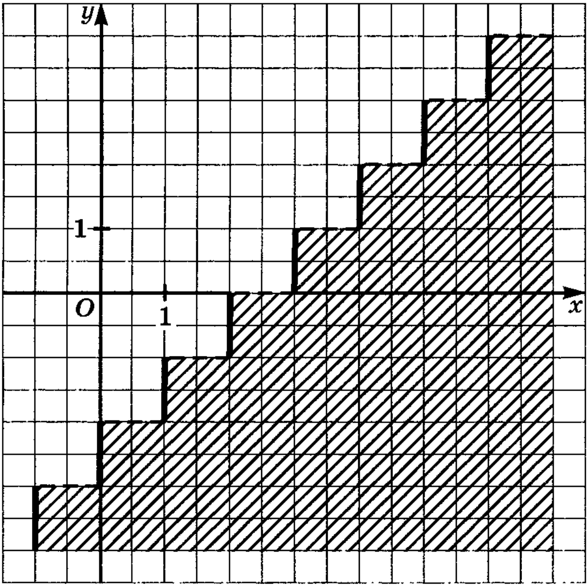


Рис. 12

4.32. Построить график функции на отрезке $[-4;\ 4]$:

а) $y = [x]$; б) $y = [1 - x]$; в) $y = [x + 4]$; г) $y = \left[\dfrac{1 - x}{2}\right]$.

Решение. а) График функции $y = [x]$, $x \in [-4;\ 4]$ изображен на рисунке 13.

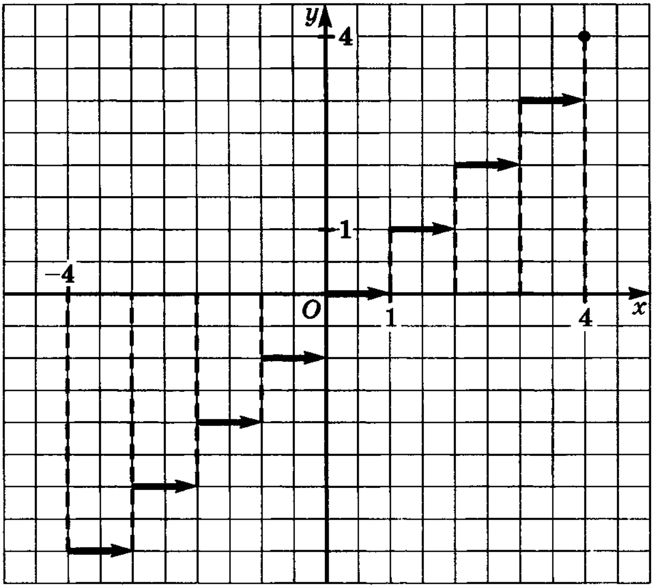


Рис. 13

б) Первый способ. Будем двигаться по отрезку $[-4; 4]$ слева направо.

Если $x = -4$, то $y = [1 - x] = [5] = 5$. Если $x \in (-4; -3]$, то $y = 4$. Если $x \in (-3; -2]$, то $y = 3$. Если $x \in (-2; -1]$, то $y = 2$. Если $x \in (-1; 0]$, то $y = 1$. Если $x \in (0; 1]$, то $y = 0$. Если $x \in (1; 2]$, то $y = -1$. Если $x \in (2; 3]$, то $y = -2$. Если $x \in (3; 4]$, то $y = -3$.

График полученной кусочной функции изображен на рисунке 14.

Второй способ. $y = [1 - x] = [-x + 1] = [-x] + 1$. Поэтому можно получить график функции $y = [1 - x]$ из графика функции $y = [x]$, представленного на рисунке 13, с помощью двух преобразований: симметрии относительно оси ординат (получим график функции $y = [-x]$) и параллельного переноса полученного графика на 1 вверх.

в) Поскольку $[x + 4] = [x] + 4$, график функции $y = [x + 4]$ можно получить из графика функции $y = [x]$, представленного на рисунке 13, с помощью параллельного переноса на 4 вверх.

г) Построим график функции $y = \frac{1 - x}{2}$ (рис. 15). Теперь будем двигаться по отрезку $[-4; 4]$ слева направо:

$$x \in [-4; -3] \Rightarrow 2 \leqslant y \leqslant 2{,}5 \Rightarrow [y] = 2;$$
$$x \in (-3; -1] \Rightarrow 1 \leqslant y < 2 \Rightarrow [y] = 1;$$
$$x \in (-1; 1] \Rightarrow 0 \leqslant y < 1 \Rightarrow [y] = 0;$$
$$x \in (1; 3] \Rightarrow -1 \leqslant y < 0 \Rightarrow [y] = -1;$$
$$x \in (3; 4] \Rightarrow -1{,}5 \leqslant y < -1 \Rightarrow [y] = -2.$$

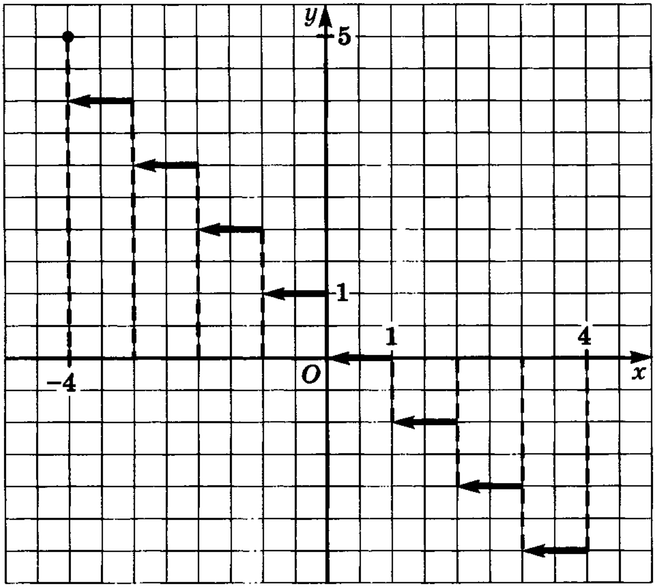


Рис. 14

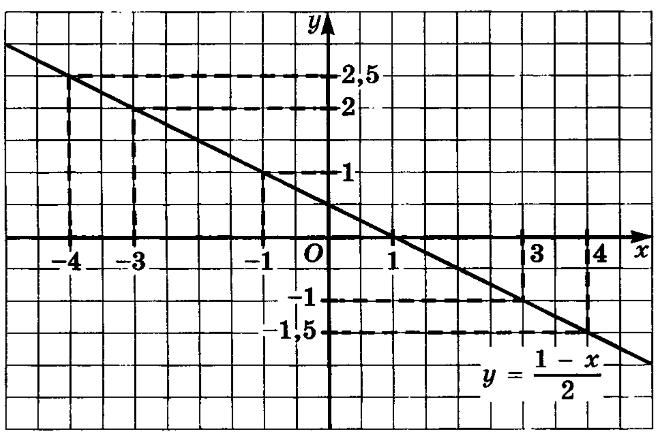


Рис. 15

Таким образом, функция $y = \left[\frac{1-x}{2}\right]$, $x \in [-4;\ 4]$ представляет собой кусочную функцию

$$y = \begin{cases} 2, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -3, \\ 1, \text{ если } -3 < x \leqslant -1, \\ 0, \text{ если } -1 < x \leqslant 1, \\ -1, \text{ если } 1 < x \leqslant 3, \\ -2, \text{ если } 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

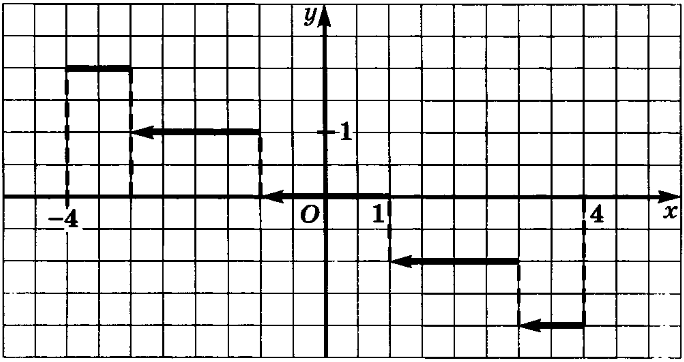


Рис. 16

График представлен на рисунке 16.

4.33. Построить график функции на отрезке $[-4;\ 4]$:

а) $y = \{x\}$; б) $y = \{1 - x\}$; в) $y = \{x + 4\}$; г) $y = \left\{\dfrac{1 - x}{2}\right\}$.

Решение. а) График изображен на рисунке 17.

б) Поскольку $y = \{1 - x\} = \{-x\}$, график можно получить из графика, представленного на рисунке 17, с помощью преобразования симметрии относительно оси ординат (рис. 18).

в) Поскольку $y = \{x + 4\} = \{x\}$, график функции $y = \{x + 4\}$ совпадает с графиком функции $y = \{x\}$ (см. рис. 17).

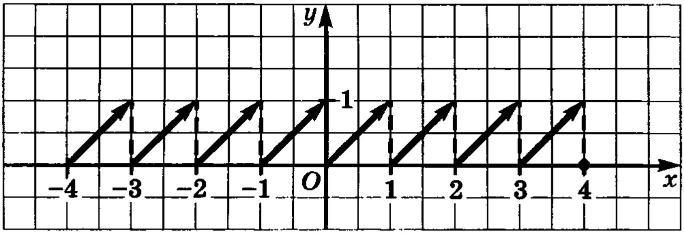


Рис. 17

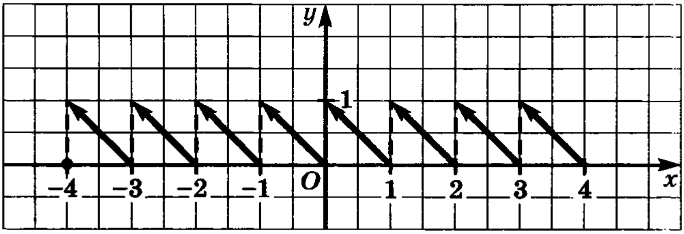


Рис. 18

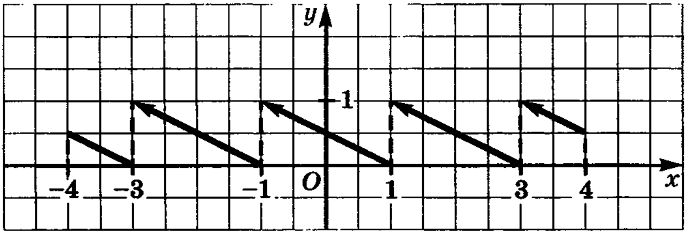


Рис. 19

г) Воспользуемся тем, что $\{a\} = a - [a]$. Построим график функции $y = \frac{1-x}{2}$ (см. рис. 15) и, двигаясь по отрезку $-4 \leqslant x \leqslant 4$ слева направо, будем опускать соответствующие ординаты вниз на число, равное целой части ординаты. График функции $y = \left\{\frac{1-x}{2}\right\}$ представлен на рисунке 19.

4.34. а) Пусть $a \in [-4; 0]$. Найти отрезок наименьшей длины, содержащий все числа вида $5a + a^2$.

Решение. Сложность этой задачи лишь в ее непривычной фабуле. Фактически речь идет об отыскании наименьшего и наибольшего значений функции $y = 5a + a^2$, $a \in [-4; 0]$. Искомый отрезок — область значений этой функции. Находим: $y_{\text{наим}} = y(-2{,}5) = -6{,}25$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 0$; $E(f) = [-6{,}25; 0]$.

§ 5

5.16. г) Решить неравенство $|x^2 + 7x| \leqslant 4x + 10$.

Решение. Этот пример вряд ли представляет какие-либо трудности для учителя математики. Приводим его решение здесь из чисто методических соображений: есть несколько подходов к решению неравенства с модулями и в каждом конкретном примере нужно уметь выбрать наиболее рациональный.

Первый способ. Если $x^2 + 7x \geqslant 0$, то $|x^2 + 7x| = x^2 + 7x$ и заданное неравенство принимает вид $x^2 + 7x \leqslant 4x + 10$. Если $x^2 + 7x < 0$, то $|x^2 + 7x| = -(x^2 + 7x)$ и заданное неравенство принимает вид $-(x^2 + 7x) \leqslant 4x + 10$. Таким образом, речь идет о решении двух систем неравенств (совокупности систем):

$$\begin{cases} x^2 + 7x \geqslant 0, \\ x^2 + 7x \leqslant 4x + 10; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 7x < 0, \\ -(x^2 + 7x) \leqslant 4x + 10. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим: $0 \leqslant x \leqslant 2$; решив вторую систему, получим: $-1 \leqslant x \leqslant 0$; объединив найденные решения систем, получим: $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Второй способ. Имеем: $4x + 10 \geqslant |x^2 + 7x| \geqslant 0$. Значит, заданное неравенство — неравенство вида $|A| \leqslant B$, где $B \geqslant 0$, которое равносильно двойному неравенству $-B \leqslant A \leqslant B$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4x + 10 \geqslant 0, \\ x^2 + 7x \leqslant 4x + 10, \\ x^2 + 7x \geqslant -(4x + 10). \end{cases}$$

Третий способ. Поскольку, как мы отметили выше, выполняется неравенство $4x + 10 \geqslant 0$, обе части заданного неравенства неотрицательны, а потому возведение их в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Учтем при этом, что $|A|^2 = A^2$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4x + 10 \geqslant 0, \\ (x^2 + 7x)^2 \leqslant (4x + 10)^2. \end{cases}$$

5.19. б) Найти все значения a, при которых $|x - 2a + a^2| = a$, если $|x - a| = 2 - a$.

Решение. Из уравнения $|x - a| = 2 - a$ находим, что либо $x - a = 2 - a$, т. е. $x = 2$, либо $x - a = a - 2$, т. е. $x = 2a - 2$. Подставив каждое из найденных значений x в интересующее нас выражение, получим совокупность уравнений:

$$|2 - 2a + a^2| = a; \quad |(2a - 2) - 2a + a^2| = a.$$

Решая первое уравнение, есть смысл обратить внимание на то, что дискриминант квадратного трехчлена $a^2 - 2a + 2$ отрицателен, а потому трехчлен при любых значениях a принимает положительные значения, т. е. $|2 - 2a + a^2| = 2 - 2a + a^2$. Значит, первое уравнение совокупности принимает вид $2 - 2a + a^2 = a$, откуда находим: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Второе уравнение совокупности, т. е. уравнение $|a^2 - 2| = a$, при условии $a \geqslant 0$, в свою очередь сводится к совокупности двух уравнений:

$$a^2 - 2 = a; \quad a^2 - 2 = -a.$$

Первое уравнение имеет два корня: 2, −1; из них условию $a \geqslant 0$ удовлетворяет лишь первый корень. Второе уравнение имеет два корня: 1, −2; из них условию $a \geqslant 0$ также удовлетворяет лишь первый корень.

Ответ: 1, 2.

5.20. а) Какие значения может принимать $|x - y|$, если $|x - a| = 7$, $|y - a| = 16$?

Решение. Из $|x - a| = 7$ следует, что $x_1 = a + 7$, $x_2 = a - 7$. Из $|y - a| = 16$ следует, что $y_1 = a + 16$, $y_2 = a - 16$. Значит, $|x - y| = |x_n - y_k|$, где $n = 1, 2$; $k = 1, 2$. Для указанных четырех вариантов получаются два значения: 9 и 23.

5.21. б) Найти все возможные значения выражения $\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 5}{29}}$, если $|x - 1| < 5$.

Решение. Решив неравенство $|x - 1| < 5$, получим $-4 < x < 6$. Фактически речь идет об отыскании множества значений функции $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 5}{29}}$, $x \in (-4; 6)$.

Квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 5$ достигает наименьшего значения в точке $x = 1$, это значение равно 4; в концевых точках заданного интервала квадратный трехчлен принимает значение 29 (в точке $x = -4$ и в точке $x = 6$), множество его значений на интервале $(-4; 6)$ есть интервал $(4; 29)$. Соответственно множество значений интересующей нас функции — интервал $\left(\dfrac{2\sqrt{29}}{29}; 1\right)$.

§ 6

6.15. Доказать, что для любого $n \in N$ выполняется равенство:
а) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$;
б) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Решение. а) При $n = 1$ равенство верно: $1 \cdot 1! = 2! - 1$. Предположим, что оно верно при $n = k$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$. Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1)(k + 1)! = (k + 2)! - 1$.

В самом деле, $(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k!) + (k + 1)(k + 1)! = ((k + 1)! - 1) + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)!(1 + (k + 1)) - 1 = (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1$.

По принципу математической индукции доказываемое равенство верно для любого натурального значения n.

б) При $n = 1$ равенство верно: $\dfrac{1}{2!} = 1 - \dfrac{1}{2!}$. Предположим, что оно верно при $n = k$:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{k}{(k+1)!}\right)+\frac{k+1}{(k+2)!}=\left(1-\frac{1}{(k+1)!}\right)+\frac{k+1}{(k+2)!}=$$

$$=1-\left(\frac{k+2}{(k+2)!}-\frac{k+1}{(k+2)!}\right)=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

По принципу математической индукции доказываемое равенство верно для любого натурального значения n.

6.17. г) Доказать, что для любого натурального числа $n \geqslant 3$ выполняется неравенство $5^n > 3n^2 + 10n$.

Решение. При $n = 3$ неравенство верно: $5^3 > 3 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3$. Предположим, что оно верно при $n = k$ ($k \geqslant 3$):

$$5^k > 3k^2 + 10k. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$5^{k+1} > 3(k+1)^2 + 10(k+1). \qquad (2)$$

Из (1) следует, что $5 \cdot 5^k > 5(3k^2 + 10k)$, т. е. что $5^{k+1} > 15k^2 + 50k$. Если мы докажем, что

$$15k^2 + 50k > 3(k+1)^2 + 10(k+1), \qquad (3)$$

то неравенство (2) будет доказано.

Имеем: $(15k^2 + 50k) - (3(k+1)^2 + 10(k+1)) = 12k^2 + 34k - 13$. Найдем корни полученного квадратного трехчлена:

$$k_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{445}}{12}.$$

Квадратный трехчлен положителен при $k > \dfrac{-17+\sqrt{445}}{12}$, тем более он принимает положительные значения при $k \geqslant 3$.

Итак, неравенство (3) верно, верно и неравенство (2). По принципу математической индукции доказываемое неравенство верно для любого натурального значения $n \geqslant 3$.

6.19. Доказать, что для любого натурального значения n выполняется неравенство:

а) $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$;

б) $\dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{9^2} + \dfrac{1}{13^2} + \ldots + \dfrac{1}{(4n+1)^2} < \dfrac{1}{4}$.

Решение. Это пример, как иногда говорят психологи, «на разрушение стереотипа»: здесь выгоднее использовать не метод математической индукции (с ним возникают технические сложности), а другие рассуждения.

а) Воспользуемся тем, что $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$, ..., $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. Значит,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

б) Воспользуемся тем, что

$\frac{1}{5^2} < \frac{1}{1 \cdot 5}$, $\frac{1}{9^2} < \frac{1}{5 \cdot 9}$, $\frac{1}{13^2} < \frac{1}{9 \cdot 13}$, ..., $\frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

Значит,

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} +$$

$$+ \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{5-1}{1 \cdot 5} + \frac{9-5}{5 \cdot 9} + \frac{13-9}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{(4n+3)-(4n-1)}{(4n-1)(4n+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+3}\right) < \frac{1}{4}.$$

6.20. Доказать, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1$.

Решение. а) При $n = 1$ неравенство верно: $\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} - 1$.

Предположим, что оно верно при $n = k$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - 1.$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} > \sqrt{k+2} - 1. \qquad (4)$$

Имеем:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)-\left(\sqrt{k+2}-1\right)>$$

$$>\left(\sqrt{k+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\left(\sqrt{k+2}-1\right)=$$

$$=\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\sqrt{k+2}=\sqrt{k+1}-\frac{k+1}{\sqrt{k+2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)}{\sqrt{k+2}}>0.$$

Итак, неравенство (4) верно. По принципу математической индукции доказываемое неравенство верно для любого натурального значения n.

б) При $n=1$ неравенство верно: $\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-1$.

Предположим, что оно верно при $n=k$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-1.$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$, т. е. докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}<2\sqrt{k+2}-1. \qquad (5)$$

Имеем:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)-\left(2\sqrt{k+2}-1\right)<$$

$$<\left(2\sqrt{k+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\left(2\sqrt{k+2}-1\right)=$$

$$=2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}-2\sqrt{k+2}=\frac{1}{\sqrt{k+2}}-2\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+2}\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)}<0.$$

Итак, неравенство (5) верно. По принципу математической индукции доказываемое неравенство верно для любого натурального значения n.

6.24. а) Доказать, что $(6^{2n}+3^{n+2}+3^{n})\,\vdots\,11$ для любого натурального значения n.

Решение. При $n=1$ утверждение верно: $6^2+3^3+3=66$, а $66\,\vdots\,11$.

Предположим, что оно верно при $n=k$: $(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})\,\vdots\,11$.

Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1}) \vdots 11$.

Имеем: $6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k = 36(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) - 33(3^{k+2} + 3^k)$.

В полученной разности первый множитель вычитаемого (число 33) явно делится на 11, а второй множитель уменьшаемого делится на 11 по предположению. Значит, разность делится на 11.

По принципу математической индукции доказываемое утверждение верно для любого натурального значения n.

6.26. б) Последовательность (a_n) задана рекуррентным соотношением: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^2$. Доказать, что $a_n = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Решение. При $n = 1$ утверждение верно: по условию $a_1 = 0$ и по проверяемой формуле $a_1 = \dfrac{(1-1) \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0$.

Предположим, что оно верно при $n = k$:

$$a_k = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}.$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$a_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

В самом деле,

$$a_{k+1} = a_k + k^2 = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + k^2 =$$

$$= \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

По принципу математической индукции доказываемое утверждение верно для любого натурального значения n.

6.29. Доказать, что любое натуральное число $h > 4$ можно представить в виде $h = 3m + 5n$, где m и n — целые числа.

Решение. При $h = 5$ утверждение верно: $5 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1$; здесь $m = 0$, $n = 1$ (есть и другие варианты: например $m = -5$, $n = 4$).

Предположим, что число $k > 4$ можно представить в виде $k = 3m + 5n$.

Тогда $k + 1 = 3m + 5n + 1 = 3(m + 2) + 5(n - 1) = 3m_1 + 5n_1$, где m_1, n_1 — целые числа.

По принципу математической индукции доказываемое утверждение верно для любого натурального числа $h > 4$.

Глава 2

§ 7

7.38. Найти такие значения b из области определения $D(f)$ функции $y = \dfrac{1 - \sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{x + 30}$, для которых:

а) $(b + 1) \notin D(f)$; в) $(b + 1) \in D(f)$, $(b - 1) \in D(f)$;
г) $[b + 1;\ b + 2] \subset D(f)$.

Решение. Область определения функции задается условиями:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x - 22 \geqslant 0, \\ x + 30 \neq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x < -30$; $-30 < x \leqslant -2$; $x \geqslant 5{,}5$ (рис. 20).

а) Должны выполняться следующие условия: $(b + 1) \notin D(f)$, $b \in D(f)$. Значит, точка $b + 1$ должна попадать в незаштрихованные участки числовой прямой или в выколотую точку -30 (рис. 20), в то время как точка b должна попадать в заштрихованную часть. Это возможно в двух случаях, которые хорошо иллюстрируются чертежом: 1) $b + 1 > -2$, а $b \leqslant -2$; 2) $b + 1 = -30$. В первом случае получаем: $-3 < b \leqslant -2$, а во втором — $b = -31$. Эти и только эти значения b удовлетворяют условию задачи.

в) Должны выполняться следующие условия: $(b \pm 1) \in D(f)$, $b \in D(f)$. Значит, точки $b - 1$, b, $b + 1$ должны одновременно попадать в заштрихованные на рисунке 20 участки числовой прямой. Это будет иметь место в следующих случаях:

1) $b - 1 \geqslant 5{,}5$;
2) $b + 1 \leqslant -2$, $b - 1 \neq -30$, $b \neq -30$;
3) $b + 1 < -30$.

Решив составленные неравенства и системы неравенств, получим:

$$b \geqslant 6{,}5;\ -29 < b \leqslant -3;\ -30 < b < -29;\ -31 < b < -30;\ b < -31.$$

г) Отрезок $[b + 1;\ b + 2]$ будет целиком содержаться в заштрихованных на рисунке 20 промежутках в следующих случаях:

1) $b + 1 \geqslant 5{,}5$;
2) $b + 1 > -30$, а $b + 2 \leqslant -2$;
3) $b + 2 < -30$.

Решив составленные неравенства и систему неравенств, получим:

$$b \geqslant 4{,}5;\ -31 < b \leqslant -4;\ b < -32.$$

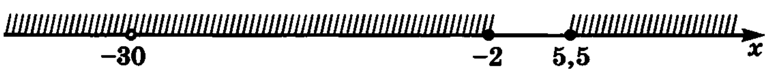


Рис. 20

7.43. г) Пусть множество значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найти все целочисленные значения функции $y = \dfrac{f(x)}{6 - f(x)}$.

Решение. $\dfrac{f(x)}{6 - f(x)} = \dfrac{(f(x) - 6) + 6}{6 - f(x)} = \dfrac{6}{6 - f(x)} - 1$. По условию $-3 \leqslant f(x) \leqslant 5$. Значит, используя свойства числовых неравенств и тот факт, что $6 - f(x) > 0$, последовательно получаем:

$$-3 \leqslant f(x) \leqslant 5;$$
$$1 \leqslant 6 - f(x) \leqslant 9;$$
$$\frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{6 - f(x)} \leqslant 1;$$
$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{6}{6 - f(x)} - 1 \leqslant 5.$$

Остается лишь заметить, что в отрезке $\left[-\frac{1}{3}; 5\right]$ содержится шесть целых чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

7.47. б) Найти множество значений функции $y = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$.

Решение. Основной способ решения таких задач известен: надо построить график функции и с его помощью найти $E(f)$. Но чтобы построить график заданной функции, следует провести ее исследование на экстремум с помощью производной, чего учащиеся пока не знают. Поступим по-другому: выясним, при каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 + 8}{x + 1} = a$ имеет корни. Множество таких значений a совпадает с множеством значений функции.

Имеем: $\dfrac{x^2 + 8}{x + 1} = a$; $x^2 - ax + (8 - a) = 0$; $D = a^2 + 4a - 32$. Уравнение имеет корни, если $a^2 + 4a - 32 \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant -8$; $a \geqslant 4$. Значит, $E(f) = (-\infty; -8] \cup [4; +\infty)$.

§ 8

8.31. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$ и возрастает на нем. Решить:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

Решение. а) Из возрастания функции следует, что $3x + 2 = 4x^2 + x$, откуда находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}5$. По условию функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-1; 1)$, значит, уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$ следует решать при дополнительном ограничении: $-1 < 3x + 2 < 1$. Из найденных двух корней лишь второй удовлетворяет этому условию. Итак, корнем уравнения является число $-0,5$.

б) Из возрастания функции следует, что $3x + 2 < 4x^2 + x$. Кроме того, должны выполняться условия: $-1 < 3x + 2 < 1$, $-1 < 4x^2 + x < 1$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 3x + 2 > -1, \\ 3x + 2 < 4x^2 + x, \\ 4x^2 + x < 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $\dfrac{-1 - \sqrt{17}}{8} < x < -\dfrac{1}{2}$.

Аналогично решается № 8.32.

8.35. Решить уравнение:

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 3} = 43 - 6x - x^2$;

г) $(x^2 + 4x + 9)\sqrt{4x + 1} = 9$.

Решение. в) ОДЗ: $x \geqslant 3$. Абсцисса вершины параболы $y = 43 - 6x - x^2$ равна -3, значит, функция $y = 43 - 6x - x^2$ убывает при $x \geqslant -3$ и тем более при $x \geqslant 3$. В то же время функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 3}$ возрастает при $x \geqslant 3$. Значит, заданное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим единственный корень уравнения: $x = 4$.

г) ОДЗ: $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{4x + 1} = \dfrac{9}{(x + 2)^2 + 5}$. Функция $y = (x + 2)^2 + 5$ возрастает при $x \geqslant -2$ и тем более при $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$. Кроме того, она принимает только положительные значения. Поэтому функция $y = \dfrac{9}{(x + 2)^2 + 5}$ убывает при $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$. В то же время функция $y = \sqrt{4x + 1}$ возрастает при $x \geqslant -\dfrac{1}{4}$. Значит, заданное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим единственный корень уравнения: $x = 0$.

8.46. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; б) $y = \dfrac{4x - 4}{x^2 - 2x + 17}$.

Р е ш е н и е. а) Первый способ. Если $x = 0$, то $y = 0$. Если $x \neq 0$, то преобразуем функцию к виду $y = \dfrac{2}{x + \dfrac{1}{x}}$. Если $x > 0$, то $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$,

значит, $0 < \dfrac{2}{x + \dfrac{1}{x}} \leqslant 1$. Если $x < 0$, то $x + \dfrac{1}{x} \leqslant -2$, значит,

$$-1 \leqslant \frac{2}{x + \dfrac{1}{x}} < 0.$$

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -1$, $y_{\text{наиб}} = 1$.

Второй способ (по образцу № 7.47). Рассмотрим уравнение $\dfrac{2x}{x^2+1} = a$, т. е. $ax^2 - 2x + a = 0$. Его дискриминант равен $4 - 4a^2$, он неотрицателен при $-1 \leqslant a \leqslant 1$. При этих и только при этих значениях параметра уравнение имеет корни. Концы полученного отрезка совпадают с наименьшим и наибольшим значением функции.

б) Здесь также возможны два способа решения, приведем лишь первый из них. Преобразуем функцию к виду $y = \dfrac{4(x-1)}{(x-1)^2 + 16}$. Если $x = 1$, то $y = 0$. Если $x \neq 1$, то функцию можно записать в виде $y = \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{4}{x-1}}$. Если $x > 1$, то $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{4}{x-1} \geqslant 2$, значит,

$0 < \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{4}{x-1}} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Если $x < 1$, то $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{4}{x-1} \leqslant -2$, значит,

$-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{4}{x-1}} < 0$.

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -0{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 0{,}5$.

8.47. Найти наименьшее значение функции:

а) $y = |x| + |x - 2|$;

б) $y = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$;

г) $y = |x| + |x - 1| + \ldots + |x - n|$, $n \in N$.

Р е ш е н и е. а) Речь идет о кусочно-линейной функции, которую после раскрытия знаков модулей можно записать так:

$$y = \begin{cases} 2x - 2, \text{ если } x \geqslant 2, \\ 2, \text{ если } 0 \leqslant x < 2, \\ 2 - 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

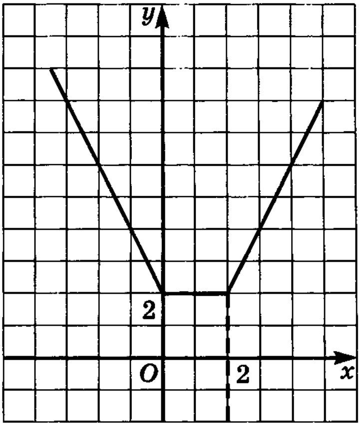


Рис. 21

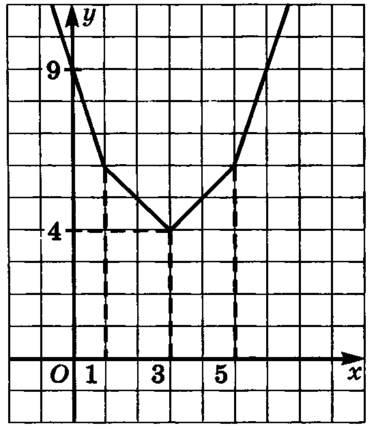


Рис. 22

График функции представлен на рисунке 21, $y_{\text{наим}} = 2$.

б) Речь идет о кусочно-линейной функции, которую после раскрытия знаков модулей можно записать так:

$$y = \begin{cases} 3x - 9, \text{ если } x \geqslant 5, \\ x + 1, \text{ если } 3 \leqslant x < 5, \\ 7 - x, \text{ если } 1 \leqslant x < 3, \\ 9 - 3x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

График функции представлен на рисунке 22, $y_{\text{наим}} = 4$.

Если вы хотите рассмотреть с учащимися общий случай, представленный в задании г), то есть смысл проанализировать ситуации с кусочно-линейными функциями из пунктов а) и б). Полезно обратить внимание учащихся на то, что в случае четного числа слагаемых у функции имеется стационарный кусок (как в пункте а): $y = 2$, если $0 \leqslant x < 2$, на котором функция и достигает своего наименьшего значения). Если же число слагаемых нечетно, то стационарного куска у функции нет, а наименьшего своего значения она достигает в той точке стыка, в которой происходит изменение характера монотонности функции или, поскольку мы имеем дело с линейными функциями, изменение знака углового коэффициента (как это было в пункте б) в точке $x = 3$; и именно в этой «точке стыка» функция достигает своего наименьшего значения). И еще на один момент стоит обратить внимание: при задании рассматриваемых кусочно-линейных функций вовсе не обязательно в записи условий следить за тем, чтобы стыковая точка в одной строке учитывалась, а в другой нет, можно было в записи всех условий использовать знаки нестрогих неравенств.

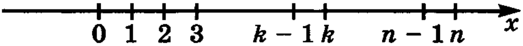


Рис. 23

г) Отметим на числовой прямой точки 0, 1, 2, ..., n (рис. 23). На каждом из полученных промежутков (их всего $n + 1$) знаки модулей раскрываются определенным образом, и в итоге получается линейная функция вида $y = ax + b$. Если на участке $[k - 1; k]$, где $k = 1, 2, ..., n$, угловой коэффициент линейной функции положителен, то своего наименьшего значения она достигает в левом конце отрезка; если угловой коэффициент отрицателен, то своего наименьшего значения она достигает в правом конце отрезка; если же угловой коэффициент равен нулю, то функция постоянна.

Если $x \geqslant n$, то, раскрыв знаки всех модулей, получим линейную функцию вида $y = (n + 1)x + b_1$.

Если $n - 1 \leqslant x \leqslant n$, то, раскрыв знаки всех модулей, получим линейную функцию вида $y = (n - 1)x + b_2$. Дело в том, что всего имеется $(n + 1)$ слагаемых, причем два последних таковы: $x - (n - 1)$ и $n - x$; в результате их сложения x и $-x$ взаимно уничтожатся.

Проведя аналогичные рассуждения, можно увидеть, что если $n - 2 \leqslant x \leqslant n - 1$, то, раскрыв знаки всех модулей, получим линейную функцию вида $y = (n - 3)x + b_3$. Если $n - 3 \leqslant x \leqslant n - 2$, то получим линейную функцию вида $y = (n - 5)x + b_4$. Вообще если $n - m \leqslant x \leqslant n - (m - 1)$, то получим линейную функцию вида $y = (n - (2m - 1))x + b_{m+1}$. Наименьшего значения эта кусочно-линейная функция достигает либо на том участке, где она постоянна (если таковой имеется), либо в точке, в которой сходятся линейная функция с положительным угловым коэффициентом (справа от точки) и линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом (слева от точки). Это уже отмечалось выше в пунктах а) и б).

Пусть n — четное число, $n = 2k$. В этом случае среди указанных выше угловых коэффициентов ($n + 1$, $n - 1$, $n - 3$, $n - 5$, ...) не будет коэффициента, равного нулю. Рассмотрим эти коэффициенты более обстоятельно: $2k + 1$, $2k - 1$, $2k - 3$, $2k - 5$, ..., $2k - (2m - 1)$, ... Выясним, когда произойдет смена знака углового коэффициента. Если $m = k$, то $2k - (2m - 1) = 2(k - m) + 1 = 1$; если $m = k + 1$, то $2k - (2m - 1) = 2(k - m) + 1 = -1$. Итак, если $m = k$, то на участке $n - m \leqslant x \leqslant n - (m - 1)$ получим линейную функцию вида $y = x + b_{m+1}$, а на участке $n - (m + 1) \leqslant x \leqslant n - m$ получим линейную функцию вида $y = -x + b_{m+2}$. Наименьшего значения функция достигает в «точке стыка», т. е. в точке $x = n - m = 2k - k = k$.

Вычислим значение функции $y = |x| + |x - 1| + ... + |x - n|$ в точке $x = k$:

$$y(k) = |k| + |k - 1| + |k - 2| + ... + |1| + |0| + |k - (k + 1)| +$$
$$+ |k - (k + 2)| + ... + |k - 2k| = k + (k - 1) + (k - 2) + ... + 1 +$$

$$+ 1 + 2 + \ldots + k = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + k) = 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$= k^2 + k = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{4}.$$

Пусть теперь n — нечетное число, $n = 2k - 1$. В этом случае на участке $[k - 1; k]$ функция постоянна. В самом деле, на этом участке для рассматриваемой функции $y = |x| + |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - (k - 1)| + |x - k| + |x - (k + 1)| + \ldots + |x - (2k - 1)|$ при раскрытии модулей первые k слагаемых раскроются со знаком $+$, а остальные k слагаемых раскроются со знаком $-$. В итоге на этом участке получим:

$$y = x + (x - 1) + (x - 2) + \ldots + (x - (k - 1)) + (k - x) +$$
$$+ (k + 1 - x) + (k + 2 - x) + \ldots + (2k - 1 - x) = (k + (k + 1) +$$
$$+ (k + 2) + \ldots + (k + k - 1) - (1 + 2 + \ldots + (k - 1)) =$$
$$= k \cdot k = k^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Это и есть наименьшее значение функции.

Итак, если n — четное число, то $y_{\text{наим}} = \dfrac{n(n+2)}{4}$; если n — нечетное число, то $y_{\text{наим}} = \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

8.49. а) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 4x$ на отрезке $[-1; a]$.

Решение. У этой задачи со вполне заурядной фабулой трудность только одна — наличие параметра a.

Найдем абсциссу вершины параболы $y = x^2 - 4x$, получим: $-x = 2$. Значит, при $x \leqslant 2$ функция $y = x^2 - 4x$ убывает, а при $x \geqslant 2$ — возрастает. Дальнейшие рассуждения зависят от того, попала ли точка 2 в заданный отрезок или нет.

Если $-1 \leqslant a \leqslant 2$, то на $[-1; a]$ функция убывает, следовательно, $y_{\text{наим}} = y(a) = a^2 - 4a$; $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 5$.

Если $a > 2$, то $y_{\text{наим}} = y(2) = -4$. Что касается наибольшего значения, то его функция достигает либо в точке $x = -1$, и тогда это значение равно 5, либо в точке $x = a$, и тогда это значение равно $a^2 - 4a$. Сравним эти значения, выясним, когда наибольшим значением функции является первое из них. Решив неравенство $5 > a^2 - 4a$, получим: $-1 < a < 5$. Поскольку мы рассматриваем случай $a > 2$, то получаем: $2 < a < 5$. В этом случае $y_{\text{наиб}} = 5$.

Если $a > 5$, то $5 < a^2 - 4a$. В этом случае $y_{\text{наиб}} = a^2 - 4a$.

Если, наконец, $a = 5$, то $5 = a^2 - 4a$. В этом случае $y_{\text{наиб}} = 5$.

Итак, если $-1 \leqslant a \leqslant 2$, то $y_{\text{наим}} = a^2 - 4a$, $y_{\text{наиб}} = 5$; если $2 < a \leqslant 5$, то $y_{\text{наим}} = -4$, $y_{\text{наиб}} = 5$; если $a > 5$, то $y_{\text{наим}} = -4$, $y_{\text{наим}} = a^2 - 4a$.

8.50. а) Функция $y = \dfrac{15x^2 + 60}{x^4 - 16}$ определена только для допустимых целых значений x; найти ее наибольшее значение.

Решение. Своего наибольшего значения заданная функция $y = \dfrac{15}{x^2 - 4}$ достигает, во-первых, при $x^2 > 4$ (при этих значениях функция положительна, а при остальных допустимых значениях — отрицательна). Во-вторых, знаменатель дроби должен принять наименьшее значение, тогда дробь примет наибольшее значение. В-третьих, нас интересует только целочисленное значение x, которое удовлетворяет обоим указанным выше условиям. Таким значением является $x = 3$. Итак, $y_{\text{наиб}} = y(3) = 3$.

§ 9

9.23. Построить график функции:

а) $y = \{x\}^2$; г) $y = \dfrac{\{x\} - 1}{1 - 2\{x\}}$.

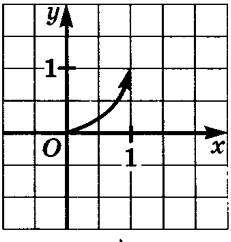
Решение. а) Если $x \in [0;\ 1)$, то $\{x\} = x$; значит, на указанном промежутке речь идет о построении графика функции $y = x^2$ (рис. 24 *а*). Воспользовавшись тем, что заданная функция — периодическая с основным периодом 1, строим график на всей числовой прямой (рис. 24 *б*).

г) Если $x \in [0;\ 1)$, то $\{x\} = x$; значит, на указанном промежутке речь идет о построении графика функции $y = \dfrac{x - 1}{1 - 2x}$. Имеем:

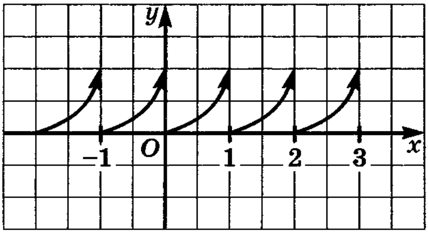
$$\frac{x-1}{1-2x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-2}{2x-1} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(2x-1)-1}{2x-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2x-1)} = \frac{0{,}25}{x-0{,}5} - 0{,}5.$$

Значит, на полуинтервале $[0;\ 1)$ нужно построить часть гиперболы с коэффициентом 0,25 и асимптотами $x = 0{,}5$, $y = -0{,}5$

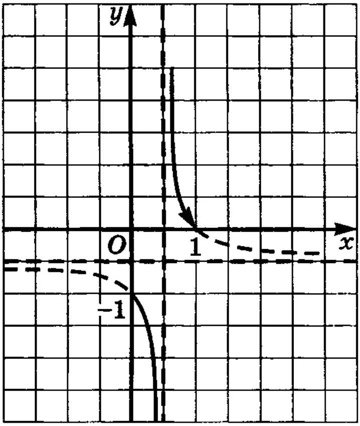


а)

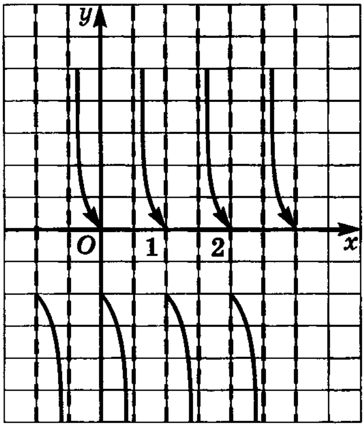


б)

Рис. 24



а)



б)

Рис. 25

(рис. 25 *а*). Воспользовавшись тем, что заданная функция — периодическая с основным периодом 1, строим график на всей числовой прямой (рис. 25 *б*).

9.32. Известно, что $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 5 и $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in (-3; 2]$. Решить:

а) уравнение $f(x) = 0$;

б) неравенство $f(x) > 3$.

Решение. Построим график заданной функции (рис. 26).

а) Если $x \in (-3; 2]$, то уравнение $x^2 + 2x = 0$ имеет два корня: -2 и 0. Воспользовавшись периодичностью функции, получим две серии корней уравнения:

$$x = -2 + 5k,\ x = 5k;\ k \in \mathbf{Z}.$$

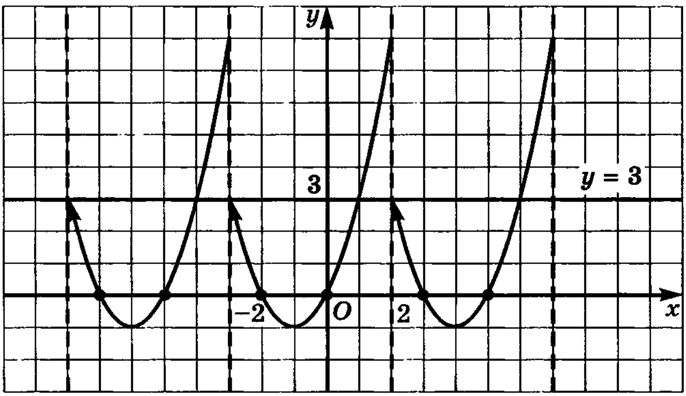


Рис. 26

б) Если $x \in (-3;\ 2]$, то неравенство $x^2 + 2x > 3$ имеет такое решение: $1 < x \leqslant 2$. Воспользовавшись периодичностью функции, получим:

$$1 + 5k < x \leqslant 2 + 5k;\ k \in \mathbf{Z}.$$

Важность этого примера заключается в том, что в дальнейшем те же идеи будут использоваться при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

§ 10

10.24. Построить на одном чертеже какие-нибудь графики двух взаимно обратных непрерывных на $(-5;\ 10)$ функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, для которых:

а) $f(3) = 3$, $g(5) = 5$;

б) $f(3) = 7$, $f(7) = 8$, $g(9) = 9$;

г) $f(1) = 9$, $f(2) = 7$, $g(4) = 4$.

Решение. В качестве функции $y = f(x)$ в трех заданиях нужно взять функцию, обладающую следующими свойствами: 1) она определена, непрерывна и монотонна на интервале $(-5;\ 10)$; 2) область ее значений — тот же интервал $(-5;\ 10)$.

а) Условиям 1), 2), $f(3) = 3$, $g(5) = 5$ удовлетворяет функция $y = x$, $x \in (-5;\ 10)$.

б) Условиям 1), 2), $f(3) = 7$, $f(7) = 8$, $g(9) = 9$, удовлетворяет любая непрерывная возрастающая функция, график которой проходит через точки $(-5;\ -5)$, $(3;\ 7)$, $(7;\ 8)$, $(9;\ 9)$, $(10;\ 10)$.

г) Условиям 1), 2), $f(1) = 9$, $f(2) = 7$, $g(4) = 4$ удовлетворяет любая непрерывная убывающая функция, график которой проходит через точки $(-5;\ 10)$, $(1;\ 9)$, $(2;\ 7)$, $(4;\ 4)$, $(10;\ -5)$.

10.25. б) $y = f(x)$, $y = g(x)$ — взаимно-обратные функции, $f(4) = 4$, $g(25) = 9$.

Решить уравнения: $f(x^2) = 25$, $g(x^2) = 4$.

Решение. По условию точка $(25;\ 9)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$, значит, точка $(9;\ 25)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. По условию точка $(4;\ 4)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, значит, она принадлежит и графику функции $y = g(x)$. Далее, по условию обе заданные функции обратимы, поэтому каждого своего значения и та, и другая функция достигают только в одной точке. Поэтому из равенства $f(x^2) = 25$ следует, что $x^2 = 9$, т. е. $x = \pm 3$. Аналогично, из равенства $g(x^2) = 4$ следует, что $x^2 = 4$, т. е. $x = \pm 2$. Здесь подразумевается, что найденное значение приналежит областям определения заданных функций.

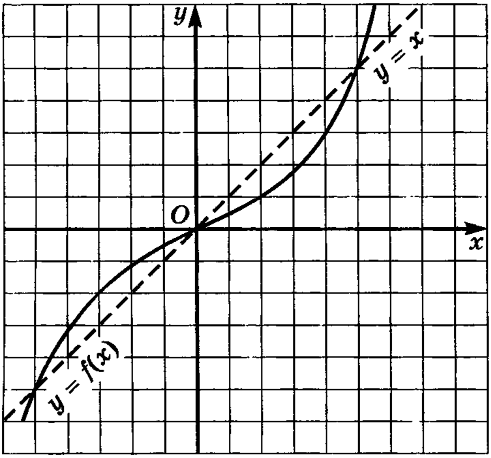


Рис. 27

10.31. б) Построить на одном чертеже графики двух взаимно обратных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, таких чтобы уравнение $f(x) = x$ имело три корня.

Решение. Если бы в задании отсутствовало упоминание о существовании обратной функции, то построить график функции, которая имеет три точки пересечения с прямой $y = x$, не составило бы труда. Наличие обратной функции предполагает обратимость функции $y = f(x)$, а достаточным условием обратимости является монотонность функции. Значит, нужно построить график монотонной (например, возрастающей) функции $y = f(x)$, которая имеет три точки пересечения с прямой $y = x$. Возможный вариант представлен на рисунке 27. График же обратной функции $y = g(x)$ получается из построенного графика, как обычно, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

10.33. Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$ — взаимно обратные функции. Являются ли равносильными следующие уравнения:

а) $f(x) = x$ и $g(x) = x$;

б) $f(g(x)) = x$ и $g(f(x)) = x$?

Решение. а) Эти уравнения равносильны, поскольку графики двух взаимно-обратных функций пересекаются с прямой $y = x$ в одних и тех же точках.

б) В принципе эти уравнения неравносильны, поскольку у функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ могут быть разные области определения. Приведем конкретный пример.

Пусть $f(x) = \sqrt{x - 2}$, тогда $g(x) = x^2 + 2$, $f(g(x)) = \sqrt{(x^2 + 2) - 2} =$ $= \sqrt{x^2} = |x|$.

Значит, уравнение $f(g(x)) = x$ принимает вид $|x| = x$, его решение таково: $x \geqslant 0$. Далее, $g(f(x)) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 2 = x$, причем $x \geqslant 2$. Значит, уравнение $g(f(x)) = x$ принимает вид $x = x$, где $x \geqslant 2$, его решение таково: $x \geqslant 2$. Уравнения неравносильны.

Глава 3

§ 11

11.31. Составить общую формулу для чисел:

а) $t = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1)$, $t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$;

б) $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $t = \pi n$;

в) $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $t = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$;

г) $t = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $t = \pi n$.

Решение. Это задание преследует как тактическую, так и стратегическую цели. Тактическая цель заключается в том, что это хорошее задание для отработки модели «числовая окружность»: в большинстве таких заданий приходится отмечать соответствующие точки на числовой окружности и подбирать подходящую формулу. Стратегическая цель заключается в том, что в дальнейшем при решении тригонометрических уравнений учащиеся смогут записывать ответ в компактной форме.

а) Отметим на числовой окружности точки, соответствующие второй (более сложной) серии. Если $n = 0$, то $t = \frac{\pi}{30}$; если $n = 1$, то $t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{13\pi}{30}$; если $n = 2$, то $t = \frac{\pi}{30} + \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{6}$; если $n = 3$, то $t = \frac{\pi}{30} + \frac{6\pi}{5} = \frac{37\pi}{30}$; если $n = 4$, то $t = \frac{\pi}{30} + \frac{8\pi}{5} = \frac{49\pi}{30}$; если $n = 5$, то $t = \frac{\pi}{30} + \frac{10\pi}{5} = \frac{\pi}{30} + 2\pi$ — это та же точка на окружности, что и $t = \frac{\pi}{30}$. Аналогично обстоит дело с остальными числами и точками. Итак, второй серии соответствуют 5 точек числовой окружности, их можно рассматривать как вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность (рис. 28).

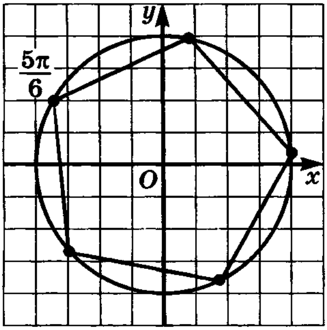


Рис. 28

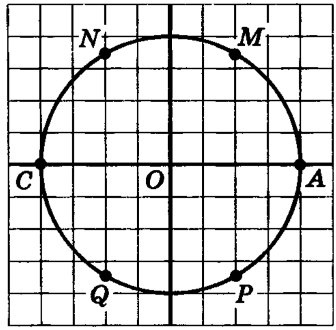


Рис. 29

Первой серии соответствует одна точка числовой окружности: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. Она содержится во второй серии и уже отмечена на окружности. Значит, объединением обеих серий является вторая серия: $t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$.

б) Первой серии соответствуют точки M и N числовой окружности, второй — точки P и Q, третьей — точки A и C (рис. 29). Все эти 6 точек охватываются общей записью $t = \frac{\pi n}{3}$.

в) Первой серии соответствуют точки M и N числовой окружности (середины второй и четвертой четвертей), второй — точки $P\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $K\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right)$ и $L\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right)$ (рис. 30). Эти 6 точек можно рассматривать как вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность, они охватываются общей записью: $t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$.

г) Первой серии соответствуют точки M, N, P и Q числовой окружности (середины четвертей), второй — точки B и D, третьей — точки A и C (рис. 31). Эти 8 точек можно рассматривать как

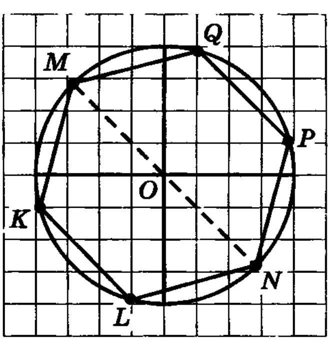


Рис. 30

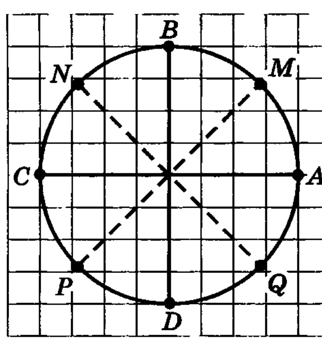


Рис. 31

вершины правильного восьмиугольника, вписанного в окружность, они охватываются общей записью: $t = \frac{\pi n}{4}$.

§ 12

12.10. Что больше, абсцисса или ордината точки числовой окружности:

а) $E(1)$; б) $K(-2{,}5)$; в) $P(7)$; г) $M(-4)$.

Решение. а) Точка $E(1)$ принадлежит первой четверти, при этом выполняется неравенство $1 > \frac{\pi}{4}$ (рис. 32). Значит, $y > x$.

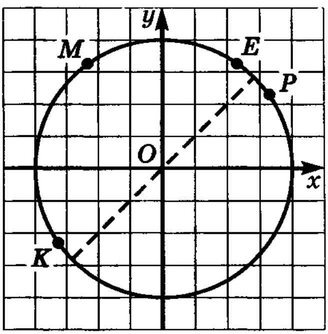


Рис. 32

б) Точка $K(-2{,}5)$ принадлежит третьей четверти, при этом выполняется неравенство $-2{,}5 < -\frac{3\pi}{4}$ (см. рис. 32). Значит, $y > x$.

в) Точка $P(7)$ принадлежит первой четверти, при этом выполняется неравенство $7 < \frac{9\pi}{4}$. В самом деле, $7 = 6{,}28 + 0{,}72 \approx 2\pi + 0{,}72$; $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \approx 2\pi + 0{,}785$. Значит (см. рис. 32), $y < x$.

г) Точка $M(-4)$ принадлежит второй четверти, где $y > 0$, $x < 0$ (см. рис. 32). Значит, $y > x$.

§ 13

13.26. а) Вычислить $\sin 4 + |\sin 4| + 2\cos 13 - 2|\cos 13|$.

Решение. 4 — точка третьей четверти, значит, $\sin 4 < 0$, а потому $|\sin 4| = -\sin 4$. Далее, 13 — точка первой четверти, значит, $\cos 13 > 0$, а потому $|\cos 13| = \cos 13$. Таким образом,

$$\sin 4 + |\sin 4| + 2\cos 13 - 2|\cos 13| =$$
$$= \sin 4 - \sin 4 + 2\cos 13 - 2\cos 13 = 0.$$

13.37. Сравнить числа a и b:

а) $a = \sin 1$, $b = \cos 6$; б) $a = \sin 2$, $b = \cos 4$;
в) $a = \sin 4$, $b = \cos 2$; г) $a = \sin 3$, $b = \cos 5$.

Решение. а) Отметим на числовой окружности точки 1 и 6 (рис. 33). Абсцисса точки 6 (число b) и ордината точки 1 (число a) — положительные числа. Замечаем, что точка 6 расположена к точке 2π ближе, чем точка 1 по отношению к точке $\frac{\pi}{2}$ ($2\pi - 6 \approx 0{,}28$;

$\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$), значит, абсцисса точки 6 больше ординаты точки 1, т. е. $b > a$.

б) Отметим на числовой окружности точки 4 и 2 (см. рис. 33). Абсцисса точки 4 (число b) — отрицательное число, ордината точки 2 (число a) — положительное число. Значит, $b < a$.

в) Абсцисса точки 2 (число b) и ордината точки 4 (число a) — отрицательные числа. Точка 2 расположена выше середины второй четверти (поскольку $2 < \frac{3\pi}{4}$), значит, $\cos 2 > \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Точка 4 расположена ниже середины третьей четверти (поскольку $4 > \frac{5\pi}{4}$), значит, $\sin 4 < \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак, $\cos 2 > -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\sin 4 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $b > a$.

г) Отметим на числовой окружности точки 3 и 5 (см. рис. 33). Абсцисса точки 5 (число b) и ордината точки 3 (число a) — положительные числа. Замечаем, что точка 5 расположена от точки $\frac{3\pi}{2}$ дальше, чем точка 3 по отношению к точке π ($5 - \frac{3\pi}{2} \approx 0{,}29$; $\pi - 3 \approx 0{,}14$), значит, абсцисса точки 5 больше ординаты точки 3, т. е. $b > a$.

13.39. Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\cos 5$;

б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 6$, $\cos 7$;

в) $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 7$;

г) $\cos 2$, $\cos 3$, $\sin 4$, $\sin 5$.

Решение. а) Отметим точки 2, 3, 4, 5 на числовой окружности (рис. 34). Точка 4 принадлежит третьей четверти, точки 2 и 3 — второй, точка 5 — четвертой четверти числовой окружности, следовательно, $\cos 4 < 0$, остальные заданные числа положитель-

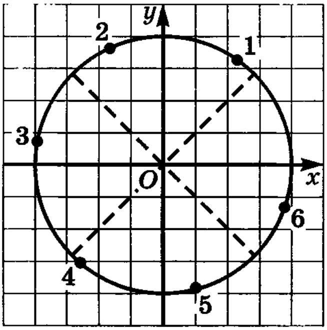


Рис. 33

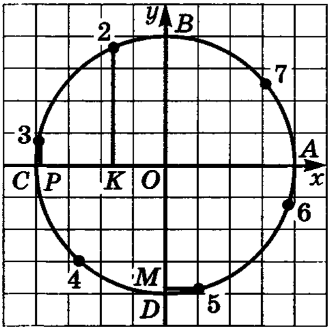


Рис. 34

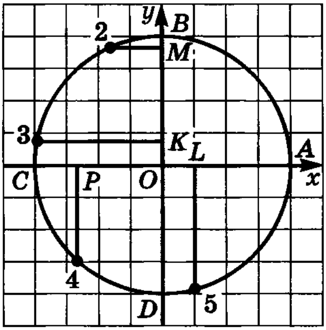


Рис. 35

ны. Далее, расстояние (по окружности) от точки 3 до точки C примерно равно 0,14, расстояние от точки D до точки 5 примерно 0,29 (точка D соответствует числу $\frac{3\pi}{2}$, т. е. 4,71), расстояние от точки 2 до точки C примерно 1,14. Значит, длины дуг $2C$, $3C$, $D5$ связаны следующим образом: $3C < D5 < 2C$. Аналогичным образом связаны между собой отрезки $P3$, $M5$, $K2$: $P3 < M5 < K2$. Это значит, что $\sin 3 < \cos 5 < \sin 2$. В итоге получаем следующее расположение заданных чисел в порядке возрастания: $\cos 4$, $\sin 3$, $\cos 5$, $\sin 2$.

б) Отметим точки 3, 4, 6, 7 на числовой окружности (см. рис. 34). Сразу замечаем, что точка 3 располагается ближе к точке C, чем точка 4, а точка 6 — ближе к точке A, чем точка 7. Сравнив абсциссы (т. е. косинусы) точек 3, 4, 6, 7, приходим к выводу, что $\cos 3 < \cos 4 < \cos 7 < \cos 6$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\cos 3,\ \cos 4,\ \cos 7,\ \cos 6.$$

в) Сравнив ординаты (т. е. синусы) точек 3, 4, 6, 7 (см. рис. 34), приходим к выводу, что $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 7$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\sin 4,\ \sin 6,\ \sin 3,\ \sin 7.$$

г) Отметим точки 2, 3, 4, 5 на числовой окружности (рис. 35) и сразу заметим, что все заданные числа отрицательны. Сравним по длине отрезки $2M$, $3K$, $4P$, $5L$ — это, соответственно, $-\cos 2$, $-\cos 3$, $-\sin 4$, $-\sin 5$. Замечаем, что точка 3 располагается на окружности ближе к C, чем 2 к C, 4 к D и 5 к D. Следовательно, отрезок $3K$ — наибольший по длине. Далее, точка 2 располагается к B ближе, чем 4 к C, а 4 к C — ближе, чем 5 к А. Значит, $2M < 4P < 5L$. Итак,

$$2M < 4P < 5L < 3K,$$

поэтому $-\cos 2 < -\sin 4 < -\sin 5 < -\cos 3$. Заданные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\cos 3,\ \sin 5,\ \sin 4,\ \cos 2.$$

13.40. Расположить в порядке возрастания числа:

а) 1, $\sin 1$, $\cos 1$, $\operatorname{tg} 1$;

б) 2, $\sin 2$, $\cos 2$, $\operatorname{ctg} 2$.

Решение. а) Так как $\frac{\pi}{4} < 1$, то $\cos 1 < \sin 1$, а $\operatorname{tg} 1 > 1$ (рис. 36). Следовательно, $\cos 1 < \sin 1 < 1 < \operatorname{tg} 1$.

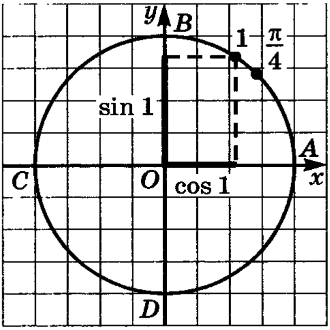


Рис. 36

б) Здесь $\sin 2 > 0$, $\cos 2 < 0$, $\operatorname{ctg} 2 < 0$. Используя свойства числовых неравенств, получаем:

$$\sin 2 < 1;$$
$$\frac{1}{\sin 2} > 1;$$
$$\frac{\cos 2}{\sin 2} < \cos 2;$$
$$\operatorname{ctg} 2 < \cos 2.$$

Итак,

$$\operatorname{ctg} 2 < \cos 2 < \sin 2 < 2.$$

13.41. а) Вычислить:

$$\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2 - 2\sin 1 \sin 2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin 1 + \sin^2 1} + $$
$$+ \sqrt{1 + \sin^2 2 - 2\sin 2}.$$

Решение.

$$\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2 - 2\sin 1 \sin 2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin 1 + \sin^2 1} +$$
$$+ \sqrt{1 + \sin^2 2 - 2\sin 2} = \sqrt{(\sin 1 - \sin 2)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sin 1\right)^2} +$$
$$+ \sqrt{(1 - \sin 2)^2} = |\sin 1 - \sin 2| + \left|\frac{1}{2} - \sin 1\right| + |1 - \sin 2|.$$

Воспользовавшись тем, что $\sin 1 < \sin 2$, $\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}$, $\sin 2 < 1$, получим:

$$-(\sin 1 - \sin 2) - \left(\frac{1}{2} - \sin 1\right) + (1 - \sin 2) = \frac{1}{2}.$$

13.52. Доказать неравенство:

а) $1 < \sin 1 + \cos^2 1 < 1{,}25$;

б) $2 < 2\sin^2 1{,}2 + \cos 1{,}2 < \frac{17}{8}$.

Решение. а) Введем обозначение: $\sin 1 = x$; заметим, что $0 < x < 1$. Тогда $\cos^2 1 = 1 - x^2$, и доказываемое неравенство принимает вид $1 < x + 1 - x^2 < 1{,}25$. Рассмотрим по отдельности каждую из частей этого двойного неравенства.

Для доказательства неравенства $1 < x + 1 - x^2$ составим разность его левой и правой частей: $1 - (x + 1 - x^2) = x(x - 1) < 0$. Значит, $1 < x + 1 - x^2$.

Для доказательства неравенства $x + 1 - x^2 < 1{,}25$ составим разность его правой и левой частей: $1{,}25 - (x + 1 - x^2) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 =$
$= \left(\sin 1 - \frac{1}{2}\right)^2$. Поскольку $\sin 1 \neq \frac{1}{2}$, делаем вывод: $\left(\sin 1 - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$.
Значит, $x + 1 - x^2 < 1{,}25$, и заданное двойное неравенство доказано.

б) Введем обозначение: $\cos 1{,}2 = x$. Тогда $\sin^2 1{,}2 = 1 - x^2$, и доказываемое неравенство принимает вид $2 < 2 - 2x^2 + x < \frac{17}{8}$. Рассмотрим по отдельности каждую из частей этого двойного неравенства.

Для доказательства неравенства $2 < 2 - 2x^2 + x$ составим разность его левой и правой частей: $2 - (2 - 2x^2 + x) = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) =$
$= 2\cos 1{,}2\left(\cos 1{,}2 - \frac{1}{2}\right)$. Точка 1,2 принадлежит первой четверти числовой окружности, причем $1{,}2 > \frac{\pi}{3}$. Значит, $\cos 1{,}2 > 0$, но $\cos 1{,}2 < \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $2\cos 1{,}2\left(\cos 1{,}2 - \frac{1}{2}\right) < 0$, и неравенство $2 < 2 - 2x^2 + x$ доказано.

Для доказательства неравенства $2 - 2x^2 + x < \frac{17}{8}$ составим разность его правой и левой частей:

$$\frac{17}{8} - (2 - 2x^2 + x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos 1{,}2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

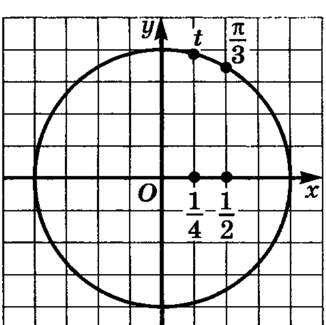


Рис. 37

Докажем, что знак равенства в полученном нестрогом неравенстве не может иметь места, т. е. докажем, что $\cos 1{,}2 \neq \frac{1}{4}$.

Рассмотрим на числовой окружности точку t с абсциссой $\frac{1}{4}$ и точку $\frac{\pi}{3}$ с абсциссой $\frac{1}{2}$ (рис. 37). Расстояние по окружности от точки $\frac{\pi}{3}$ до точки t

больше $\frac{1}{4}$, значит, $t > \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} > 1{,}2$, а $\frac{1}{4} = \cos t < \cos 1{,}2$ (в первой четверти из $t > 1{,}2$ следует $\cos t < \cos 1{,}2$). Итак, $\cos 1{,}2 \neq \frac{1}{4}$, и, следовательно, $\frac{1}{2}\left(2\cos 1{,}2 - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$.

Значит, $2 - 2x^2 + x < \frac{17}{8}$, и заданное двойное неравенство доказано.

13.53. а) Доказать неравенство $0 < \operatorname{tg} \frac{17}{7} + \cos^{-2} \frac{17}{7} < 1$.

Решение. Введем обозначение: $\operatorname{tg} \frac{17}{7} = x$. Тогда $\cos^{-2} \frac{17}{7} = 1 + x^2$, и доказываемое неравенство принимает вид $0 < x + 1 + x^2 < 1$. Рассмотрим по отдельности каждую из частей этого двойного неравенства.

Для доказательства неравенства $0 < x + 1 + x^2$ достаточно заметить, что в его правой части содержится квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом и отрицательным дискриминантом.

Для доказательства неравенства $x + 1 + x^2 < 1$ составим разность его левой и правой частей: $(x + 1 + x^2) - 1 = x(x + 1) = \operatorname{tg} \frac{17}{7}\left(\operatorname{tg}\frac{17}{7} + 1\right)$. Точка $\frac{17}{7}$ принадлежит второй четверти числовой окружности, причем она расположена между точками $\frac{3\pi}{4}$ и π $\left(\frac{17}{7} - \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{28}(68 - 21\pi) \approx \frac{1}{28}(68 - 65{,}94) > 0\right)$. Значит, $-1 < \operatorname{tg} \frac{17}{7} < 0$, а потому $\operatorname{tg} \frac{17}{7}\left(\operatorname{tg}\frac{17}{7} + 1\right) < 0$. Неравенство $x + 1 + x^2 < 1$ доказано.

§ 14

14.21. б) Известно, что $\sin t + \cos t = 0{,}6$. Вычислить $\operatorname{tg} t \sin t + \operatorname{ctg} t \cos t$.

Решение.

Если $\sin t + \cos t = 0{,}6$, то $\sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t = 0{,}36$, откуда находим: $\sin t \cos t = -0{,}32$. Далее:

$$\operatorname{tg} t \sin t + \operatorname{ctg} t \cos t = \frac{\sin^2 t}{\cos t} + \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\sin t \cos t} =$$

$$= \frac{(\sin t + \cos t)(\sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t)}{\sin t \cos t} = \frac{0{,}6 \cdot (1 - (-0{,}32))}{-0{,}32} = -2{,}475.$$

14.22. б) Известно, что $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2{,}3$. Вычислить $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$.

Решение. $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t = (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^3 - 3\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t \cdot (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t) = 2{,}3^3 - 3 \cdot 2{,}3 = 5{,}267$.

14.23. г) Известно, что $\sin t \cos t = -0{,}5$. Вычислить $\sin^8 t + \cos^8 t$.

Решение.

$$\sin^8 t + \cos^8 t = (\sin^4 t + \cos^4 t)^2 - 2\sin^4 t\cos^4 t =$$
$$= ((\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t)^2 - 2(\sin t\cos t)^4 =$$
$$= (1 - 2(\sin t\cos t)^2)^2 - 2(\sin t\cos t)^4 =$$
$$= (1 - 2 \cdot 0{,}25)^2 - 2 \cdot 0{,}0625 = 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}125.$$

14.25. б) Вычислить $2\sin t + \cos t$, если $4\operatorname{ctg} t + 6\operatorname{tg} t + 11 = 0$ и $\frac{5\pi}{2} < t < \frac{11\pi}{4}$.

Решение. Введем обозначение: $\operatorname{tg} t = x$. Из условия следует, что новая переменная удовлетворяет уравнению $\frac{4}{x} + 6x + 11 = 0$, решив которое, получим: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. По условию $\frac{5\pi}{2} < t < \frac{11\pi}{4}$, значит, $\operatorname{tg} t < \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} = -1$. Итак, $x < -1$, а потому из найденных двух корней выбираем $x_1 = -\frac{4}{3}$. Таким образом, $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$.

Далее $\sin t = \frac{4}{5}$, $\cos t = -\frac{3}{5}$, $2\sin t + \cos t = 1$.

14.28. б) Вычислить $\operatorname{tg} t$, если известно, что

$$\frac{2\sin^2 t + 3\sin t\cos t - \cos^2 t}{2\cos^2 t - \sin^2 t} = -\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Разделив в левой части заданного равенства числитель и знаменатель почленно на $\cos^2 t$ и введя новую переменную $x = \operatorname{tg} t$, получим уравнение $\frac{2x^2 + 3x - 1}{2 - x^2} = -\frac{1}{2}$, откуда находим: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. По условию $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$, значит, $\operatorname{tg} t > -1$, поэтому из найденных двух значений для x, т. е. для $\operatorname{tg} t$, выбираем первое: $\operatorname{tg} t = 0$.

14.29. г) Зная, что $\operatorname{tg} t = a$, найти $\sin^3 t\cos t$.

Решение.

$$\sin^3 t\cos t = \operatorname{tg}^3 t\cos^4 t = a^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = a^3 \cdot \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{a^3}{(1 + a^2)^2}.$$

14.32. Упростить выражение:

а) $\sqrt{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} + \sqrt{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} +$
$+ 2\sin t - \cos t$, если $t \in (13;\ 14)$;

б) $\sqrt{\sin^2 t(1 - 2\operatorname{ctg} t) + 4\cos^2 t(1 - 0{,}5\operatorname{tg} t)} + \sin t + \cos t$, если $t \in (0;\ 1)$.

Решение.

а) $$\sqrt{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} + \sqrt{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} +$$
$$+ 2\sin t - \cos t = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} +$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} + 2\sin t - \cos t =$$
$$= \sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 t) - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} +$$
$$+ \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 t) - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} + 2\sin t - \cos t =$$
$$= |\cos t| + |\sin t| + 2\sin t - \cos t.$$

По условию $t \in (13;\ 14)$. Поскольку $4\pi < 13 < 14 < 4\pi + \frac{\pi}{2}$, заключаем, что $t \in \left(4\pi;\ 4\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. t — аргумент из первой четверти числовой окружности. Значит, $|\cos t| + |\sin t| + 2\sin t - \cos t =$ $= \cos t + \sin t + 2\sin t - \cos t = 3\sin t$.

б) $$\sqrt{\sin^2 t(1 - 2\operatorname{ctg} t) + 4\cos^2 t(1 - 0{,}5\operatorname{tg} t)} + \sin t + \cos t =$$
$$= \sqrt{\sin^2 t - 2\sin t\cos t + 4\cos^2 t - 2\sin t\cos t} + \sin t + \cos t =$$
$$= \sqrt{(\sin t - 2\cos t)^2} + \sin t + \cos t = |\sin t - 2\cos t| + \sin t + \cos t.$$

По условию $t \in (0;\ 1)$. Поскольку $1 < \frac{\pi}{3}$, заключаем, что $0 < t < \frac{\pi}{3}$, и, следовательно, $\frac{1}{2} < \cos t < 1$; $1 < 2\cos t < 2$; $2\cos t - \sin t > 0$. Значит, $|\sin t - 2\cos t| + \sin t + \cos t = 2\cos t - \sin t + \sin t + \cos t =$ $= 3\cos t$.

Ответ: а) $3\sin t$; б) $3\cos t$.

14.33. Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{2}$, $\sin\frac{13}{24}$;

б) $\frac{1}{2}$, $\cos 1$, $\cos 1{,}1$.

Решение. а) Поскольку $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{13}{24} < \frac{\pi}{2}$, заключаем, что $\sin\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} < \sin\frac{13}{24}$, т. е. заданные числа в порядке возрастания располагаются следующим образом: $\sin\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sin\frac{13}{24}$.

б) Поскольку $1 < \frac{\pi}{3} < 1{,}1 < \frac{\pi}{2}$, заключаем, что $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} > > \cos 1{,}1$, т. е. заданные числа в порядке возрастания располагаются следующим образом: $\cos 1{,}1$, $\frac{1}{2}$, $\cos 1$.

14.34. б) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\cos x$.

Решение. Введя новую переменную $t = \cos x$, получим: $y = -4t^2 + 2t + 1$. Таким образом, речь идет об отыскании наименьшего и наибольшего значений квадратичной функции $y = -4t^2 + + 2t + 1$ на отрезке $[-1; 1]$. Уравнение оси симметрии параболы $y = -4t^2 + 2t + 1$ имеет вид $t = \frac{1}{4}$, при этом значении t функция достигает своего наибольшего значения: $y_{\text{наиб}} = \frac{5}{4}$. А наименьшего значения функция может достигать только на одном из концов отрезка, а именно в той точке, которая более удалена от оси симметрии. В данном случае это $t = -1$, значит, $y_{\text{наим}} = y(-1) = -5$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -5$, $y_{\text{наиб}} = \frac{5}{4}$.

§ 15

15.15. а) Использовав геометрические соображения, вычислить: $\sin 15°$, $\cos 15°$.

Решение. Позднее, когда будут получены формулы тригонометрии, эта задача не будет представлять никакого труда: достаточно представить $\sin 15°$ в виде $\sin(45° - 30°)$ или в виде $\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$. Но на данном этапе изучения тригонометрии эти формулы учащимся неизвестны, предлагается использовать геометрические соображения.

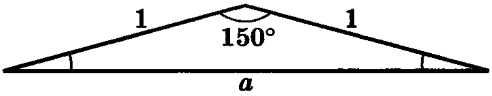


Рис. 38

Рассмотрим равнобедренный треугольник с углом 150° при вершине и боковой стороной 1 (рис. 38). Пусть a — основание треугольника, тогда по теореме косинусов находим: $a^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150° = 2 + \sqrt{3}$. Далее по теореме синусов получаем:

$$\frac{1}{\sin 15°} = \frac{a}{\sin 150°},$$

$$\sin 15° = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Зная $\sin 15°$, обычным образом находим $\cos 15°$:

$$\cos 15° = \sqrt{1 - \sin^2 15°} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

15.18. б) Вычислить $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 180°$.

Решение. $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 180° = \cos^2 90° + \cos^2 180° + (\cos^2 1° + \cos^2 179°) + (\cos^2 2° + \cos^2 178°) + \ldots + (\cos^2 89° + \cos^2 91°) = 1 + 2(\cos^2 1° + \cos^2 2° + \ldots + \cos^2 89°)$ (мы воспользовались тем, что $\cos^2 1° = \cos^2 179°$, $\cos^2 2° = \cos^2 178°$, ..., $\cos^2 89° = \cos^2 91°$, при этом используются не формулы приведения, которых пока нет, а рассуждения по числовой окружности).

Далее: $1 + 2(\cos^2 1° + \cos^2 2° + \ldots + \cos^2 89°) = 1 + 2((\cos^2 1° + \cos^2 89°) + (\cos^2 2° + \cos^2 88°) + \ldots + (\cos^2 44° + \cos^2 46°) + \cos^2 45°) = 1 + 2((\cos^2 1° + \sin^2 1°) + (\cos^2 2° + \sin^2 2°) + \ldots + (\cos^2 44° + \sin^2 44°) + \cos^2 45°) = 1 + 2(1 + 1 + \ldots + 1 + 0{,}5) = 1 + 2(44 + 0{,}5) = 90$.

15.20. При каких натуральных значениях n выражение

$$\sin 1° \sin 2° \cdot \ldots \cdot \sin n°:$$

а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю?

Решение. Поскольку $\sin 180° = 0$, можно сделать вывод, что при $n \geqslant 180$ заданное выражение равно нулю. Если $n < 180$, то все множители в заданном произведении — положительные числа, а потому произведение положительно. Отрицательным оно не будет ни при каких значениях n.

Ответ: а) при $n < 180$; б) нет таких значений n; в) при $n \geqslant 180$.

15.22. При каких натуральных значениях n выражение $\sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin n°$:

а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю?

Решение. Как и в № 15.20, использование формул приведения осуществляется не по известному алгоритму (о нем речь пойдет значительно позднее), а исходя из геометрических соображений — с помощью числовой окружности. Так, прежде чем отвечать на вопросы задачи, фиксируем, что $\sin 1° = -\sin 359°$, $\sin 2° = -\sin 358°$, ..., $\sin 179° = -\sin 181°$; отметим еще, что $\sin 180° = \sin 360° = \sin 540° = \ldots = 0$.

Из указанных равенств следует, что заданная сумма равна нулю, если $n = 359$, $n = 360$, и вообще для любых натуральных чисел вида $n = -1 + 360k$, $n = 360k$, $k \in N$. Во всех остальных случаях заданная сумма положительна.

Ответ: а) при $n \neq -1 + 360k$, $n \neq 360k$; $k \in N$; б) нет таких значений n; в) при $n = -1 + 360k$, $n = 360k$; $k \in N$.

15.23. При каких натуральных значениях n выражение $\cos 1° + \cos 2° + \ldots + \cos n°$:

а) положительно ($n \leqslant 360$); б) отрицательно ($n \leqslant 360$); в) равно нулю?

Решение. Прежде чем отвечать на вопросы задачи фиксируем (опять-таки с помощью числовой окружности) две серии равенств:

1) $\cos 1° + \cos 179° = 0$, $\cos 2° + \cos 178° = 0$, ..., $\cos 89° + \cos 91° = 0$;

2) $\cos 181° + \cos 359° = 0$, $\cos 182° + \cos 358° = 0$, ..., $\cos 269° + \cos 271° = 1$.

Отметим еще, что $\cos 90° = \cos 270° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\cos 360° = 1$.

Из указанных равенств следует, что заданная сумма равна нулю, если $n = 179$, а при $n < 179$ число положительных слагаемых в заданной сумме будет превышать число соответствующих отрицательных слагаемых и сумма будет положительной. Если $180 \leqslant n \leqslant 359$, то в заданной сумме число отрицательных слагаемых будет превышать число соответствующих положительных слагаемых и сумма будет отрицательной. При $n = 360$ сумма равна нулю. Все эти выводы повторяются при втором, третьем и т. д. обходах числовой окружности.

Ответ: а) при $1 \leqslant n \leqslant 178$; б) при $180 \leqslant n \leqslant 359$; в) при $n = -181 + 360k$, $n = 360k$; $k \in N$.

15.24. Использовав равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине, вычислить $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 36°$, $\cos 36°$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 1$ и угол B равен 36° (рис. 39). Проведем биссектрису AD, тогда получатся два равнобедренных треугольника: ABD (у него $AD = BD$) и ACD (у него $AC = AD$).

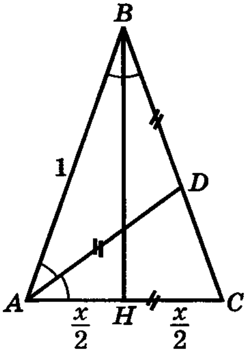


Рис. 39

Пусть $AC = x$, тогда $AD = x$ и $BD = x$, а $CD = 1 - x$. По теореме о биссектрисе $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$,

т. е. $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$, откуда находим: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Проведем в треугольнике ABC высоту BH, тогда $\sin 18° = \frac{AH}{AB}$.

Но $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $AC = 1$; значит, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Зная $\sin 18°$, обычным способом вычисляем $\cos 18°$:

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Чтобы найти $\cos 36°$, применим теорему косинусов к треугольнику ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 36°;$$
$$x^2 = 1 + 1 - 2\cos 36°;$$
$$\cos 36° = \frac{1}{2}(2 - x^2) = \frac{1}{2}\left(2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

§ 16

16.35. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на промежутке:

в) $[231; 238]$;

г) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. в) Основной период заданной функции равен 2π, что меньше длины указанного отрезка ($2\pi < 7$). Значит, на этом отрезке функция принимает все свои возможные значения, в частности в нем есть точка, в которой косинус обратится в 1, и есть точка, в которой косинус обратится в -1. Вывод: $y_{наим} = 0{,}5$; $y_{наиб} = 2{,}5$.

г) Заданная функция возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Поскольку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$, на заданном промежутке функция также возрастает, а потому $y_{наим} = y(0) = 1$, а $y_{наиб}$ не существует.

16.46. Доказать, что функция $y = \sin x$:

а) возрастает на отрезке [12; 13];

б) убывает на интервале (8; 10);

в) достигает на интервале (7; 12) наименьшего и набольшего значений;

г) не достигает на интервале (−1; 1) ни наименьшего, ни наибольшего значений.

а) Так как $-\frac{\pi}{2} + 4\pi < 12 < 13 < \frac{\pi}{2} + 4\pi$, а на $\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi\right)$ функция $y = \sin x$ возрастает, то она возрастает и на интервале (12; 13).

б) Так как $\frac{\pi}{2} + 2\pi < 8 < 10 < \frac{3\pi}{2} + 2\pi$, а на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right)$ функция $y = \sin x$ убывает, то она убывает и на интервале (8; 10).

в) Так как $7 < \frac{\pi}{2} + 2\pi < \frac{3\pi}{2} + 2\pi < 12$, то на интервале (7; 12) есть точка, в которой функция $y = \sin x$ достигает своего наибольшего значения — это точка $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, в ней функция принимает свое наибольшее значение 1, — и есть точка, в которой функция $y = \sin x$ достигает своего наименьшего значения — это точка $\frac{3\pi}{2} + 2\pi$, в ней функция принимает свое наименьшее значение −1.

г) Так как $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$, а на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ возрастает, то она возрастает и на интервале (−1; 1), а потому не достигает на нем ни наименьшего, ни наибольшего значений.

16.56. Решить уравнение:

а) $\sin x = \left|\frac{3x}{2\pi} - \frac{3}{4}\right|$; б) $\cos x + \left|\frac{3x}{5\pi} - \frac{3}{10}\right| = 0$ $(x \geqslant 0)$.

Р е ш е н и е. а) Заметим прежде всего, что $\frac{3x}{2\pi} - \frac{3}{4} = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}$. Значит, график функции $y = \left|\frac{3x}{2\pi} - \frac{3}{4}\right|$ состоит из двух лучей с верши-

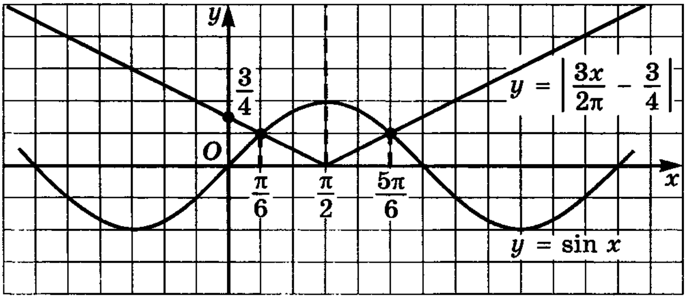


Рис. 40

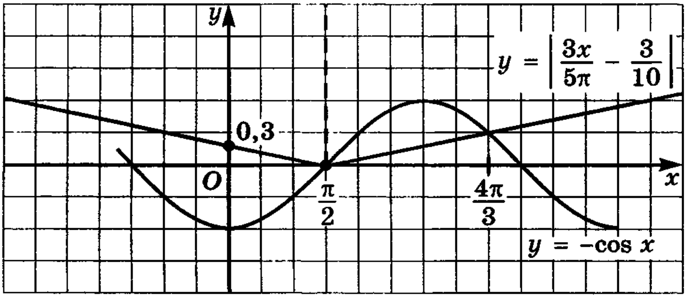


Рис. 41

ной в точке $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, причем один из этих лучей пересекает ось ординат в точке $\left(0;\ \frac{3}{4}\right)$; график изображен на рисунке 40. Построив в той же системе координат график функции $y = \sin x$, замечаем, что построенные графики пересекаются в двух точках, абсциссы этих точек, предположительно, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Подставив эти значения в заданное уравнение, убеждаемся, что гипотеза подтвердилась: оба эти значения являются корнями уравнения.

б) Заметим, что $\frac{3x}{5\pi} - \frac{3}{10} = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}$. Значит, график функции $y = \left|\frac{3x}{5\pi} - \frac{3}{10}\right|$ состоит из двух лучей с вершиной в точке $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, симметричных относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, причем один из этих лучей пересекает ось ординат в точке $\left(0;\ \frac{3}{10}\right)$; график изображен на рисунке 41. Построив в той же системе координат график функции $y = -\cos x$, замечаем, что построенные графики при $x \geqslant 0$ пересекаются в двух точках, абсцисса одной из них равна $\frac{\pi}{2}$, а другой, предположительно, $\frac{4\pi}{3}$. Подставив в заданное уравнение значение $x = \frac{4\pi}{3}$, убеждаемся, что оно удовлетворяет уравнению.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$.

16.66. б) Построить график функции $y = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$.

Решение. Функция $y = |\cos x|$ имеет период π. В самом деле, $|\cos(x + \pi)| = |\cos(x - \pi)| = |-\cos x| = |\cos x|$. Значит, и заданная функция имеет период π, а потому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на любом промежутке длины π, например на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Но на этом интервале выполняется неравенство $\cos x > 0$, а потому $|\cos x| = \cos x$, а $\operatorname{tg} x\,|\cos x| = \sin x$. Построив график функции $y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и продолжив его периодически с периодом π на всю ось абсцисс, получим требуемый график (рис. 42).

16.72. б) Построить график функции $y = \sin(\cos x)$.

Решение. Заданная функция — периодическая с основным периодом 2π и четная, поэтому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на отрезке $[0; \pi]$, отразить ее симметрично относительно оси ординат и затем воспользоваться периодичностью функции. На $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает от 1 до -1. Соответственно функция $y = \sin(\cos x)$ убывает от $\sin 1$,

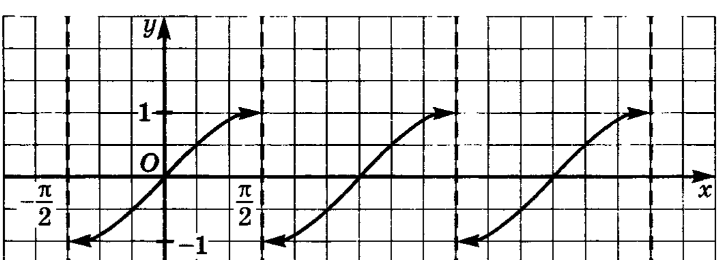


Рис. 42

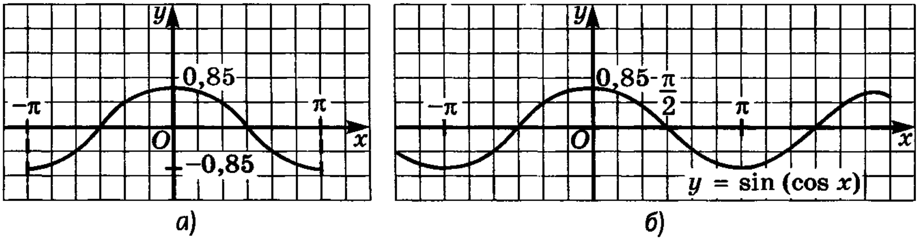


Рис. 43

что примерно равно 0,85, до $\sin(-1)$, ее график на $[-\pi; \pi]$ изображен на рисунке 43 *а*, а весь график — на рисунке 43 *б*.

§ 17

17.15. а) Решить уравнение $2\sin x - 1 = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}$.

Решение. Построим в одной системе координат график функции $y = 2\sin x - 1$ и график функции $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}$ — параболу с вершиной в точке $\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi^2}{9}\right)$, пересекающую ось ординат в точке $\left(0; \frac{5\pi^2}{36}\right)$ (рис. 44). Замечаем, что построенные графики пересекаются в двух точках, абсциссы этих точек, предположительно, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Подставив эти значения в заданное уравнение, убеждаемся, что гипотеза подтвердилась: оба эти значения являются корнями уравнения.

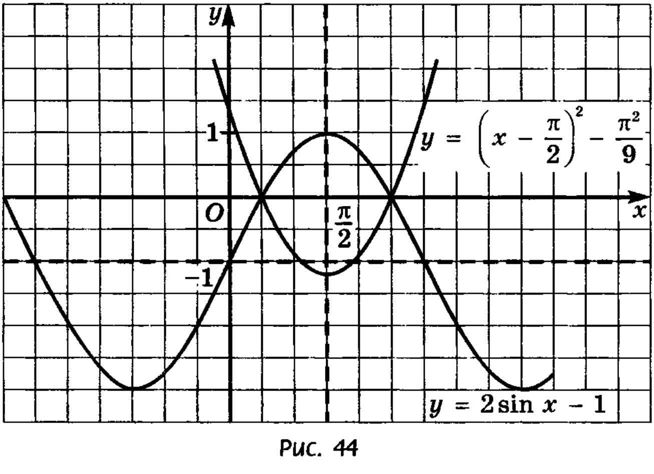
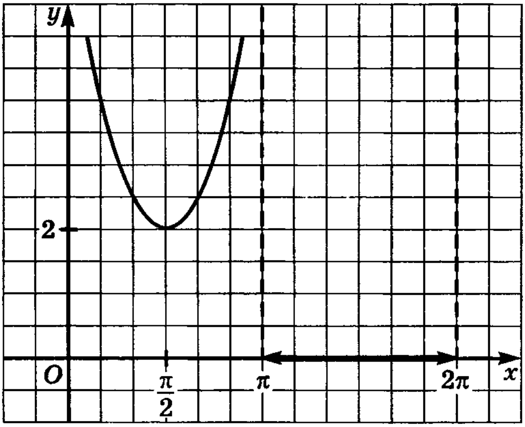
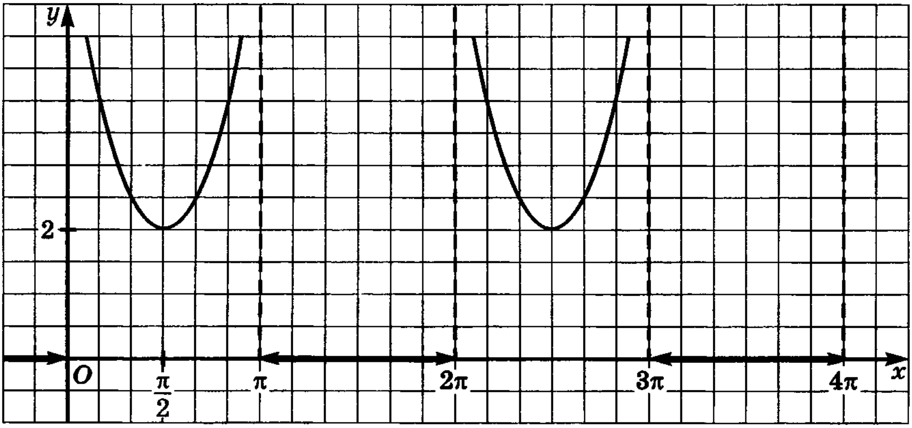


Рис. 44



а)



б)

Рис. 45

17.19. а) Построить график функции $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{|\sin x|}$.

Р е ш е н и е. Учтем, что область определения функции задается условием $x \neq \pi n$ и что функция — периодическая с основным периодом 2π. Поэтому достаточно сначала построить ветви графика на $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, а затем, воспользовавшись периодичностью, построить весь график. Если $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$, $|\sin x| = \sin x$ и заданная функция принимает вид $y = \dfrac{2}{\sin x}$; если $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$, $|\sin x| = -\sin x$ и заданная функция принимает вид $y = 0$. На рисунке 45 *а* изображен график функции на $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, а на рисунке 45 *б* — весь график.

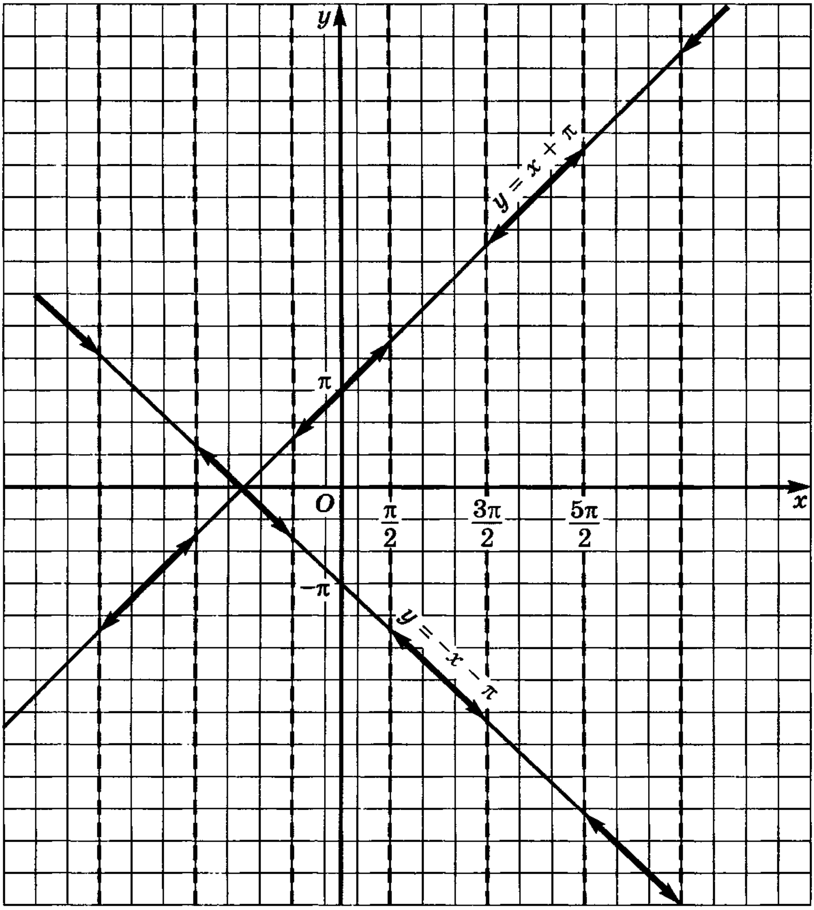


Рис. 46

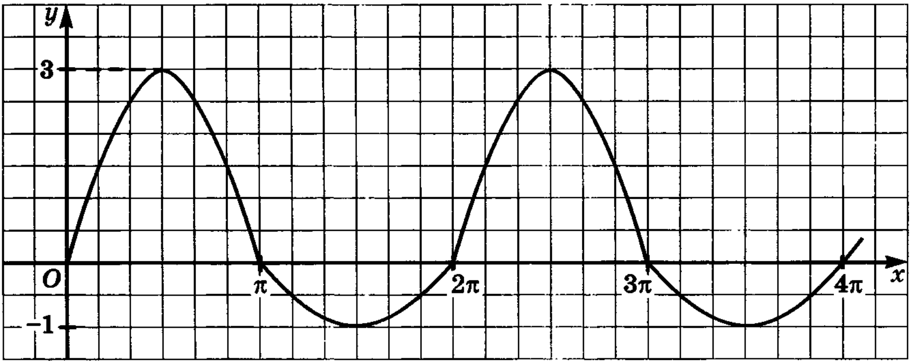
17.20. б) Построить график функции $y = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}(x + \pi)$.

Решение. Если $\cos x > 0$, то $y = x + \pi$; если $\cos x < 0$, то $y = -(x + \pi)$. Значит, можно рассуждать так: построим прямые $y = x + \pi$, $y = -(x + \pi)$, выделим с помощью вертикальных пунктирных прямых интервалы знакопостоянства функции $y = \cos x$ и в каждой полученной полосе выделим соответствующий участок на соответствующей прямой (рис. 46).

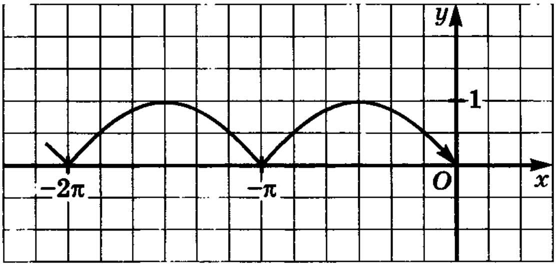
17.21. а) Построить график функции $y = \sin x + \sin|x| + |\sin x|$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $x \geqslant 0$. В этом случае функция принимает вид $y = 2\sin x + |\sin x|$, т. е

$$y = \begin{cases} 3\sin x, \text{ если } \sin x \geqslant 0, \\ \sin x, \text{ если } \sin x < 0. \end{cases}$$



а)



б)

Рис. 47

График этой функции представлен на рисунке 47 *а*.

Если $x < 0$, то функция принимает вид $y = |\sin x|$, ее график представлен на рисунке 47 *б*. Искомый график — объединение двух построенных.

17.22. а) Построить график функции $y = \cos x + \cos \dfrac{x - |x|}{2} + |\cos x|$.

Р е ш е н и е. Рассуждая как в № 17.21, приходим к выводу, что речь идет о построении графика кусочной функции, которую можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} 2\cos x + 1, \text{ если } x \geqslant 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 0 \text{ и } \cos x < 0, \\ 3\cos x, \text{ если } x < 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0, \\ \cos x, \text{ если } x < 0 \text{ и } \cos x < 0. \end{cases}$$

График изображен на рисунке 48.

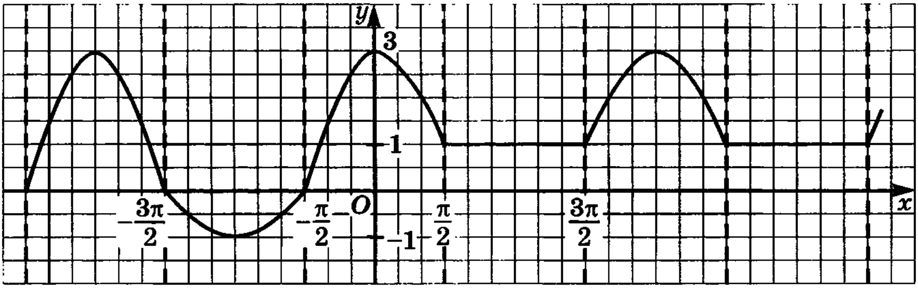


Рис. 48

§ 18

18.18. б) Решить уравнение $\cos \frac{\pi x}{3} = \sqrt{1{,}5x}$.

Решение. Построим в одной системе координат график функции $y = \cos \frac{\pi x}{3}$ и график функции $y = \sqrt{1{,}5x}$ (рис. 49). Замечаем, что построенные графики пересекаются в одной точке, абсцисса этой точки, предположительно, $\frac{1}{2}$. Подставив это значение в заданное уравнение, убеждаемся, что гипотеза подтвердилась: $x = \frac{1}{2}$ — единственный корень уравнения.

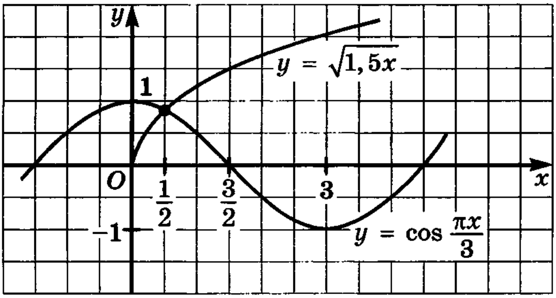


Рис. 49

18.80. а) Решить уравнение $\sin \pi x = 2x - 4$.

Решение. Построим в одной системе координат график функции $y = \sin \pi x$ и график функции $y = 2x - 4$ (рис. 50). Замечаем, что построенные графики пересекаются в трех точках, абсциссы этих точек, предположительно, 1,5, 2 и 2,5. Подставив эти значения в заданное уравнение, убеждаемся, что гипотеза подтвердилась: действительно указанные значения — три корня заданного уравнения.

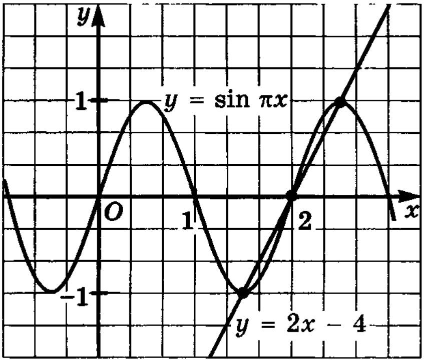


Рис. 50

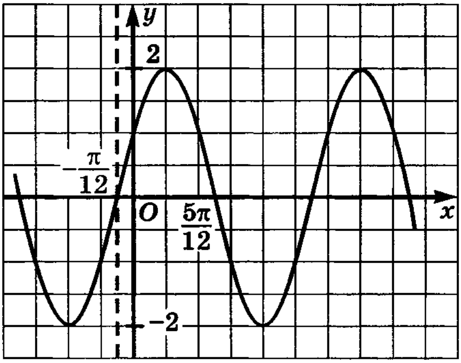


Рис. 51

§ 19

19.5. а) Подобрать коэффициенты a, b, c так, чтобы на рисунке 51 был изображен график функции $y = a\sin(bx + c)$.

Р е ш е н и е. График заданной функции получается из графика функции $y = \sin x$ с помощью композиции трех преобразований: растяжением от оси абсцисс с коэффициентом a, сжатием к оси ординат с коэффициентом b и параллельным переносом вдоль оси абсцисс на $-\frac{c}{b}$ (чтобы убедиться в справедливости последнего вывода, достаточно представить заданную функцию в виде $y = a\sin b\left(x + \frac{c}{b}\right)$). Обратим внимание на то, что одна полуволна синусоиды, во-первых, имеет максимальную ординату, равную 2, а потому $a = 2$; во-вторых, имеет своими концами точки $-\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$, расстояние между которыми равно $\frac{\pi}{2}$, а не π, как у обычной синусоиды, т. е. коэффициент сжатия к оси ординат равен двум: $b = 2$. И, наконец, в качестве нового начала координат можно выбрать точку $\left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$, т. е. $-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{12}$, откуда находим, что $c = \frac{\pi}{6}$.

Итак, на рисунке 51 изображен график функции

$$y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

19.12. При каких значениях параметра a функция

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right):$$

а) возрастает на $\left(a - \frac{2\pi}{3};\ a + \frac{2\pi}{3}\right)$; б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{2}\right]$?

Решение. Введем новую переменную $t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$. Функция $y = 2\sin t$ возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$. Решив неравенство $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, получим: $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, т. е. заданная функция возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 4\pi n\right]$. Решив неравенство $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, получим $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{8\pi}{3} + 4\pi n$, т. е. заданная функция возрастает на любом отрезке вида $\left[\frac{2\pi}{3} + 4\pi n;\ \frac{8\pi}{3} + 4\pi n\right]$.

а) Заданная функция будет возрастать на интервале

$$\left(a - \frac{2\pi}{3};\ a + \frac{2\pi}{3}\right),$$

если $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a - \frac{2\pi}{3}$ и $a + \frac{2\pi}{3} \leqslant \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. Решив эту систему неравенств, получим:

$$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Заданная функция будет убывать на отрезке $\left[a;\ a + \frac{\pi}{2}\right]$, если $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a$ и $a + \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{8\pi}{3} + 4\pi n$. Решив эту систему неравенств, получим:

$$\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant \frac{13\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

19.13. При каких положительных значениях параметра a функция $y = -3\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$:

а) возрастает на $(a;\ 2a)$; б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{3}\right]$?

Решение. Введем новую переменную $t = 3x - \frac{\pi}{2}$. Функция $y = -3\cos t$ возрастает на любом отрезке вида $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ и убывает на любом отрезке вида $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$. Решив неравенство $2\pi n \leqslant 3x - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi + 2\pi n$, получим: $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, т. е. заданная функция возрастает на любом отрезке вида

$$\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right].$$

Решив неравенство $-\pi + 2\pi n \leqslant 3x - \frac{\pi}{2} \leqslant 2\pi n$, получим: $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, т. е. заданная функция возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right]$.

а) Заданная функция будет возрастать на интервале $(a;\ 2a)$, где $a > 0$, если $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant a$ и $2a \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$. Решив эту систему неравенств, получим $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$. Обычное условие $n \in \mathbf{Z}$ здесь явно нуждается в корректировке. Во-первых, по условию $a > 0$, значит, в записанном двойном неравенстве параметр n не может принимать отрицательных значений. Во-вторых, из всех неотрицательных целых значений n записанное двойное неравенство непротиворечиво лишь при $n = 0$, когда оно принимает вид $\frac{\pi}{6} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4}$.

б) Заданная функция будет убывать на отрезке $\left[a;\ a + \frac{\pi}{3}\right]$, если $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant a$ и $a + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. Решив эту систему неравенств, получим: $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. Обычное условие $n \in \mathbf{Z}$, как и в пункте а), нуждается в корректировке. По условию $a > 0$, значит, $n > 0$, т. е. $n \in N$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4}$; б) $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$.

§ 20

20.27. б) Построить график функции $y = -2\ \mathrm{tg}\,(\sin x)\ \mathrm{ctg}\,(\sin x)$.

Решение. Область определения функции задается условием $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$. Значит, графиком функции служит прямая $y = -2$ с выколотыми точками $(\pi n;\ -2)$, где $n \in Z$.

§ 21

21.49. а) Доказать, что $\sin\,(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Пусть $\mathrm{arctg}\,x = t$, тогда $\mathrm{tg}\,t = x$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Нужно найти $\sin t$.

Так как $1 + \mathrm{tg}^2\,t = \frac{1}{\cos^2 t}$, то $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\sin t = \mathrm{tg}\,t \cos t = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

21.50. Построить графики функций:

а) $y = \cos\,(\arccos x)$;

б) $y = \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,(-x)$;

в) $y = \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,x)$;

г) $y = \arcsin x + \arcsin\,(-x)$.

Решение. В задании а) речь идет о построении графика функции $y = x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В задании в) речь идет о построении графика функции $y = x$, $x \in R$.

Похожи друг на друга задания б) и г): в б) речь идет о построении графика функции $y = 0$, $x \in R$, а в задании г) — о построении графика функции $y = 0$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

21.51. Построить графики функций:

а) $y = \arccos x + \arccos\,(-x)$;

б) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos \left(-\frac{1}{x}\right)$;

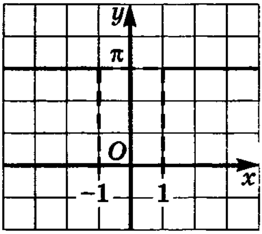


Рис. 52

в) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

Решение. Во всех случаях основой графика служит прямая $y = \pi$. В задании а) речь идет о построении графика функции $y = \pi$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В задании б) речь идет о построении графика функции $y = \pi$, область определения которой задается условием $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, т. е. $x \leqslant -1$; $x \geqslant 1$ (рис. 52). В задании в) речь идет о построении графика $y = \pi$, $x \in \boldsymbol{R}$, а в задании г) — о построении графика функции $y = \pi$, где $x \geqslant 0$.

21.52. Построить график функции:
а) $y = \sin(\arccos x)$; б) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

Решение. а) Поскольку $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, графиком функции служит верхняя единичная полуокружность с центром в начале координат.

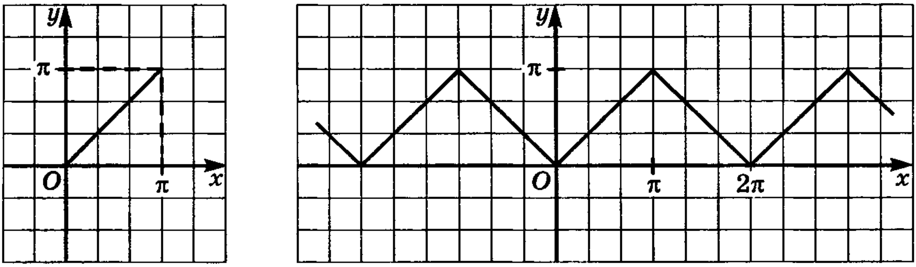
б) Поскольку $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \dfrac{1}{x}$, графиком функции служит гипербола $y = \dfrac{1}{x}$.

21.53. Построить график функции:
а) $y = \arccos(\cos x)$; б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решение. а) Заданная функция — периодическая с основным периодом 2π и четная, поэтому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на отрезке $[0; \pi]$, отразить ее симметрично относительно оси ординат и воспользоваться периодичностью функции.

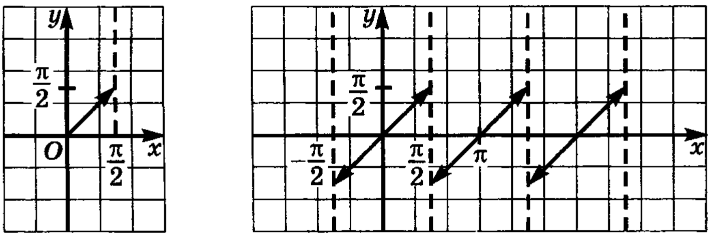
На отрезке $[0; \pi]$ выполняется тождество $\arccos(\cos x) = x$, т. е. речь идет о построении графика функции $y = x$, $x \in [0; \pi]$; график изображен на рисунке 53 *а*. А на рисунке 53 *б* изображен весь график.

б) Заданная функция определена при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, периодическая с основным периодом π и нечетная, поэтому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на полуинтервале $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, отразить ее симметрично относительно начала координат и воспользоваться периодичностью функции.



а) б)

Рис. 53



а) б)

Рис. 54

На полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется тождество $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, т. е. речь идет о построении графика функции $y = x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; график изображен на рисунке 54 *а*. А на рисунке 54 *б* изображен весь график.

21.59. Решить уравнение:

а) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$;

б) $\arccos x = \arcsin x$.

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 55), убеждаемся, что уравнение имеет единственный корень, принадлежащий интервалу $(0; 1)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{tg} t$ монотонна, а потому уравнение $\arccos x = \operatorname{arctg} x$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. Поскольку $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, а $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, приходим к уравнению $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = x$, откуда $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$.

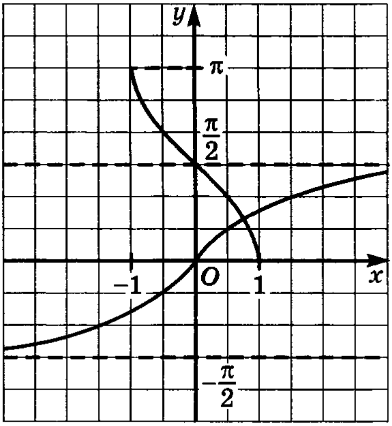


Рис. 55

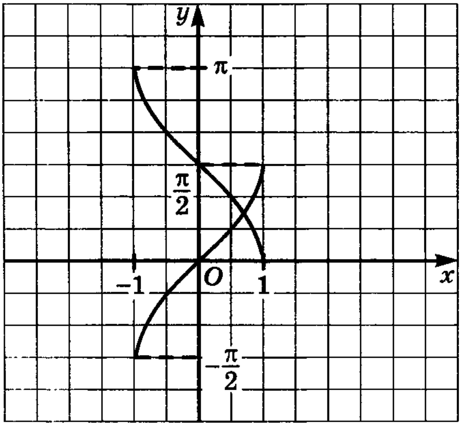


Рис. 56

б) Первый способ. Построив в одной системе координат графики функций $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$ (рис. 56), убеждаемся, что уравнение имеет единственный корень, принадлежащий интервалу (0; 1). Нетрудно догадаться, что $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Второй способ. Функция $y = \arccos x$ убывает, а функция $y = \arcsin x$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$, поэтому заданное уравнение имеет не более одного корня. Значение $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет уравнению, а потому это единственный корень уравнения.

21.62. а) Решить неравенство $8 \arcsin^2 x + 2\pi \arcsin x < \pi^2$.

Решение. Введем новую переменную $t = \arcsin x$. Теперь речь идет о решении квадратного неравенства $8t^2 + 2\pi t - \pi^2 < 0$; находим: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4}$.

Итак, $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{4}$, откуда следует, что $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Глава 4

§ 22

22.32. б) Решить уравнение $2|x - 6| \cos x = x - 6$.

Решение. Сразу отметим, что $x = 6$ — корень уравнения.

Если $x > 6$, то уравнение принимает вид $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда находим: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. При $n = 2, 3, 4, \ldots$ эта серия удовлетворяет условию $x > 6$, при $n = 0, -1, -2, \ldots$ указанное условие не выполняется, а при $n = 1$ выполняется частично: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$ условию не удовлетворяет, а $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ — удовлетворяет.

Если $x < 6$, то уравнение принимает вид $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда находим: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. При $n = 0, -1, -2, \ldots$ эта серия удовлетворяет условию $x < 6$, при $n = 2, 3, 4, \ldots$ указанное условие не выполняется, а при $n = 1$ выполняется частично: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ условию удовлетворяет, а $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ — не удовлетворяет.

В итоге получаем следующие решения данного уравнения: $6, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n = 2, 3, 4, \ldots; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n = 0, -1, -2, \ldots$

22.33. Решить уравнения:

а) $\sqrt{16 - x^2}\sin x = 0$;

б) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$;

в) $\sqrt{7x - x^2}\,(2\cos x - 1) = 0$;

г) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

Решение. а) Фактически речь идет об отыскании корней уравнения $\sin x = 0$ на отрезке $[-4; 4]$, служащем решением неравенства $16 - x^2 \geqslant 0$. Из серии $x = \pi n$ этому отрезку принадлежат три значения: $-\pi, 0, \pi$. Кроме того, в ответ следует включить корни уравнения $16 - x^2 = 0$, т. е. значения 4 и -4.

Ответ: $-4, 4, -\pi, 0, \pi$.

б) Из уравнения $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ находим: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Из неравенства $4x^2 - 7x + 3 \geqslant 0$ получаем: $x \leqslant \frac{3}{4}$, $x \geqslant 1$. Все найденные решения тригонометрического уравнения удовлетворяют этим условиям, кроме $\frac{\pi}{4}$. Ответ можно записать так: $1, \frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}$ и серия $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

в) Решением неравенства $7x - x^2 \geqslant 0$ служит отрезок $[0; 7]$. Из уравнения $2\cos x - 1 = 0$ находим: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Если $n = 0$, то $x = \pm\frac{\pi}{3}$; указанному отрезку принадлежит лишь значение $\frac{\pi}{3}$. Если $n = 1$, то $x = \frac{7\pi}{3}$ или $\frac{5\pi}{3}$; отрезку $[0; 7]$ принадлежит только значение $\frac{5\pi}{3}$. При остальных значениях параметра n получаются корни тригонометрического уравнения, лежащие вне указанного отрезка.

Ответ: $0, 7, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

г) Из уравнения $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ находим две серии решений: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. Решив неравенство $3x^2 - 7x + 4 \geqslant 0$, получим: $x \leqslant 1$, $x \geqslant \frac{4}{3}$. Все найденные решения тригонометрического уравнения удовлетворяют этим условиям, кроме $\frac{\pi}{3}$. Ответ можно записать так: 1, $\frac{4}{3}$ и серия $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

22.36. Найти область значений функции:

а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}$;

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}$.

Решение. а) Имеем:

$$y = \cos 3x + \sqrt{-\sin^2 3x}.$$

Подкоренное выражение имеет смысл лишь при условии $\sin 3x = 0$, т. е. $3x = \pi n$. Но тогда $\cos 3x = \pm1$. Таким образом, $E(f) = \{-1, 1\}$.

б) Имеем:

$$y = \sin 2x + \sqrt{-\cos^2 4x}.$$

Подкоренное выражение имеет смысл лишь при условии $\cos 4x = 0$, т. е. $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, или $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Но тогда $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $E(f) = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

22.40. б) Решить уравнение $(x^2 + 8x + 11)|\cos 2x| = 4 \cos 2x$.

Решение. Те значения x, при которых $\cos 2x = 0$, удовлетворяют заданному уравнению, следовательно, получаем первую серию решений: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Если $\cos 2x > 0$, то уравнение принимает вид $x^2 + 8x + 11 = 4$, откуда находим: $x_1 = -1$, $x_2 = -7$. Но надо проверить выполнение условия $\cos 2x > 0$. Если $x = -1$, то получаем $\cos(-2)$. Точка -2 принадлежит третьей четверти числовой окружности, где косинус отрицателен, т. е. условие $\cos 2x > 0$ не выполняется. Если $x = -7$, то получаем $\cos(-14)$. Точка -14 принадлежит четвертой четверти числовой окружности, где косинус положителен, т. е. условие $\cos 2x > 0$ выполняется. Итак, из найденных двух значений берем лишь $x = -7$.

Если $\cos 2x < 0$ то уравнение принимает вид $x^2 + 8x + 11 = -4$, откуда находим: $x_3 = -3$, $x_4 = -5$. Проверим выполнение условия $\cos 2x < 0$. Если $x = -3$, то получаем $\cos(-6)$. Точка -6 принадлежит первой четверти числовой окружности, где косинус положителен, т. е. условие $\cos 2x < 0$ не выполняется. Если $x = -5$, то получаем $\cos(-10)$. Точка -10 принадлежит второй четверти числовой окружности, где косинус отрицателен, т. е. условие $\cos 2x < 0$ выполняется. Итак, из найденных двух значений берем лишь $x = -5$.

Ответ: $-7, -5, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

22.41. а) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{8x - x^2 - 7} = 0?$$

Решение. Из уравнения $8x - x^2 - 7 = 0$ находим: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$. Из уравнения $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ находим: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$.

Но из этой серии надо выбрать те значения, которые входят в область определения исходного уравнения, т. е. удовлетворяют неравенству $1 \leqslant x \leqslant 7$.

Имеем: $1 \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leqslant 7$; $12 \leqslant \pi(4n + 1) \leqslant 84$. Последнее двойное неравенство выполняется только при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Значит, из серии $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$ корнями заданного уравнения являются 6 чисел, а всего уравнение имеет 8 корней.

22.56. б) Найти область определения функции

$$y = \arccos(2x - 1) + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x}.$$

Решение. Область определения функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 1, \\ \cos x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим: $0 \leqslant x \leqslant 1$. На этом отрезке второе неравенство системы выполняется при $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 1$. Итак, $D(f) = \left[\frac{\pi}{4};\ 1\right]$.

Аналогичные рассуждения применяются при решении № 22.63.

22.57. б) Решить уравнение $\cos^4 2x + 1 = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Поскольку левая часть уравнения не меньше 1, а правая — не больше 1, решения уравнения надо искать «на стыке», т. е. они должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Подставив эту серию во второе уравнение системы, получим: $\cos^2 \frac{\pi n}{2} = 1$. Это верно лишь при четных значениях n, т. е. при $n = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Значит, решения системы, а с ней и исходного уравнения имеют вид $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

22.62. б) Решить уравнение $\sin(2\pi \cos x) = \frac{1}{2}$.

Решение. Имеем:

$$2\pi \cos x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\cos x = (-1)^n \cdot \frac{1}{12} + \frac{n}{2}.$$

Будем давать параметру n последовательно значения 0, 1, 2, 3, ... Если $n = 0$, уравнение принимает вид $\cos x = \frac{1}{12}$; если $n = 1$, то $\cos x = \frac{5}{12}$. При $n = 2, 3, 4, \ldots$ в правой части рассматриваемого уравнения будет число, большее 1, т. е. уравнение не имеет решений.

Будем давать параметру n последовательно значения $-1, -2, -3, \ldots$. Если $n = -1$, уравнение принимает вид $\cos x = -\frac{7}{12}$; если $n = -2$, то $\cos x = -\frac{11}{12}$. При $n = -3, -4, \ldots$ в правой части рассматриваемого уравнения будет число, меньшее -1, т. е. уравнение не имеет решений.

Таким образом, задача сводится к решению совокупности четырех уравнений:

$$\cos x = \frac{1}{12};\ \cos x = \frac{5}{12};\ \cos x = -\frac{7}{12};\ \cos x = -\frac{11}{12}.$$

22.64. б) При каких значениях параметра a решением неравенства $(2a - 3)\sin x + 1 \geqslant 0$ служит любое действительное число?

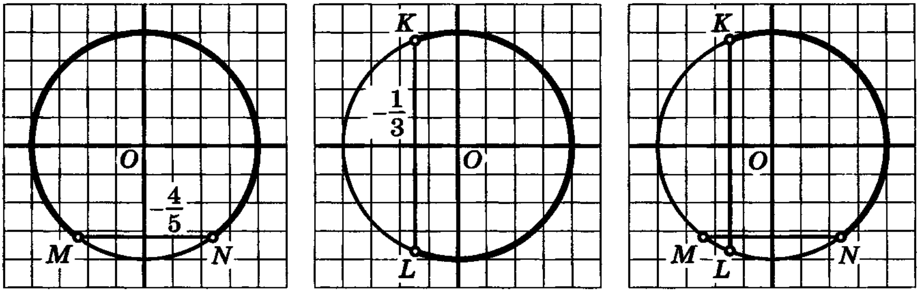
Решение. При $a = 1{,}5$ неравенство принимает вид $0 \cdot \sin x + 1 \geqslant 0$ — это верно при любых x.

Если $a > 1{,}5$, то неравенство преобразуется к виду $\sin x \geqslant \frac{1}{3 - 2a}$. Это верно при любых x, если $\frac{1}{3 - 2a} \leqslant -1$, т. е. если $1{,}5 < a \leqslant 2$.

Если $a < 1{,}5$, то неравенство преобразуется к виду $\sin x \leqslant \frac{1}{3 - 2a}$. Это верно при любых x, если $\frac{1}{3 - 2a} \geqslant 1$, т. е. если $1 \leqslant a < 1{,}5$.

Объединив найденные результаты, получим: $1 \leqslant a \leqslant 2$.

В последних четырех номерах рассматриваемого параграфа учащимся предлагается решить систему простейших тригонометрических неравенств. Нетрадиционность заданий в № 22.65—22.67 состоит в том, что приходится использовать обратные тригонометрические функции, а сравнивать их значения для правильного расположения точек на числовой окружности весьма непросто.



а) б) в)

Рис. 57

22.65. а) Решить систему неравенств $\begin{cases} \sin x > -\frac{4}{5}, \\ \cos x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$

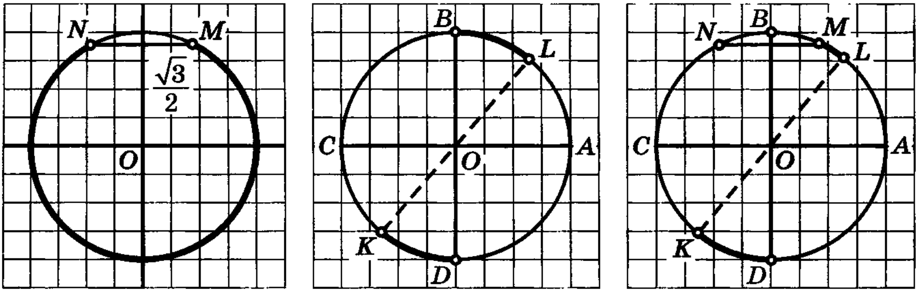
Решение. На рисунке 57 *а* представлено геометрическое решение первого неравенства системы (дуга NM), а на рисунке 57 *б* — второго (дуга LK). Прежде чем переносить эти решения на общую числовую окружность, следует сделать вывод о взаимном расположении на числовой окружности точек M и L.

Ордината точки M равна $-\frac{4}{5}$, значит, ее абсцисса $-\frac{3}{5}$, это меньше, чем $-\frac{1}{3}$, т. е. точка M расположена левее точки L. Теперь можно сделать правильный вывод о геометрическом решении системы неравенств: это дуга NK (рис. 57 *в*). Осталось лишь составить аналитическую запись дуги: $2\pi n - \arcsin\frac{4}{5} < x < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$.

22.66. а) Решить систему неравенств $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1{,}5. \end{cases}$

Решение. На рисунке 58 *а* представлено геометрическое решение первого неравенства системы (дуга NM), а на рисунке 58 *б* — второго (дуги LB и KD). Прежде чем переносить эти решения на общую числовую окружность, следует сделать вывод о взаимном расположении на числовой окружности точек M и L.

Имеем: $1{,}5 < \sqrt{3}$, следовательно, $\operatorname{arctg} 1{,}5 < \operatorname{arctg}\sqrt{3}$, т. е. $\operatorname{arctg} 1{,}5 < \frac{\pi}{3}$, а потому точка L располагается на числовой окружности ближе к точке A, чем точка M. Теперь можно сделать правильный вывод о геометрическом решении системы нера-



а) б) в)

Рис. 58

венств: это дуги LM и KD (рис. 58 *в*). Осталось лишь составить аналитическую запись дуг:

$2\pi n + \operatorname{arctg} 1{,}5 < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $2\pi n + \pi + \operatorname{arctg} 1{,}5 < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

22.68. б) Решить систему неравенств $\begin{cases} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ |x + 2| < 3. \end{cases}$

Решение. Решив второе неравенство системы, получим: $-5 < x < 1$. Решим первое неравенство системы:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 3x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$\frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}. \qquad (1)$$

Дадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, 3, ... Если $n = 0$, то неравенство (1) принимает вид $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В пересечении с интервалом $(-5; 1)$ это дает $(0; 1)$. Если $n = 1$, то неравенство (1) принимает вид $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}$. Пересечение с интервалом $(-5; 1)$ пусто. Пусто оно будет и при $n = 2, 3, \ldots$.

Дадим параметру n последовательно значения $-1, -2, -3, \ldots$. Если $n = -1$, то неравенство (1) принимает вид $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$. В пересечении с интервалом $(-5; 1)$ это дает $\left(-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$. Если $n = -2$, то неравенство (1) принимает вид $-\frac{4\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$. В пересечении с интервалом $(-5; 1)$ это дает $\left(-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}\right)$. Если $n = -3$, то неравенство (1) принимает вид $-2\pi < x < \frac{\pi}{2} - 2\pi$. В пересечении с интервалом $(-5; 1)$ это дает $\left(-5; -\frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: $-5 < x < -\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{6}$; $0 < x < 1$.

§ 23

23.24. Решить уравнение:

а) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16}$; б) $\cos^{-4} \frac{x}{2}\left(2\sin^4 \frac{x}{2} - 1\right) = 2$.

Решение. а) $(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) = \frac{7}{16}$;

$$\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)\cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2 = \frac{7}{16}.$$

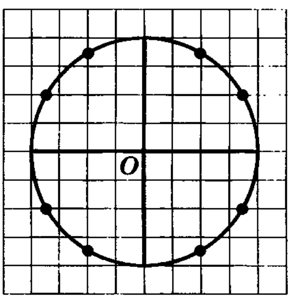


Рис. 59

Введя новую переменную $t = \cos^2 x$, получим: $t^2 - (1 - t)t + (1 - t)^2 = \frac{7}{16}$, откуда находим: $t_1 = \frac{3}{4}$, $t_2 = \frac{1}{4}$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух уравнений: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$; $\cos^2 x = \frac{1}{4}$. На числовой окружности решение этой совокупности представляет собой множество из восьми точек (рис. 59). Геометрическая иллюстрация позволяет составить общую формулу решений: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$.

б) Имеем: $2\,\text{tg}^4 \frac{x}{2} - \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2$; $2\,\text{tg}^4 \frac{x}{2} - \left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2 = 2$; $\text{tg}^2 \frac{x}{2} = 3$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

23.27. а) Решить уравнение $|\text{ctg}\, x| = \text{ctg}\, x + \frac{1}{\sin x}$.

Решение. Если $\text{ctg}\, x \geqslant 0$, то уравнение принимает вид $\text{ctg}\, x = \text{ctg}\, x + \frac{1}{\sin x}$; решений нет. Если $\text{ctg}\, x < 0$, то уравнение принимает вид $-\text{ctg}\, x = \text{ctg}\, x + \frac{1}{\sin x}$, откуда получаем $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, задача сводится к решению смешанной системы

$$\begin{cases}\cos x = -\frac{1}{2},\\ \operatorname{ctg} x < 0.\end{cases}$$

Значит, из двух точек числовой окружности, удовлетворяющих уравнению $\cos x = -\frac{1}{2}$, берем только ту, которая принадлежит второй четверти: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

23.28. а) Решить уравнение $|\cos x| = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

Р е ш е н и е. Если $\cos x \geqslant 0$, то уравнение принимает вид $\cos x = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$, т. е. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Если $\cos x < 0$, то уравнение принимает вид $-\cos x = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$, т. е. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух смешанных систем:

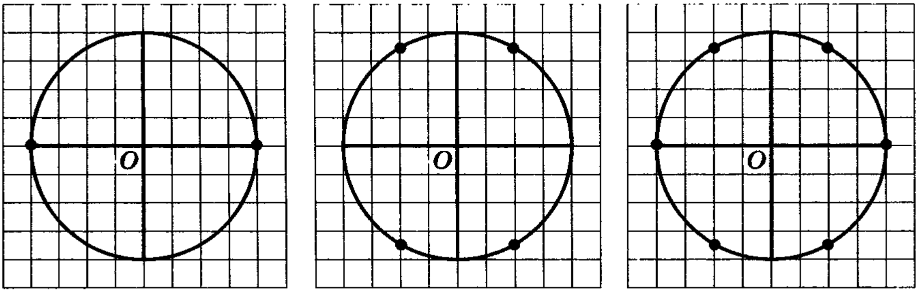
$$\begin{cases}\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},\\ \cos x \geqslant 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\operatorname{tg} x = \sqrt{3},\\ \cos x < 0.\end{cases}$$

Рассуждая как в № 23.27, получаем: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$.

23.30. б) Решить уравнение $\frac{4\sin^3 2x - 3\sin 2x}{\cos 3x} = 0$.

Р е ш е н и е. Приравняв нулю числитель дроби, получим, что либо $\sin 2x = 0$, либо $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Находим две серии решений: $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$.

Из найденных решений следует отобрать те, которые удовлетворяют условию $\cos 3x \neq 0$. Проверим первую серию: $\cos\frac{3\pi n}{2} \neq 0$. Это верно лишь при четных значениях n, т. е. при $n = 2k$. Таким образом, первую серию найденных выше решений следует переписать в виде $x = \pi k$ (рис. 60 *а*).



а) б) в)

Рис. 60

Проверим вторую серию: $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}\right) \neq 0$. Это верно лишь при нечетных значениях n, т. е. при $n = 2k + 1$. Таким образом, вторую серию найденных выше решений следует переписать в виде $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2k+1)$ или $x = \left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right) + \pi k$ (рис. 60 *б*).

Объединив на одной числовой окружности две точки первой серии и четыре точки второй серии, получим (рис. 60 *в*): $x = \frac{\pi n}{3}$.

23.31. а) Решить уравнение с параметром a: $\frac{a\sin x - 1}{\sin x + \cos x} = 0$.

Решение. Если $a = 0$, уравнение не имеет решений. Если $a \neq 0$, то задача сводится к решению уравнения $\sin x = \frac{1}{a}$. При $|a| < 1$ это уравнение не имеет решений. Если $|a| > 1$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{a} + \pi n$.

Корни уравнения должны удовлетворять условию $\sin x + \cos x \neq 0$, т. е. $\operatorname{tg} x \neq -1$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Если $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Именно эти значения получатся, если придать параметру a значения $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. Рассмотрим эти значения по отдельности.

Если $a = \sqrt{2}$, то уравнение $\sin x = \frac{1}{a}$ принимает вид $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ему на числовой окружности соответствуют две точки — середины первой и второй четвертей.

Но $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, т. е. нельзя включать в ответ середины второй и четвертой четвертей. Значит, взять можно только середину первой четверти: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Если $a = -\sqrt{2}$, то уравнение $\sin x = \frac{1}{a}$ принимает вид $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ему на числовой окружности соответствуют две точки — середины третьей и четвертой четвертей. Но, как было отмечено выше, нельзя включать в ответ середины второй и четвертой четвертей. Значит, взять можно только середину третьей четверти: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

Подведем итоги. Если $-1 < a < 1$, то решений нет; если $a = \sqrt{2}$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; если $a = -\sqrt{2}$, то $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; если $a < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < a \leqslant -1$, $1 \leqslant a < \sqrt{2}$ или $a > \sqrt{2}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{a} + \pi n$.

23.32. а) Решить уравнение $x^2 - 2x \cos \pi x + 1 = 0$.

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное уравнение относительно x с коэффициентами, соответственно, 1, $-2\cos \pi x$, 1. Применив формулу корней квадратного уравнения, получим: $x = \cos \pi x \pm \sqrt{\cos^2 \pi x - 1}$. Эта формула имеет смысл лишь при $\cos^2 \pi x - 1 = 0$, что в свою очередь выполняется при $\pi x = \pi n$. Итак, корнями заданного уравнения могут быть только целые числа $x = n$.

При $x = n$ записанная выше формула корней квадратного уравнения превращается в $n = \cos \pi n$. Это равенство может иметь место лишь при $n = 0, 1, -1$. Если $n = 0$, то получаем $0 = \cos 0$, что неверно. Если $n = 1$, то получаем $1 = \cos \pi$, что неверно. Если $n = -1$, то получаем $-1 = \cos(-\pi)$, что верно.

Итак, заданное уравнение имеет единственный корень $x = -1$.

23.33. а) Решить уравнение $\cos^5 x + \sin^4 x = 1$.

Решение. Поскольку $\cos^5 x = 1 - \sin^4 x \geqslant 0$, делаем вывод, что $\cos x \geqslant 0$.

При этом условии выполняется неравенство $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$. Справедливо и неравенство $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$. Сложив эти два неравенства, получим $\cos^5 x + \sin^4 x \leqslant 1$. Знак равенства может иметь место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два равенства: $\cos^5 x = \cos^2 x$ и $\sin^4 x = \sin^2 x$. Первое равенство выполняется в трех точках числовой окружности, отмеченных

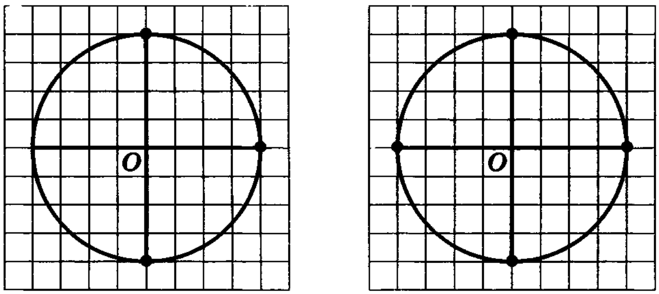


Рис. 61

на рисунке 61 *а*; второе равенство выполняется в четырех точках числовой окружности, отмеченных на рисунке 61 *б*. Общими являются три точки, отмеченные на рисунке 61 *а*.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = 2\pi n.$

23.35. Решить уравнение:

а) $2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5;$

б) $\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x - 2\pi}{3} = 3.$

Решение. а) Запишем два очевидных неравенства:

$$2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2,\ -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 3;$$

сложив их, получим:

$$2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 5,$$

причем знак равенства может иметь место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два равенства:

$$2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 2,\ -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 3.$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

Из более простого второго уравнения находим: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

Подставим этот результат в первое уравнение системы:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n\right) = 1, \text{ т. е. } \sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right) = 1.$$

Это равенство не выполняется ни при каком $n \in \mathbf{Z}$, значит, система, а вместе с ней и заданное уравнение не имеют решений.

б) Рассуждая как в пункте а), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x}{4} = 1, \\ \cos\dfrac{x - 2\pi}{3} = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $x = 2\pi + 8\pi n$. Подставим этот результат во второе уравнение системы: $\cos\frac{8\pi n}{3} = 1$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $n = 3k$. В этом случае записанное выше решение первого уравнения системы принимает вид $x = 2\pi + 24\pi k$.

23.37. б) Решить уравнение

$$\cos x + \sqrt{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = 0.$$

Р е ш е н и е.

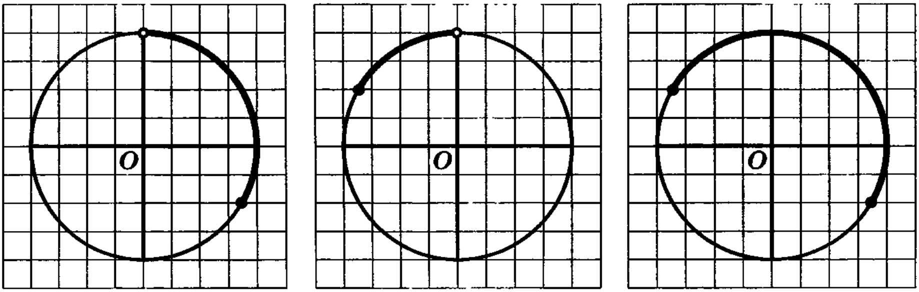
$$\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = -\cos x;$$
$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = \cos^2 x;$$
$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0;$$
$$\operatorname{tg} x = 1;\ \operatorname{tg} x = 3;$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n.$$

Поскольку было выполнено возведение в квадрат обеих частей уравнения, обязательна проверка. Ее можно осуществить с помощью условия $\cos x \leqslant 0$. Этому неравенству удовлетворяют из найденных выше серий решений лишь точки, принадлежащие третьей четверти числовой окружности:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi(2n + 1).$$

23.41. г) Решить неравенство $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geqslant 0$.

Р е ш е н и е. Если бы уже были известны формулы тригонометрии, то заданное неравенство можно было преобразовать к виду $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$ и дальнейшее решение не представляло бы труда. Пока же приходится действовать по-другому. Рассмотрим три случая: $\cos x = 0$, $\cos x > 0$, $\cos x < 0$.



а) б) в)

Рис. 62

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$; в первом случае, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, заданное неравенство выполняется, во втором — нет.

Если $\cos x > 0$, то, разделив обе части заданного неравенства почленно на $\cos x$, получим: $\operatorname{tg} x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Геометрическое решение этой системы неравенств представлено на рисунке 62 *а*.

Если $\cos x < 0$, то, разделив обе части заданного неравенства почленно на $\cos x$, получим: $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Геометрическое решение этой системы неравенств представлено на рисунке 62 *б*.

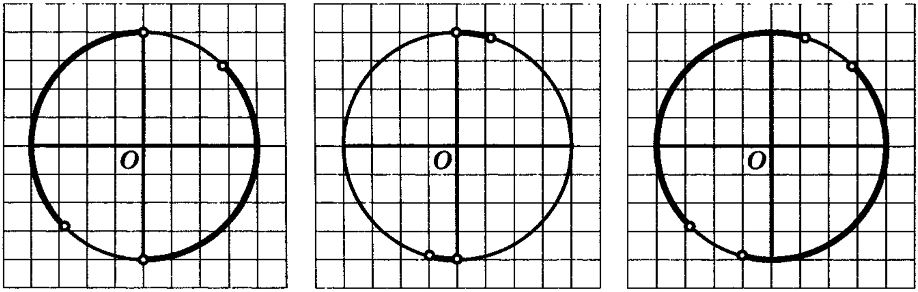
Объединив обе найденные дуги и добавив точку $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, получим геометрическое решение заданного неравенства — оно представлено на рисунке 62 *в*.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

23.42. а) Решить неравенство $\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x > 0$.

Решение. Если $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$ и заданное неравенство выполняется. Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ — решения заданного неравенства.

Если $\cos x \neq 0$, то, разделив обе части заданного неравенства почленно на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 5 > 0$; значит, либо $\operatorname{tg} x < 1$ (рис. 63 *а*), либо $\operatorname{tg} x > 5$ (рис. 63 *б*). Добавив к изображенным на рисунках 63 *а* и 63 *б* четырем дугам точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,



а) б) в)

Рис. 63

получим геометрическое решение заданного неравенства — оно представлено на рисунке 63 *в*.

Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi n$.

Глава 5

§ 24

24.38. б) Доказать неравенство $\cos(7 - 2x)\cos 2x > \sin(7 - - 2x)\sin 2x$.

Решение. $\cos(7 - 2x)\cos 2x - \sin(7 - 2x)\sin 2x = \cos 7 > 0$. Значит, требуемое неравенство доказано.

24.39. а) Зная, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6$ и $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}$, вычислить $\sin x$.

Решение. $\sin x = \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} - - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$.

Воспользовавшись тем, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{6} < \pi$, получим: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}8$.

Значит, $\sin x = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$.

24.41. б) Сравнить числа $a = \cos x \cos 2x$ и $b = \cos 3x$, если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Решение. $a - b = \cos x \cos 2x - \cos(x + 2x) = \sin x \sin 2x$. По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, значит, $\pi < 2x < 2\pi$, а потому $\sin x > 0$, $\sin 2x < 0$. Следовательно, $\sin x \sin 2x < 0$. Итак, $a - b < 0$, т. е. $a < b$.

24.43. б) Сравнить числа $a = \frac{\sin 4}{\cos 5}$ и $b = \frac{\cos 4}{\sin 5}$.

Решение. $a - b = \frac{\sin 4}{\cos 5} - \frac{\cos 4}{\sin 5} = \frac{\sin 4 \sin 5 - \cos 4 \cos 5}{\sin 5 \cos 5} = -\frac{\cos 9}{\sin 5 \cos 5}$.

Учтем, что точка 5 принадлежит четвертой четверти числовой окружности, а точка 9 — второй. Значит, $\sin 5 < 0$, $\cos 5 > 0$, $\cos 9 < 0$, и в итоге $a - b < 0$. Значит, $a < b$.

24.44. а) Зная, что $\cos(x + y) = a$, $\cos(x - y) = b$, найти $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Решение. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Сложив эти два равенства и воспользовавшись условиями задачи, получим:

$$\cos x \cos y = \frac{a + b}{2},\ \sin x \sin y = \frac{b - a}{2},\ \text{значит, } \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{b - a}{b + a}.$$

24.45. б) Доказать, что не существует пары $(x; y)$ такой, что $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin x \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Предположим противное: такая пара существует. Тогда

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y) = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Значит, $\cos(x + y) > 1$, что неверно; значит, и наше предположение неверно.

24.49. б) Вычислить $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Пусть $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = x$, $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) = y$. Тогда, согласно определениям обратных тригонометрических функций, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin y = -\frac{3}{5}$ и $-\frac{\pi}{2} < y < 0$.

Требуется вычислить $\cos(x + y)$.

Так как $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, находим: $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin x = \frac{3}{5}$. Так как $\sin y = -\frac{3}{5}$ и $-\frac{\pi}{2} < y < 0$, находим: $\cos y = \frac{4}{5}$. Значит,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 1.$$

24.51. Доказать равенство $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

Решение. Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = x$, $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right) = y$. Тогда, согласно определениям обратных тригонометрических функций,

$$\cos x = -\frac{1}{7} \text{ и } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \ \cos y = -\frac{13}{14} \text{ и } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Учтем также, что $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Требуется доказать, что $\frac{\pi}{3} + x = y$ или, что то же самое, $y - x = \frac{\pi}{3}$.

В силу убывания функции $u = \arccos t$ можно сделать вывод, что $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$. Кроме того, оба эти значения принадлежат второй четверти числовой окружности. Значит, их разность, т. е. $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ принадлежит первой четверти числовой окружности.

Итак, мы установили, что $y - x$ принадлежит первой четверти числовой окружности, а нам нужно доказать, что $y - x = \frac{\pi}{3}$. Для этого достаточно убедиться в том, что $\cos(y - x) = \frac{1}{2}$.

Имеем:

$$\cos x = -\frac{1}{7}, \ \cos y = -\frac{13}{14}, \text{ значит, } \sin x = \frac{4\sqrt{3}}{7}; \ \sin y = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x = \left(-\frac{13}{14}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{14} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

§ 25

25.21. Вычислить β, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -3$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Решение. Из условий следует, что $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -3$, $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{1}{3}$.

Введя новые переменные $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x + y}{1 - xy} = -3, \\ \dfrac{x - y}{1 + xy} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $x = 2$, $y = 1$ или $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

Итак, либо $\operatorname{tg}\beta = 1$, либо $\operatorname{tg}\beta = -1$. Но по условию $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, а потому $\operatorname{tg}\beta < 0$, значит, $\operatorname{tg}\beta = -1$, а $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

§ 26

26.36. Вычислить:

а) $\arcsin\left(-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{24\pi}{5}\right)\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{5}\right)\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{27\pi}{7}\right)$.

Решение. Во всех этих заданиях (равно как в № 26.35) используется одна и та же идея: если f — символ тригонометрической функции, то $\operatorname{arc} f(f(t)) = t$ тогда и только тогда, когда t принадлежит области значений функции $\operatorname{arc} f$.

а) Чтобы вычислить $\arcsin\left(-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$, надо преобразовать $\left(-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$ к виду $\sin t$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ — области значений функции арксинус. Имеем:

$$-\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}.$$

Значит, $\arcsin\left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$.

б) Чтобы вычислить $\arccos\left(\cos\left(-\frac{24\pi}{5}\right)\right)$, надо преобразовать $\cos\left(-\frac{24\pi}{5}\right)$ к виду $\cos t$, где $t \in [0;\ \pi]$ — области значений функции арккосинус. Имеем:

$$\cos\left(-\frac{24\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{5}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5}.$$

Значит, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{24\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}$.

в) Чтобы вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right)\right)$, надо преобразовать $\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right)$ к виду $\operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ — области значений функции арктангенс. Имеем:

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\left(-4\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} =$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{10}\right).$$

Значит, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right) = -\frac{3\pi}{10}$.

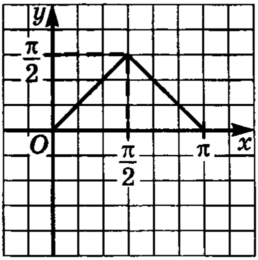
г) Чтобы вычислить $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{27\pi}{7}\right)$, надо преобразовать $\operatorname{tg}\frac{27\pi}{7}$ к виду $\operatorname{ctg} t$, где $t \in (0;\ \pi)$ — области значений функции арккотангенс. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{27\pi}{7} = \operatorname{tg}\left(\frac{27\pi}{7} - 4\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{ctg}\frac{9\pi}{14}.$$

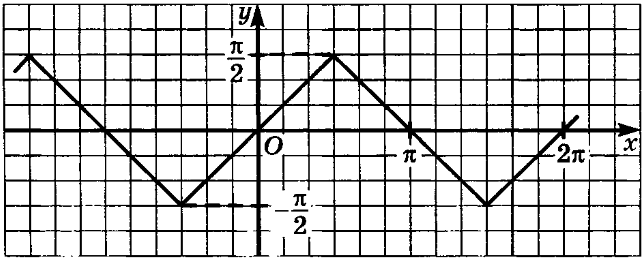
Значит, $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{27\pi}{7}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{14}\right) = \frac{9\pi}{14}$.

26.37. Построить график функции:
а) $y = \arcsin(\sin x)$;
б) $y = \arcsin(\cos x)$.

Решение. а) Заданная функция — периодическая с основным периодом 2π и нечетная, поэтому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на отрезке $[0;\ \pi]$, отразить ее симметрично относительно начала координат и затем воспользоваться периодичностью функции.



а)



б)

Рис. 64

Если $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$; если $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, то $(\pi - x) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, и, следовательно, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

Итак, речь идет о построении графика функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \text{ если } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

График представлен на рисунке 64 *а*. Воспользовавшись нечетностью и периодичностью заданной функции, строим график на всей оси абсцисс — он представлен на рисунке 64 *б*.

б) Заданная функция — периодическая с основным периодом 2π и четная, поэтому для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на отрезке $[0;\ \pi]$, отразить ее симметрично относительно оси ординат и затем воспользоваться периодичностью функции.

Имеем: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, причем если $x \in [0;\ \pi]$, то $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Но тогда $\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$. График функции $y = \arcsin(\cos x)$, $x \in [0;\ \pi]$, или, что то же самое, $y = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0;\ \pi]$ представлен на рисунке 65 *а*. Воспользовавшись четностью и периодичностью заданной функции, строим график на всей оси абсцисс — он представлен на рисунке 65 *б*.

Можно было рассуждать по-другому: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, а график функции $y = \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ получается из графика

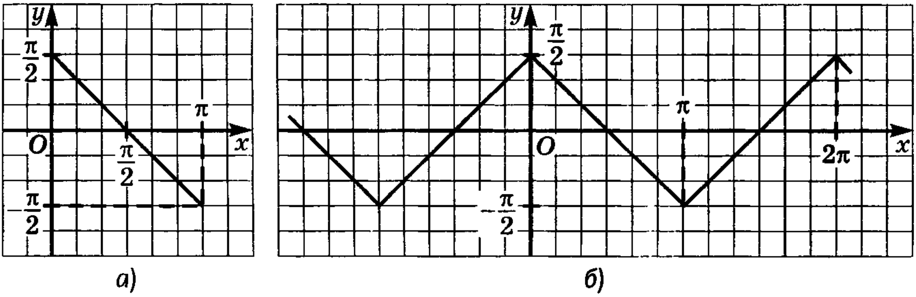


Рис. 65

функции $y = \arcsin(\sin x)$ (рис. 64 *б*) параллельным переносом вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ влево (рис. 65 *б*).

§ 27

27.23. Вычислить:

а) $\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{8} - \sin^3\frac{\pi}{8}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^6\frac{\pi}{24} - \sin^6\frac{\pi}{24}\right)$.

Решение.

$$\text{а) } \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{8} - \sin^3\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}.$$

$$\text{г) } \sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^6\frac{\pi}{24} - \sin^6\frac{\pi}{24}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^4\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{\pi}{24}\sin^2\frac{\pi}{24} + \sin^4\frac{\pi}{24}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\left(\left(\cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24}\right)^2 - \cos^2\frac{\pi}{24}\sin^2\frac{\pi}{24}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \frac{14 + \sqrt{3}}{64}.$$

27.25. б) Вычислить

$$\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}.$$

Решение.

$$\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{65}\cos\frac{\pi}{65}\right)\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{2\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\right)\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{4\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\right)\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{8\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\right)\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{16\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{16\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\right)\cos\frac{32\pi}{65}=$$

$$=\frac{1}{32\sin\frac{\pi}{65}}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sin\frac{32\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}=\frac{\sin\frac{64\pi}{65}}{64\sin\frac{\pi}{65}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{65}\right)}{64\sin\frac{\pi}{65}}=\frac{\sin\frac{\pi}{65}}{64\sin\frac{\pi}{65}}=\frac{1}{64}.$$

27.26. б) Доказать равенство $\sin 70^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$ $=2\cos^2 10^\circ$.

Решение.

$$\sin 70^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$$

$$=\sin 70^\circ+\frac{1}{\sin 20^\circ}\cdot4(2\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$$

$$=\sin 70^\circ+\frac{1}{\sin 20^\circ}\cdot2(2\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ=$$

$$=\sin 70^\circ+\frac{1}{\sin 20^\circ}\cdot(2\sin 80^\circ\cos 80^\circ)=$$

$$=\sin 70^\circ+\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\sin 70^\circ+1=1+\cos 20^\circ=2\cos^2 10^\circ.$$

27.33. б) Зная, что $\cos 4x = \frac{17}{81}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, вычислить $\operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е. Сначала вычислим $\cos 2x$:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \frac{17}{81}}{2} = \frac{49}{81}.$$

Значит, либо $\cos 2x = \frac{7}{9}$, либо $\cos 2x = -\frac{7}{9}$.

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, значит, $\pi < 2x < \frac{3\pi}{2}$, а потому $\cos 2x < 0$, т. е. $\cos 2x = -\frac{7}{9}$.

Далее, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 - \frac{7}{9}}{2} = \frac{1}{9}$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 9$. Значит, $\operatorname{tg}^2 x = 8$.

Учтем, что аргумент x принадлежит второй четверти числовой окружности, а потому $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$.

27.41. а) Зная, что $15 \cos 2t + 8 \sin t = 9$ и $1 < t < 3$, вычислить $\operatorname{tg} t$.

Р е ш е н и е. Введя новую переменную $x = \sin t$ и учтя, что $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2$, получим квадратное уравнение $15x^2 - 4x - 3 = 0$, откуда находим: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{5}$. По условию $t \in (1; 3)$, а в этом промежутке, принадлежащем первой и второй четвертям числовой окружности, выполняется неравенство $\sin t > 0$. Значит, $\sin t = \frac{3}{5}$, а тогда $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$.

По условию $t \in (1; 3)$. Этот интервал содержит в себе интервал $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ из первой четверти числовой окружности. Но для значений t из интервала $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равенство $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$ не может выполняться, поскольку $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 > \frac{3}{4}$. Интервал $(1; 3)$ содержит в себе интервал $\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$. В интервале $\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ содержится точка $t_1 = \frac{5\pi}{6}$, в которой выполняется равенство $\operatorname{tg} t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}58$. Если $\frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{6}$, то $\operatorname{tg} t < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и, в частности, в некоторой точке t принимает значение $-\frac{3}{4}$. Итак, $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$.

27.42. а) Доказать, что если $\sin^2 x = \sin y \cos y$, то $\cos 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$.

Решение. $\cos 2x - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \cos 2x - \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)\right) = \cos 2x - 1 + \sin 2y = \sin 2y - 2\sin^2 x = 2(\sin y \cos y - \sin^2 x) = 0$; требуемое равенство доказано.

27.43. а) Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{1}{7}$, $\sin y = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что $x + 2y = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Зная $\operatorname{tg} x$ и $\sin y$, найдем последовательно $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} 2y$, $\operatorname{tg}(x + 2y)$:

$$\cos y = \frac{3\sqrt{10}}{10},\ \operatorname{tg} y = \frac{1}{3};\ \operatorname{tg} 2y = \frac{2\operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 y} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{tg}(x + 2y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2y} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1.$$

По условию $0 < y < \frac{\pi}{2}$, значит, $0 < 2y < \pi$. Но, как мы видели выше, $\operatorname{tg} 2y > 0$. Значит, $0 < 2y < \frac{\pi}{2}$, а тогда $0 < x + 2y < \pi$.

Итак, $\operatorname{tg}(x + 2y) = 1$ и $0 < x + 2y < \pi$. Отсюда следует, что $x + 2y = \frac{\pi}{4}$.

Этот пример можно предложить учащимся в эквивалентном, но более сложном виде: доказать, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$.

27.57. а) Решить уравнение: $\sin 2x + 2\sin x = 2 - 2\cos x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sin 2x + 2(\sin x + \cos x) - 2 = 0$ и введем новую переменную $t = \sin x + \cos x$. Так как $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$, то получаем, что $\sin 2x = t^2 - 1$, и тригонометрическое уравнение сводится к квадратному:

$$(t^2 - 1) + 2t - 2 = 0;$$
$$t^2 + 2t - 3 = 0;$$
$$t_1 = 1,\ t_2 = -3.$$

Получили совокупность более простых тригонометрических уравнений:

$$\sin x + \cos x = 1;\ \ \sin x + \cos x = -3.$$

Из первого уравнения находим: $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Второе уравнение не имеет решений.

27.66. а) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 3x + \cos 2x + 4\sin^3 x$.

Решение. $\sin 3x + \cos 2x + 4\sin^3 x = (3\sin x - 4\sin^3 x) + (1 - 2\sin^2 x) + 4\sin^3 x = -2\sin^2 x + 3\sin x + 1$. Введя новую переменную $t = \sin x$, переформулируем задачу: речь идет об отыскании наименьшего и наибольшего значений функции $y = -2t^2 + 3t + 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Абсцисса вершины параболы $y = -2t^2 + 3t + 1$ равна $\frac{3}{4}$, она принадлежит заданному отрезку, в ней функция принимает наибольшее значение, оно равно $2\frac{1}{8}$. А наименьшего значения функция достигает на одном из концов отрезка, конкретнее при $t = -1$ оно равно -4.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = 2\frac{1}{8}$, $y_{\text{наим}} = -4$.

27.72. а) Построить график функции $y = \frac{\sin 2x}{|\sin x|}$.

Решение. Первый способ. Если $\sin x > 0$, то $y = 2\cos x$; если $\sin x < 0$, то $y = -2\cos x$. Таким образом, речь идет о построении графика кусочной функции $y = \begin{cases} 2\cos x, & \text{если } \sin x > 0, \\ -2\cos x, & \text{если } \sin x < 0. \end{cases}$

Можно действовать так: разрезать координатную плоскость на вертикальные полосы, ориентируясь на интервалы знакопостоянства

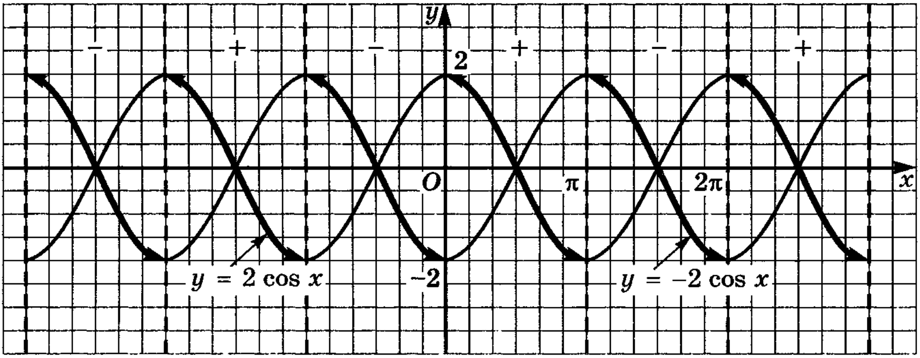


Рис. 66

функции $y = \sin x$, в одной системе координат построить графики функций $y = 2\cos x$, $y = -2\cos x$, а затем сделать соответствующий выбор: в «знакоположительных» полосах брать ветви первого графика, а в «знакоотрицательных» — второго (рис. 66).

Второй способ. Заданная функция имеет период π. В самом деле:

$$\frac{\sin 2(x \pm \pi)}{|\sin(x \pm \pi)|} = \frac{\sin(2x \pm 2\pi)}{|-\sin x|} = \frac{\sin 2x}{|\sin x|}.$$

Таким образом, заданная функция — нечетная и периодическая с периодом π. Значит, для построения ее графика достаточно сначала построить ветвь графика на полуинтервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, отразить ее симметрично относительно начала координат, а затем воспользоваться периодичностью функции.

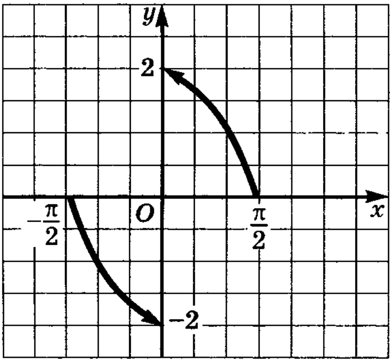


Рис. 67

На полуинтервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеем $y = 2\cos x$, график на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ изображен на рисунке 67, а весь график представлен на рисунке 66.

§ 28

28.16. а) Вычислить: $\sin^2 10° + \sin^2 130° + \sin^2 110°$.

Решение. По формулам приведения получаем, что $\sin^2 130° = \cos^2 40°$, а $\sin^2 110° = \cos^2 20°$. Теперь к каждому из трех слагаемых заданной суммы применим закон № 3: увидел квадрат — понижай степень (см. с. 26). Получим:

$$\frac{1-\cos 20^\circ}{2}+\frac{1+\cos 80^\circ}{2}+\frac{1+\cos 40^\circ}{2}=$$

$$=\frac{3+(\cos 80^\circ+\cos 40^\circ)-\cos 20^\circ}{2}=\frac{3+2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ}{2}.$$

Учитывая, что $2\cos 60^\circ = 1$, в итоге имеем $\frac{3}{2}$.

Как видим, в процессе решения мы применили и закон № 1: увидел сумму — делай произведение.

28.17. Вычислить:

а) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

Решение.

$$\text{а) } \cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ =$$

$$= 2\cos 36^\circ \cos 12^\circ - 2\cos 48^\circ \cos 36^\circ =$$

$$= 2\cos 36^\circ (\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = 2\cos 36^\circ \cdot 2\sin 30^\circ \sin 18^\circ =$$

$$= 2\cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ) =$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 63^\circ \cos 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} =$$

$$= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \cos 36^\circ} = 4.$$

28.22. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то выполняется равенство:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Решение. а) Применим к выражению $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ формулу суммы тангенсов и воспользуемся тем, что $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, а потому $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\pi-\gamma)(-\sin\alpha\,\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos(\pi-\gamma)} =$$

$$= \frac{-\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta(-\cos\gamma)} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

б) Сложим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, а $\sin\gamma$ заменим на $\sin(\alpha+\beta)$; кроме того, применим к выражению $\sin(\alpha+\beta)$ формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$

$$+ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

28.24. а) Доказать, что если $2\sin x = \sin(x+2y)$, то $\operatorname{tg}(x+y) = 3\operatorname{tg} y$.

Решение. Из условия следует, что $\sin x = \sin(x+2y) - \sin x$, т. е. $\sin x = 2\sin y\cos(x+y)$.

Тогда

$$\operatorname{tg}(x+y) - 3\operatorname{tg} y = (\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg} y) - 2\operatorname{tg} y =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos(x+y)\cos y} - \frac{2\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x - 2\sin y\cos(x+y)}{\cos(x+y)\cos y} = 0.$$

Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = 3\operatorname{tg} y$.

28.25. б) Доказать, что если $\cos^2(x+y) + \sin^2 x + \sin^2 y = m$, то $\sin x\sin y\cos(x+y) = \frac{1-m}{2}$.

Решение. Поработаем с заданным равенством:

$$2\cos^2(x+y) + 2\sin^2 x + 2\sin^2 y = 2m;$$
$$2\cos^2(x+y) + 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = 2m;$$
$$2\cos^2(x+y) - 2\cos(x+y)\cos(x-y) = 2m - 2;$$
$$\cos(x+y)(\cos(x+y) - \cos(x-y)) = m - 1;$$
$$\cos(x+y)(-2\sin x\sin y) = m - 1;$$
$$\sin x\sin y\cos(x+y) = \frac{1-m}{2}.$$

§ 29

29.10. Доказать тождество

$$\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ\sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

Решение. Это — классический пример использования указанных выше (в комментариях к теме 5) трех законов. Применив к первому и второму слагаемым левой части формулу понижения степени (*закон № 3*), а к третьему слагаемому — формулу преобразования произведения в сумму (*закон № 2*), получим:

$$\frac{1+\cos(90^\circ-2\alpha)-(1+\cos(120^\circ+2\alpha))-(\sin(150^\circ-2\alpha)-\sin 2\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha-(\cos(120^\circ+2\alpha)+\sin(150^\circ-2\alpha))}{2}.$$

Если теперь обозначим $120^\circ+2\alpha$ буквой t и отметим, что $150^\circ-2\alpha=270^\circ-t$, то в скобках получим выражение: $\cos t+\sin(270^\circ-t)$, т. е. $\cos t-\cos t$. В итоге имеем: $\sin 2\alpha$.

29.11. а) Доказать тождество

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Решение. Идею решения подсказывает вид правой части доказываемого тождества: наличие там «неизвестно откуда взявшегося» знаменателя заставляет «навязать» этот знаменатель левой части:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=$$

$$=\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}+\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\sin 3x\sin\frac{x}{2}+\ldots+\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}+$$

$$+\ldots+\frac{\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

29.16. Вычислить:

а) $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$;

б) $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

Р е ш е н и е.

а) $\cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70° = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 70° \, (2 \cos 10° \cos 50°) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 70° (\cos 60° + \cos 40°) = \frac{\sqrt{3}}{8} (\cos 70° + 2 \cos 70° \cos 40°) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} (\cos 70° + \cos 110° + \cos 30°) = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\cos 70° - \cos 70° + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}.$

б) Можно использовать те же идеи, что в пункте а), но более красиво рассуждать так:

$$\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{2} \cos 20° \cos 40° \cos 80° =$$

$$= \frac{(2 \sin 20° \cos 20°) \cos 40° \cos 80°}{4 \sin 20°} = \frac{(2 \sin 40° \cos 40°) \cos 80°}{8 \sin 20°} =$$

$$= \frac{2 \sin 80° \cos 80°}{16 \sin 20°} = \frac{\sin 160°}{16 \sin 20°} = \frac{1}{16}.$$

29.18. б) Доказать неравенство

$$\cos (2x - 3) \cos (2x + 3) > \sin (1 + 2x) \sin (1 - 2x).$$

Р е ш е н и е. Составив разность левой и правой частей доказываемого неравенства и преобразовав произведения в суммы, получим:

$$\cos (2x - 3) \cos (2x + 3) - \sin (1 + 2x) \sin (1 - 2x) =$$

$$= \frac{\cos 4x + \cos 6 - (\cos 4x - \cos 2)}{2} = \frac{\cos 6 + \cos 2}{2} = \cos 4 \cos 2.$$

Точка 4 принадлежит третьей четверти числовой окружности, а точка 2 — второй. Значит, $\cos 4 < 0$, $\cos 2 < 0$, $\cos 4 \cos 2 > 0$, и требуемое неравенство доказано.

29.30. а) Построить график уравнения $\cos \frac{x(y - 1)}{2} \cos \frac{x(y + 1)}{2} =$ $= \cos^2 \frac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Преобразовав произведение в сумму в левой части заданного уравнения и понизив степень в правой его части, получим:

$$\cos xy + \cos x = 1 + \cos x,$$
$$\cos xy = 1,$$
$$xy = 2\pi n.$$

Если $n = 0$, то $xy = 0$, т. е. либо $x = 0$, либо $y = 0$; это оси координат. Если $n \neq 0$, то $y = \frac{2\pi n}{x}$ — это семейство гипербол вида $y = \frac{k}{x}$, где $k = 2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Итак, график уравнения состоит из указанного семейства гипербол и осей координат.

§ 30

30.11. а) Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

Решение.

$$(\cos x - \sqrt{3}\sin x) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) =$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = 4\cos x.$$

Теперь ясно, что $y_{\text{наим}} = -4$, $y_{\text{наиб}} = 4$.

30.14. При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно наименьшему значению функции $y = g(x)$:
а) $f(x) = 7\sin 5x - 24\cos 5x + a - 1$, $g(x) = 3 - 2\cos 4x$.

Решение. Поскольку $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, выражение $7\sin 5x - 24\cos 5x$ можно преобразовать к виду $25\sin(5x + \alpha)$, где α — вспомогательный аргумент. Значит, $f(x) = 25\sin(5x + \alpha) + a - 1$, а потому для функции $y = f(x)$ получаем: $y_{\text{наиб}} = a + 24$. Так как далее $g(x) = 3 - 2\cos 4x$, то для функции $y = g(x)$ получаем: $y_{\text{наим}} = 1$. Осталось решить уравнение $a + 24 = 1$, откуда $a = -23$.

30.21. Решить уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = \frac{12}{5\pi}x$; б) $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\text{а) } \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = \frac{12}{5\pi}x,$$

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = \frac{12}{5\pi}x,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{5\pi}x - 1.$$

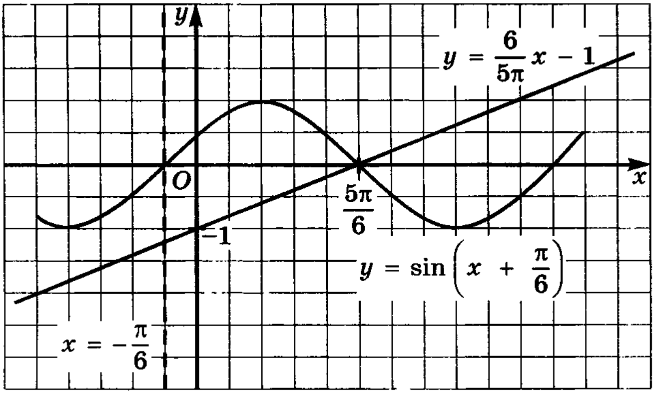


Рис. 68

Построим в одной системе координат синусоиду $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ и прямую $y = \frac{6}{5\pi}x - 1$ (рис. 68). Они пересекаются в точке $\left(\frac{5\pi}{6};\ 0\right)$. Значит, $x = \frac{5\pi}{6}$ — единственный корень заданного уравнения.

$$б)\ \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x) = 2x - \frac{\pi}{2};$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2x - \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = x - \frac{\pi}{4}.$$

Построим в одной системе координат синусоиду $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и прямую $y = x - \frac{\pi}{4}$ (рис. 69). Они пересекаются в точке $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$ — единственный корень заданного уравнения.

30.25. б) Доказать, что при любых значениях x выполняется неравенство $\sqrt{3}\sin x - 7\cos x > -\sqrt[3]{390}$.

Решение. Поскольку $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{52}$, левую часть доказываемого неравенства можно преобразовать к виду $\sqrt{52}\,\sin(x - \alpha)$, где α — вспомогательный аргумент. Наименьшее значение функ-

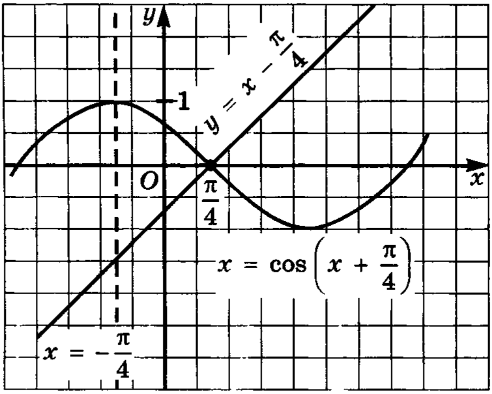


Рис. 69

ции $y = \sqrt{52}\,\sin(x - \alpha)$ равно $-\sqrt{52}$. Значит, чтобы убедиться в справедливости заданного неравенства, достаточно установить, что $-\sqrt{52} > -\sqrt[3]{390}$, т. е. что $\sqrt{52} < \sqrt[3]{390}$.

Предположим противное, что $\sqrt{52} \geqslant \sqrt[3]{390}$. Возведя обе части неравенства в куб, получим $\sqrt{52^3} \geqslant 390$. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим $52^3 \geqslant 390^2$; $52 \cdot 52 \cdot 52 \geqslant 390 \cdot 390$; $52 \cdot 4 \cdot 4 \geqslant 30 \cdot 30$; $52 \cdot 4 \geqslant 15 \cdot 15$; $208 \geqslant 215$.

Пришли к противоречию, значит, наше предположение неверно. Таким образом, требуемое неравенство доказано.

§ 31

31.9. Решить уравнение $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0$.

Указание. Воспользоваться тем, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, и ввести новую переменную $t = \cos 2x$.

31.10. а) Решить уравнение $5\sin 3x + 2\sin x = 0$.

Указание. Воспользоваться тем, что $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, и ввести новую переменную $t = \sin x$.

31.11. а) Решить уравнение $3|\cos x| + 2\cos x = 5|\sin x| - 3\sin x$.

Указание. Целесообразно рассмотреть уравнение для каждой четверти числовой окружности по отдельности. Например, если x принадлежит второй четверти, то $|\cos x| = -\cos x$, $|\sin x| = \sin x$ и уравнение принимает вид $-\cos x = 2\sin x$, т. е. $\operatorname{tg} x = -0{,}5$. Поскольку x принадлежит второй четверти, получаем $x = -\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi(2n + 1)$.

31.16. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + \cos 4x$.

Решение.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 + (1 + \cos 4x);$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 2 + 2\cos^2 2x;$$

$$\frac{1}{0{,}5 \sin 2x} = 2 + 2(1 - \sin^2 2x).$$

Введя новую переменную $t = \sin 2x$, получим уравнение $y^3 - 2y + 1 = 0$. Для его решения используем метод разложения на множители:

$$y^3 - 2y + 1 = (y^3 - y) - (y - 1) = (y - 1)(y^2 + y - 1).$$

Из уравнения $(y - 1)(y^2 + y - 1) = 0$ находим: $y_1 = 1$, $y_{2,\,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Значит, задача сводится к решению совокупности трех уравнений:

$$\sin 2x = 1;\ \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};\ \sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Последнее уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{\pi n}{2}$.

31.19. Решить уравнение $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, а затем введем новую переменную $t = \operatorname{tg} x$ (универсальная подстановка). Тогда уравнение примет вид $\frac{2t}{1 + t^2} + t = 2$ и далее: $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$; $(t^3 - t^2) - (t^2 - t) + (2t - 2) = 0$; $(t - 1)(t^2 - t + 2) = 0$; $t = 1$; $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

31.22. Решить уравнение $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$2 - 2(\sin x + \cos x) + \frac{2}{\sin 2x} = 0.$$

Введем новую переменную $t = \sin x + \cos x$ и воспользуемся тем, что $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$. Тогда уравнение примет вид

$2 - 2t + \frac{2}{t^2 - 1} = 0$, откуда находим: $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Получаем совокупность трех уравнений:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x + \cos x = 0; \\ &\sin x + \cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \\ &\sin x + \cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Из первого уравнения находим: $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. Второе уравнение преобразуем к виду $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и далее $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Это уравнение не имеет решений, поскольку его правая часть больше 1. Третье уравнение совокупности преобразуем к виду $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, откуда находим:

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + 2\pi n.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + 2\pi n$.

31.23. а) Решить уравнение $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$.

Решение. Преобразовав уравнение к виду $2\cos\frac{4x}{3} = 1 + \cos 2x$ и далее $2\left(2\cos^2\frac{2x}{3} - 1\right) = 1 + \cos\left(3 \cdot \frac{2x}{3}\right)$ и введя новую переменную $t = \cos\frac{2x}{3}$, получим уравнение $2(2t^2 - 1) = 1 + (4t^3 - 3t)$, откуда находим: $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Остается решить простейшие тригонометрические уравнения: $\cos\frac{2x}{3} = 1$; $\cos\frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Заметим, что во втором случае выгоднее перейти к уравнению $\cos^2\frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$ и далее к уравнению $1 + \cos\frac{4x}{3} = \frac{3}{2}$, $\cos\frac{4x}{3} = \frac{1}{2}$.

31.26. Решить уравнение $3\sin x - 5\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos x$.

Решение.

$$(3\sin x - 4\cos x) - 5\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 0;$$

$$5\sin(x - \alpha) - 5\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ где } \alpha = \arcsin\frac{4}{5};$$

$$-10\sin\left(3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0;$$

$$3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2} = \pi n;\ 4x + \frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{36} - \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi n}{3};\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\pi n}{4}, \text{ где } \alpha = \arcsin\frac{4}{5}.$$

31.27. Решить уравнение

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Решение. Воспользовавшись тем, что $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, и введя новую переменную $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, получим квадратное уравнение $4t^2 - 2t - 2 = 0$ с корнями: $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$,

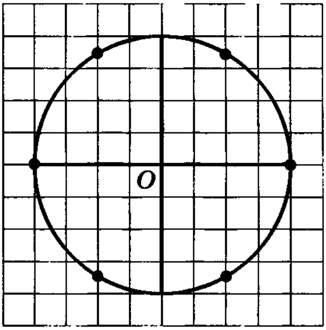
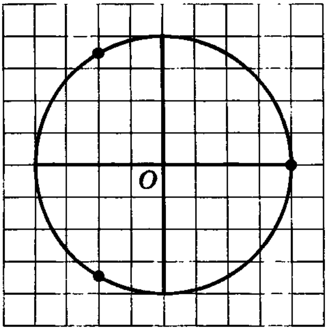


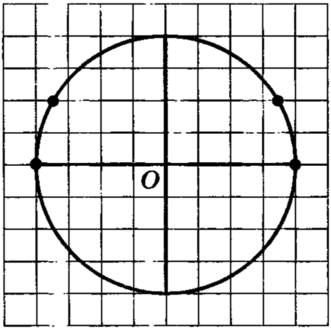
Рис. 70

либо $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, откуда находим: $x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$.

Этот пример интересен тем, что здесь есть возможность провести дополнительные рассуждения для объединения найденных решений. Если отметить на числовой окружности точки πn и $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ (рис. 70), то нетрудно составить общую формулу для шести точек: $\frac{\pi n}{3}$. Поэтому ответ можно записать в виде $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$.



а)



б)

Рис. 71

31.28. Решить уравнение $\frac{\cos^2 x - \cos x - \sin^2 x}{1 - \cos 2x - \sin x} = 0.$

Решение. Приравняв нулю числитель дроби, содержащейся в левой части уравнения, после понятных преобразований придем к совокупности двух уравнений: $\cos x = 1$; $\cos x = -\frac{1}{2}$. Отметим на числовой окружности соответствующие точки (рис. 71 *а*).

Приравняв нулю знаменатель дроби, содержащейся в левой части заданного уравнения, после понятных преобразований придем к совокупности двух уравнений: $\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$. Отметим на числовой окружности соответствующие точки (рис. 71 *б*) — «запрещенные» точки.

Замечаем, что одна из «запрещенных» точек совпадает с точкой, отмеченной на первой окружности, ее придется в ответ не включать. Таким образом, получаем ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

31.29. Найти корни уравнения $\cos 4x + \frac{10 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $[-2; 1,4]$.

Решение. Заметив, что $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$, получим достаточно простое уравнение $\cos 4x + 5 \sin 2x = 3$, откуда находим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. Все эти решения принадлежат области определения уравнения, задаваемой условием $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Осталось из найденных решений отобрать те, которые принадлежат заданному отрезку. Сделаем это с помощью «перебора по параметру» в найденной серии $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$ принадлежит отрезку $[-2; 1{,}4]$.

Если $n = 1$, то $x = \frac{5\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12} \approx 1{,}31$, это число принадлежит отрезку $[-2; 1{,}4]$.

При $n = 2, 3, \ldots$ мы выходим за пределы заданного отрезка.

Если $n = -1$, то $x = -\frac{7\pi}{12}$; это число принадлежит отрезку $[-2; 1{,}4]$.

При $n = -2, -3, \ldots$ мы выходим за пределы заданного отрезка.

Ответ: $-\frac{7\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$.

31.34. б) Решить уравнение $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg} 4x = 8 \operatorname{tg} 8x$.

Решение. Несколько раз воспользовавшись легко проверяемой формулой $\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t = 2 \operatorname{ctg} 2t$, получим уравнение $16 \operatorname{ctg} 16x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{32}(2n + 1)$.

31.35. Решить уравнение $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение.

$$5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x;$$

$$5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\frac{5 \cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x};$$

$$5 \cos^2 2x = \sin x \sin 3x;$$

$$10 \cos^2 2x = \cos 2x - \cos 4x.$$

В последнем уравнении целесообразно ввести новую переменную $t = \cos 2x$. В итоге получим, что либо $\cos 2x = \frac{1}{3}$, либо $\cos 2x = -\frac{1}{4}$. Среди решений этих уравнений нет посторонних, т. е. решений, удовлетворяющих одному из следующих уравнений: $\cos x = 0$, $\cos 2x = 0$, $\sin 3x = 0$.

31.37. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, преобразуем заданное уравнение к виду

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin 3x = 2$$

и далее $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2$. Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в левой части равно 1: $\begin{cases} \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1. \end{cases}$

Из второго уравнения системы находим:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Подставив этот результат в первое уравнение системы, получим $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 4\pi n - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ — верное равенство.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

31.38. Решить уравнение $\cos 2x\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 1$.

Решение. Преобразовав уравнение к виду $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{\cos 2x}$, заметим, что левая часть неотрицательна и не превосходит 1. Значит, и правая часть должна быть неотрицательной (точнее, положительной); при этом она явно не меньше 1. Значит, решение уравнения надо искать «на стыке»: $\begin{cases} 1 - \frac{3}{4}\sin^2 x = 1, \\ \frac{1}{\cos 2x} = 1. \end{cases}$

Ответ: $x = \pi n$.

31.39. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

Решение. Преобразовав уравнение к виду $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sin^4 4x$, заметим, что левая часть не превосходит $\sqrt{2}$, в то время как правая часть не меньше $\sqrt{2}$. Значит, решение уравнения надо искать «на стыке»: $\begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2} + \sin^4 4x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Эти значения удовлетворяют и второму уравнению системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

31.42. а) Решить уравнение $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x - x^2 + 5} = 0$.

Решение. Фактически речь идет о решении совокупности уравнений: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\sin x = 0$; $4x - x^2 + 5 = 0$. Из второго уравнения находим $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

Из первого уравнения находим: $x = \pi + 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. Но из этих серий нужно отобрать те значения, которые входят в область определения заданного уравнения, т. е. удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Таковыми являются три числа: π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: -1, 5, π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

31.44. Решить уравнение:

а) $\sqrt{\sin 7x - \sin 5x} = \sqrt{\sin x}$;

б) $\sqrt{\cos 5x + \cos x - \sin 5x} = \sqrt{\sin x}$.

Решение.

$$\text{а) } \sin 7x - \sin 5x = \sin x;$$

$$2\sin x \cos 6x = \sin x;$$

$$\sin x = 0;\ \cos 6x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pi n;\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

Уравнение достаточно простое, основной интерес представляет проверка найденных решений по области определения исходного уравнения, задаваемой неравенством $\sin x \geqslant 0$. Серия $x = \pi n$ этому условию удовлетворяет, а из серии $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ надо выбрать те точки, которые принадлежат первой или второй четверти числовой окружности. Чтобы отобрать такие точки, достаточно дать параметру n значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 (при остальных значениях параметра точки будут теми же).

Если $n = 0$, то берем лишь одно значение $x = \frac{\pi}{18}$. При $n = 1$ получаем два значения: $\frac{5\pi}{18}$ и $\frac{7\pi}{18}$. При $n = 2$ получаем два значения: $\frac{11\pi}{18}$ и $\frac{13\pi}{18}$. При $n = 3$ берем лишь одно значение $x = \frac{17\pi}{18}$. Полученные 6 точек (рис. 72) охватываются тремя формулами: $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{5\pi}{18} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{7\pi}{18} + \pi n$.

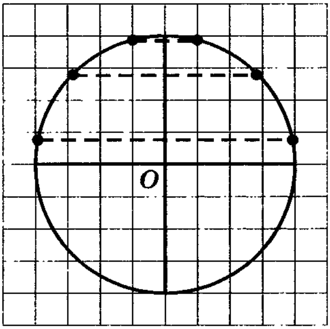
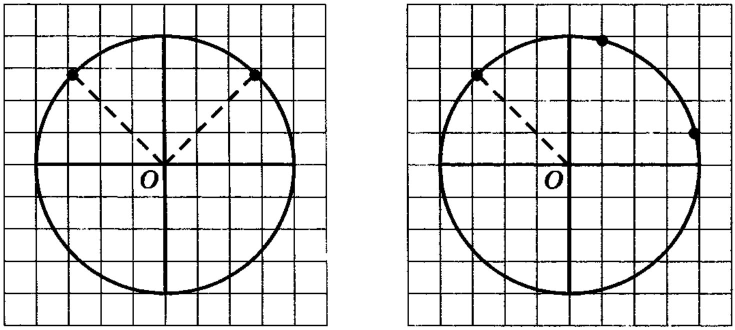


Рис. 72

$$\text{б) } \cos 5x + \cos x = \sin 5x + \sin x;$$
$$2\cos 3x \cos 2x = 2\sin 3x \cos 2x;$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}.$$

Как и в пункте а), нужно выполнить проверку найденных решений по области определения исходного уравнения, задаваемой неравенством $\sin x \geqslant 0$. Из обеих полученных серий надо выбрать те точки, которые принадлежат первой или второй четверти числовой окружности. Чтобы отобрать такие точки, достаточно в первой серии дать параметру n значения 0, 1, 2, 3, а во второй — значения от 0 до 5.

Для серии $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ при $n = 0$ получаем $\frac{\pi}{4}$, при $n = 1$ получаем $\frac{3\pi}{4}$. Если $n = 2$ или $n = 3$, то попадаем в третью или четвертую четверти. Таким образом, из первой серии берем две точки (рис. 73 *а*), которые можно объединить формулой $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$.



а)   б)

Рис. 73

Для серии $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$ при $n = 0$ получаем $\frac{\pi}{12}$, при $n = 1$ получаем $\frac{5\pi}{12}$, при $n = 2$ получаем $\frac{3\pi}{4}$. Если $n = 3, 4, 5$, то попадаем в третью или четвертую четверти. Таким образом, из второй серии берем три точки (рис. 73 *б*). Точку из второй четверти можно не брать, она входит в первую серию. Оставшиеся две точки описываются формулами: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$.

Ответ: а) $x = \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{5\pi}{18} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{7\pi}{18} + \pi n$;

б) $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$.

31.45. а) Решить уравнение $\sin\left(\pi\sqrt{5 - x^2}\right) = 0{,}5$.

Решение. $\pi\sqrt{5 - x^2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $\sqrt{5 - x^2} = (-1)^n \frac{1}{6} + n$.

Это уравнение не имеет решений при $n = -1, -2, \ldots$, поскольку в правой части уравнения при этих значениях параметра — отрицательное число. Уравнение не имеет решений и при $n = 3, 4, \ldots$, поскольку левая часть уравнения не превосходит $\sqrt{5}$, а при указанных значениях параметра правая часть больше $\sqrt{5}$. Таким образом, нам надо рассмотреть лишь три случая: $n = 0, 1, 2$.

При $n = 0$ уравнение принимает вид $\sqrt{5 - x^2} = \frac{1}{6}$, получаем: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{179}}{6}$.

При $n = 1$ уравнение принимает вид $\sqrt{5 - x^2} = \frac{5}{6}$, получаем: $x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{155}}{6}$.

При $n = 2$ уравнение принимает вид $\sqrt{5 - x^2} = \frac{13}{6}$, получаем: $x_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$.

31.46. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{1 + x^2} + \sin\frac{2\pi x}{1 + x^2} = 2$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой $\sin 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$, введем новую переменную $y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{1 + x^2}$. Тогда заданное уравнение примет вид $y + \frac{2y}{1 + y^2} = 2$, откуда находим: $y = 1$. Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{1 + x^2} = 1; \quad \frac{\pi x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad (4n + 1)x^2 - 4x + (4n + 1) = 0.$$

Находим корни квадратного уравнения: $x = \frac{2 \pm \sqrt{-16n^2 - 8n + 3}}{4n + 1}$. Должно выполняться неравенство $-16n^2 - 8n + 3 \geqslant 0$. Получаем: $-\frac{3}{4} \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}$. Но n — целое число, а в указанных пределах содержится лишь одно целое число 0. Итак, $n = 0$, а тогда из формулы корней квадратного уравнения получаем: $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Глава 6

§ 32

32.26. Вычислить:

а) $\frac{2i^4 + 3i^5}{(2 + 3i)(8 + i)} + \frac{(2 - i)^4}{(3 - 4i)(8 - i)}i^6$;

б) $\frac{2i^{16} - 3i^9}{(2 - 3i)^2} + \frac{(1 + 2i)^4}{(3 - 4i)(24 - 7i)} + \frac{93 - 36i}{325}$.

Р е ш е н и е. а) Удобно провести вычисления по действиям.

1) Так как $i^4 = 1$ и $i^5 = i$, то $\frac{2i^4 + 3i^5}{(2 + 3i)(8 + i)} = \frac{2 + 3i}{(2 + 3i)(8 + i)} = \frac{1}{8 + i} = \frac{8 - i}{65}$.

2) Так как $(2-i)^4=((2-i)^2)^2=(3-4i)^2$ и $i^6=-1$, то

$$\frac{(2-i)^4}{(3-4i)(8-i)}i^6=-\frac{(3-4i)^2}{(3-4i)(8-i)}=$$

$$=-\frac{3-4i}{8-i}=-\frac{(3-4i)(8+i)}{65}=\frac{-28+29i}{65}.$$

3) $\dfrac{8-i}{65}+\dfrac{-28+29i}{65}=\dfrac{-20+28i}{65}.$

б) 1) Так как $i^{16}=1$ и $i^9=i$, то $\dfrac{2i^{16}-3i^9}{(2-3i)^2}=\dfrac{2-3i}{(2-3i)^2}=\dfrac{1}{2-3i}=$

$=\dfrac{2+3i}{13}.$

2) Так как $(1+2i)^4=((1+2i)^2)^2=(-3+4i)^2=(3-4i)^2$, то

$$\frac{(1+2i)^4}{(3-4i)(24-7i)}=\frac{(3-4i)^2}{(3-4i)(24-7i)}=\frac{3-4i}{24-7i}=\frac{(3-4i)(24+7i)}{625}=$$

$$=\frac{100-75i}{625}=\frac{4-3i}{25}.$$

$$3)\ \frac{2+3i}{13}+\frac{4-3i}{25}+\frac{93-36i}{325}=$$

$$=\frac{25(2+3i)+13(4-3i)+(93-36i)}{325}=\frac{195}{325}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: а) $\dfrac{-20+28i}{65}$; б) 0,6.

32.31. При каких действительных значениях a число

$$z=(2-ai)^3-(3-ai)^2+5+a(1-a^2i):$$

а) является действительным;

б) является чисто мнимым?

Решение. Так как

$$(2-ai)^3=8-3\cdot4\cdot ai+3\cdot2\cdot(ai)^2-(ai)^3=$$

$$=(8-6a^2)+(-12a+a^3)i \text{ и } (3-ai)^2=(9-a^2)-6ai,$$

$$\text{то } z=(8-6a^2-9+a^2+5+a)+i(-12a+a^3-6a-a^3)=$$

$$=(-5a^2+a+4)-18ai.$$

а) z — действительное число тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} z=0$, т. е. $-18a=0$, $a=0$.

б) z — чисто мнимое число тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z=0$, т. е. $5a^2-a-4=0$, откуда находим, что $a=1$ или $a=-0{,}8$.

Ответ: а) 0; б) 1, $-0{,}8$.

32.36. а) Решить систему уравнений $\begin{cases} 5z_1 - 3\overline{z}_2 = -9 + 5i, \\ 4\overline{z}_1 + z_2 = 3 - 4i. \end{cases}$

Решение. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\begin{cases} 5z_1 - 3\overline{z}_2 = -9 + 5i, \\ 4\overline{z}_1 + z_2 = 3 - 4i; \end{cases} \quad \begin{cases} 5(a + bi) - 3(c - di) = -9 + 5i, \\ 4(a - bi) + (c + di) = 3 - 4i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5a - 3c) + (5b + 3d)i = -9 + 5i, \\ (4a + c) + (-4b + d)i = 3 - 4i. \end{cases}$$

Используем условие равенства двух комплексных чисел, т. е. приравняем действительные и мнимые части в каждом из уравнений полученной системы. Тогда

$$\begin{cases} 5a - 3c = -9, \\ 4a + c = 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 5b + 3d = 5, \\ 4b - d = 4, \end{cases}$$

т. е. $a = 0$, $c = 3$, $b = 1$, $d = 0$.

Значит, $z_1 = a + bi = i$, $z_2 = c + di = 3$.

Задача 32.38 закрепляет умение пользоваться формулами $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ и $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$. В то же время при ее решении необходимо вспомнить уравнение окружности на числовой плоскости. Эта задача по существу относится уже к теме следующего параграфа и служит здесь своего рода «мостиком» между алгебраической формой записи комплексных чисел (§ 32) и их геометрическим изображением на плоскости (§ 33). Рассмотрим ее решение.

32.38. Среди корней уравнения $\overline{z} + 1 = \dfrac{1}{z + 1}$ найти корень:

а) у которого действительная часть наименьшая;
б) у которого мнимая часть наименьшая;
в) который ближе всего расположен к началу координат;
г) который ближе всего расположен к числу i.

Решение. Сначала преобразуем заданное уравнение.

$$\overline{z} + 1 = \frac{1}{z + 1}; \quad (\overline{z} + 1)(z + 1) = 1; \quad \overline{z} \cdot z + \overline{z} + z + 1 = 1.$$

Пусть $z = x + iy$. Тогда $\overline{z} = x - iy$, $\overline{z} \cdot z = x^2 + y^2$, $\overline{z} + z = 2x$. Значит,

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 = 1; \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1,$$

т. е. множество решений данного уравнения — это окружность радиуса 1 с центром в точке $(-1; 0)$ (рис. 74). Из построенной геометрической модели сразу получаются ответы к заданиям а), б), в).

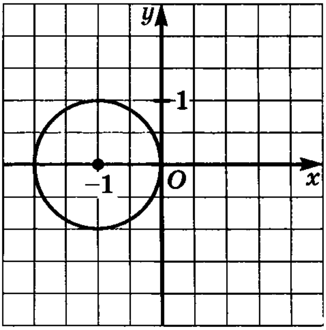


Рис. 74

а) Искомый корень — точка пересечения окружности с отрицательной действительной полуосью, т. е. $z = -2$.

б) Искомый корень — точка окружности, имеющая ординату -1, т. е. $z = -1 - i$.

в) Искомый корень — просто само начало координат, т. е. $z = 0$.

г) Центр $(-1; 0)$ окружности следует соединить отрезком с точкой $(0; 1)$, которая как раз и соответствует числу i, и найти точку пересечения этого отрезка и окружности. Ордината точки пересечения равна $\sin 45°$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а ее абсцисса равна $-1 + \cos 45°$, т. е. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $z = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Ответ: а) $z = -2$; б) $z = -1 - i$; в) $z = 0$; г) $z = \frac{1 - \sqrt{2} + i}{\sqrt{2}}$.

§ 33

В этом параграфе около половины всех заданий связаны с геометрией числовой плоскости. С одной стороны, эти задания, несомненно, относятся к новой теме «Комплексные числа». С другой стороны, они связаны с изображением на плоскости графиков простейших функций и поэтому повторяют связи между аналитическим и графическим способами задания функций. Основным техническим умением является переход от уравнения или неравенства, заданного в комплексных числах, к соответствующему уравнению или неравенству, заданному в обычных декартовых координатах.

33.7. Изобразить на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

б) $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z + 1$; г) $(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) = 1$.

Решение. б) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ и равенство $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z + 1$ принимает вид $x^2 = y + 1$, $y = x^2 - 1$. Искомое множество — обычная парабола.

г) Равенство $(\operatorname{Re} z)\ (\operatorname{Im} z) = 1$ преобразуется к виду $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$. Искомое множество — стандартная гипербола, график обратной пропорциональной зависимости.

Если равенства в задачах предыдущего типа заменить на те или иные неравенства, то вместо графиков функций будут получаться части плоскости, ограниченные подходящими графиками функций. В следующей задаче получаются части плоскости, ограниченные или прямыми, или параболами. Весьма существенным моментом является тут отработка правильной графической интерпретации союзов «и» (пересечение множеств) и «или» (объединение множеств). Конечно, можно воспринимать следующую задачу и как упражнение на использование простейших логических операций конъюнкции и дизъюнкции. Однако на этом моменте не следует останавливаться слишком подробно. Лучше, чтобы эти операции грамотно применялись в конкретной и наглядной ситуации.

33.11. Изобразить на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, у которых:

б) $\operatorname{Im} z > 2$ или $\operatorname{Re} z \leqslant 3$; в) $\operatorname{Re} z > (\operatorname{Im} z)^2$ и $(\operatorname{Re} z)^2 > \operatorname{Im} z$; г) $\operatorname{Im} z \geqslant 2 \operatorname{Re} z$ или $\operatorname{Re} z < 3 \operatorname{Im} z$.

Решение. б) Пусть $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Неравенство $\operatorname{Im} z > 2$ принимает вид $y > 2$. На числовой плоскости получится полуплоскость, лежащая выше горизонтальной прямой $y = 2$. Точки самой горизонтали при этом в ответ не входят, ведь неравенство строгое. Неравенство $\operatorname{Re} z \leqslant 3$ означает, что $x \leqslant 3$, т. е. получится полуплоскость, лежащая левее вертикали $x = 3$. Точки самой вертикали при этом следует включить в ответ, так как неравенство нестрогое. В условии стоит союз «или», поэтому полученные две полуплоскости следует объединить.

в) Неравенства $\operatorname{Re} z > (\operatorname{Im} z)^2$ и $(\operatorname{Re} z)^2 > \operatorname{Im} z$ запишем как $x > y^2$ и $x^2 > y$. Уравнение $y = x^2$ задает параболу, а неравенству $x^2 > y$ удовлетворяют точки, лежащие ниже этой параболы. Уравнение $x = y^2$ задает «такую же» параболу, но с ветвями, направленными вправо, и осью абсцисс в качестве оси симметрии. Неравенству $x > y^2$ удовлетворяют точки, лежащие правее («внутри») этой параболы. Остается взять пересечение найденных множеств, ведь по условию надо найти точки, которые удовлетворяют как неравенству $x^2 > y$, так и неравенству $x > y^2$ (рис. 75).

г) Неравенство $\operatorname{Im} z \geqslant 2 \operatorname{Re} z$ означает, что $y \geqslant 2x$, а неравенство $\operatorname{Re} z < 3 \operatorname{Im} z$ означает, что $x < 3y$, т. е. $y > \frac{x}{3}$. Поэтому все точки числовой плоскости, лежащие выше прямой $y = 2x$ или лежащие на самой этой прямой, следует объединить с теми точками, которые лежат выше прямой $y = \frac{x}{3}$ (рис. 76).

Развитию умения грамотно сочетать алгебраический и геометрический подходы посвящены задачи 33.17—33.19. Они позволяют на новом материале, связанном с комплексными числами,

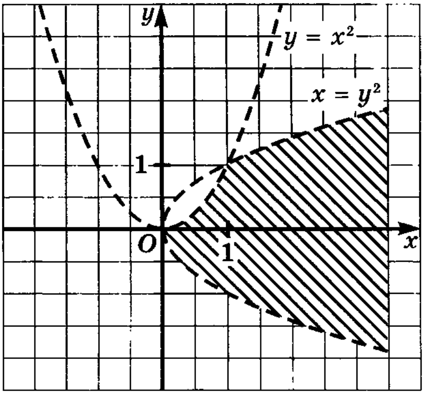


Рис. 75

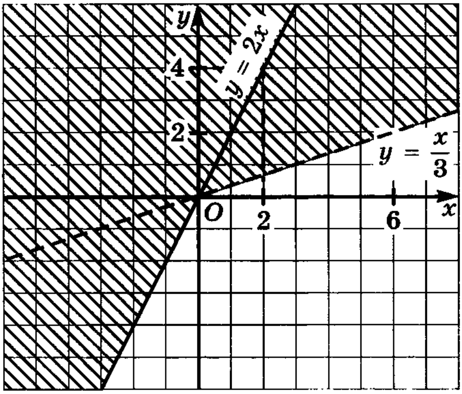


Рис. 76

повторить базовые графики: прямую, параболу, гиперболу. Относительно новым является прием исключения переменной n из двух заданных соотношений $x = x(n)$ и $y = y(n)$, в результате чего переменная y выражается через x, что и приводит к графикам функций.

33.17. а) Для $n = 1, 2, 3, 4$ построить на координатной плоскости точки $z_n = (2n - 1) + (5 - n)i$.

б) Доказать, что все эти точки лежат на одной прямой l; составить уравнение прямой l.

в) Указать число, лежащее на прямой l, у которого $\mathrm{Re}\, z = -5$.

г) Указать число, лежащее на прямой l, у которого $\mathrm{Im}\, z = 8$.

Решение. а) В равенство $z_n = (2n - 1) + (5 - n)i$ следует просто подставить $n = 1, 2, 3, 4$ и на числовой плоскости изобразить точки $z_1\ (1; 4)$, $z_2(3; 3)$, $z_3(5; 2)$, $z_4(7; 1)$.

б) Геометрически очевидно, что эти точки лежат на одной прямой. Для получения ее уравнения можно из равенства $x = 2n - 1$ выразить n и подставить его в равенство $y = 5 - n$; получим: $y = 5 - \frac{x+1}{2} = \frac{9-x}{2}$. Значит, все эти точки лежат на прямой $y = 4{,}5 - 0{,}5x$.

в) Если $x = \mathrm{Re}\, z = -5$, то $y = \mathrm{Im}\, z = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$, т. е. $z = -5 + 7i$.

г) Если $y = \mathrm{Im}\, z = 8$, то $x = \mathrm{Re}\, z = 2(4{,}5 - y) = -7$, т. е. $z = -7 + 8i$.

33.18. а) Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ построить на координатной плоскости точки $z_n = (n - 1) + (n^2 - 5n + 6)i$.

б) Доказать, что эти точки лежат на одной параболе; составить уравнение параболы.

в) Найти действительную часть суммы данных чисел.

г) Указать номер n, начиная с которого мнимая часть числа z_n будет больше 100.

Решение. а) Точки строятся, как в предыдущем номере.

б) $\begin{cases} x = n - 1, \\ y = n^2 - 5n + 6. \end{cases}$

Из первого уравнения находим: $n = x + 1$. Подставляем этот результат во второе уравнение:

$$y = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6; \ y = x^2 - 3x + 2.$$

в) $z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = (0 + 2i) + (1 + 0 \cdot i) + (2 + 0 \cdot i) + (3 + 2i) + (4 + 6i) + (5 + 12i)$. Действительная часть этой суммы равна $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

г) Следует решить неравенство $\operatorname{Im} z_n > 100$, т. е. $n^2 - 5n + 6 > 100$, и выбрать натуральное n, начиная с которого это неравенство верно.

Имеем: $n^2 - 5n - 94 > 0$;

$$n < \frac{5 - \sqrt{401}}{2}; \ n > \frac{5 + \sqrt{401}}{2}.$$

Первое неравенство не выполняется ни при каком натуральном значении n, второе выполняется при натуральных $n \geqslant 13$.

Искомый номер равен 13.

33.19. а) Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ построить на координатной плоскости точки $z_n = (n + 1) + \dfrac{3}{n} i$.

б) Доказать, что все эти точки лежат на одной гиперболе; составить уравнение гиперболы.

в) Указать точку, наиболее близкую к оси абсцисс.

г) Указать точку, наиболее близкую к началу координат.

Решение. б) $\begin{cases} x = n + 1 \\ y = \dfrac{3}{n}. \end{cases}$

Из первого уравнения находим: $n = x - 1$. Тогда второе уравнение примет вид $y = \dfrac{3}{x - 1}$. На этой гиперболе лежат все шесть построенных в пункте а) точки: $(2; 3)$, $\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$, $(4; 1)$ и т. д.

в) Расстояние от точки z_n до оси абсцисс равно модулю ординаты точки z_n, т. е. равно $\dfrac{3}{n}$. Из построенных точек это расстояние будет наименьшим при $n = 6$. Значит, $z_6 = 7 + 0{,}5i$ — точка, наиболее близкая к оси абсцисс.

г) Расстояние d_n от точки z_n до начала координат равно

$$\sqrt{(n+1)^2+\frac{9}{n^2}}.$$

Можно попробовать исследовать подкоренное выражение при всех n. Но в данном случае можно просто перебрать все шесть возможностей:

n	1	2	3	4	5	6
d_n^2	13	11,25	17	>17	>17	>17

Значит, d_2 — наименьшее из всех расстояний, т. е. к началу координат ближе всего точка $z_2 = 3 + 1{,}5i$.

§ 34

Задания на перевод записи комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую в большинстве случаев заранее предполагают, что в алгебраической форме нет никакой тригонометрии. Например, записать в тригонометрической форме числа $2 + 2i$, $\sqrt{3} + i$, ... и т. п. (таковы № 34.21—34.25). В этом смысле несколько неожиданно выглядят задания, в которых алгебраическая форма содержит тригонометрические выражения. Разберем два таких задания. В первом из них приходится применять формулы приведения, во втором — формулы двойного аргумента, а преобразовывать заданное выражение приходится к виду $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где $r > 0$.

34.26. Записать комплексное число в тригонометрической форме:
а) $\sin 35° - i\cos 35°$; б) $\sin(-23°) + i\cos(-23°)$;
г) $\sin(-20°) - i\sin(70°)$.

Р е ш е н и е. а) Так как $\sin 35° = \cos 55° = \cos(-55°)$ и $-\cos 35° = -\sin 55° = \sin(-55°)$, то $\sin 35° - i\cos 35° = \cos(-55°) + i\sin(-55°)$.

б) Так как $\sin(-23°) = \cos 113°$ и $\cos(-23°) = \sin 113°$, то $\sin(-23°) + i\cos(-23°) = \cos 113° + i\sin 113°$.

г) $\sin(-20°) - i\sin(-70°) = -\sin 20° + i\sin 70° = \cos 110° + i\sin 110°$.

34.27. Записать комплексное число в тригонометрической форме:

а) $1 - \cos 100° + i\sin 100°$;

б) $\sin\frac{4\pi}{7} + i\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)$;

г) $1 - \cos 250° + i\sin 610°$.

Решение.

а) $1 - \cos 100° + i \sin 100° = 2 \sin^2 50° + i \cdot 2 \sin 50° \cos 50° =$
$= 2 \sin 50°(\cos 40° + i \sin 40°)$.

б) $\sin \frac{4\pi}{7} + i\left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + i \cdot 2 \sin^2 \frac{2\pi}{7} =$

$= 2 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right)$.

г) $1 - \cos 250° + i \sin 610° = 2 \sin^2 125° + i \sin 250° =$
$= 2 \sin 125° \ (\cos (-35°) + i \sin (-35°))$.

В заданиях на отработку правила «при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются», как правило, большее внимание уделяют поведению аргументов. Именно то, как выглядит на единичной (числовой) окружности операция умножения комплексных чисел, составляет центральный момент всей темы, который удобнее всего отрабатывать на комплексных числах, принадлежащих единичной окружности.

34.35. Зная, что $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найти аргумент указанного числа z: а) $z = z_1z_2$; б) $z = (z_1)^2z_2$; в) $z = z_1(z_2)^5$; г) $z = (z_1)^{11}(z_2)^{10}$.

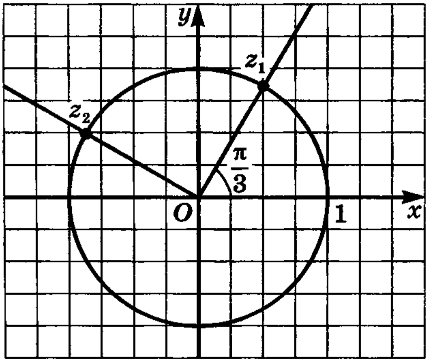


Рис. 77

Решение. Аргументы чисел $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, расположенных на единичной окружности, можно легко найти с помощью рисунка 77: $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, $\arg z_2 = \frac{5\pi}{6}$.

а) $z_1z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$;

$\arg z = -\frac{5\pi}{6}$, (а не $\frac{7\pi}{6}$, поскольку $\arg z \in (-\pi; \pi]$).

б) $(z_1^2)z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) =$

$= -i$; $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

в) $z_1(z_2)^5 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{25\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{25\pi}{6}\right) =$

$= \cos\frac{27\pi}{6} + i\sin\frac{27\pi}{6} = i$; $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

г) $(z_1)^{11}(z_2)^{10} = \cos\left(\frac{11\pi}{3} + \frac{50\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{3} + \frac{50\pi}{6}\right) = \cos\frac{36\pi}{3} +$

$+ i\sin\frac{36\pi}{3} = \cos 12\pi + i\sin 12\pi = 1$; $\arg z = 0$.

34.36. Зная, что $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найти аргумент указанного числа z:

а) $z = \frac{z_1}{z_2}$; б) $z = z_1^3$; в) $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$; г) $z = \frac{z_1^{31}}{z_2^{33}}$.

Решение. Аргументы чисел $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ уже найдены: $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, $\arg z_2 = \frac{5\pi}{6}$.

а) $z_1 : z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) =$

$= -i$; $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

б) $z_1^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$; $\arg z = \pi$.

в) $(z_1)^4 : (z_2)^3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{15\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{15\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) +$

$+ i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; $\arg z = \frac{5\pi}{6}$.

г) $(z_1)^{31} : (z_2)^{33} = \cos\left(\frac{31\pi}{3} - \frac{165\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{31\pi}{3} - \frac{165\pi}{6}\right) =$

$= \cos\left(-\frac{103\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{103\pi}{6}\right) = \cos\left(-18\pi + \frac{5\pi}{6}\right) +$

$+ i\sin\left(-18\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$; $\arg z = \frac{5\pi}{6}$.

34.40. Для числа $z = \cos(0{,}11\pi) + i\sin(0{,}11\pi)$ указать наименьшее натуральное число n, при котором:

а) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{4}$; б) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{2}$; в) $\arg(z^n) > \frac{5\pi}{6}$; г) $\arg(z^n) < 0$.

Решение. Проще всего рассуждать, двигаясь по единичной окружности в положительном направлении. Шаг такого движения составляет $0{,}11\pi$:

$$z = \cos(0{,}11\pi) + i\sin(0{,}11\pi);$$

$$z^2 = \cos(0{,}22\pi) + i\sin(0{,}22\pi);$$

$$z^3 = \cos(0{,}33\pi) + i\sin(0{,}33\pi); \ \ldots$$

$$z^n = \cos(0{,}11n\pi) + i\sin(0{,}11n\pi); \ \ldots .$$

а) Так как $\arg(z^2) = 0{,}22\pi < 0{,}25\pi < 0{,}33\pi = \arg(z^3)$, то $n = 3$.

б) Так как $\arg(z^4) = 0{,}44\pi < 0{,}5\pi < 0{,}55\pi = \arg(z^5)$, то $n = 5$.

в) Так как $\arg(z^7) = 0{,}77\pi < \frac{5\pi}{6} < 0{,}88\pi = \arg(z^8)$, то $n = 8$.

г) $\arg(z^9) = 0{,}99\pi < \pi$, значит, этот аргумент — положительное число. Далее $z^{10} = \cos 1{,}1\pi + i\sin 1{,}1\pi = \cos(-0{,}9\pi) + i\sin(-0{,}9\pi)$. Аргумент — отрицательное число. Значит, $n = 10$.

В двух заключительных задачах этого параграфа основным является переход от уравнения или неравенства, заданного в комплексных числах, к соответствующему уравнению или неравенству, заданному в обычных декартовых координатах. По сравнению с предыдущим параграфом добавлены только вопросы про аргументы комплексных чисел.

34.41. а) Среди корней z уравнения $\sqrt{3}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4i^9$ найти числа, аргумент которых равен $\frac{\pi}{6}$;

б) среди корней z уравнения $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{i^6}$ найти числа, аргумент которых равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение. а) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$. Поэтому уравнение $\sqrt{3}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4i^9$ в декартовых координатах имеет вид $4\sqrt{3}ixy = 4i$, т. е. $\sqrt{3}xy = 1$. Так как $\arg z = \frac{\pi}{6}$, то $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $x > 0$.

Итак, $x > 0$, $\sqrt{3}xy = 1$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Из этой системы условий находим: $x = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $z = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$.

б) Уравнение $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{i^6}$ в декартовых координатах имеет вид $x \cdot (-y) = -\sqrt{3}$. Так как $\arg z = \frac{\pi}{3}$, то $y = \sqrt{3}x$ и $x > 0$. Итак, $x > 0$, $xy = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$. Из этой системы условий находим: $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, т. е. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Ответ: а) $1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$; б) $1 + i\sqrt{3}$.

34.42. а) Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi - 3i + 4| \leqslant \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наибольшее значение $|z|$?

б) Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi - 3 - 4i| \leqslant \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наименьшее значение $|z|$?

Решение. а) Так как $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$, то заданное неравенство имеет вид $|zi - 3i + 4| \leqslant 1$. Имеем: $|zi - 3i + 4| = |i(z - 3 - 4i)| =$
$= |i| \cdot |z - (3 + 4i)| = |z - (3 + 4i)|$.

Итак, мы получили неравенство $|z - (3 + 4i)| \leqslant 1$. Это — круг единичного радиуса с центром в точке (3; 4) (рис. 78). Наибольшее значение $|z|$ равно сумме радиуса круга и расстояния от центра круга до начала координат: $1 + 5 = 6$.

б) Так как $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$, то заданное неравенство имеет вид $|zi - 3 - 4i| \leqslant 1$. Имеем: $|zi - 3 - 4i| = |i(z - 4 + 3i)| =$
$= |i| \cdot |z - (4 - 3i)| = |z - (4 - 3i)|$.

Итак, мы получили неравенство $|z - (4 - 3i)| \leqslant 1$. Это — круг единичного радиуса с центром в точке (4; −3) (рис. 79). Наименьшее значение $|z|$ равно разности расстояния от центра круга до начала координат и радиуса круга: $5 - 1 = 4$.

Ответ: а) 6; б) 4.

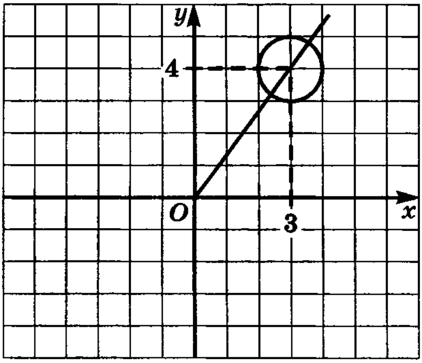


Рис. 78

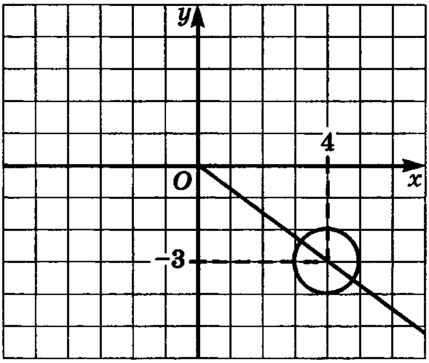


Рис. 79

§ 35

35.16. Изобразить на комплексной плоскости множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$; г) $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

Решение. Так как $|z| = 1$ во всех пунктах а) — г), то всюду речь идет о дугах единичной окружности.

а) Неравенством $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ задается пересечение единичной окружности и первой координатной четверти. У каждой точки z из полученной дуги окружности множество $\sqrt{z}$ состоит из двух симметричных относительно начала координат точек. Так как «при извлечении квадратного корня аргументы делятся пополам», то ответ будет состоять из двух дуг. Первая из них — это дуга $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$, а вторая получается ее симметричным отображением относительно начала координат (0; 0) (рис. 80). Так как неравенства нестрогие, то концы дуг следует включить в ответ.

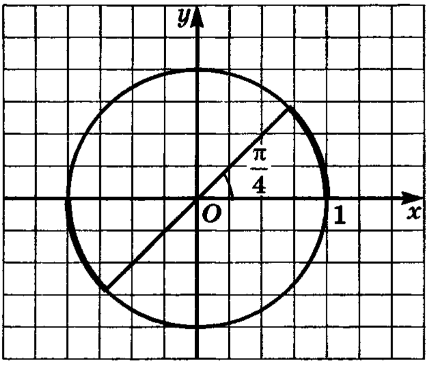


Рис. 80

г) Рассмотрим точки $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ единичной окружности при изменении угла α от $-\frac{\pi}{4}$ до π. Тогда $\sqrt{z} = \pm(\cos 0{,}5\alpha + i\sin 0{,}5\alpha)$. Все точки вида $\cos 0{,}5\alpha + i\sin 0{,}5\alpha$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ заполнят дугу $|z| = 1$,

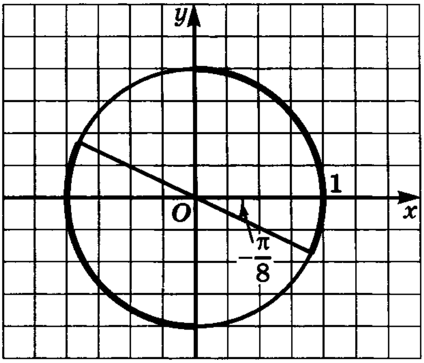


Рис. 81

$-\frac{\pi}{8} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$, а точки вида $-(\cos 0{,}5\alpha + i\sin 0{,}5\alpha)$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ заполнят симметричную относительно начала координат дугу. Как и в пункте а), ответ состоит из двух дуг (рис. 81).

§ 36

Для уверенного применения формулы Муавра в различных задачах одним из первоначальных умений является ясное геометрическое представление о том, как располагаются на единичной окружности натуральные и целые степени комплексных чисел z, $|z| = 1$. На это ориентированы первые пять задач параграфа. В № 36.6 рассмотрены степени числа, модуль которого меньше единицы.

36.6. Пусть $z = 0{,}5(\cos 0{,}23\pi + i\sin 0{,}23\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены вне круга радиуса 0,2 с центром в начале координат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены правее оси ординат и внутри круга радиуса 0,001 с центром в начале координат?

Решение. Так как $|z| = 0{,}5$, то число $w = 2z$ принадлежит единичной окружности. Имеем: $w^n = 2^n z^n$, $z^n = 2^{-n} w^n$. Значит, если мы узнаем распределение по четвертям степеней $w, w^2, w^3, \ldots, w^9, w^{10}$, то мы узнаем и распределение степеней $z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}$.

Числа $w, w^2, w^3, \ldots, w^9, w^{10}$ расположены на единичной окружности. По формуле Муавра

$$w^2 = \cos(2 \cdot 0{,}23\pi) + i\sin(2 \cdot 0{,}23\pi) = \cos 0{,}46\pi + i\sin 0{,}46\pi,$$
$$w^3 = \cos(3 \cdot 0{,}23\pi) + i\sin(3 \cdot 0{,}23\pi) = \cos 0{,}69\pi + i\sin 0{,}69\pi,$$

....

$$w^9 = \cos(9 \cdot 0{,}23\pi) + i\sin(9 \cdot 0{,}23\pi) = \cos 2{,}07\pi + i\sin 2{,}07\pi,$$
$$w^{10} = \cos 2{,}3\pi + i\sin 2{,}3\pi.$$

Геометрически это выглядит так, как схематически показано на рисунке 82. Теперь легко получить ответ: а) z^3, z^4; б) z, z^2; в) z, z^2, z^9, z^{10}; г) z^{10}.

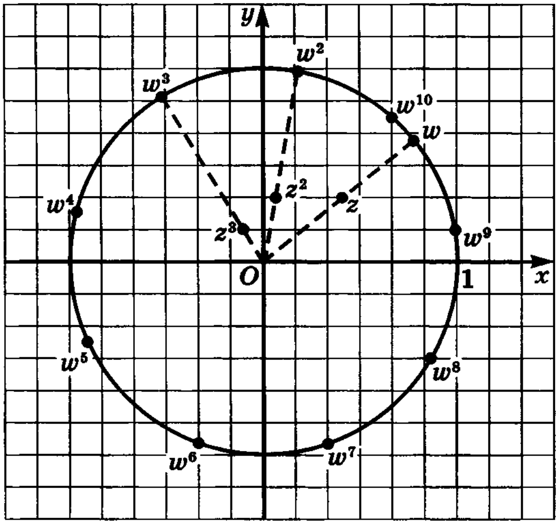


Рис. 82

Заметим, что в пункте б) можно обойтись и без тригонометрии: $|z| = 0,5$, $|z^2| = |z|^2 = 0,25$, $|z^3| = 0,125$, $|z^4| = 0,0625$, ...; ясно, что годятся только z и z^2. В пункте г) правее оси ординат лежат z, z^2, z^7, z^8, z^9, z^{10}, но только у z^{10} модуль достаточно мал:

$$2^{-10} = \frac{1}{1024} < 0,001.$$

С помощью задачи 36.14 одновременно проверяется как умение использовать формулу Муавра, так и знание тригонометрических формул двойного аргумента. Кроме того, в ней использована достаточно распространенная «ловушка»: для возведения числа $\sin\alpha + i\cos\alpha$ в n-ю степень нельзя просто умножить α на n — это «неправильная» формула Муавра. Для правильного использования этой формулы сначала следует по формулам приведения перейти к тригонометрической записи $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

36.14. а) Вычислить z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$;

б) Вычислить z^{30}, если $z = 2\sin\frac{\pi}{12}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Решение. а) Сначала преобразуем само число z:

$$z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + 2i\cos^2\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{8} + i\cos\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

По формуле Муавра

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^{12} = 2^6\left(\cos\frac{12\pi}{8} + i\sin\frac{12\pi}{8}\right) = -64i.$$

б) $$z = 2\sin\frac{\pi}{12}\left(2\sin^2\frac{5\pi}{12} + 2i\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}\left(\sin\frac{5\pi}{12} + i\cos\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}.$$

По формуле Муавра

$$z^{30} = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{30} = \left(\cos\frac{30\pi}{12} + i\sin\frac{30\pi}{12}\right) = i.$$

Ответ: а) $-64i$; б) i.

Задания 36.17 и 36.18 напоминают задания 36.1—36.6, но только рассматривается вся геометрическая прогрессия z, z^2, z^3, ..., z^n, z^{n+1}, ..., а не несколько ее начальных членов. Кроме того, аргумент знаменателя прогрессии существенно меньше, т. е. на единичной окружности получаются значительно более плотные множества чисел.

36.17. Пусть z, z^2, z^3, ..., z^n, z^{n+1}, ... — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}1\pi - i\sin 0{,}1\pi$.

а) Указать наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит третьей координатной четверти (не на координатных осях).

б) Указать наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти (не на координатных осях).

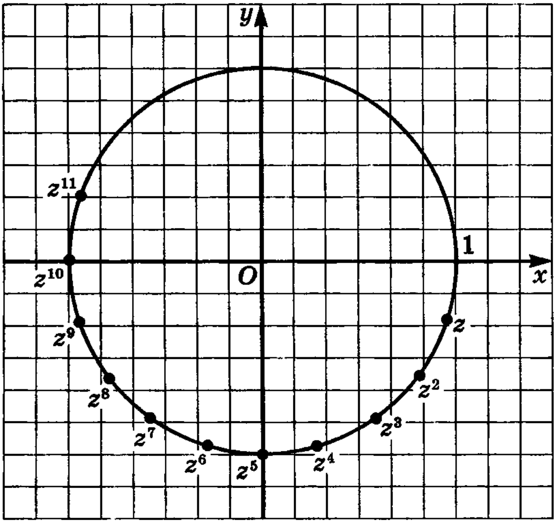


Рис. 83

в) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

г) Найдите сумму этих различных чисел.

Решение. В соответствии с формулой Муавра следует начинать с точки $z = \cos(-0{,}1\pi) + i\sin(-0{,}1\pi)$ и двигаться по единичной окружности в отрицательном направлении с шагом $0{,}1\pi$ (рис. 83).

а) Числа z, $z^2 = \cos(-0{,}2\pi) + i\sin(-0{,}2\pi)$, $z^3 = \cos(-0{,}3\pi) + i\sin(-0{,}3\pi)$, $z^4 = \cos(-0{,}4\pi) + i\sin(-0{,}4\pi)$ будут принадлежать четвертой четверти, число $z^5 = -i$ окажется на мнимой оси. Значит, z^6 будет первым членом прогрессии, который окажется в третьей четверти, т. е. $n = 6$.

б) Числа z^6, z^7, z^8, z^9 принадлежат третьей четверти, а $z^{10} = -1$ — отрицательное действительное число. Значит, z^{11} будет первым членом прогрессии, который окажется во второй четверти, т. е. $n = 11$.

в) На двадцатом шаге мы окажемся в точке 1, ведь $z^{20} = 1$. Значит, $z^{21} = z^1$, $z^{22} = z^2$, $z^{23} = z^3$, ..., т. е. процесс, как говорят, «зациклится». Получается «периодическая» последовательность, в которой ровно 20 различных чисел.

г) Все эти 20 чисел разбиваются на пары так, что сумма чисел в каждой паре равна нулю: $z_1 + z_{11} = 0$, $z_2 + z_{12} = 0$, ..., $z_{10} + z_{20} = 0$. Значит, и общая сумма равна нулю:

$$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{19} + z^{20} = 0.$$

36.18. Пусть z, z^2, z^3, ..., z^n, z^{n+1}, ... — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}01\pi - i\sin 0{,}01\pi$.

а) Указать наименьшее натуральное значение n, при котором z^n лежит во второй координатной четверти.

б) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

в) Сколько из этих чисел лежат на осях координат?

г) Найти сумму этих различных чисел.

Решение. Рассуждения аналогичны рассуждениям в предыдущей задаче, только длина шага уменьшается в 10 раз, а значит, количество шагов и период прогрессии возрастают. На осях координат окажутся, соответственно, точки $z^{50} = -i$, $z^{100} = -1$, $z^{150} = i$, $z^{200} = 1$.

Ответ: а) 101; б) 200; в) 4; г) 0.

В следующей задаче знаменатель прогрессии уже не принадлежит единичной окружности. Поэтому при возведении в натуральную степень будут происходить не только повороты, но и растяжения с центром в начале координат.

36.19. Пусть $z = 1 + i$. Какие числа из множества $\{z^2, z^3, \ldots, z^{11}, z^{12}\}$:

а) лежат на оси абсцисс; в) лежат левее оси ординат;

б) правее прямой $x = 9$; г) выше прямой $y = 2$?

Решение. Так как $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то все нужные степени легко подсчитать по формуле Муавра, а после этого изобразить геометрически.

$$z^2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i;$$

$$z^3 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2 + 2i;$$

....

$$z^{11} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) = -32 + 32i;$$

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{12} = 64\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right) = -64.$$

При переходе к следующему члену прогрессии аргумент увеличивается на $\frac{\pi}{4}$. Теперь для получения ответов остается только «считать» информацию.

Ответ: а) z^4, z^8, z^{12}; б) z^8, z^9; в) z^3, z^4, z^5, z^{11}, z^{12}; г) z^9, z^{10}, z^{11}.

В последней задаче § 36 формула Муавра «работает» вместе с базовым умением записывать комплексное число в алгебраической форме.

36.24. а) При каком действительном значении a выражение

$$\frac{(a(\sin 75^\circ + i\cos 75^\circ))^{12}}{i(a+2i)^2 - (14 - 3ai) - 2}$$

является действительным числом?

б) При каком действительном значении b выражение

$$\frac{b : (\cos 22^\circ 30' - i\sin 22^\circ 30')^{16}}{i(3i - b)^2 - (3 - 8bi) - 3}$$

является действительным числом?

Решение. а) Начнем с числителя:

$$(a(\sin 75^\circ + i\cos 75^\circ))^{12} = a^{12}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^{12} =$$
$$= a^{12}(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)^{12} = -a^{12} \in \boldsymbol{R}.$$

Так как числитель — действительное число, то задача свелась к нахождению тех значений a, для которых и знаменатель — действительное число. Так как $i(a + 2i)^2 - (14 - 3ai) - 2 = i(a^2 + 4ai - 4) + 3ai - 16$, то мнимая часть $\operatorname{Im} z$ числа z равна $a^2 - 4 + 3a = (a - 1)(a + 4)$. Эта мнимая часть равна нулю, только если $a = 1$ или $a = -4$. Но при $a = -4$ знаменатель обращается в нуль; это значение не берем.

б) $$b : (\cos 22^\circ 30' - i\sin 22^\circ 30')^{16} = b\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-16} =$$
$$= b(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = b \in \boldsymbol{R}.$$

$$z = i(3i - b)^2 - (3 - 8bi) - 3 = i(-9 - 6bi + b^2) + 8bi - 6,$$
$$\operatorname{Im} z = b^2 + 8b - 9.$$

$\operatorname{Im} z = 0$, если $b = -9$ или $b = 1$. Значение $b = -9$ не подходит.

Глава 7

§ 37

37.39. Найти наименьший член последовательности:

а) $y_n = 3n^2 - 10n + 3$; б) $y_n = -\dfrac{3}{2n - 5}$.

Решение. а) Найдем абсциссу вершины параболы $y = 3x^2 - 10x + 3$; получим $x = 1\dfrac{2}{3}$. График заданной последовательности состоит из точек, принадлежащих указанной параболе, ветви которой направлены вверх, и имеющих своими абсциссами натуральные числа. Ближе всех к вершине параболы располагается точка с абсциссой 2, именно в ней последовательность и достигает своего наименьшего значения: $y_{\text{наим}} = y_2 = -5$.

б) Для данной последовательности имеем: $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, а все остальные члены отрицательны, именно среди них и следует искать наименьший.

Последовательность $y_3, y_4, y_5, \ldots$ возрастающая, значит, наименьшим ее членом является y_3. Итак, $y_{\text{наим}} = y_3 = -3$.

37.40. Найти наибольший член последовательности:

а) $y_n = -2n^2 + 11n - 2$; г) $y_n = \frac{4}{n+4}$.

Решение. а) Найдем абсциссу вершины параболы $y = -2x^2 + 11x - 2$; получим: $x = 2\frac{3}{4}$. График заданной последовательности состоит из точек, принадлежащих указанной параболе, ветви которой направлены вниз, и имеющих своими абсциссами натуральные числа. Ближе всех к вершине параболы располагается точка с абсциссой 3, именно в ней последовательность и достигает своего наибольшего значения: $y_{\text{наиб}} = y_3 = 13$.

б) Заданная последовательность убывающая, значит, $y_{\text{наиб}} = y_1 = \frac{4}{5}$.

37.44. Известно, что (x_n) — ограниченная последовательность. Является ли ограниченной последовательность: а) $y_n = -5x_n + 2$; б) $p_n = \frac{x_n^2}{x_n^2+1}$; в) $z_n = \frac{1}{2|x_n|+1}$?

Решение. а) По условию (x_n) — ограниченная последовательность, значит, существуют числа a и b такие, что для любого n выполняется неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$. Но тогда $-5b \leqslant -5x_n \leqslant -5a$, $-5b + 2 \leqslant -5x_n + 2 \leqslant -5a + 2$. Полученное двойное неравенство означает ограниченность последовательности (y_n).

б) Ясно, что $0 \leqslant \frac{x_n^2}{x_n^2+1} < 1$ для любого n. Значит, последовательность (p_n) ограниченная.

в) Ясно, что $0 < \frac{1}{2|x_n|+1} \leqslant 1$ для любого n. Значит, последовательность (z_n) ограниченная.

37.47. а) При каких значениях параметра p последовательность $y_n = \frac{2n+p}{3n-1}$ ограничена сверху числом 1?

б) При каких значениях параметра p последовательность $y_n = \frac{p+5n}{3n+1}$ ограничена снизу числом 1?

Р е ш е н и е. а) Для любого n должно выполняться неравенство $\frac{2n+p}{3n-1} \leqslant 1$, т. е. $n - 1 \geqslant p$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $p \leqslant 0$.

б) Для любого n должно выполняться неравенство $\frac{p+5n}{3n+1} \geqslant 1$, т. е. $2n - 1 \geqslant -p$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $-p \leqslant 1$, т. е. когда $p \geqslant -1$.

37.52. Доказать, что заданная последовательность возрастает:

а) $y_n = n^3 + 2n$; г) $y_n = \frac{n^4+3n^2+1}{n^4+3n^2+6}$.

Р е ш е н и е. а) Достаточно очевидно, что $y_{n+1} = (n+1)^3 + 2(n + 1)$ больше, чем $y_n = n^3 + 2n$; значит, последовательность возрастает.

г) Преобразуем последовательность к виду $y_n = 1 - \frac{5}{n^4+3n^2+6}$. Чем больше n, тем больше знаменатель дроби, значит, тем меньше дробь и, соответственно, тем больше y_n. Последовательность возрастает.

В № **37.60** надо привести примеры последовательностей, обладающих определенными свойствами. Приведем возможные варианты.

а) Возрастающая, ограниченная сверху последовательность, все члены которой положительные числа. Можно взять $y_n = \operatorname{arctg} n$.

б) Убывающая последовательность, все члены которой принадлежат интервалу $(0; 7)$. Можно взять $y_n = 7 \operatorname{arctg} n$. В самом деле, функция $y = 7 \operatorname{arcctg} x$ принимает только положительные значения и убывает, значит, и указанная последовательность убывает и все ее члены больше нуля. С другой стороны,

$$7 \operatorname{arcctg} n \leqslant 7 \operatorname{arcctg} 1 = \frac{7\pi}{4} < 7.$$

в) Возрастающая последовательность, имеющая ровно три отрицательных члена. Можно взять $y_n = n - 4$, $y_n = 2n - 7$, $y_n = 3n - 10$ и т. д.

г) Неограниченная немонотонная последовательность. Например, $y_n = (-2)^n$.

§ 38

38.12. Доказать, что последовательность имеет предел:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$; б) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Решение. а) Здесь $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Ясно, что $x_n < x_{n+1}$, т. е. последовательность возрастает. Далее, воспользовавшись формулой суммы n членов геометрической прогрессии, получим:

$$x_n = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2.$$

Значит, последовательность ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса последовательность сходится.

б) Здесь $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Значит, последовательность возрастает. Далее,

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} = 1.$$

Значит, последовательность ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса последовательность сходится.

38.20. б) Вычислить

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$$

Решение.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1 \cdot 3} + \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{7-5}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Теперь ясно, что искомый предел равен $\frac{1}{2}$.

38.21. а) Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n}{2^n - 6 \cdot 4^n}$.

Решение. Есть смысл почленно разделить числитель и знаменатель дроби на 4^n. Получим:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n}{2^n - 6 \cdot 4^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6}.$$

Поскольку $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, получаем в пределе $-\frac{1}{2}$.

38.37. б) Решить уравнение $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \dfrac{13}{6}$, если известно, что $|x| < 1$.

Решение. Заметим, что x^2, $-x^3$, x^4, $-x^5$, ... — бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель q которой равен $-x$, он по модулю меньше 1. Применив формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии $\left(S = \dfrac{b_1}{1 - q}\right)$, получим:

$$x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{x^2}{1 + x}.$$

Остается решить уравнение $2x + 1 + \dfrac{x^2}{1 + x} = \dfrac{13}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{9}$.

38.38. а) Решить уравнение $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots + \sin^n x + \ldots = 5$.

Решение. Уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Значит, можно считать, что $|\sin x| < 1$, и применить к левой части уравнения формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии. В итоге задача сведется к решению простого уравнения $\dfrac{\sin x}{1 - \sin x} = 5$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 39

39.10. Построить график непрерывной на $(-\infty; +\infty)$ функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $f(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$, $E(f) = [-5; 5]$, функция убывает на $[2; 7]$;

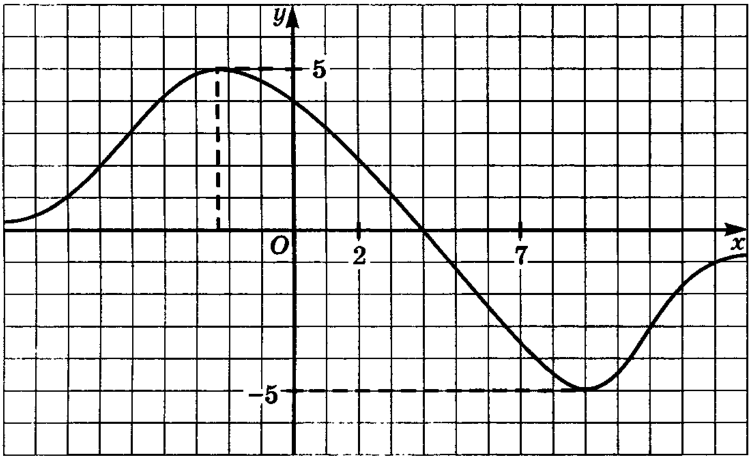


Рис. 84

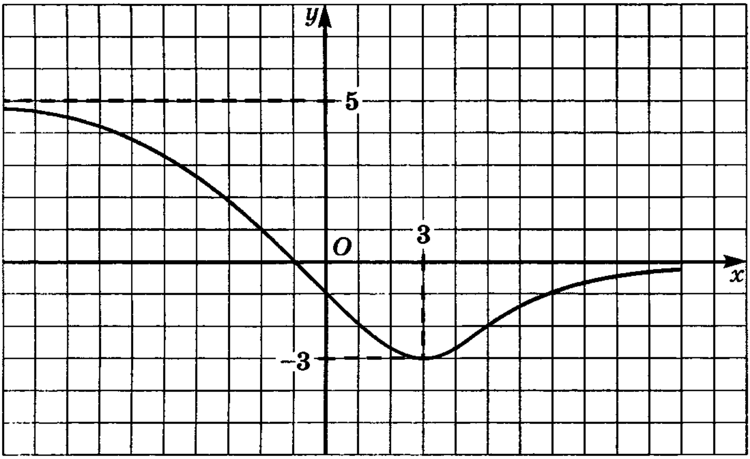


Рис. 85

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $E(f) = [-3;\ 5)$, $f(x) < 0$ на $(0;\ +\infty)$, функция возрастает на $[3;\ +\infty)$ и убывает на $[0;\ 3]$.

Решение. а) График изображен на рисунке 84.

б) График изображен на рисунке 85.

Следует заметить, что подобные нетрадиционные для учащихся задания носят творческий характер, а потому имеют большое развивающее значение.

39.32. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-7}\right)$.

Решение. а) При $x = 3$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в 0 — это «неопределенность вида $\frac{0}{0}$». Для ее раскрытия и числитель, и знаменатель дроби домножим на выражение, сопряженное числителю:

$$\text{а) } \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x^2 - 3x)(\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+6) - 9}{x(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x(\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \frac{1}{3(\sqrt{3+6} + 3)} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-7}) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-7})(\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-7})}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-7}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{10}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-7}} = 0.$$

39.33. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 8x - \sin 2x}$.

Решение. Здесь используется первый замечательный предел в обобщенном виде:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1.$$

$$\text{а) } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 8x - \sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x \cos 5x}{2\sin 3x \cos 5x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

40.10. б) Воспользовавшись определением, найти производную функции $y = \frac{1}{x^2}$.

Решение. 1) Выберем фиксированную точку $x \neq 0$; в этой точке $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2) Дадим аргументу приращение Δx, но так, что $x + \Delta x \neq 0$; в этой точке $f(x + \Delta x) = \frac{1}{(x + \Delta x)^2}$.

3) $\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-2x - \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2} = -\frac{2}{x^3}$. Значит, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

40.11. Воспользовавшись определением, найти производную функции в точке x_0 или доказать, что она не существует:

а) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -2x + 3, \text{ если } x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0;$

г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1; \end{cases} \quad x_0 = 1.$

Решение. а) Аргументу можно дать либо положительное, либо отрицательное приращение. Если $\Delta x > 0$, то работать следует по первой строке задания функции; получим: $\Delta y = 3\Delta x$ и в пределе для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ получим 3. Если $\Delta x < 0$, то работать следует по второй строке задания функции; получим: $\Delta y = -2\Delta x$ и в пределе для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ получим -2. Пределы разные, значит, производная в точке 0 не существует.

На самом деле, здесь все ясно apriori, поскольку заданная функция разрывна в точке $x = 0$ (рис. 86), а потому недифференцируема. Разрыв можно было обнаружить сразу, без построения графика, и сделать вывод о несуществовании производной в заданной точке.

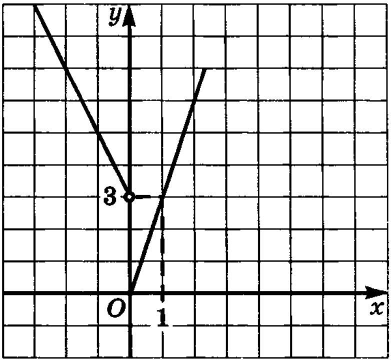


Рис. 86

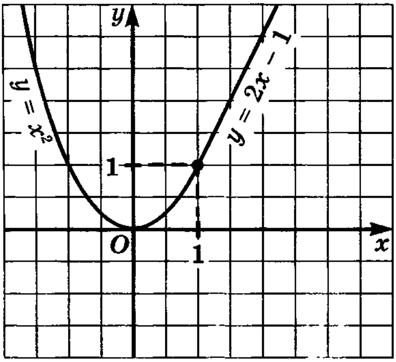


Рис. 87

г) Аргументу можно дать либо положительное, либо отрицательное приращение. Если $\Delta x > 0$, то работать следует по второй строке задания функции; получим: $\Delta y = 2\Delta x$ и в пределе для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ получим 2. Если $\Delta x < 0$, то работать следует по первой строке задания функции; получим: $\Delta y = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$ и в пределе для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ получим 2. Предел один и тот же. Кроме того, функция непрерывна в точке $x = 1$, значит, производная в этой точке существует и равна 2.

График функции представлен на рисунке 87. Видно, как после точки (1; 1) парабола плавно, без излома перешла в прямую. Эта прямая — касательная к параболе $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Фактически здесь речь идет об односторонних пределах. Строго говоря, в учебнике об этом ничего не сказано, поэтому решение основано на интуитивном понимании — потому-то пример и отнесен к числу примеров повышенной трудности.

§ 41

41.36. б) Существует ли производная функции $y = |x^2 - 5|x| + 6|$ в указанных точках: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$?

Решение. Можно построить график функции и всю необходимую информацию извлечь из геометрической модели. График строится в несколько шагов:

1) строим параболу $y = x^2 - 5x + 6$; 2) оставив ту часть параболы, которая лежит правее оси ординат, и добавив симметричную ей относительно оси ординат ветвь, получаем график функции $y = x^2 - 5|x| + 6$; 3) осталось только отобразить симметрично отно-

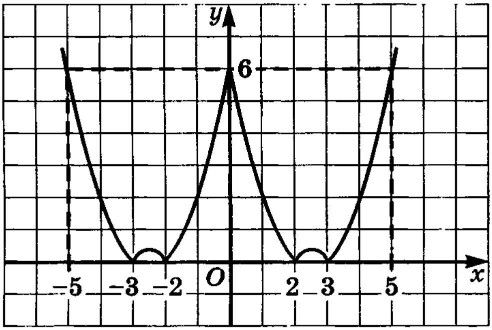


Рис. 88

сительно оси абсцисс те участки графика, построенного на втором шаге, которые лежат ниже оси абсцисс (рис. 88).

Точки $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ — точки излома графика, в этих точках касательную к графику провести нельзя, значит, производная не существует. В точке $x_2 = 2{,}5$ к графику можно провести касательную, причем она будет параллельна оси абсцисс. Значит, можно не только утверждать, что в этой точке производная существует, но и указать ее значение: $y' = 0$.

41.60. Задать аналитически функцию $y = f(x)$, если графиком ее производной является:

а) парабола (рис. 89); б) ломаная (рис. 90).

Решение. а) Парабола, судя по чертежу, проходит через точки (0; −3), (1; −2) и (−1; −2), ее уравнение $y = x^2 - 3$. Если $f'(x) = x^2 - 3$, то $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ (общий вид: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + a$).

Итак, $y = \frac{x^3}{3} - 3x$.

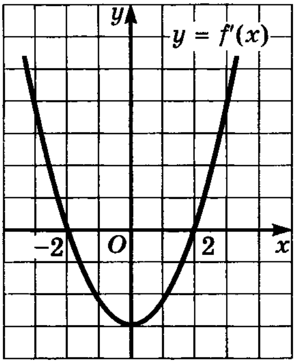


Рис. 89

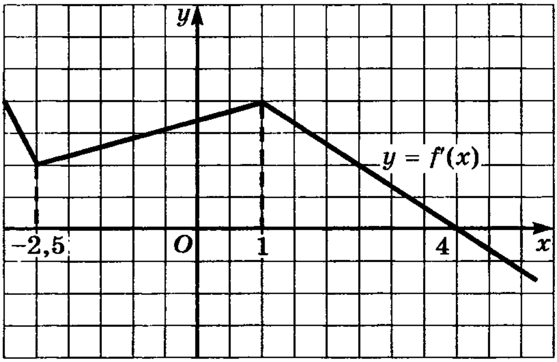


Рис. 90

б) Зная две точки, через которые проходит прямая линия, нетрудно составить ее уравнение. Это дает возможность задать производную как кусочную функцию:

$$y' = \begin{cases} -2x - 4, \ x < -2{,}5, \\ \frac{2}{7}x + \frac{12}{7}, \ -2{,}5 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, \ x > 1. \end{cases}$$

Значит,

$$y = \begin{cases} -x^2 - 4x + a, \ x < -2{,}5, \\ \frac{1}{7}x^2 + \frac{12}{7}x + b, \ -2{,}5 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + c, \ x > 1. \end{cases}$$

Осталось значения констант a, b, c подобрать так, чтобы функция была непрерывна в стыковых точках, иначе на графике производной придется в стыковых точках сделать проколы. Один из возможных вариантов: $a = 12\frac{5}{14}$, $b = 7$, $c = 6\frac{11}{21}$ (значение, например, для параметра b взято наугад: $b = 7$).

41.62. При каких значениях a и b функция

$$y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b, \text{ если } x > 1: \end{cases}$$

а) непрерывна на всей числовой прямой;

б) дифференцируема на всей числовой прямой?

Решение. Функция явно непрерывна и дифференцируема во всех точках числовой прямой как при $x < 1$, так и при $x > 1$. Специального рассмотрения требует лишь «точка стыка» — точка $x = 1$.

а) При $x = 1$ значение функции вычисляется по первой строке, оно равно -1. Для непрерывности функции в этой точке должно выполняться равенство $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + ax + b) = -1$; получаем: $1 + a + b = -1$, т. е. $a + b = -2$. При этом условии заданная функция непрерывна на всей числовой прямой.

б) Имеем: $y' = \begin{cases} 2, \text{ если } x < 1, \\ 2x + a, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Функция будет дифференцируема в проверяемой точке $x = 1$, если $2 = 2 \cdot 1 + a$, т. е. при $a = 0$. Но нельзя забывать о полученном в пункте а) условии $a + b = -2$, откуда получаем, что $b = -2$.

Итак, функция дифференцируема на всей числовой прямой, если $a = 0$, $b = -2$.

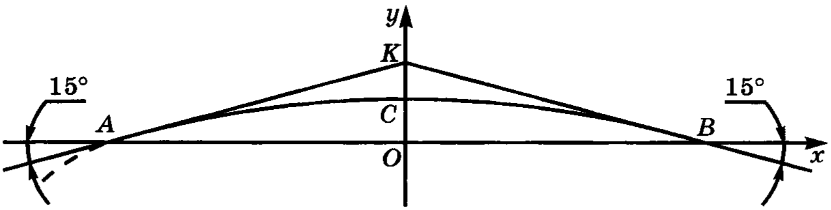


Рис. 91

41.69. Строится мост параболической формы, соединяющий пункты A и B, расстояние между которыми равно 200 м. Въезд на мост и съезд с моста должны быть прямолинейными участками пути, эти участки направлены к горизонту под углом 15°. Указанные прямые должны быть касательными к параболе. Составить уравнение профиля моста в заданной системе координат (рис. 91).

Решение. На рисунке 91 ACB — парабола (профиль моста), точки A и B имеют координаты $A(-100;\ 0)$, $B(100;\ 0)$. Прямые AK и KB касаются параболы в точках A и B, их угловые коэффициенты равны, соответственно, $\operatorname{tg} 15°$ и $\operatorname{tg} 165°$. Будем искать уравнение параболы в виде: $y = ax^2 + c$, где $a < 0$, $c > 0$. Тогда $y' = 2ax$, причем $y'(-100) = \operatorname{tg} 15°$. Значит, $2a \cdot (-100) = \operatorname{tg} 15°$, откуда находим:

$$a = -\frac{\operatorname{tg} 15°}{200}.$$

Учтем, что $y(-100) = 0$. Подставив в уравнение параболы значения $x = -100$, $y = 0$, получим:

$$0 = 10\,000a + c;$$

$$c = -10\,000a = -10\,000 \cdot \left(-\frac{\operatorname{tg} 15°}{200}\right) = 50 \operatorname{tg} 15°.$$

Коэффициенты a и c найдены, с их помощью составляем уравнение профиля моста:

$$y = -\frac{\operatorname{tg} 15°}{200}x^2 + 50 \operatorname{tg} 15°.$$

41.70. а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 60°?

б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 45°?

Решение. В этой задаче, как и в предыдущей, речь идет о касательных к графику функции. Составлять уравнение касательной ни в той, ни в другой задаче не надо, достаточно использо-

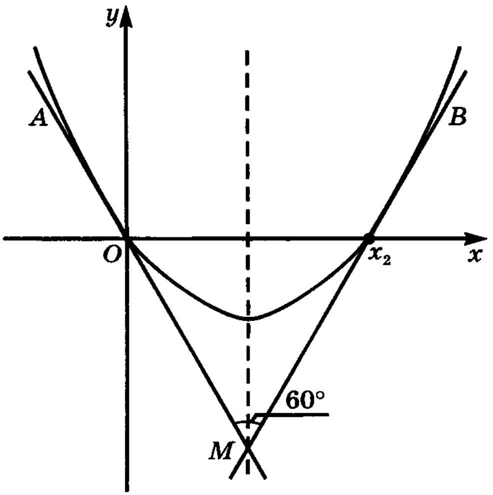


Рис. 92

вать (что более важно на данном этапе) геометрический смысл производной, т. е. угловые коэффициенты касательных.

а) Графиком функции является парабола с ветвями, направленными вверх, пересекающая ось x в двух точках (случай $a = 0$ нас явно не устраивает): $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{|a|}{4}$; впрочем, значимо лишь то, что $x_2 > 0$ (рис. 92). Касательные AM и BM пересекаются под углом 60° в точке M, лежащей на оси параболы, причем возможны два случая: либо $\angle AMB = 60°$, либо смежный угол равен 60°.

В первом случае угол между касательной AO и осью x равен 120°, следовательно, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 120°$, т. е. он равен $-\sqrt{3}$.

Далее имеем: $y' = 8x - |a|$, $y'(0) = -|a|$. Таким образом, получаем, что $-\sqrt{3} = -|a|$, т. е. $a = \pm\sqrt{3}$.

Во втором случае $\angle AMB = 120°$, поэтому угол между касательной AO и осью x равен 150°. Значит, угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg} 150°$, т. е. он равен $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, получаем, что $-\frac{\sqrt{3}}{3} = -|a|$, т. е. $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Графиком функции является парабола с ветвями, направленными вверх, пересекающая ось x в двух точках: $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$ (рис. 93). Касательные AM и BM пересекаются под углом 45° в точке M, лежащей на оси параболы, причем возможны два случая: либо $\angle AMB = 45°$, либо смежный угол равен 45°.

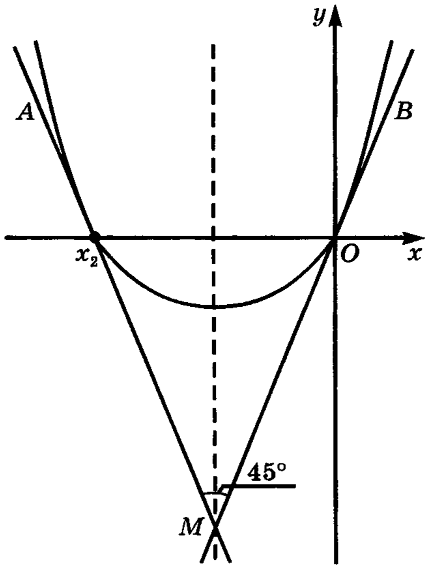


Рис. 93

В первом случае угол между касательной BO и осью x равен 67,5°, следовательно, угловой коэффициент касательной равен tg 67,5°. Выполним необходимые вычисления:

$$\operatorname{tg} 67{,}5^\circ = \frac{\sin 67{,}5^\circ}{\cos 67{,}5^\circ} = \frac{2\sin 67{,}5^\circ \cos 67{,}5^\circ}{2\cos 67{,}5^\circ \cos 67{,}5^\circ} = \frac{\sin 135^\circ}{1 + \cos 135^\circ} = \sqrt{2} + 1.$$

Далее, имеем $y' = 2x + |a|$, $y'(0) = |a|$. Таким образом, получаем, что $\sqrt{2} + 1 = |a|$, т. е. $a = \pm(\sqrt{2} + 1)$.

Во втором случае $\angle AMB = 135^\circ$, поэтому угол между касательной BO и осью x равен 22,5°. Значит, угловой коэффициент касательной равен tg 22,5°, т. е. $\sqrt{2} - 1$. Таким образом, получаем, что $\sqrt{2} - 1 = |a|$, т. е. $a = \pm(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\pm(\sqrt{2} + 1)$, $\pm(\sqrt{2} - 1)$ (короче это можно записать так: $\pm\sqrt{2} \pm 1$).

§ 42

В этом параграфе знаком ● отмечены номера 42.8, 42.16, 42.34 и 42.38, которые, на самом деле, особой трудности не представляют (по крайней мере для учителя математики). Этот знак указывает лишь на абсолютную необязательность указанных номеров, особенно при недостаточном количестве часов на изучение курса алгебры и начал анализа.

43.47. а) Через точку $B(-2;\ 3)$ провести касательную к графику функции

$$y = \sqrt{3-x}.$$

Решение. Используя общий вид уравнения касательной $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x = a$:

$$y = \sqrt{3-a} - \frac{1}{2\sqrt{3-a}}(x-a). \qquad (1)$$

Подставив в это уравнение значения $x = -2$, $y = 3$, получим иррациональное уравнение

$$3 = \sqrt{3-a} - \frac{1}{2\sqrt{3-a}}(-2-a),$$

решив которое находим: $a_1 = 2$, $a_2 = -22$. Если $a = 2$, то уравнение (1) примет вид $y = -\frac{x}{2} + 2$; если $a = -22$, то уравнение (1) примет вид $y = -0{,}1x + 2{,}8$.

Аналогично решаются № 43.47 б и 43.48.

43.50. б) Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади треугольника OAB на рисунке 94; AB — касательная к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, a — абсцисса точки касания.

Составим уравнение касательной в общем виде:

$$y = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3}(x-a);$$

$$y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}. \qquad (2)$$

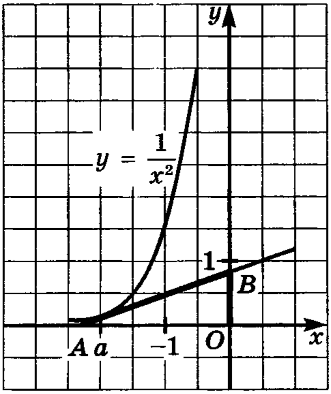


Рис. 94

Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат.

Если $x = 0$, то $y = \frac{3}{a^2}$. Следовательно, точка B имеет координаты $B\left(0;\ \frac{3}{a^2}\right)$, поэтому $OB = \frac{3}{a^2}$.

Если $y = 0$, то $x = \frac{3a}{2}$. Значит, точка A имеет координаты $A\left(\frac{3a}{2};\ 0\right)$, поэтому $AO = -\frac{3a}{2}$ (мы учли, что $a < 0$, а здесь речь идет о стороне треугольника, а не об абсциссе точки A).

По условию площадь S треугольника AOB равна $\frac{9}{8}$, следовательно,

$$\frac{1}{2}AO \cdot OB = \frac{9}{8};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-3a}{2} \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{9}{8};$$

$$a = -2.$$

Подставив это значение в уравнение (2), получим уравнение искомой касательной:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.$$

Аналогично решаются № 43.50 а и 43.51.

Замечание. К этому времени учащиеся еще не знакомы с формулой дифференцирования степенной функции. Поэтому производную функции $y = \frac{1}{x^2}$ приходится искать по правилу дифференцирования частного, а не по готовой формуле $y' = -2x^{3}$.

43.52. а) На оси y взята точка B, из нее проведены касательные к графику функции $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$. Известно, что эти касательные образуют между собой угол 90°. Найти координаты точки B.

Решение. На рисунке 95 изображены парабола $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$ и касательные к ней AB и BC, $\angle ABC = 90°$, $\angle ABO = 45°$ и $\angle BAO = 45°$. Это значит, что касательная к параболе в точке с неизвестной нам пока абсциссой a образует с положительным направлением оси x угол 45°, а потому $f'(a) = 1$, где $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$.

Имеем: $f'(x) = -x$; $f'(a) = -a$; $-a = 1$; $a = -1$ — абсцисса точки касания. Составим уравнение касательной:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1);\ y = 2{,}5 + (x + 1);\ y = x + 3{,}5.$$

Значит, $B = B(0;\ 3{,}5)$.

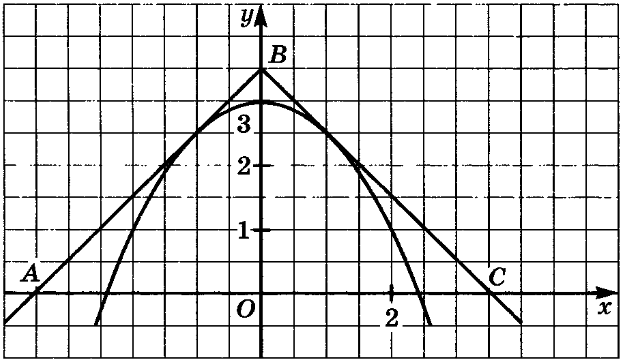


Рис. 95

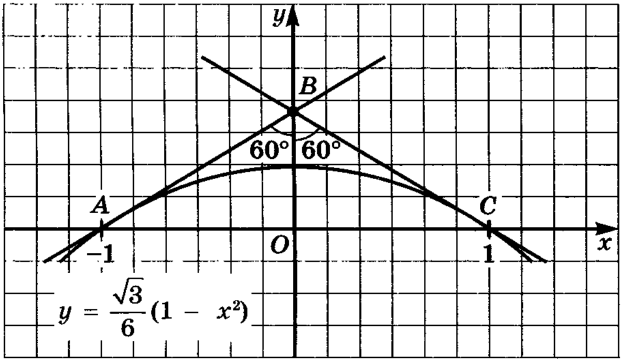


Рис. 96

43.53. б) Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом 120° в точке, лежащей на оси y (рис. 96).

Решение. Касательная BC составляет с осью абсцисс угол 150°; $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — это угловой коэффициент касательной BC.

Угловой коэффициент касательной AB равен, соответственно, $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Имеем: $y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Из уравнения $\frac{-\sqrt{3}}{3}x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ находим: $x = 1$ — это абсцисса точки касания прямой BC и параболы. В точке $x = 1$ заданная функция принимает значение 0; отсюда следует, что точка касания лежит на оси абсцисс, поэтому точкой касания является точка C (именно так и сделан чертеж).

Теперь уже нетрудно составить уравнения касательных. Для BC имеем: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$; для AB имеем: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$.

Аналогично решаются № 43.53 а и 43.52.

43.54. б) Найти точку пересечения касательных к графику функции $y = x^3 + |x - 1|$, проведенных через точки с абсциссами $x = 2$, $x = -2$.

Решение. Если $x = 2$, то $|x - 1| = x - 1$ и аналитическое задание функции принимает вид $y = x^3 + x - 1$. Уравнение касательной к графику этой функции в точке $x = 2$ имеет вид $y = 13x - 17$.

Если $x = -2$, то $|x - 1| = -x + 1$ и аналитическое задание функции принимает вид $y = x^3 - x + 1$. Уравнение касательной к графику этой функции в точке $x = -2$ имеет вид $y = 11x + 17$. Две полученные прямые пересекаются в точке (17; 204).

43.55. а) При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 - px$ в точке $x = 1$ проходит через точку (2; 3)?

Решение. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке $x = 1$:

$$y = 1 - p + (3 - p)(x - 1).$$

Так как эта прямая проходит через точку (2; 3), то имеет место равенство $3 = 1 - p + (3 - p)(2 - 1)$, откуда находим: $p = \frac{1}{2}$.

43.56. а) Является ли прямая $y = 4x - 5$ касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - x - 2$? Если является, то найти координаты точки касания.

Решение. Пусть $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$. Из условия следует, что должно выполняться равенство $f'(x) = 4$, где a — возможная абсцисса точки касания. Имеем:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1;$$
$$3a^2 + 2a - 1 = 4;$$
$$a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{5}{3}.$$

Если теперь составить уравнение касательной к графику заданной функции в каждой из двух найденных точек, то окажется, что в точке $a = 1$ как раз и получится $y = 4x - 5$. Значит, точка касания имеет координаты (1; −1).

43.58. а) При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x + 1}$?

Решение. Из условия следует, что должно выполняться равенство $f'(b) = a$, где $f(x) = \sqrt{4x+1}$, b — абсцисса точки касания. Значит, a и b связаны между собой равенством

$$\frac{2}{\sqrt{4b+1}} = a. \qquad (3)$$

Составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке b:

$$y = f(b) + f'(b)(x - b);$$

$$y = \sqrt{4b+1} + \frac{2}{\sqrt{4b+1}}(x - b);$$

$$y = ax + \left(\sqrt{4b+1} - \frac{2b}{\sqrt{4b+1}}\right).$$

Из условия следует, что должно выполняться равенство $\sqrt{4b+1} - \frac{2b}{\sqrt{4b+1}} = 1$. Решив это уравнение, получим $b = 0$. Тогда из (3) получаем, что $a = 2$.

43.59. а) К графику функции $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ проведена касательная, параллельная прямой $y - 4x - 1 = 0$. Найти ординату точки касания.

Решение. $y' = 4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\cos 2x$. Абсцисса интересующей нас точки касания удовлетворяет уравнению $y' = 4$. Имеем:

$$4\sin x\cos x + 2\sqrt{3}\cos 2x = 4;$$

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + \left(2-\sqrt{3}\right) = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $x = \operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)$ — абсцисса точки касания. Чтобы найти ординату точки касания, преобразуем выражение, задающее функцию:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\operatorname{tg} x\cos^2 x\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

Ответ: 1.

43.60. б) Найти наибольшее отрицательное значение x, при котором касательные к графикам функций $y = 2 - 14\sin 3x$ и $y = 6\sin 7x$ параллельны.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$(2 - 14\sin 3x)' = (6\sin 7x)'.$$

Имеем последовательно:

$$-42\cos 3x = 42\cos 7x;\ \cos 3x + \cos 7x = 0;\ 2\cos 5x\cos 2x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

Наибольшее отрицательное значение в первой серии получается при $n = -1$, оно равно $-\frac{\pi}{10}$. Наибольшее отрицательное значение во второй серии получается при $k = -1$, оно равно $-\frac{\pi}{4}$. Из найденных двух чисел наибольшим является первое.

Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

43.61. б) Точка A с абсциссой -3 и точка B с абсциссой 3 принадлежат графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$. Найти сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB.

Решение. Найдем координаты точек A и B: $A = A(-3;\ 11)$, $B = B(3;\ -103)$. Полезно объяснить учащимся, что для нахождения углового коэффициента прямой, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, не обязательно составлять уравнение прямой, можно воспользоваться легко выводимой формулой $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. В данном случае $k = \frac{-103 - 11}{3 + 3} = -19$.

Интересующие нас касательные должны иметь угловой коэффициент -19. Из уравнения $\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28\right)' = -19$ получаем: $x^2 - 4x - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два действительных корня, их сумма по теореме Виета равна 4.

Ответ: 4.

43.62. а) Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = x^2 + 5x + 4$.

Решение. Здесь можно обойтись без производных. Касательную к параболе, как и касательную к окружности, можно определить не только как предельное положение секущей, но и как прямую, не являющуюся осью параболы и имеющую с параболой одну общую точку. Значит, если $y = kx + m$ — уравнение искомой общей касательной, то одновременно должны выполняться два условия: уравнение $x^2 - x + 1 = kx + m$ имеет единственный корень, и уравнение $x^2 + 5x + 4 = kx + m$ имеет единственный корень. Значит, дискриминанты обоих квадратных уравнений равны нулю. Для первого уравнения находим: $D_1 = (k + 1)^2 - 4(1 - m)$; для второго — $D_2 = (5 - k)^2 - 4(4 - m)$. Остается решить систему уравнений $\begin{cases} k^2 + 2k + 4m - 3 = 0, \\ k^2 - 10k + 4m + 9 = 0. \end{cases}$

Вычтя второе уравнение из первого, находим, что $k = 1$. Тогда $m = 0$, и уравнение искомой касательной имеет вид $y = x$.

43.63. а) Под каким углом пересекаются кривые $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$?

Решение. Кривые пересекаются в точке (1; 1). В этой точке для первой функции $y' = -1$, а для второй — $y' = \frac{1}{2}$. Угол между кривыми — это угол между касательными к кривым в точке пересечения кривых. На рисунке 97 искомый угол обозначен буквой γ.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = -1,\ \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2},\ \alpha = \beta + \gamma,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -3.$$

Значит, $\gamma = \pi - \operatorname{arctg} 3$.

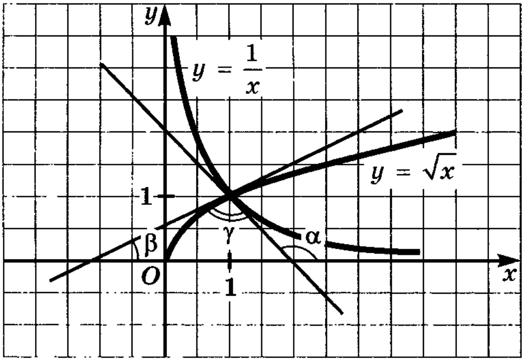


Рис. 97

Обычно предпочитают углом между кривыми считать тот из смежных углов между касательными, который является острым. Поэтому в данном случае целесообразнее считать искомый угол равным arctg 3.

43.65. а) Из какой точки оси y кривая $y = \sqrt{1 + x^2}$ видна под углом 120°?

б) Найти множество точек координатной плоскости, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

Решение. а) Сделаем схематический чертеж. Функция $y = \sqrt{1 + x^2}$ возрастает при $x > 0$ и является четной, ее график симметричен относительно оси y и проходит через точку (0; 1). Далее $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, значит, $y' = 0$ при $x = 0$, т. е. в этой точке касательная к графику функции параллельна оси x. График функции изображен на рисунке 98.

Пусть A — точка оси y, из которой построенная кривая видна под углом 120°, т. е. касательные к кривой, проведенные из точки A, образуют между собой угол 120°. Это равносильно тому, что касательная AC составляет с положительным направлением оси x угол 30°, ее угловой коэффициент k равен tg 30°, т. е. $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Значит, абсцисса a точки C удовлетворяет условию $f'(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, где $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Решив уравнение $\dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, получим: $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Составим уравнение касательной к графику заданной функции в найденной точке a:

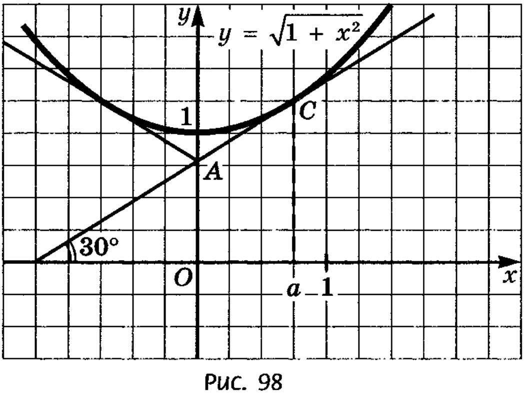


Рис. 98

$$y = f(a) + f'(a)(x - a);$$

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Отсюда следует, что $A = A\left(0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

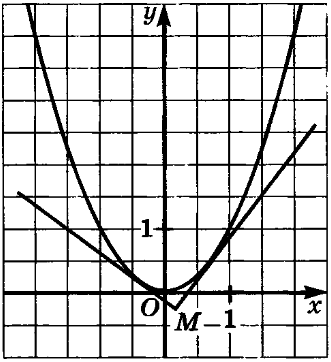


Рис. 99

б) Нас интересуют точки координатной плоскости, обладающие следующим свойством: из каждой такой точки можно провести к заданной параболе две касательные (отсюда ясно, что такие точки могут располагаться лишь в нижней полуплоскости), причем угол между этими касательными — прямой (рис. 99).

Пусть $M(a; b)$ — одна из таких точек; здесь, как указано выше, $b < 0$. Составим общий вид уравнения касательной: $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$; здесь x_0 — абсцисса точки касания, а $2x_0$— угловой коэффициент касательной.

Касательная проходит через точку $M(a; b)$; значит,

$$b = x_0^2 + 2x_0(a - x_0);\ \ b = 2ax_0 - x_0^2;\ x_0 = a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Итак, мы имеем для двух касательных значения их угловых коэффициентов: $k_1 = 2a + 2\sqrt{a^2 - b}$, $k_2 = 2a - 2\sqrt{a^2 - b}$. Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$. Значит, $\left(2a + 2\sqrt{a^2 - b}\right)\left(2a - 2\sqrt{a^2 - b}\right) = -1$, откуда находим: $b = -\frac{1}{4}$.

Значит, нас устраивают точки вида $M\left(a; -\frac{1}{4}\right)$, т. е. точки прямой $y = -\frac{1}{4}$. Это и есть искомое множество точек.

43.66. а) Найти значение параметра a, при котором касательная к графику функции $y = x^3 + a^2x - a$ в точке $x = -1$ проходит через точку $M(1; 7)$.

Решение. Пусть $f(x) = x^3 + a^2x - a$; тогда $f(-1) = -1 - a^2 - a$, $f'(-1) = 3 + a^2$.

Составим уравнение касательной:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1);$$
$$y = -1 - a^2 - a + (3 + a^2)(x + 1).$$

По условию эта касательная проходит через точку $M(1; 7)$, значит, $7 = -1 - a^2 - a + (3 + a^2)(1 + 1)$, откуда получаем: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$.

43.67. а) Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $x = 3$.

Решение. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$; тогда $f(3) = 2$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$, $f'(3) = \frac{3}{2}$.

Составим уравнение касательной:

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3);$$

$$y = 2 + \frac{3}{2}(x - 3);$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

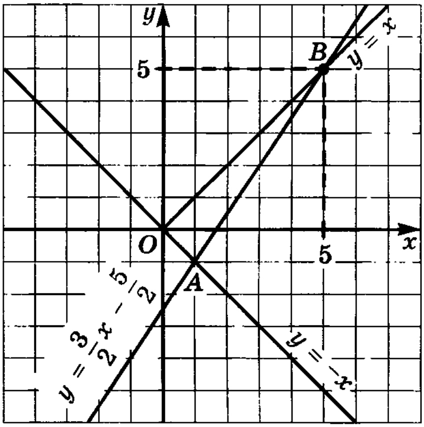


Рис. 100

Прямоугольный треугольник OAB, площадь которого надо найти, изображен на рисунке 100. Найдем координаты точек A и B. Из уравнения $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = -x$ находим: $x = 1$; значит, $A = A(1; -1)$. Из уравнения $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = x$ находим: $x = 5$; значит, $B = B(5; 5)$.

Далее получаем: $OA = \sqrt{2}$, $OB = 5\sqrt{2}$, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 5$.

Ответ: 5.

43.68. б) Прямая $y = 7x - 10$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = 2$. Найти значения коэффициентов a, b, c, если известно, что парабола пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$; тогда $f(2) = 4a + 2b + c$, $f'(x) = 2ax + b$, $f'(2) = 4a + b$.

Составим уравнение касательной:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2);$$

$$y = 4a + 2b + c + (4a + b)(x - 2);$$

$$y = (4a + b)x + (c - 4a).$$

Из условия следует, что $(4a + b)x + (c - 4a) = 7x - 10$. Это значит, что $4a + b = 7$ и $c - 4a = -10$. Кроме того, известно, что парабола пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$. Это значит, что $f(1) = 0$, т. е. $a + b + c = 0$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 4a + b = 7, \\ c - 4a = -10, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$.

43.69. Доказать, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ и осями координат, имеет постоянную площадь, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника. Рассмотрев чертеж к задаче, придумать геометрический способ построения касательной к гиперболе.

Решение. Пусть $f(x) = \frac{a^2}{x}$ и $x = b$ — абсцисса точки касания. Тогда $f(b) = \frac{a^2}{b}$, $f'(b) = -\frac{a^2}{b^2}$. Составим уравнение касательной:

$$y = f(b) + f'(b)(x - b);$$

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}(x - b);$$

$$y = -\frac{a^2}{b^2}x + \frac{2a^2}{b}. \qquad (4)$$

Эта касательная отсекает от осей координат треугольник OAB (рис. 101). Если положить в уравнении (4) $y = 0$, получим: $x = 2b$; если положить в уравнении (4) $x = 0$, получим: $y = \frac{2a^2}{b}$. Значит, $OA = 2b$, $OB = \frac{2a^2}{b}$, $S = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \frac{2a^2}{b} = 2a^2$. Таким образом, площадь треугольника OAB не зависит от выбора точки касания $x = b$, она всегда равна $2a^2$.

Если опустить из точки M перпендикуляр MP на сторону OA, то заметим, что P — середина стороны OA (напомним, что $OP = b$, а $OA = 2b$); значит, M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника OAB, т. е. центр описанной около треугольника окружности.

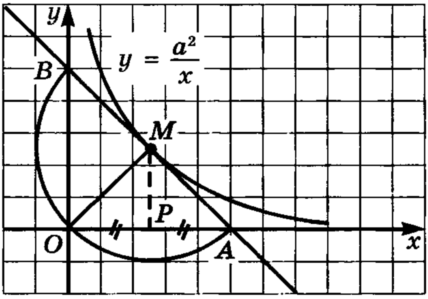


Рис. 101

Опираясь на решенную задачу, можно предложить учащимся следующий геометрический способ построения касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$: берем произвольную точку M гиперболы и описываем окружность радиусом OM; эта окружность пересекает оси координат в точках A и B, тогда прямая AB — искомая касательная.

43.70. Доказать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке $x = a$ делит пополам отрезок $[0;\ a]$ оси абсцисс. Рассмотрев чертеж к задаче, придумать геометрический способ построения касательной к параболе. Обобщить этот результат и этот способ построения касательной на любую степенную функцию $y = x^n$, где n — натуральное число, большее 2.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$ и $x = a$ — абсцисса точки касания. Тогда $f(a) = a^2$, $f'(a) = 2a$. Составим уравнение касательной:

$$y = a^2 + 2a(x - a);$$
$$y = 2ax - a^2.$$

Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке $x = \frac{a}{2}$, что и требовалось доказать.

Можно предложить учащимся следующий геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$: берем произвольную точку $M(a;\ a^2)$ параболы и проводим прямую через точку M и точку $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ оси абсцисс; эта прямая — искомая касательная (рис. 102).

Задача допускает обобщение для любой степенной функции $y = x^n$, где $n \in N$, $n \geqslant 2$. Имеем: $f(x) = x^n$ и $x = a$ — абсцисса точки касания. Тогда $f(a) = a^n$, $f'(a) = na^{n-1}$. Составим уравнение касательной:

$$y = a^n + na^{n-1}(x - a);$$
$$y = na^{n-1}x + (1 - n)a^n.$$

Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке $x = \frac{(n-1)a}{n}$.

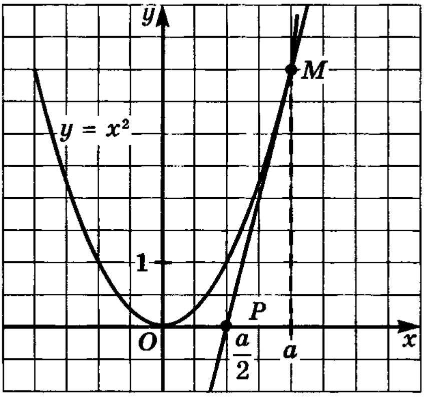


Рис. 102

Если, например, нужно провести касательную к кубической параболе $y = x^3$, то берем на ней произвольную точку $M(a;\ a^3)$ и проводим прямую через точку M

и точку $\left(\frac{2a}{3};\ 0\right)$ оси абсцисс; эта прямая — искомая касательная. Для функции $y = x^4$ на оси абсцисс выбирается точка $\left(\frac{3a}{4};\ 0\right)$ и т. д.

§ 44

44.34. При каких значениях параметра a функция $y = x^3 - 3x$: а) убывает на отрезке $[a + 1;\ a + 3]$; б) возрастает на отрезке $\left[a - \frac{1}{2};\ 2a + 2\right]$?

Решение. а) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Производная отрицательна на $(-1;\ 1)$, значит, функция убывает на отрезке $[-1;\ 1]$. Этот отрезок, равно как заданный в условии отрезок $[a + 1;\ a + 3]$, имеет длину 2, значит, отрезки должны совпадать, что возможно лишь при $a = -2$.

б) Из условия следует, что должно выполняться неравенство $a - \frac{1}{2} < 2a + 2$, т. е. $a > -2{,}5$. Производная заданной функции положительна при $a < -1$ или при $a > 1$. Функция будет возрастать на отрезке $\left[a - \frac{1}{2};\ 2a + 2\right]$, если этот отрезок принадлежит лучу $(-\infty;\ -1]$ или лучу $[1;\ +\infty)$. Первый случай имеет место, если $2a + 2 \leqslant -1$, т. е. при $a \leqslant -1{,}5$. Второй случай имеет место, если $a - \frac{1}{2} \geqslant 1$, т. е. при $a \geqslant 1{,}5$.

Ответ: а) $a = -2$; б) $-2{,}5 < a \leqslant -1{,}5$ или $a \geqslant 1{,}5$.

44.58. б) Исследовать на экстремум функцию $y = |x^3 - 8| + |x^3 - 1| - x^2$.

Решение. Если $x \geqslant 2$, то $x^3 \geqslant 8$, $|x^3 - 8| = x^3 - 8$, $|x^3 - 1| = x^3 - 1$; значит, $y = 2x^3 - x^2 - 9$. Если $1 \leqslant x < 2$, то $x^3 < 8$, $|x^3 - 8| = -(x^3 - 8)$, $x^3 \geqslant 1$, $|x^3 - 1| = x^3 - 1$; значит, $y = 7 - x^2$. Если $x < 1$, то $x^3 < 8$, $|x^3 - 8| = -(x^3 - 8)$, $x^3 < 1$, $|x^3 - 1| = -(x^3 - 1)$; значит, $y = -2x^3 - x^2 + 9$. Таким образом, речь идет об исследовании на экстремум кусочной функции $y = \begin{cases} 2x^3 - x^2 - 9, \text{ если } x \geqslant 2, \\ 7 - x^2, \text{ если } 1 \leqslant x < 2, \\ -2x^3 - x^2 + 9, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

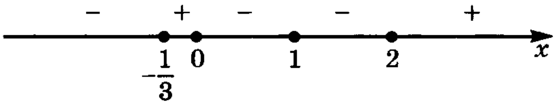


Рис. 103

Найдем производную функции $y' = \begin{cases} 6x^2 - 2x, \text{ если } x > 2, \\ -2x, \text{ если } 1 < x < 2, \\ -6x^2 - 2x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

Обратите внимание на «точки стыка» 1 и 2, чаще всего у кусочной функции такие точки являются критическими, в них производная чаще всего не существует (речь идет, разумеется, только о таких «точках стыка», в которых функция непрерывна).

Найдем стационарные точки. Из уравнения $6x^2 - 2x = 0$ находим: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Ни одна из этих точек не удовлетворяет условию $x > 2$. Из уравнения $-2x = 0$ получаем $x = 0$; это значение не удовлетворяет условию $1 < x < 2$. Наконец, из уравнения $-6x^2 - 2x = 0$ находим: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Обе эти точки удовлетворяют условию $x < 1$.

Итак, имеем стационарные точки $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ и критические точки $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ (в этих точках заданная функция непрерывна). Отметив их на числовой прямой и расставив знаки производной на полученных промежутках (рис. 103), приходим к следующему выводу: $x = -\frac{1}{3}$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8\frac{26}{27}$; $x = 0$ — точка максимума, причем $y_{\max} = 9$; $x = 2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 3$.

44.71. а) Решить уравнение $3\cos \pi x + 5\sin \frac{\pi x}{2} + 18x = 43 - x^5 - 22x^3$.

Решение. Пусть $f(x) = 3\cos \pi x + 5\sin \frac{\pi x}{2} + 18x$, $g(x) = 43 - x^5 - 22x^3$. Докажем, что функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает.

Имеем: $f'(x) = -3\pi \sin \pi x + \frac{5\pi}{2}\cos \frac{\pi x}{2} + 18$, $g'(x) = -5x^4 - 66x^2$.

Ясно, что $g'(x) \leqslant 0$, значит, функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой. Далее, $f'(x) = -3\pi \sin \pi x + \frac{5\pi}{2}\cos \frac{\pi x}{2} + 18 \geqslant 18 - 3\pi -$

$-\frac{5\pi}{2} = \frac{36 - 11\pi}{2} > 0$. Значит, функция $y = f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

Поскольку функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Замечаем, что $x = 1$ удовлетворяет заданному уравнению, значит, это единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

44.73. а) Доказать тождество

$$\arccos\sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin x, \text{ если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала проверим концевые точки. Если $x = -1$, то $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arccos\sqrt{1 - (-1)^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $-\arcsin x = -\arcsin(-1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; значит, $\arccos\sqrt{1 - x^2} = -\arcsin x$.

Если $x = 0$, то $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arccos\sqrt{1 - 0^2} = \arccos 1 = 0$; $\arcsin x = \arcsin 0 = 0$; значит, $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$.

Если $x = 1$, то $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arccos\sqrt{1 - 1^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; значит, $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$.

Пусть теперь $0 < x < 1$, $f(x) = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \arcsin x$. Имеем: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Значит, $f'(x) = g'(x)$, а потому $f(x) = g(x) + C$. Чтобы найти значение константы C, дадим переменной x некоторое значение из интервала $(0; 1)$, например $x = \frac{1}{2}$. Тогда $C = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$. Имеем: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Значит, $C = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$. Итак, на $(0;1)$ выполняется тождество $f(x) = g(x)$.

Аналогично устанавливается, что на интервале $(-1; 0)$ выполняется тождество $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$.

Таким образом, заданное тождество выполняется для любых x из отрезка $[-1; 1]$.

44.75. Доказать неравенство:

а) $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$, если $x > \frac{2}{3}$; б) $2\sqrt{x} \geqslant 3 - \frac{1}{x}$, если $x > 0$.

Решение. а) Исследуем на монотонность функцию $y = x^2 - x^3 - \frac{1}{6}$.

Имеем: $y' = 2x - 3x^2 = -x(3x - 2)$; $y' < 0$ при $x > \frac{2}{3}$, значит, функция убывает на луче $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, а потому при $x > \frac{2}{3}$ значения функции меньше, чем в точке $\frac{2}{3}$.

Но в указанной точке значение рассматриваемой функции равно $-\frac{1}{54}$, т. е. меньше нуля, откуда и следует доказываемое неравенство.

б) Рассмотрим функцию $y = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$. Имеем: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$. Из уравнения $x\sqrt{x} - 1 = 0$ находим: $x = 1$ — это единственная стационарная точка функции на промежутке $(0; +\infty)$, причем точка минимума. Значит, в этой точке рассматриваемая функция достигает своего наименьшего значения, оно равно нулю. При всех остальных значениях x функция принимает положительные значения. Таким образом, $2\sqrt{x} \geqslant 3 - \frac{1}{x}$, если $x > 0$.

Заметим, что для доказательства предложенного неравенства можно использовать элементарные приемы:

$$2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x\sqrt{x} - 3x + 1}{x} = \frac{2x(\sqrt{x} - 1) - (x - 1)}{x} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(2x - \sqrt{x} - 1)}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{x} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2(2\sqrt{x} + 1)}{x}.$$

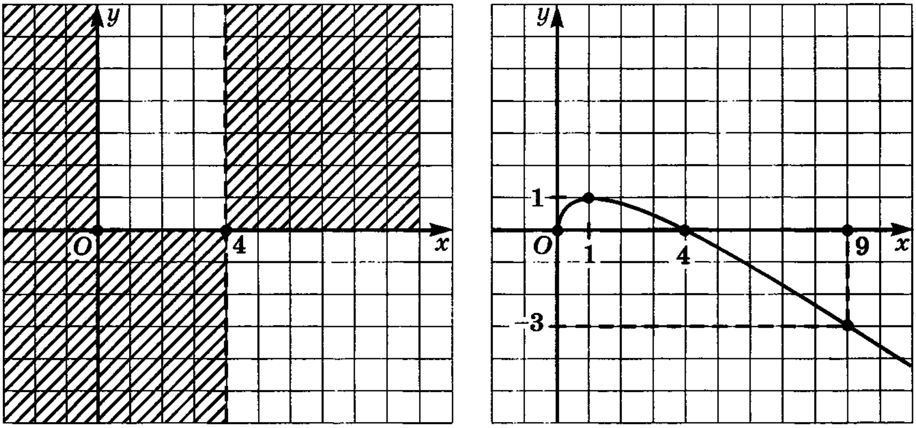
Полученное выражение неотрицательно при любых $x > 0$.

45.8. Построить график функции:

а) $y = 2\sqrt{x} - x$; б) $y = \sqrt{x+4} + \frac{2}{3}\sqrt{9-3x}$.

Решение. а) $D(f) = [0; +\infty)$. Точек разрыва нет, нули функции: $x = 0$, $x = 4$; на $(0; 4)$ функция положительна, на $(4; +\infty)$ — отрицательна. Первое представление о графике получено — см. рисунок 104 *а*. Уже ясно, что на $(0; 4)$ функция имеет точку максимума. Найдем производную: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$; $y' = 0$ при $x = 1$. Итак, $x = 1$ — точка максимума, причем $y_{\max} = 1$. Выберем еще одну контрольную точку $(9; -3)$ и построим график функции (рис. 104 *б*). Следует обратить внимание учащихся на поведение графика в точке $(0; 0)$: график касается оси ординат.

б) $D(f) = [-4; 3]$, функция на этом отрезке принимает только положительные значения, причем $f(-4) = \frac{2}{3}\sqrt{21} \approx 7$, $f(3) = \sqrt{7} \approx 2{,}7$. Найдем производную: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{\sqrt{9-3x}}$; $y' = 0$ при $x = -1$. Вычислим значение функции в точке -1: $f(-1) = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{12} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4$. Итак, $x = -1$ — точка максимума, причем $y_{\max} \approx 4$. Гра-



а) б)

Рис. 104

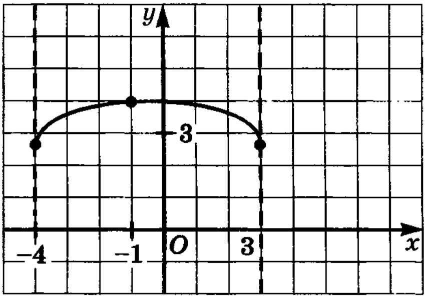


Рис. 105

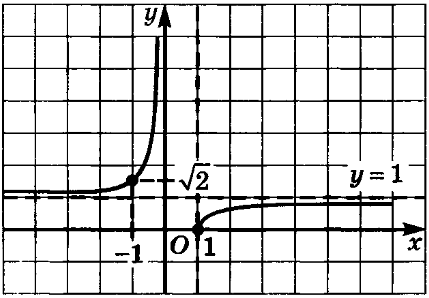


Рис. 106

фик представлен на рисунке 105. На концах области определения кривая перпендикулярна оси абсцисс.

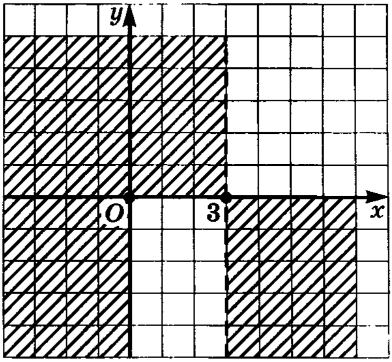
45.9. Построить график функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$; б) $y = (x-3)\sqrt{x}$.

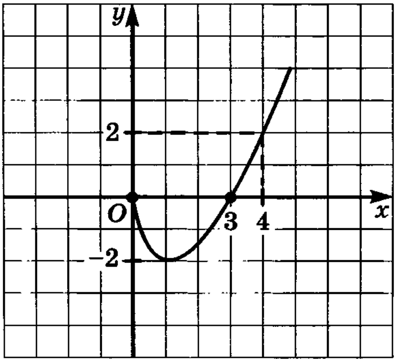
Решение. а) $D(f) = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. Функция обращается в нуль в точке $x = 1$. У графика функции есть две асимптоты: вертикальная $x = 0$ и горизонтальная $y = 1$; последнее утверждение основано на том, что $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} = 1$.

Найдем производную: $y' = \dfrac{1}{2x^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $y' > 0$ и на $(-\infty; 0)$, и на $(1; +\infty)$. Значит, функция возрастает и на $(-\infty; 0)$, и на $[1; +\infty)$. Выберем одну контрольную точку $\left(-1; \sqrt{2}\right)$ и построим график функции (рис. 106). Следует обратить внимание учащихся на поведение графика в точке $(1; 0)$: график перпендикулярен оси абсцисс.

б) $D(f) = [0; +\infty)$. Нули функции: $x = 0$, $x = 3$. На $(0; 3)$ функция отрицательна, на $(3; +\infty)$ — положительна. Первое представление о графике получено (рис. 107 *а*). Уже ясно, что на $(0; 3)$ функция имеет точку минимума. Найдем производную: $y' = \sqrt{x} + \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$; $y' = 0$ при $x = 1$. Итак, $x = 1$ — точка минимума, причем $y_{\min} = -2$. Выберем еще одну контрольную точку $(4; 2)$ и построим график функции (рис. 107 *б*). Опять-таки следует обратить внимание учащихся на поведение графика в точке $(0; 0)$: график касается оси ординат, — а также на то, что в точке $(3; 0)$, где $y' = \sqrt{3}$, график составляет с осью абсцисс угол $60°$.



а)



б)

Рис. 107

45.10. Построить график функции:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Решение. а) $D(f) = (-1;\ 1)$, причем прямые $x = -1$ и $x = 1$ служат вертикальными асимптотами графика функции. Функция нечетная, значит, ее график симметричен относительно начала координат. Нуль функции — $x = 0$. Найдем производную:

$$y' = \left(x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

Производная положительна в области определения функции, значит, функция возрастает.

График представлен на рисунке 108. Полезно обратить внимание учащихся на то, что в начале координат график составляет с осью абсцисс угол 45°, поскольку $y'(0) = 1$.

б) $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. Как и в пункте а), прямые $x = -1$ и $x = 1$ служат вертикальными асимптотами графика функции. Имеется горизонтальная асимптота $y = 1$ при $x \to +\infty$, поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 1}} = 1.$

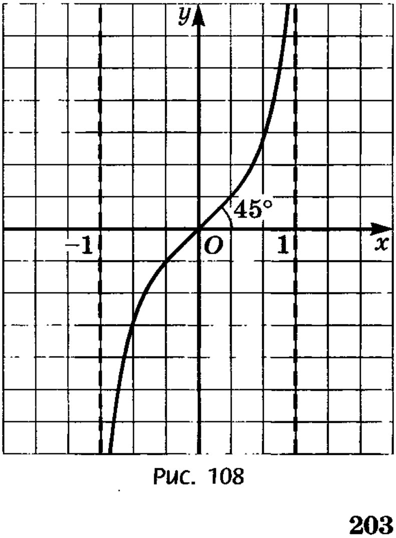


Рис. 108

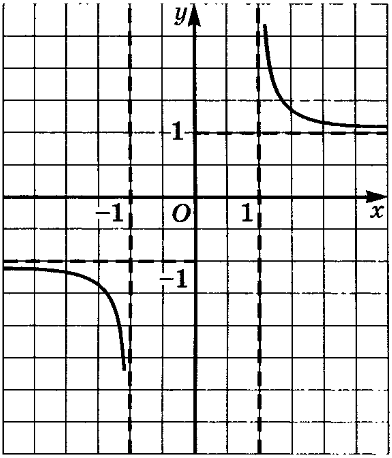


Рис. 109

Функция нечетная, значит, ее график симметричен относительно начала координат (соответственно, в силу симметричности графика, у него имеется горизонтальная асимптота $y = -1$ при $x \to -\infty$. Нулей у функции нет. Найдем производную:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

Производная отрицательна в области определения функции, значит, функция убывает и на $(-\infty; -1)$, и на $(1; +\infty)$. График представлен на рисунке 109.

45.14. Сколько корней имеет уравнение $x^3 + ax + 2 = 0$ при различных значениях параметра a?

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение к виду $a = -\dfrac{x^3+2}{x}$ и построим график функции $a = -\dfrac{x^3+2}{x}$ в системе координат xOa. Для этого учтем ряд обстоятельств.

1) Знаки функции меняются так, как показано на рисунке 110; в точке $x = -\sqrt[3]{2}$ график функции пересекает ось x.

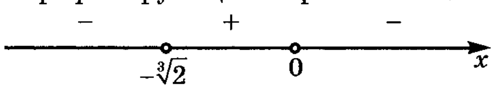


Рис. 110

2) $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции.

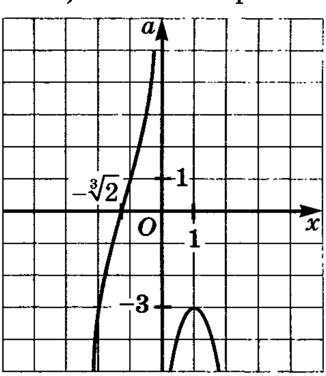


Рис. 111

3) $a' = \dfrac{2(1-x^3)}{x^2}$; $x = 1$ — точка максимума, причем в этой точке $a = -3$. Функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$.

График функции схематически представлен на рисунке 111.

С помощью построенного графика нетрудно ответить на вопрос задачи: при $a > -3$ уравнение имеет один корень, при $a = -3$ оно имеет два корня, при $a < -3$ — три корня.

45.15. Решить уравнение:

а) $3\sqrt{x+1} = -x^3 + 3x^2 + 6$;

б) $x^3 - 3x = (x+1)^6 + 2$.

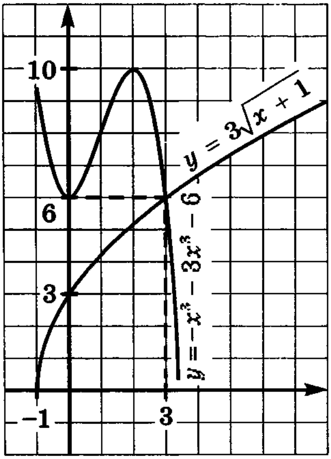


Рис. 112

Решение. а) Найдем точки экстремума функции $y = -x^3 + 3x^2 + 6$. Имеем: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$. В точке (0; 6) функция имеет минимум, а в точке (2; 10) — максимум. График функции изображен на рисунке 112. На том же рисунке представлен график функции $y = 3\sqrt{x+1}$. Замечаем, что эти графики пересекаются в точке (3; 6) (можно непосредственной подстановкой проверить, что эта точка принадлежит и тому, и другому графику). Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

б) Построив графики функций $y = x^3 - 3x$ и $y = (x+1)^6 + 2$ в одной системе координат (рис. 113), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (−1; 2). Следовательно, $x = -1$ — единственный корень уравнения.

Ответ: а) 3; б) −1.

§ 46

46.5. а) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = ||x| - 4|$ на отрезке [−3; 3].

Решение. Построив график функции $y = ||x| - 4|$ (рис. 114), убеждаемся, что на заданном отрезке $y_{наим} = 1$ (достигается в точках $x = \pm 3$), а $y_{наиб} = 4$ (достигается в точке $x = 0$).

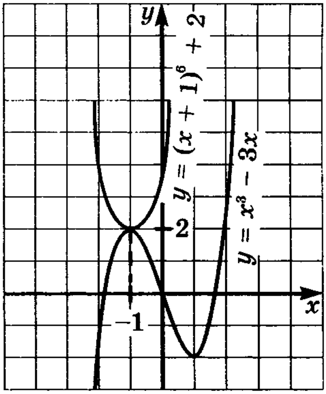


Рис. 113

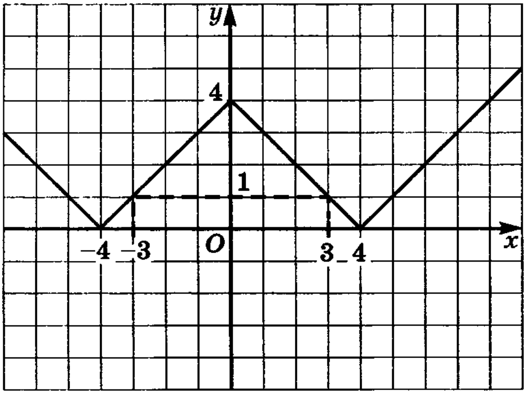


Рис. 114

46.22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0; 4]$;

б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1; 3]$.

Решение. а) Применим алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Сначала надо найти производную заданной функции, затем критические и стационарные точки, принадлежащие заданному отрезку $[0; 4]$. После этого нужно вычислить значения функции на концах отрезка и в выделенных стационарных и критических точках, и среди них найти наибольшее и наименьшее значения.

Если $x < 1$, то $|1 - x| = 1 - x$, и, значит,

$$x^2 - 4x + 5 + |1 - x| = x^2 - 4x + 5 + 1 - x = x^2 - 5x + 6.$$

Если $x \geqslant 1$, то $|1 - x| = x - 1$ и, следовательно,

$$x^2 - 4x + 5 + |1 - x| = x^2 - 4x + 5 + x - 1 = x^2 - 3x + 4.$$

Таким образом, речь идет о кусочной функции:

$$y = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, \text{ если } 0 \leqslant x < 1; \\ x^2 - 3x + 4, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Имеем:

$$y' = \begin{cases} 2x - 5, \text{ если } 0 < x < 1; \\ 2x - 3, \text{ если } 1 < x < 4. \end{cases}$$

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, значит, $x = 1$ — критическая точка.

Найдем стационарные точки. Из уравнения $2x - 5 = 0$ находим: $x = 2{,}5$, но это значение не удовлетворяет условию $0 < x < 1$. Из уравнения $2x - 3 = 0$ находим: $x = 1{,}5$; это значение удовлетворяет условию $1 < x < 4$. Следовательно, $x = 1{,}5$ — единственная стационарная точка функции на отрезке $[0; 4]$.

Составим таблицу значений функции:

x	0	1	1,5	4
y	6	2	1,75	8

В итоге имеем: $y_{\text{наим}} = 1{,}75$; $y_{\text{наиб}} = 8$.

б) Рассуждая как в задании а), получаем:

$$y = \begin{cases} -x^3 - 3x + 1, \text{ если } -1 \leqslant x < 1; \\ x^3 - 3x - 1, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Имеем:

$$y' = \begin{cases} -3x^2 - 3, \text{ если } -1 < x < 1; \\ 3x^2 - 3, \text{ если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, значит, $x = 1$ — критическая точка.

Найдем стационарные точки. Уравнение $-3x^2 - 3 = 0$ корней не имеет. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим: $x = \pm 1$; эти значения не удовлетворяют условию $1 < x < 3$. Следовательно, функция не имеет стационарных точек на отрезке $[-1; 3]$.

Составим таблицу значений функции:

x	-1	1	3
y	5	-3	17

В итоге получаем: $y_{\text{наим}} = -3$; $y_{\text{наиб}} = 17$.

46.36. а) Найти область значений функции $y = x\sqrt{x + 2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на луче $[-2; +\infty)$, поэтому область ее значений — сплошной промежуток. Найдя производную функции и приравняв ее нулю, установим, что $x = -\frac{4}{3}$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции; значит, $y_{\text{наим}} = y\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$. Сверху функция не ограничена, значит, $E(f) = \left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}; +\infty\right)$.

46.37. Найти область значений функции $y = \dfrac{-2x^2 - 2x - 38}{x^2 + 6x + 34}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, поскольку ее знаменатель — квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, а потому не имеющий действительных корней. Область значений функции — сплошной промежуток. Найдя производную функции и приравняв ее нулю, найдем стационарные точки $x = 2$, $x = -8$. Первая точка — точка максимума, причем $y_{\max} = -1$, вторая точка — точка минимума, причем $y_{\min} = -3$. Но пока еще нельзя утверждать, что найденные значения суть наименьшее и наибольшее значения функции, для окончательного вывода полезно прикинуть, как выглядит график функции. Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x^2 - 2x - 38}{x^2 + 6x + 34} = -2$, т. е. прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции. График схематически представлен на рисунке 115. Вот теперь все ясно: $E(f) = [-3; -1]$.

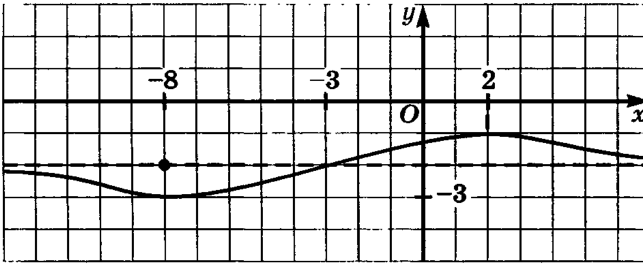


Рис. 115

46.38. а) При каком значении параметра a наименьшее значение функции

$$y = x\sqrt{x + a} \text{ равно } -6\sqrt{3}?$$

б) При каком значении параметра a наибольшее значение функции

$$y = (a - x)\sqrt{x} \text{ равно } 10\sqrt{5}?$$

Решение. а) Областью определения заданной функции служит луч $[-a, +\infty)$. Найдем производную:

$$y' = \frac{3x + 2a}{2\sqrt{x + a}}.$$

Из уравнения $y' = 0$ находим стационарную точку $x = -\frac{2a}{3}$, причем это — точка минимума функции. Критических точек нет (точка $x = -a$, в которой знаменатель обращается в нуль, — концевая точка промежутка области определения функции, а концевые точки при вычислении производной не рассматриваются).

Воспользуемся теоремой о том, что если непрерывная функция имеет на промежутке единственную точку экстремума, причем точку минимума, то в этой точке функция достигает своего наименьшего значения. Значит,

$$y_{\text{наим}} = y\left(-\frac{2a}{3}\right) = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Приравняв это выражение заданному значению $-6\sqrt{3}$, получаем: $a = 9$.

б) Рассуждая как в задании а), находим область определения функции $[0, +\infty)$ и производную заданной функции:

$$y' = \frac{-3x + a}{2\sqrt{x}}.$$

Из уравнения $y' = 0$ находим стационарную точку $x = \frac{a}{3}$. Если $a \leqslant 0$, то указанная точка не принадлежит промежутку $(0, +\infty)$, поэтому она нас не интересует. Если же $a > 0$, то это — точка максимума функции. Критических точек нет.

Далее воспользуемся теоремой о том, что если непрерывная функция имеет на промежутке единственную точку экстремума, причем точку максимума, то в этой точке функция достигает своего наибольшего значения. Следовательно,

$$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Приравняв это выражение заданному значению $10\sqrt{5}$, получим: $a = 15$.

46.39. а) При каком значении параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2nx + 4n^2 + 3n = 0$ будет наибольшей?

б) При каком значении параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 + nx + 2n - 1 = 0$ будет наименьшей?

Решение. По смыслу задачи речь идет о действительных корнях, поскольку для комплексных чисел нет операции сравнения. Воспользуемся тем, что если x_1, x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

а) В данном случае $p = -2n$, $q = 4n^2 + 3n$, $p^2 - 2q = -4n^2 - 6n$. Дискриминант заданного квадратного уравнения равен $-12n^2 - 12n$, он неотрицателен на отрезке $[-1; 0]$. Значит, речь идет об отыскании наибольшего значения функции $y = -4n^2 - 6n$ на отрезке $[-1; 0]$. Имеем: $y' = -8n - 6$, $y' = 0$ при $n = -\frac{3}{4}$. Это единственная стационарная точка функции на заданном отрезке, причем точка максимума, а потому $y_{\text{наиб}} = y\left(-\frac{3}{4}\right)$.

б) В данном случае $p = n$, $q = 2n - 1$, $p^2 - 2q = n^2 - 4n + 2$. Дискриминант заданного квадратного уравнения равен $n^2 - 8n + 4$, он неотрицателен при $n \leqslant 4 - 2\sqrt{3}$ или при $n \geqslant 4 + 2\sqrt{3}$. Значит, речь идет об отыскании наименьшего значения функции $y = n^2 - 4n + 2$ на объединении двух лучей:

$$\left(-\infty;\ 4 - 2\sqrt{3}\right] \cup \left[4 + 2\sqrt{3};\ +\infty\right).$$

Имеем: $y' = 2n - 4$, $y' = 0$ при $n = 2$. Но эта точка не принадлежит области определения функции, она нас, следовательно, не интересует. При $n > 2$ производная положительна, в частности она положительна и на $\left[4 + 2\sqrt{3};\ +\infty\right)$. На этом луче функция возрастает, а потому своего наименьшего значения достигает в точке

$4 + 2\sqrt{3}$; $y(4 + 2\sqrt{3}) = 14 + 8\sqrt{3}$. Далее, при $n < 2$ производная отрицательна, в частности, она отрицательна и на $(-\infty; 4 - 2\sqrt{3}]$. На этом луче функция убывает, а потому своего наименьшего значения достигает в точке $4 - 2\sqrt{3}$; $y(4 - 2\sqrt{3}) = 14 - 8\sqrt{3}$. Из найденных двух значений наименьшим является $14 - 8\sqrt{3}$.

Впрочем, этот вывод можно было получить и без вычислений. Дело в том, что осью параболы $y = n^2 - 4n + 2$ является прямая $n = 2$, точка $4 - 2\sqrt{3}$ ближе к этой прямой, чем точка $4 + 2\sqrt{3}$, а потому значение функции в первой точке меньше, чем во второй (при этом, естественно, учитываем, что ветви параболы направлены вверх).

Ответ: а) при $n = -\frac{3}{4}$; б) при $n = 4 - 2\sqrt{3}$.

46.40. Доказать неравенство:

а) $x^5 + (1 - x)^5 \geqslant \frac{1}{16}$; б) $x^7 + (1 - x)^7 > \frac{\sqrt{2}}{100}$.

Решение. а) Пусть $y = x^5 + (1 - x)^5$, тогда $y' = 5x^4 - 5(1 - x)^4 = 5(2x - 1)(2x^2 - 2x + 1)$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Это единственная стационарная точка функции, причем точка минимума. Значит, $y_{\text{наим}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$. Во всех остальных точках функция больше $\frac{1}{16}$. Требуемое неравенство доказано.

б) Рассуждая как в пункте а), приходим к выводу, что $y_{\text{наим}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$. Далее $\frac{1}{64} - \frac{\sqrt{2}}{100} = \frac{25 - 16\sqrt{2}}{1600} > 0$, значит, $\frac{1}{64} > \frac{\sqrt{2}}{100}$, а потому $x^7 + (1 - x)^7 > \frac{\sqrt{2}}{100}$.

46.53. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

Решение. <u>Первый этап</u>. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина — площадь S трапеции, обозначим ее y.

2) Примем за независимую переменную x угол при большем основании трапеции (рис. 116); реальные границы изменения x таковы:

$$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3) Вычислим площадь трапеции. Имеем: $BH = 15 \sin x$, $AH = PD = 15 \cos x$, $AD = 15 + 30 \cos x$. Значит,

$$S = \frac{AD + BC}{2} BH =$$

$$= (15 + 15 \cos x)\, 15 \sin x =$$

$$= 225 \sin x\, (1 + \cos x).$$

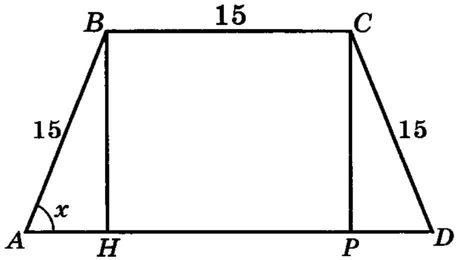


Рис. 116

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$y = 225 \sin x\, (1 + \cos x),\ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

$$y' = 225(\cos x\, (1 + \cos x) + \sin x\, (-\sin x)) =$$
$$= 225(2 \cos^2 x + \cos x - 1).$$

Из уравнения $y' = 0$ получаем: $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Эта совокупность тригонометрических уравнений имеет на рассматриваемом промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень $x = \frac{\pi}{3}$.

Если $x < \frac{\pi}{3}$, то $y' > 0$; если $x > \frac{\pi}{3}$, то $y' < 0$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{3}$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка максимума, поэтому именно при этом значении x функция достигает наибольшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.* В задаче не требуется найти наибольшее значение функции, а требуется указать, при какой длине основания AD оно достигается. Имеем:

$$AD = 15 + 30 \cos x = 15 + 30 \cos \frac{\pi}{3} = 30.$$

Ответ: 30 см.

46.54. Из прямоугольной трапеции с основаниями a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80,\ b = 60,\ h = 100;$

б) $a = 24,\ b = 8,\ h = 12?$

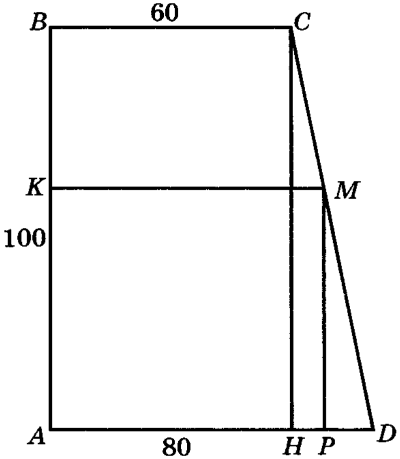


Рис. 117

Решение. а) Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина — площадь S прямоугольника $AKMP$, вписанного в прямоугольную трапецию $ABCD$, у которой $AB = 100$, $BC = 60$, $AD = 80$ (рис. 117).

2) Примем за независимую переменную x длину отрезка KM; определим реальные границы изменения x: $60 \leqslant x < 80$.

3) Вычислим площадь прямоугольника. Имеем:
$\frac{MP}{CH} = \frac{PD}{HD}$, значит, $\frac{MP}{100} = \frac{80 - x}{20}$,
$MP = 5(80 - x)$;

$$S = AP \cdot MP = x \cdot 5(80 - x) = 5(80x - x^2).$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$S = 5(80x - x^2),\ 60 \leqslant x < 80.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

$S' = 5(80 - 2x)$. $S' = 0$ при $x = 40$, но эта точка не принадлежит полуинтервалу $[60, 80)$. Замечаем, что на этом полуинтервале выполняется неравенство $S' < 0$, т. е. функция убывает, поэтому своего наибольшего значения она достигает в левом конце полуинтервала: $S_{\text{наиб}} = S\,(60) = 6000$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.* Наибольшую площадь, равную 6000, имеет прямоугольник $ABCH$.

б) Оптимизируемая величина — площадь S прямоугольника $AKMP$, вписанного в прямоугольную трапецию $ABCD$, у которой $AB = 12$, $BC = 8$, $AD = 24$ (рис. 118).

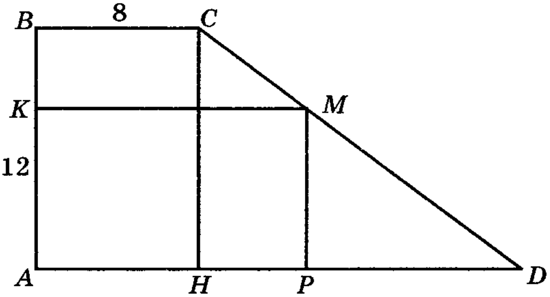


Рис. 118

Примем за независимую переменную x длину отрезка KM; определим реальные границы изменения x: $8 \leqslant x < 24$.

Вычислим площадь прямоугольника. Имеем: $\frac{MP}{CH} = \frac{PD}{HD}$,

следовательно, $\frac{MP}{12} = \frac{24 - x}{16}$,

$MP = 0{,}75\ (24 - x)$;

$S = AP \cdot MP = x \cdot 0{,}75(24 - x) =$
$= 0{,}75(24x - x^2)$.

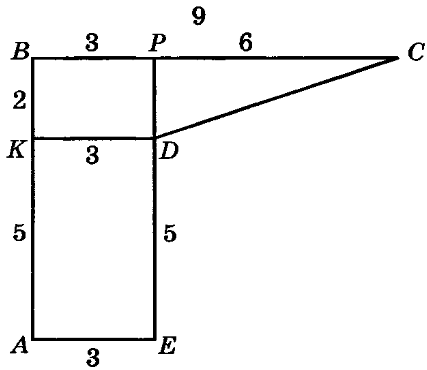


Рис. 119

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$S = 0{,}75(24x - x^2),\ 8 \leqslant x < 24.$$

$S' = 1{,}5(12 - x)$; $S' = 0$ при $x = 12$ — это единственная точка экстремума, а именно максимума функции. Поэтому в данном случае $S_{\text{наиб}} = S(12) = 108$.

Наибольшую площадь, равную 108, имеет прямоугольник $AKMP$, где $KM = 12$.

46.55. У пятиугольника $ABCDE$ углы A, B и E — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Вписать в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади, если:

а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;

б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

Решение. а) На рисунке 119 изображен пятиугольник $ABCDE$. Для наибольшего по площади вписанного прямоугольника возможны два варианта: либо этим прямоугольником будет $ABPE$ с площадью, равной 21, либо искомый прямоугольник следует вписать в прямоугольную трапецию $KBCD$. В данном случае второй вариант нас не интересует, так как площадь указанной трапеции равна 12, поэтому вписанный в нее прямоугольник будет иметь площадь меньше 12.

Итак, требуемый прямоугольник — прямоугольник $ABPE$ с площадью 21.

б) На рисунке 120 изображен пятиугольник $ABCDE$. Для наибольшего по площади вписанного прямоугольника возможны два варианта: либо этим прямоугольником будет $ABPE$ с площадью, равной 21, либо искомый прямоугольник следует вписать в прямоугольную трапецию $KBCD$. В данном случае нас интересует

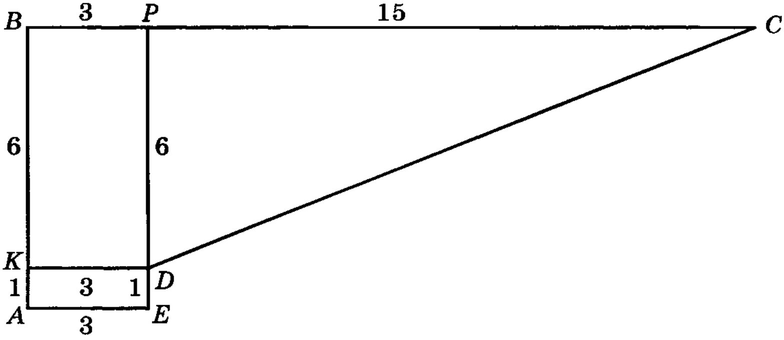


Рис. 120

второй вариант, поскольку площадь указанной трапеции равна 63, что больше площади прямоугольника $ABPE$.

Рассуждая как в № 46.54 б, находим что $S_{\text{наиб}} = 32{,}4$.

46.56. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня его глаз на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен встать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Решение. На рисунке 121 представлена геометрическая модель ситуации: OF — постамент, FP — статуя, O — основание постамента, M — точка, в которой находится человек, AM — рост человека (до уровня глаз), $PK = a$, $FK = b$, $PF = a - b$, $\angle KAF = \alpha$.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина — угол PAF, обозначим его y.

2) Примем за независимую переменную x расстояние OM; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

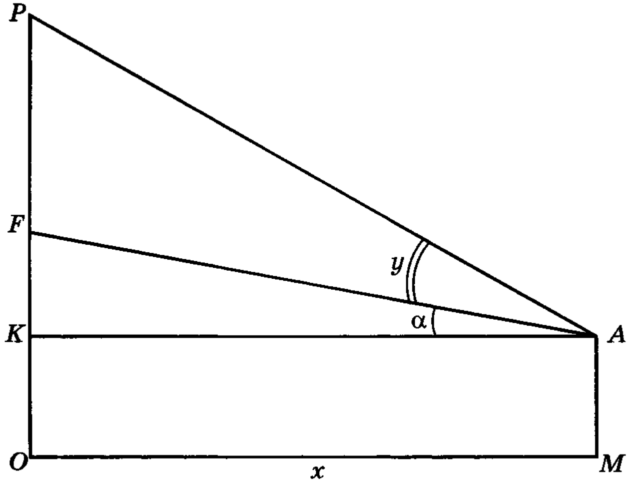


Рис. 121

3) Вычислим интересующий нас угол (или какую-либо тригонометрическую функцию угла). Имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{FK}{AK} = \frac{b}{x}; \ \operatorname{tg}(\alpha + y) = \frac{PK}{AK} = \frac{a}{x}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}(\alpha + y) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{b}{x} + z}{1 - \frac{b}{x}\cdot z} = \frac{b + zx}{x - bz}$$

(здесь $z = \operatorname{tg} y$).

Итак,

$$\frac{b + zx}{x - bz} = \frac{a}{x},$$

откуда находим:

$$z = \frac{(a - b)x}{x^2 + ab}.$$

В задаче речь идет об $y_{\text{наиб}}$. Но наибольшему значению угла y будет соответствовать и наибольшее значение тангенса угла, т. е. $z_{\text{наиб}}$.

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции

$$z = \frac{(a - b)x}{x^2 + ab}, \ x > 0.$$

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

$$z' = \frac{(a - b)(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2};$$

$z' = 0$ при $x = \sqrt{ab}$ — это единственная точка экстремума функции, причем точка максимума. Следовательно, $z_{\text{наиб}}$ достигается именно в этой точке.

<u>Третий этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.* В задаче не требуется найти наибольшее значение функции, а требуется указать, на каком расстоянии от памятника должен стоять человек. Это расстояние OM мы обозначили буквой x и выяснили, что

$$x = \sqrt{ab}.$$

Ответ: $OM = \sqrt{ab}$.

46.57. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время он может добраться от базы до станции?

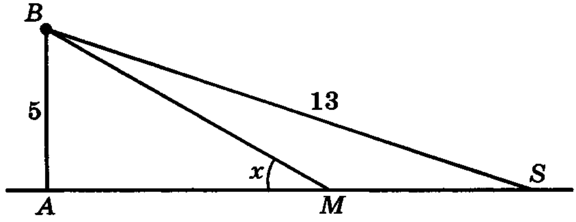


Рис. 122

Р е ш е н и е. На рисунке 122 представлена геометрическая модель ситуации, BMS — маршрут пешехода.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина — время t движения пешехода от базы B до станции S.

2) Примем за независимую переменную x угол BMA. Точка M может занять на отрезке AS любое положение, вне пределов этого отрезка выбирать точку M бессмысленно. Если M совпадает с S, то $x = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Если M совпадает с A, то $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому реальные границы изменения x таковы: $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3) Вычислим время t движения пешехода. Имеем:

$$BM = \frac{5}{\sin x};$$

на этом участке пути пешеход идет со скоростью 3 км/ч, значит, время t_1, затраченное на этот путь, выразится формулой

$$t_1 = \frac{5}{3\sin x}.$$

Далее $MS = AS - AM = 12 - 5\operatorname{ctg} x$; на этом участке пути пешеход идет со скоростью 5 км/ч, следовательно, время t_2, затраченное на этот путь, выразится формулой

$$t_2 = \frac{12 - 5\operatorname{ctg} x}{5}.$$

В итоге имеем:

$$t = \frac{5}{3\sin x} + \frac{12 - 5\operatorname{ctg} x}{5}.$$

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения полученной функции на отрезке $\left[\operatorname{arctg}\frac{5}{12}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Найдем производную полученной функции:

$$t' = \frac{3 - 5\cos x}{\sin^2 x}.$$

Единственная стационарная точка, принадлежащая заданному отрезку, — точка $x = \arccos \frac{3}{5}$, причем слева от нее, в силу убывания функции $y = \cos x$, выполняется неравенство $\cos x > \frac{3}{5}$, а справа — неравенство $\cos x < \frac{3}{5}$. Это значит, что слева от указанной точки $t' < 0$, а справа $t' > 0$; следовательно, $x = \arccos \frac{3}{5}$ — единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка минимума, поэтому именно в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Если $\cos x = \frac{3}{5}$, то $\sin x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{3}{4}$, и, значит,

$$t = \frac{5}{3\sin x} + \frac{12 - 5\operatorname{ctg} x}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{5}\left(12 - 5 \cdot \frac{3}{4}\right) = 3\frac{11}{15}.$$

Ответ: 3 ч 44 мин.

В задаче 46.57 можно было выбрать другой способ составления математической модели. Если за x принять длину отрезка AM, то $BM = \sqrt{25 + x^2}$, $MS = 12 - x$, $t = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{3} + \frac{12 - x}{5}$, где $0 \leqslant x \leqslant 12$. Вычислив производную и приравняв ее нулю, обнаружим, что $x = \frac{15}{4}$ — единственная стационарная точка функции на заданном отрезке, причем точка минимума, а потому в этой точке функция достигает наименьшего значения.

Глава 8

§ 47

В задачах 47.1—47.6 отрабатывается умение правильно использовать правило умножения в разнообразных ситуациях. Это правило является базовым для всей комбинаторной подготовки учащихся. Оно так или иначе встречается во многих задачах в дальнейшем, но в этих первых задачах оно присутствует в явном виде. При разборе решений этих задач крайне важно подчеркивать свойство *независимости* выбора очередного элемента от выбора предыдущего.

47.3. а) Сколько имеется трехзначных чисел, составленных только из четных цифр?

б) Сколько имеется трехзначных чисел, которые не меняются при перемене местами первой и последней цифр?

в) Сколько имеется трехзначных чисел, кратных 5?

г) Сколько имеется трехзначных чисел, которые при перемене местами первой и второй цифр меняются менее чем на 90?

Решение. а) Первой цифрой может быть 2, 4, 6 или 8, всего 4 варианта. Второй и третьей цифрой, независимо от выбора первой, может быть любая из цифр 0, 2, 4, 6, 8, всего по 5 вариантов. По правилу умножения получаем ответ: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

б) Первой цифрой может быть любая цифра, кроме 0, всего 9 вариантов. Второй может быть любая цифра, всего 10 вариантов. Третья цифра по условию — такая же, как и первая, т. е. тут вариант единственный. По правилу умножения получаем ответ: $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$.

в) Первой цифрой может быть любая цифра, кроме 0, всего 9 вариантов. Второй может быть любая цифра, всего 10 вариантов. Третья цифра по условию — либо 0, либо 5, т. е. тут 2 варианта. По правилу умножения получаем ответ: $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

г) Пусть $x = 100a + 10b + c$ — трехзначное число, а $y = 100b + 10a + c$ получено из x перестановкой первых двух цифр. По условию $|x - y| < 90$, т. е. $|100a + 10b + c - 100b - 10a - c| < 90$, $90|a - b| < 90$. Последнее неравенство верно только при $a = b$. Для выбора цифры a есть 9 вариантов. Если цифра a выбрана, то b выбирается единственным образом, ну а третья цифра — любая из 10 возможных. По правилу умножения получаем ответ: $9 \cdot 1 \cdot 10 = 90$.

Ответ: а) 100; б) 90; в) 180; г) 90.

В следующей задаче неявно присутствует представление о противоположном событии. Такого термина пока нет, но к самому понятию следует постепенно привыкать.

47.5. За четверть в классе прошли 5 тем по алгебре. Контрольная работа будет состоять из пяти задач: по одной задаче из каждой темы. К каждой теме заранее был составлен список из 10 задач, одна из которых будет входить в вариант контрольной. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найти:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

Решение. Представим, что есть 5 листков. На каждом по 10 задач, из которых и будет составлена контрольная. На каждом листке ученик отметил те 8 задач, которые умеет решать.

а) Мы предполагаем, что при составлении контрольной работы выбор по одной задаче из каждого листка будет проводиться *независимым* образом. Значит, к пяти испытаниям — выбору пяти задач — применимо правило умножения. Получаем ответ: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$.

б) Рассуждение аналогично, только на каждом из листков выбор производится из восьми отмеченных задач. По правилу умножения получаем ответ: $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 2^{15} = 32\,768$.

в) Рассуждение аналогично, только на каждом из листков выбор производится из двух задач, которые ученик не может решить. По правилу умножения получаем ответ: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

г) На первом листке выбор производится из двух задач, которые ученик не может решить, а на остальных четырех листках — из восьми отмеченных задач. По правилу умножения получаем ответ: $2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 2^{13} = 8192$.

Ответ: а) 100 000; б) 32 768; в) 32; г) 8192.

Довольно типична ситуация, когда правило умножения применяется в случаях с заранее фиксированным выбором в некоторых имеющихся испытаниях. Примером является следующая задача.

47.6. В каждую клетку квадратной таблицы 3×3 произвольно ставят крестик и нолик.

а) Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?

б) В скольких случаях в первом столбце будут одни крестики?

в) В скольких случаях по диагоналям будут стоять одни нолики?

г) В скольких случаях во второй строке будет стоять только один крестик?

Решение. а) Всего имеется 9 клеток, в каждую из которых ставят либо крестик, либо нолик. Значит, имеется 9 *независимых* испытаний, в каждом из которых возможны по 2 исхода. По правилу умножения получаем ответ: $2^9 = 512$.

б) Про первый столбец можно забыть: в нем по условию стоят одни крестики. Остается 6 клеток, в каждую из которых независимо ставят либо крестик, либо нолик. Ответ: $2^6 = 64$.

в) Про клетки по диагоналям можно забыть: в них по условию стоят одни нолики. Остается 4 клетки, в каждую из которых независимо ставят либо крестик, либо нолик. Ответ: $2^4 = 16$.

г) Возможны три варианта заполнения второй строки: ×00, 0×0 и 00×. В каждом из них останутся свободными по 6 клеток из первой и третьей строк. Эти 6 клеток можно заполнить $2^6 = 64$ способами. Значит, всего получается $3 \cdot 64 = 192$ способа.

Ответ: а) 512; б) 64; в) 16; г) 192.

Доказательства (а не решения) неравенств встречаются в сложившихся курсах алгебры не слишком часто. В № 47.18 степень «доказательности» неравенств может быть различной. Можно выдержать совсем аккуратный стиль и доказать неравенства методом математической индукции, а можно использовать более наивный подход, сравнив скорость роста правой и левой частей. Во всех пунктах а)—г) целесообразно проверить, что при меньших n указанные неравенства неверны.

47.18. а) Доказать неравенство $n! > (n + 3)^2$ при $n \geqslant 5$.

Решение. При $n = 5$ получаем: $5! > 8^2$, т. е. $120 > 64$, что верно. При $n = 6$ получаем: $6! > 9^2$, т. е. $720 > 81$, что верно. При $n = 7$ получаем: $7! > 10^2$, т. е. $5040 > 100$. Ясно, что с увеличением n левая часть растет значительно быстрее правой части, а потому доказываемое неравенство верно при $n \geqslant 5$.

Приведем формальное доказательство методом математической индукции.

Базис индукции (при $n = 5$) уже проверен. Проверим справедливость индукционного перехода. Предположим, что неравенство верно при $n = k \geqslant 5$, т. е. $k! > (k + 3)^2$. Докажем, что неравенство верно и при $n = k + 1$, т. е. $(k + 1)! > (k + 4)^2$.

Имеем: $(k + 1)! = (k + 1)k! > (k + 1)(k + 3)^2$. Докажем, что $(k + 1)(k + 3)^2 > (k + 4)^2$.

В самом деле, $k + 1 > 4 = 2^2 > \left(1 + \frac{1}{k + 3}\right)^2 = \left(\frac{k + 4}{k + 3}\right)^2$. Значит,

$(k + 1)(k + 3)^2 > (k + 4)^2$, а тогда $(k + 1)! > (k + 1)(k + 3)^2 > (k + 4)^2$, что и требовалось доказать.

По принципу математической индукции требуемое неравенство доказано.

47.19. Доказать неравенство:

а) $2{,}66 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ при всех $n \geqslant 3$;

б) $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 0{,}125$ при всех $n \geqslant 4$;

в) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$ при всех n;

г) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2{,}75$ при всех n.

Решение. а) Если $n \geqslant 3$, то

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots > 2{,}66.$$

б) Используем формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 0,5:

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}5} =$$
$$= \frac{1}{2^3} = 0{,}125.$$

в) Так как $n! > 2^n$ при $n \geqslant 4$ (см. № 47.18 в)), то $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$, и поэтому

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{8}{3} + \frac{1}{8} < 3.$$

г) $$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots + \frac{1}{n!} <$$
$$< \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}5} =$$
$$= \frac{163}{60} + \frac{1}{32} = \frac{1319}{480} < \frac{11}{4}.$$

Последнее неравенство верно, так как $1319 \cdot 4 = 5276 < 5280 = 480 \cdot 11$.

§ 48

Данный параграф продолжает комбинаторную линию в общей стохастической подготовке учащихся. По сравнению с предыдущим параграфом в этих задачах, как правило, производится выбор нескольких элементов. С технической точки зрения основной объект изучения здесь — формулы для числа сочетаний C_n^k и размещений A_n^k и их применение в различных ситуациях. Первые пять задач имеют дело со случаями, когда $k = 2$.

48.4. Все станции пригородной железной дороги разделены на 10 зон, в каждой зоне более одной станции. В билете на проезд в одну сторону указывают номер зоны отправления и номер зоны прибытия.

а) Сколько существует различных типов билетов?

б) Сколько существует различных стоимостей билетов, если стоимость проезда из зоны x в зону y рассчитывается по формуле $S = 7 + 6|x - y|$?

в) Сколько различных типов билетов можно купить не более чем за 50 р.?

г) Сколько существует различных типов билетов по цене, кратной 5 р.?

Решение. а) И номер зоны отправления, и номер зоны прибытия может быть любым числом от 1 до 10. По правилу умножения получаем $N = 10 \cdot 10 = 100$.

б) Стоимость S однозначно определена, как только известно отклонение между номерами x и y зон отправления и прибытия, т. е. $|x - y|$. Всего имеется 10 таких отклонений: от $0 = |x - x|$ до $9 = |10 - 1|$. Значит, и различных стоимостей имеется 10 вариантов.

в) Стоимости билетов равны 7, $7 + 6 \cdot 1 = 13$, $7 + 6 \cdot 2 = 19$, ..., $7 + 6 \cdot 8 = 55$, $7 + 6 \cdot 9 = 61$. Значит, за 50 р. нельзя проехать из зоны 1 в зоны 9, 10, из зоны 2 в зону 10 и обратно; всего 6 типов билетов. Поэтому 50 р. хватит на $100 - 6 = 94$ типа билетов.

г) В пункте б) было установлено, что существует 10 вариантов стоимостей билетов, а из подсчетов, проведенных в пункте в), следует, что лишь две стоимости кратны 5: это $7 + 6 \cdot 3 = 25$, $7 + 6 \cdot 8 = 55$. Поэтому из зоны 1 можно купить билет до зон 4 и 9 и обратно, из зоны 2 — до зон 5 и 10 и обратно, из зоны 3 — до зоны 6 и обратно, из зоны 4 — до зоны 7 и обратно, из зоны 5 — до зоны 8 и обратно, из зоны 6 — до зоны 9 и обратно, из зоны 7 — до зоны 10 и обратно, всего 18 вариантов.

Ответ: а) 100; б) 10; в) 94; г) 18.

Задачи 48.14—48.17 базируются на правиле умножения и используют формулы для числа сочетаний и размещений. По существу это концентрическая организация учебного материала, при которой возврат к известным ранее фактам происходит на более высоком уровне.

48.17. По программе в концерте должен выступить хор из пяти певцов и трех певиц. Предварительное согласие на выступление дали 10 певцов и 8 певиц.

а) Сколько существует различных вариантов состава хора?

б) То же, но если известно, что певцы $А$ и $Б$ ни за что не будут петь вместе.

в) То же, но если известно, что певец $А$ будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица $В$.

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и вместо недостающего певца придется выступать одной певице.

Р е ш е н и е. а) Предполагается, что выбор певцов и выбор певиц происходит *независимым* друг от друга образом. Из десяти певцов можно C_{10}^5 способами выбрать 5 хористов: ведь порядок тут неважен. Аналогично, из восьми певиц можно C_8^3 способами выбрать трех хористок. По правилу умножения получаем ответ: $C_{10}^5 \cdot C_8^3 = 25 \cdot 256 = 14\,112$.

б) Из ответа в пункте а) следует вычесть число тех составов хора, в которые входят и певец A, и певец $Б$. Раз они уже вошли в состав хора, то из оставшихся восьми певцов надо выбрать трех. Это можно сделать C_8^3 способами. С певицами, по сравнению с пунктом а), ничего не изменилось. Получаем:

$$14\,112 - C_8^3 \cdot C_8^3 = 14\,112 - 56^2 = 10\,976.$$

в) Возможны две ситуации: певица B поет или не поет в хоре. В первом случае из оставшихся семи певиц надо выбрать двух. Это можно сделать C_7^2 способами. В таком случае в хоре будет и певец A, и из оставшихся девяти певцов надо выбрать четверых. Это можно сделать C_9^4 способами. Значит, тут есть $C_7^2 \cdot C_9^4 = 126 \cdot 21$ составов хора. Если же певица B не поет в хоре, то имеется C_7^3 способов выбора певиц. В таком случае не будет петь и певец A, и есть C_9^5 способов выбора из оставшихся девяти певцов. Значит, тут есть $C_7^3 \cdot C_9^5 = 126 \cdot 35$ составов хора, а всего получается $126 \cdot 21 + 126 \cdot 35 = 126 \cdot 56 = 7056$ вариантов (половина из всех возможных).

г) Так как осталось только четыре певца, им всем придется петь, тут есть единственный вариант выбора. Одну певицу, заменяющую певца, можно выбрать восемью способами, а из оставшихся семи певиц можно C_7^3 способами выбрать трех хористок. По правилу умножения получаем ответ: $8 \cdot 35 = 280$.

О т в е т: а) 14112; б) 10976; в) 7056; г) 280.

В задачах 48.18 и 48.19 на новом, комбинаторном материале происходит повторение графиков базовых функций: квадратичной и дробно-линейной. Кроме того, неявно проводится и вычисление пределов числовых последовательностей. Тем самым новый учебный материал интегрируется в рамки уже традиционных для курса алгебры и начал анализа тем.

48.18. Пусть $y(n) = \dfrac{C_n^3}{A_{n-1}^3}$, $n \geqslant 4$.

а) Указать дробно-линейную функцию, графику которой принадлежат все точки $(n;\ y(n))$.

в) Указать наибольшее n, при котором $y(n) > 0{,}25$.

г) Указать наименьшее n, при котором $y(n)$ отличается от $\frac{1}{6}$ менее чем на 0,01.

Решение. а) $\dfrac{C_n^3}{A_{n-1}^3} = \dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{(n-1)(n-2)(n-3)} = \dfrac{n}{6(n-3)}$. Значит, все точки вида $(n;\ y(n))$ принадлежат графику дробно-линейной функции $y = \dfrac{x}{6(x-3)}$.

в) Решив неравенство $\dfrac{n}{6(n-3)} > \dfrac{1}{4}$ при $n \geqslant 4$, получим: $n < 9$. Наибольшее решение этого неравенства в натуральных числах равно 8.

г) По условию при $n \geqslant 4$ требуется решить неравенство $\left|\dfrac{n}{6(n-3)} - \dfrac{1}{6}\right| < 0{,}01$. Имеем: $\left|\dfrac{3}{6(n-3)}\right| < 0{,}01$; $\dfrac{1}{2(n-3)} < \dfrac{1}{100}$; $50 < n - 3$; $n > 53$. Наименьшее решение этого неравенства в натуральных числах равно 54.

Задачи на доказательство тождеств или неравенств, связанных с числами сочетаний или размещений, решают две учебные цели. Во-первых, повторяются формулы для этих чисел, во-вторых, повторяется базовое для школы умение производить тождественные преобразования буквенных выражений.

48.22. Доказать тождества:

а) $C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$; в) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;

б) $C_n^{n-4} = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^{n-4}$; г) $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2}$.

Здесь основным является пункт в): он просто повторяет тождество, доказанное в учебнике. Пункт г) несколько усложняет пункт в), а предыдущие пункты, напротив, являются более простыми, частными версиями тождества из пункта в).

Решение.

$$\text{а) } C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

После сокращения обеих частей последнего равенства на общий множитель $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ получаем: $n = 3 + (n - 3)$, что, безусловно, верно.

б) $C_n^{n-4} = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^{n-4} \Leftrightarrow C_n^4 = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}.$$

После сокращения обеих частей последнего равенства на общий множитель $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ получаем: $n = 4 + (n - 4)$ — верное равенство.

в) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} +$

$$+ \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}.$$

После сокращения на общий множитель $(n - 1)!$ в числителях получаем:

$$\frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-1-k)!}.$$

После сокращения на общий множитель $(k - 1)!$ в знаменателях получаем:

$$\frac{n}{k(n-k)!} = \frac{1}{(n-k)!} + \frac{1}{k(n-1-k)!}.$$

После сокращения еще на один общий множитель $(n - k - 1)!$ в знаменателях получаем: $\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}$, что, безусловно, является тождеством.

г) Непосредственное доказательство тождества $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2}$ связано с большим числом формул. Можно преобразовать правую часть к левой, дважды используя тождество из пункта в) и тождество $C_m^l = C_m^{m-l}$ для любых $0 \leqslant l \leqslant m$:

$$C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2} = C_{n-1}^{k-1} + (C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k}) =$$

$$= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k.$$

Говорить о числах C_n^k и при этом ничего не сказать о треугольнике Паскаля, по меньшей мере, неестественно. Ведь этот треугольник — очень удобная таблица для «хранения» и получения биномиальных коэффициентов C_n^k. Но на первый раз вполне хватает знакомства только с простейшими свойствами треугольника Паскаля.

48.23. Выписать треугольник Паскаля до 7-й строки включительно.

а) Найти сумму всех чисел в третьей строке треугольника Паскаля.

б) Найти сумму всех чисел в четвертой строке треугольника Паскаля.

в) Найти сумму всех чисел в седьмой строке треугольника Паскаля.

г) Методом математической индукции доказать, что сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n.

Решение.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

а) $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$;

б) $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$;

в) $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$.

г) Обозначим $A(n)$ утверждение «Сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n». Утверждения $A(1), A(2), \ldots, A(7)$, как это следует из приведенной таблицы, верны. Проверим справедливость индукционного перехода. Предположим, что сумма чисел в n-й строке равна 2^n, т. е. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$. Выпишем сумму чисел в $(n + 1)$-й строке и выразим ее через сумму чисел в n-й строке, используя тождество $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ и учтя, что $C_{n+1}^0 = C_n^0 = C_{n+1}^{n+1} = C_n^n = 1$:

$$
\begin{gathered}
C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k+1} + \ldots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = \\
= C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^1 + C_n^2) + \ldots + (C_n^{k-1} + C_n^k) + \\
+ (C_n^k + C_n^{k+1}) + \ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n = \\
= 2(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{k-1} + C_n^k + C_n^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n) = \\
= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.
\end{gathered}
$$

Итак, из $A(n)$ следует $A(n + 1)$, значит, по принципу математической индукции утверждение верно для любого n.

Впрочем, следует напомнить учащимся, что другой способ доказательства тождества представлен в учебнике (пример 9 в § 48).

Числа C_n^k появляются в комбинаторике трижды. Сначала как числа сочетаний из n элементов по k. Затем как числа, расположенные в треугольнике Паскаля. Наконец, эти числа возникают как числовые коэффициенты при разложении выражения $(a + b)^n$ в сумму одночленов, т. е. в формуле бинома Ньютона. В задачах 48.24—48.29 как раз и рассмотрены числа C_n^k как биномиальные коэффициенты.

48.27. а) Найти член разложения $\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$, не содержащий переменную.

Решение. В данном случае в формуле бинома Ньютона $n = 6$, $a = 2x^2$, $b = x^{-1}$. Тогда

$$C_n^k a^{n-k} b^k = C_6^k (2x^2)^{6-k} (x^{-1})^k = C_6^k 2^{6-k} x^{12-2k-k} = (C_6^k 2^{6-k}) x^{12-3k}.$$

Такой одночлен из разложения $(a + b)^n$ в сумму одночленов не содержит переменной x при $k = 4$. При $k = 4$ получим: $C_6^4 2^{6-4} = 15 \cdot 4 = 60$.

Задача 48.30 в качестве примера использования бинома Ньютона соединяет вместе классическое неравенство Бернулли и по существу полное формальное доказательство того, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ для $0 < q < 1$. Эти два факта разделены между собой двумя конкретными неравенствами. Отметим, что неравенство Бернулли более сложным способом (методом математической индукции) доказано в учебнике (см. пример 4 в § 6).

48.30. а) Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого $x > 0$ верно неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$ (*неравенство Бернулли*).

б) Указать какое-нибудь решение неравенства $1{,}001^n > 1000$.

в) Указать какое-нибудь решение неравенства $0{,}99^n < 0{,}01$.

г) Доказать, что для любого $0 < q < 1$ и любого $a > 0$ неравенство $q^n < a$ верно для всех натуральных n начиная с некоторого номера.

Решение.

а) $(1 + x)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot x^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot x^2 + \ldots + C_n^k \cdot 1^{n-1} \cdot x^k + \ldots + C_n^n x^n = 1 + nx + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n > 1 + nx.$

б) $1{,}001^n = (1 + 0{,}001)^n > 1 + n \cdot 0{,}001 > 1000$, если $n > 1000(1000 - 1) = 999\,000$. Значит, неравенство $1{,}001^n > 1000$ верно для всех n начиная, например, с $n = 999\,001$ (отметим, что на самом деле оно верно начиная и с заметно меньшего числа, но для его отыскания нужны логарифмы).

в) $0{,}99^n < 0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^n > 100 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{99}\right)^n > 100$. Так как по неравенству Бернулли $\left(1 + \frac{1}{99}\right)^n > 1 + \frac{n}{99}$, то интересующее нас неравенство заведомо будет верно при тех n, для которых $1 + \frac{n}{99} > 100$, т. е. при $n > 9801$. Значит, интересующее нас неравенство верно для всех n начиная, например, с $n = 9802$.

г) $q^n < a \Leftrightarrow \frac{1}{q^n} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{q^n} = \left(1 + \frac{1-q}{q}\right)^n > \frac{1}{a}$. Как и выше, в пункте в), $\left(1 + \frac{1-q}{q}\right)^n > 1 + \frac{n(1-q)}{q} > \frac{1}{a} \Rightarrow \left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{a} \Rightarrow q^n < a$, где самое первое неравенство является частным случаем неравенства Бернулли.

Далее, $1 + \frac{n(1-q)}{q} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{n(1-q)}{q} > \frac{1-a}{a} \Leftrightarrow n > \frac{q(1-a)}{(1-q)a}$.

Итак, для любого $0 < q < 1$ и любого $a > 0$ неравенство $q^n < a$ верно для всех натуральных n, которые больше, чем $\frac{q(1-a)}{(1-q)a}$.

Например, неравенство $0{,}997^n < 0{,}007$ верно при всех $n > \frac{0{,}997 \cdot 0{,}993}{0{,}003 \cdot 0{,}007} = \frac{997 \cdot 993}{21} \approx 47\,143{,}857...$, т. е. заведомо будет верно начиная с $n = 50\,000$.

§ 49

Подсчет вероятностей случайных событий начинается с трех заданий, связанных с выбором простейшего для курса математики объекта — натурального числа. Во всех случаях выбирают двузначное число. Для понимания решения задачи 49.3 стоит начать с более простых задач 49.1 и 49.2.

49.3. Два ученика независимо друг от друга написали по одному двузначному натуральному числу. Найти вероятность того, что: а) эти два числа различны между собой; б) сумма чисел равна 100; в) сумма чисел не больше 25; г) сумма чисел больше 190.

Р е ш е н и е. а) Каждый из учеников *независимо* друг от друга выбирает одно число из 90 двузначных. Можно считать, что один ученик — первый, а другой ученик — второй. По правилу умножения всего имеется $N = 90 \cdot 90$ исходов такого выбора. Случаев, когда эти два числа совпадут между собой, имеется ровно 90: это пары (10; 10), (11; 11), ..., (99; 99). Значит, интересующее нас событие A произойдет в $N(A) = 90 \cdot 90 - 90$ случаях. По формуле подсчета вероятности получаем ответ:

$$P(A) = \frac{90 \cdot 90 - 90}{90 \cdot 90} = 1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90} \approx 0{,}989.$$

б) После выбора первого ученика выбор второго однозначен. Если первый выбрал число от 10 до 90, то второму надо выбрать недостающее до 100 слагаемое. Если первый выбрал число большее 90 (их всего 9), то при любом выборе второго сумма окажется больше 100, т. е. интересующее нас событие не произойдет. Значит, $N(A) = 90 - 9 = 81$ и $P(A) = \dfrac{81}{90 \cdot 90} = 0{,}01$.

в) Проведем перебор случаев. Первый ученик может выбрать число только от 10 до 15. При выборе числа больше 15 его сумма с двузначным числом, предложенным вторым учеником, будет больше 25. Если первый выбрал 10, то второй может выбрать любое число от 10 до 15 — всего 6 вариантов; если первый выбрал 11, то второй может выбрать любое число от 10 до 14 — всего 5 вариантов, и т. д. Если первый выбрал 15, то второй может выбрать только 10, т. е. имеется один вариант. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ случае и $P(A) = \dfrac{21}{90 \cdot 90} = \dfrac{7}{2700} \approx 0{,}0026$.

г) Проведем перебор вариантов. Если первый выбрал число от 10 до 91, то при любом выборе второго сумма не будет больше 190, поскольку даже в крайнем случае получаем $91 + 99 = 190$. Если первый выбрал 92, то второй может выбрать только 99 — один вариант; если первый выбрал 93, то второй может выбрать 98 или 99 — два варианта, и т. д. Если первый выбрал 99, то второй может выбрать любое число от 92 до 99 — восемь вариантов. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ случаях и $P(A) = \dfrac{36}{90 \cdot 90} = \dfrac{1}{225} \approx 0{,}044$.

Следующая задача геометрическая, но после нахождения количества нужных точек в круге сводится к обычной вероятностной задаче с конечным числом равновероятных между собой исходов. Более того, это задача на аккуратный перебор всех возможностей.

49.7. В круге с центром в начале координат и радиусом π случайно выбрали точку с целыми координатами. Найти вероятность того, что:

а) сумма координат точки больше 3;

б) произведение координат точки меньше 4;

в) точка лежит в круге с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$;

г) точка лежит вне треугольника с вершинами (0; 2), (−2; −2), (1; −2).

Решение. Точки (±3; 0) и (0; ±3), разумеется, расположены в круге, равно как точки (±2; 0), (0; ±2), (±1; 0), (0; ±1), (0; 0). Всего на осях координат 13 точек из круга.

Так как $1^2 + 1^2 < \pi^2$, $1^2 + 2^2 < \pi^2 < 1^2 + 3^2$ и $2^2 + 2^2 < \pi^2 < 2^2 + 3^2$, то в первой координатной четверти имеются следующие 4 точки из круга: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2). Так будет в каждой четверти, т. е. всего в круге находится $N = 13 + 4 \cdot 4 = 29$ точек с целыми координатами.

а) Только у одной точки (2; 2) сумма координат больше 3. Значит $N(A) = 1$ и $P(A) = \frac{1}{29} \approx 0{,}0345$.

б) Только у двух точек (2; 2) и (−2; −2) произведение координат не меньше 4. Значит $N(A) = 27$ и $P(A) = \frac{27}{29} \approx 0{,}93$.

в) В круге с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$ лежат такие точки с целыми координатами: (0; 0), (1; 0), (−1; 0), (0; 1), (0; −1), (1; 1), (−1; 1), (1; −1), (−1; −1).

Значит, $N(A) = 9$ и $P(A) = \frac{9}{29} \approx 0{,}31$.

г) В указанном треугольнике лежат 10 точек: (0; 2), (0; 1), (−1; 0); (0; 0), (−1; −1), (0; −1), (−2; −2), (−1; −2), (0; −2), (1; −2) (рис. 123).

Значит, вне треугольника находится 19 точек и $P(A) = \frac{19}{29} \approx 0{,}655$.

В задаче 49.8 совмещены две стандартные вероятностные модели: игральный кубик и составление двузначного числа выбором его цифр. На самом деле она «повторяет» задачу 49.3.

49.8. Двузначное число составляют так. Его первая цифра получается в результате первого бросания игрального кубика, грани которого пронумерованы цифрами от 1 до 6, а вторая цифра — в результате второго бросания этого кубика. Найти вероятность того, что это число:

а) состоит из разных цифр; б) больше 20; в) кратно 7; г) простое.

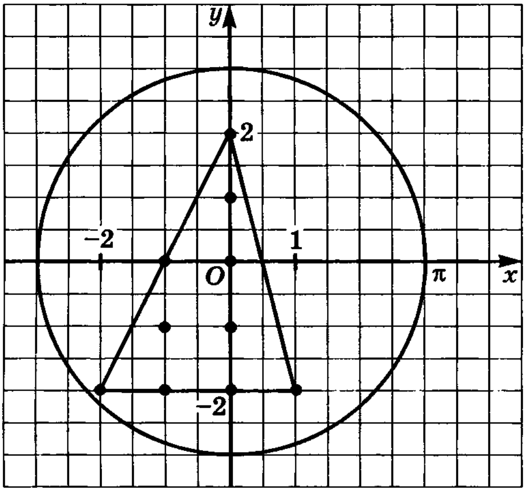


Рис. 123

Решение. Для первой, как и для второй цифры *независимо* имеются по 6 вариантов. Значит, $n = 6 \cdot 6 = 36$ — общее число исходов испытания.

а) Случаев, когда две цифры совпадут между собой, имеется ровно 6: это пары 11, 22, 33, 44, 55, 66. Значит, интересующее нас событие A произойдет в $N(A) = 36 - 6 = 30$ случаях и $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$.

б) Проще сосчитать числа, которые меньше 20. Их 6 — это 11, 12, 13, 14, 15, 16. Значит, $N(A) = 36 - 6 = 30$ и вероятность такая же, как в пункте а).

в) Кратны семи следующие числа: 14, 21, 35, 42, 56, 63. Значит, $P(A) = \frac{6}{36} \approx 0{,}167$.

г) Простыми будут такие числа: 11, 13, 23, 31, 41, 43, 53, 61, их 8. Значит, $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

Перед тем как производить вычисления по формуле $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, следует твердо усвоить формулу суммы $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ для количества элементов в объединении двух конечных множеств. Эта формула отрабатывается в задачах 49.9—49.12. Их можно было бы легко переделать в задания на вычисление вероятностей, но мы предпочли отдельно заниматься формулой суммы, а заодно повторить задачи на проценты.

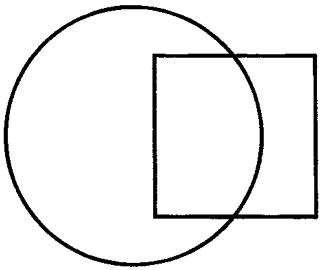


Рис. 124

49.11. У каждого из туристов есть тугрики или «еврики». У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только «еврики», а у 31% туристов есть обе валюты.

а) Сколько всего было туристов?

б) Сколько туристов имеют тугрики?

в) Сколько туристов имеют «еврики»?

г) Изменить в условии задачи 31% так, чтобы ответ в пункте а) стал наибольшим из всех возможных.

Решение. Используем диаграмму Эйлера. Условно изобразим в виде круга множество всех туристов, имеющих «еврики», а в виде квадрата — имеющих тугрики. Тогда в квадрате, но не в круге имеется ровно 100 человек; в круге, но не в квадрате, ровно 38 человек, а в пересечении находится 31% всех туристов (рис. 124).

а) $N = 138 + N(E \cap T) = 138 + 0{,}31N$. Значит, $0{,}69N = 138$, $N = 200$.

б) $N(T) = 100 + 0{,}31 \cdot 200 = 162$.

в) $N(E) = 38 + 0{,}31 \cdot 200 = 100$.

г) Заменим 31% на $x\%$. Тогда из а) получаем для числа N всех туристов:

$$N = 138 + \frac{x}{100}N; \quad \frac{100 - x}{100}N = 138; \quad N = \frac{13\,800}{100 - x}.$$

Число N натуральное, и оно будет наибольшим, если знаменатель $100 - x$ будет наименьшим среди всех знаменателей, при которых дробь примет целое значение. Значит, $100 - x = 1$, $x = 99$.

Следующая задача 49.12 по существу повторяет 49.11, но использует формулы суммы не для двух, а для трех множеств. Материал этот часто используется в математических олимпиадах и соревнованиях, но не входит в стандарт образования. Поэтому мы его приводим без каких-либо общих теорем и формул, а имеем дело с одним весьма простым частным случаем.

49.12. Каждый из 30 учеников умный или красивый. Красивых учеников всего 26, умных — 24; кроме того, 14 учеников — ростом выше 180 см.

а) Про скольких учеников гарантированно можно утверждать, что они умны, красивы и выше 180 см?

б) Каков будет ответ в пункте а), если известно, что все умные, но не красивые — ростом не выше 180 см?

в) Каков будет ответ в пункте а), если известно, что все красивые, но не умные — ростом выше 180 см?

г) Каков будет ответ в пункте а), если известно, что 12 умных учеников имеют рост выше 180 см?

Решение. По формуле суммы для двух множеств $30 = 26 + 24 - z$, где z — число тех учеников, которые и умны, и красивы. Значит, $z = 20$.

а) Если x — число тех учеников, которые и умны, и красивы, и высоки, то $20 + 14 - x$ — это число тех учеников, которые или высоки, или умны и красивы. Их не больше 30, т. е. $20 + 14 - x \leqslant 30$. Поэтому $x \geqslant 4$.

б) Число умных, но не красивых учеников $24 - 20 = 4$. Из 26 оставшихся учеников 20 — умные и красивые, и 6 — красивые, но не умные. Распределение 14 высоких учеников среди этих 26 может быть различным. Но как минимум 8 высоких учеников обязательно окажутся среди 20 умных и красивых. Рассуждая более формально, получаем: $20 + 14 - x \leqslant 26$. Поэтому $x \geqslant 8$.

в) Число красивых, но не умных учеников $26 - 20 = 6$. По условию все они — высокие. Значит, из 24 оставшихся учеников 20 — умные и красивые, 4 — умные, но не красивые и $8 = 14 - 6$ — высокие. Распределение восьми высоких учеников среди этих 24 может быть различным. Но как минимум 4 высоких ученика обязательно окажутся среди 20 умных и красивых. Рассуждая более формально, получаем: $20 + 8 - x \leqslant 24$. Поэтому $x \geqslant 4$.

г) Решение аналогично: $20 + 12 - x \leqslant 24$. Поэтому $x \geqslant 8$.

Ответ: а) 4; б) 8; в) 4; г) 8.

Задания на простейшую алгебру событий не вызывают сложностей у учеников с достаточной логической подготовкой. Все же несколько самых простых упражнений необходимы для всех: сильные ученики проверят свои силы, а тем, кому эти обозначения в новинку, такие упражнения помогут разобраться с вычислением произведения событий и переходом к противоположному событию.

49.15. Из чисел 0, 1, 2, ..., 9 выбирают одно. Рассматриваются события: A — выбрано четное число; B — это число больше 7; C — это ненулевое число, кратное 3; D — это или 1, или 4, или 9. Описать события:

а) AB; б) CD; в) BC; г) $ABCD$.

Решение. а) Чисел больше семи всего два: 8 и 9. Из них только 8 четное. Значит, AB — это выбор числа 8.

б) Среди чисел 1, 4, 9 только одно число кратно трем. Значит, CD — это выбор числа 9.

в) Чисел больше семи всего два: 8 и 9. Из них только 9 кратно трем. Значит, BC — это выбор числа 9.

г) Если произошло событие $ABCD$, то произошло и событие BC (выбор числа 9), и событие A (выбор четного числа). Ясно, что это несовместные события. Значит, событие $ABCD$ невозможно.

Задания 49.17—49.22 относятся к так называемой «урновой» схеме. В них разноцветные шары вытаскивают из темного ящика и подсчитывают вероятности различных событий. Наряду с собственно вычислением вероятностей, в некоторых из этих задач необходимы также знания о поведении дробно-линейной функции и простейшая техника нахождения пределов.

49.18. В темном ящике n выигрышных билетов и n проигрышных, $n > 2$. Вы случайно вытаскиваете 3 билета.

а) Найти вероятность того, что есть ровно один проигрышный билет.

б) Доказать, что эта вероятность убывает с ростом n.

в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?

г) Найти n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,4.

Решение. а) Общее число N исходов испытания равно C_{2n}^3. Интересующее нас событие A наступает тогда, когда из n выигрышных билетов вытаскивают 2, а из n проигрышных билетов вытаскивают 1 билет. Значит, $N(A) = C_n^2 \cdot C_n^1$,

$$P(A) = \frac{C_n^2 \cdot C_n^1}{C_{2n}^3} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot n}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}} = \frac{3n}{4(2n-1)}.$$

б) $\frac{3n}{4(2n-1)} = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$; ясно, что чем больше n, тем меньше дробь $\frac{1}{2n-1}$.

в) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{3n}{4(2n-1)}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375.$

г) Решив неравенство $\frac{3n}{4(2n-1)} < \frac{2}{5}$, получим: $n > 8$; это неравенство верно для всех натуральных значений n начиная с 9.

Задание 49.19 несколько ближе к статистике, нежели к обычной математике. Тут требуется использовать технику сведения ответов в подходящую таблицу.

49.19. В темном ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно n билетов, $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Найти вероятность $p(n)$ того, что у вас есть ровно один выигрышный билет. Численные результаты собрать в таблицу.

Решение. Аналогично предыдущей задаче можно найти вероятность $p(n)$ получения ровно одного выигрыша при вытаскивании n билетов: $p(n) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_4^{n-1}}{C_9^n}$. Ясно, что при $n > 5$ выигрышей будет как минимум два, т. е. интересующее нас событие не произойдет. Для $1 \leqslant n \leqslant 5$ осталось провести вычисления:

$$p(1) = \frac{5 \cdot 1}{9} = \frac{5}{9};\ p(2) = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9};\ p(3) = \frac{5 \cdot 6}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}} = \frac{5}{14};$$

$$p(4) = \frac{5 \cdot 4}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24}} = \frac{10}{63};\ p(5) = \frac{5 \cdot 1}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{5}{126}.$$

Ответ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{5}{126}$	0	0	0	0

Задание 49.22 является вариацией уже разобранного задания 49.18.

49.22. В темном ящике n белых и $n - 1$ черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара.

а) Найти вероятность того, что имеется как минимум три белых шара.

б) Доказать, что эта вероятность убывает с ростом n.

в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?

г) Найти n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,35.

Решение. а) Общее число N исходов испытания равно C_{2n-1}^4. Интересующее нас событие A наступает тогда, когда из n белых шаров вытаскивают 3 или 4 шара, а из $n - 1$ черных шаров вытаскивают, соответственно, 1 шар или не вытаскивают ни одного шара. Значит, $N(A) = C_n^3 \cdot C_{n-1}^1 + C_n^4 \cdot C_{n-1}^0$,

$$P(A) = \frac{C_n^3 \cdot (n-1) + C_n^4}{C_{2n-1}^4} =$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}{\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{24}} =$$

$$= \frac{4n(n-1) + n(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)} = \frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)}.$$

б) $\frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{5n-7}{2n-3} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{2n-3}\right).$

Ясно, что чем больше n, тем меньше дроби $\frac{1}{2n-1}$ и $\frac{1}{2n-3}$, т. е. $P(A)$ убывает.

в) Из пункта б) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)}\right) = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$

г) Решая неравенство $\frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)} < \frac{35}{100}$, получим: $n^2 - 7n + 7 > 0$; $n > \frac{7 + \sqrt{21}}{2}$. Это неравенство верно для всех натуральных значений n начиная с $n = 6$.

Задания 49.23—49.25 по своей структуре подобны задачам с «урновой» схемой. Только теперь используется другая стандартная вероятностная модель: бросания идеальной игровой монеты.

49.25. а) Какова вероятность того, что при n бросаниях монеты «решка» выпадет хотя бы один раз?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной «решки» будет больше 0,999?

Решение. а) При каждом из n *независимых* бросаний монеты возможны ровно 2 исхода. Значит, по правилу умножения всего имеется $N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$ исходов. В одном-единственном из них не будет ни одной «решки». Поэтому интересующее нас событие A наступит в $N(A) = 2^n - 1$ исходах и $P(A) = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$.

б) С возрастанием n числа 2^{-n} уменьшаются, а потому вероятность $P(A) = 1 - 2^{-n}$ возрастает.

в) Так как $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty}(1 - 2^{-n}) = 1$, т. е. с ростом числа бросаний практически несомненно, что «решка» появится хотя бы один раз.

г) $1 - 2^{-n} > 0{,}999$; $0{,}001 > 2^{-n}$; $1000 < 2^n$; $10 \leqslant n$.

Все задачи этого параграфа, связанные с переходом к пределу при $n \to \infty$, по существу являются иллюстрацией простейших примеров явления *статистической устойчивости*.

49.27. Каждый из n учеников независимо друг от друга написал по одной цифре от 0 до 9.

а) Какова вероятность того, что среди написанных цифр будет хотя бы одна цифра 5?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной цифры 5 будет больше вероятности ее отсутствия?

Решение. Схематично повторим решение предыдущей задачи.

а) $N = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n} = 10^n$, $N(A) = N - \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{n} = N - 9^n$,

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N} = \dfrac{10^n - 9^n}{10^n} = 1 - 0{,}9^n$.

б), в) С возрастанием n вероятность $P(A) = 1 - 0{,}9^n$ монотонно возрастает и стремится к 1.

г) $1 - 0{,}9^n > 0{,}5$; $0{,}5 > 0{,}9^n$; $7 \leqslant n$, так как $0{,}9^6 \approx 0{,}531$, а $0{,}9^7 \approx 0{,}478$.

Ответ: а) $1 - 0{,}9^n$; б) возрастает; в) 1; г) 7.

49.28. Буквы русского алфавита написаны на карточках. Вы случайно вытаскиваете одну карточку, читаете букву, возвращаете карточку и повторяете выбор. Как только появится гласная буква — процедура заканчивается. (В русском алфавите 33 буквы, из них 10 гласных.)

а) Какова вероятность того, что никаких повторений не потребуется?

б) Какова вероятность того, что хватит двух повторений?

в) Какова вероятность того, что хватит ровно n повторений?

г) Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

Решение. а) $N = 33$, $N(A) = 10$, $P(A) = \dfrac{10}{33} \approx 0{,}303$.

б) Двух повторений хватит, если в первый раз выбрана согласная буква, а во второй раз — гласная. В этом случае $N = 33^2$, $N(A) = 23 \cdot 10$, $P(A) = \dfrac{230}{1089} \approx 0{,}211$.

в) Ровно n повторений хватит, если в первые $(n - 1)$ повторений была выбрана согласная буква, а в последний, n-й раз — гласная. В этом случае $N = 33^n$, $N(A) = 23^{n-1} \cdot 10$, $P(A) = \dfrac{23^{n-1} \cdot 10}{33^n} =$

$= \dfrac{10}{33} \cdot \left(\dfrac{23}{33}\right)^{n-1}$.

г) С возрастанием n найденная в пункте в) вероятность стремится к нулю.

Заключительная в этой теме задача является упражнением на использование формулы из теоремы 3 соответствующего параграфа учебника, которая заключается в следующем. Пусть p — вероятность события A в некотором испытании, и пусть это испытание независимым образом повторяют n раз. Тогда вероятность того, что событие A наступит хотя бы в одном из n повторений, равна $1 - (1 - p)^n$.

49.30. Найти вероятность p встречи с контролером при одной поездке, если известно, что вероятность хотя бы одной встречи:

а) при трех поездках равна 0,875;

б) при четырех поездках равна 0,9984;

в) при пяти поездках равна 0,98976;

г) при шести поездках равна 0,468559.

Решение. Разумеется, мы имеем тут дело с *моделью* реальности. Предполагается, что вероятность p попасться контролеру одна и та же при каждом из нескольких *независимых* повторений этого рискованного испытания.

а) Так как испытание повторяется 3 раза ($n = 3$), то по формуле из теоремы 3 получаем:

$$0{,}875 = 1 - (1 - p)^n;\ (1 - p)^3 = 0{,}125;\ p = 0{,}5.$$

б) Так как испытание повторяется 4 раза ($n = 4$), то по формуле из теоремы 3 получаем:

$$0{,}9984 = 1 - (1 - p)^4;\ (1 - p)^4 = 0{,}0016;$$

$$(1 - p)^4 = 0{,}2^4;\ 1 - p = 0{,}2;\ p = 0{,}8.$$

в) $0{,}98976 = 1 - (1 - p)^5;\ (1 - p)^5 = 0{,}01024 = 0{,}4^5;$

$$1 - p = 0{,}4;\ p = 0{,}6.$$

г) $0{,}468559 = 1 - (1 - p)^6;\ (1 - p)^6 = 0{,}9^6;\ 1 - p = 0{,}9;$

$$p = 0{,}1.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10 класс
(профильный уровень)

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский.* Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректор *И. Б. Копылова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 1437

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14