

**Дырда В.И., Гребенюк С.Н., Гоменюк С.И.**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ**

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ГЕОТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ  
И СПОРТА УКРАИНЫ  
ЗАПОРОЖСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Дырда В.И., Гребенюк С.Н., Гоменюк С.И.**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ**

**Днепропетровск-Запорожье**

**2012**

УДК: 539.37; 519.632.4

ББК: 22.51

Д 901

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук профессор *В.И. Пожуев*  
д-р физ.-мат. наук профессор *В.И. Кузьменко*

*Рекомендовано к печати Ученым советом  
Запорожского национального университета*

**Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей /  
В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск-Запорожье:  
ЗНУ, 2012. – 370 с.**

**ISBN 966-00-0050-**

Представлены экспериментальные исследования механических свойств резин. Изложены аналитические и приближенные методы расчета резиновых деталей, даны практические рекомендации при проектировании резиновых деталей. Рассмотрено развитие метода трехмерных конечных элементов и его модификации – моментной схемы конечных элементов в механике слабосжимаемых материалов. Представлены результаты расчета ряда резиновых деталей аналитическими и численными методами.

Для научных и инженерно-технических работников, специалистов в области механики и численных методов, преподавателей, аспирантов и студентов университетов.

Представлені експериментальні дослідження механічних властивостей гуми. Викладені аналітичні та наближені методи розрахунку гумових деталей, надані практичні рекомендації при проектуванні гумових деталей. Розглянуто розвиток методу тривимірних скінченних елементів та його модифікації – моментної схеми скінченних елементів у механіці слабкостисливих матеріалів. Представлені результати розрахунку низки гумових деталей аналітичними та чисельними методами.

Для наукових і інженерно-технічних працівників, фахівців у галузі механіки і чисельних методів, викладачів, аспірантів і студентів університетів.

ISBN 966-00-0050-

© В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк,  
С.И. Гоменюк, 2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Успехи современного машиностроения, транспорта, строительства и многих других областей во многом обязаны расширению области применения, как традиционных конструкционных материалов, так и созданию на их основе новых материалов. Среди таких материалов можно выделить эластомеры (резины, полиуретаны).

Резина – конструкционный материал, обладающий рядом специфических свойств, в совокупности нехарактерных для традиционных материалов. К таким специфическим свойствам резин можно отнести: высокую механическую прочность с высокой эластичностью, слабую сжимаемость, вязкоупругость, значительное тепловыделение в процессе циклического деформирования и ряд других. Благодаря этим свойствам, резины находят широкое применение в качестве ответственных элементов конструкций, таких как защитные футеровки, шины, транспортные ленты, уплотнительные прокладки, демпферы, подвески, муфты, шарниры, амортизаторы сложной геометрической формы, подшипники и другие. Упомянутые элементы широко применяются в самолетостроении, ракетостроении, вибрационной технике, сельскохозяйственном машиностроении, и находятся, как правило, в сложном трехмерном напряженно-деформированном состоянии.

Описание такого состояния требует составления адекватных математических моделей исследуемых объектов, разработки специальных методов и алгоритмов решения таких задач, которые выделяются

в новое направление механики деформируемого твердого тела – механику эластомеров.

Настоящая монография посвящена результатам многолетних исследований в области экспериментального изучения свойств резин, развитию упрощенных аналитических методов расчета параметров резиновых элементов конструкций, и созданию эффективных численных методик расчета таких изделий.

Первая глава монографии посвящена экспериментальному исследованию различных механических свойств широкого класса отечественных марок резин. На основе термодинамического подхода описываются процессы деформирования резиновых изделий. Большое внимание уделено описанию законов вязкоупругого поведения резин и экспериментальному определению реологических параметров широкого спектра резин.

Во второй главе описываются аналитические и эмпирические методы и подходы к расчету конкретных резиновых деталей, даются рекомендации при проведении инженерных расчетов.

В третьей главе описывается один из наиболее эффективных численных методов расчета элементов конструкций – метод конечных элементов и особенности его применения при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) резиновых конструкций. Особое место уделено численной реализации метода конечных элементов на в рамках программного комплекса «МИРЕЛА+», в частности визуальному представлению исходных данных и результатов расчета.

В четвертой главе представлены полученные с помощью программного комплекса «МИРЕЛА+» результаты расчета резиновых деталей, используемых в различных отраслях народного хозяйства Украины.

Авторы

г. Днепропетровск – г. Запорожье, май 2011 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Применение резиновых элементов в конструкциях позволяет повысить их производительность, долговечность, надежность, а также снизить вибрацию и материалоемкость. В ряде случаев резина на сегодняшний день незаменима.

Применение резин позволяет повысить их производительность, долговечность, надежность, а также снизить вибрацию и материалоемкость.

Резины относятся к гибким линейным полимерам с ярко выраженными высокоэластичными свойствами при обычных температурах. Это связано с тем, что их температура стеклования существенно ниже 0 °С. Резины представляют собой химически сшитые системы на основе каучуков. Жесткость резин намного ниже жесткости металлов.

Каучук, представляющий собой млечный сок гевеи и других каучуконосных растений, стал известен в Европе в начале XII века. Его необычные свойства вызвали закономерный интерес у экспериментаторов, но практическое использование носило несколько экстравагантный характер. Уже в 1823 г. Макинтош нашел способ растворять каучук в бензине, и это повлекло за собой создание производства непромокаемой одежды. В 1839 г. Ч. Гудьир и в 1843 г. Т. Гонкок изобрели способ обработки каучука серой, т.е. вулканизацию. Ч.Гудьiru также принадлежит способ изготовления твердой резины.

В начале XIX века началось серьезное изучение физико-механических свойств невулканизованного натурального каучука и резины. Резину на первых этапах исследований рассматривали как экзотический материал, обладающий специфическими свойствами, но имеющий ограниченное распространение в инженерной практике. Первые попытки применения резины в качестве конструкционного материала относятся к 40-м годам XIX века: вулканизованную резину стали использовать в качестве буферов железнодорожного подвижного состава.

После опытов Гафа по установлению зависимости свойств резины от температуры, опытов Сен-Венана по кручению резиновых об-

разцов, опытов Вертгейма по сжатию резиновых стержней и классических опытов Джоуля и Кельвина по термоупругим свойствам резины к концу XIX века начались систематические исследования резины и изделий на ее основе.

Буало в 1856 году провел опыты по сжатию набора резиновых дисков с металлическими прокладками между ними и отметил наличие релаксации и последействия. Винклер изучил напряженное состояние резины при одноосном сжатии и растяжении. Имбарт установил функциональную связь между напряжением и деформацией при растяжении резины и выполнил опыты по определению касательных модулей при обычных повышенных температурах. Пульфрих повторил опыты Вертгейма по определению коэффициента Пуассона и сжимаемости резины. Аналогичные опыты были проведены также Рентгеном и позже Шиллером; упруго-вязкие свойства резины определяли также Мэллок, Больцман, Тарстон и многие другие исследователи.

Эти научные достижения конца XIX века совпали с развитием автомобильного транспорта, тракторо- и танкостроения и других зарождающихся отраслей современного машиностроения. И уже в первой половине XX века эластомеры становятся конструкционным материалом, специфические свойства которого зачастую не только определяли кинематические и технологические свойства машин, но и являлись единственно возможным материалом, без которого машины просто не могли существовать. Примеров тому много, но мы ограничимся лишь развитием автомобильных шин и всевозможных прокладок и уплотнений.

Дальнейшая интенсификация работ в современной промышленности потребовала создания новых технологий, что, в свою очередь, привело к модернизации машиностроительной продукции и к созданию принципиально новых машин. Существенно повысились требования к энерго- и металлоемкости машин, к их надежности и долговечности, к экологической чистоте. С другой стороны, наметилась тенденция к интенсификации режимов работы машин, что привело к увеличению напряженности, износу, вредным колебаниям и т.д. Причем, речь шла не о единичных машинах, а о комплексе машин в различных отраслях промышленности:

сельскохозяйственной, горной, металлургической, химической, строительной, автомобильной и т.д. С учетом технологии работ в различных областях техники эти задачи решались разными методами: созданием принципиально новых конструкций машин, использованием новых конструкционных материалов, изменением технологии и т.д. Однако, неизменной для всей машиностроительной промышленности была концепция – введение в структурную схему машин упругих звеньев (виброизоляторов, компенсаторов сборки, износостойких покрытий и футеровок, упругих прокладок, демпферов и др.) из эластомеров – резин и полиуретанов. Эластомеры оказались уникальным конструкционным материалом, который в ряде случаев – шины, вибро- и сейсмоопоры, упругие связи, изделия медицины, прокладки и др. – невозможно заменить ни одним из существующих материалов.

Использование резиновых деталей позволяет: повысить в 2-3 раза производительность машин за счет интенсификации режима; снизить (до 50%) металлоемкость; в 2-10 раз повысить долговечность и надежность; снизить вибро- и сеймонапряженность машин и сооружений; создать принципиально новые конструкции машин.

Девиз современного машиностроения: количество резины, потребляемое отраслью, свидетельствует о степени развития отрасли.

На Украине традиционно развита фундаментальная и прикладная механика. Имеется мощный научно-технический и производственный потенциал развития резинотехнической, шинной и шиноремонтной отраслей, способный не только обеспечить потребности государства, но и в значительной мере выполнять поставки за его пределы, в т.ч. и за рубеж.

Особенно перспективно использование резины в вибрационной технике, и, прежде всего, в вибромашинах металлургического, аграрного, строительного и горного производства, которые благодаря наличию ряда ценных свойств позволяют решать сложные комплексные задачи по добыче, транспортированию и переработке различных материалов. Применение силовых резиновых деталей позволяет не только повысить производительность машин за счет интенсификации технологических процессов, но и обеспечить достаточно высокий уровень

надежности машин, уменьшить вибрацию и звуковое давление, снизить металлоемкость и т.д.

Вместе с тем, эффективность и надежность таких машин в значительной степени зависят от того, насколько полно учтены при проектировании их силовых элементов специфические особенности резины как конструкционного материала, наиболее полно проявляющиеся при экстремальных условиях нагружения.

К экстремальным условиям относятся высокие, длительное время действующие, стационарные циклические нагрузки, высокие и низкие температуры, агрессивное воздействие внешней среды (коррозионное воздействие, радиационное облучение и др.). При этом такие эффекты, присущие резине, как диссипативный разогрев, нестабильность свойств во времени и от действия различных эксплуатационных факторов приобретают существенное значение при выборе параметров и формы детали с заданными эксплуатационными характеристиками.

Экстремальные условия нагружения и особенности технологии обуславливают относительную простоту форм силовых резиновых деталей, представляющих, в основном, разные конструктивные вариации призматических и цилиндрических элементов.

Несмотря на значительные достижения в области конструирования резиновых деталей, простоту форм и большой опыт их использования в машинах, как у нас в стране, так и за рубежом до сих пор не созданы конструкции с заданными физико-механическими характеристиками и долговечностью. В этой связи большое значение имеют достаточно простые и точные методы расчета, которые могут быть использованы на стадии проектирования деталей.

Одним из наиболее эффективных методов расчета резиновых элементов конструкций является метод конечных элементов, относящийся к численным методам. Однако применение его традиционной схемы без учета особенностей деформирования резиновых деталей приводит к значительным погрешностям и не может быть использовано на практике.

Особая природа строения резин обуславливает специфические особенности их деформирования. В обычном состоянии нитевидные макромолекулы расположены в хаотичном равновесном состоянии.

Под действием нагрузки молекулы вытягиваются в процессе разгибания молекулярной цепи и приобретают ориентацию в направлении приложенной нагрузки. После снятия нагрузки система возвращается в исходное состояние. Степень вытягивания макромолекул пропорциональна величине прикладываемого напряжения. Если сетка молекул не разрушается, то после снятия нагрузки система восстанавливается до первоначального состояния, а между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, подчиняющаяся закону Гука. Диапазон линейной зависимости  $\sigma \sim \varepsilon$  в общем случае является функцией исходной смеси, степени наполнения, режима вулканизации и т.д. Для ненаполненных и слабонаполненных резин линейность может сохраняться до 80% деформаций и более, а для сильнонаполненных – лишь до 1–10%. Применимость закона Гука установлена для конкретных марок резины индивидуально.

При больших деформациях наблюдается нелинейное возрастание жесткости, что связано с вытягиванием молекулярных цепей и образованием зон кристалличности. Для описания поведения резин в области конечных деформаций необходимо использовать более точные законы состояния. К таким законам можно отнести законы Муни–Ривлина, Бертенева–Хазановича, Огдена, Линдли, Пенга–Ландела и др.

По высокоэластичным и упругим свойствам механические характеристики резины подразделяются на равновесные, действующие при установившемся стационарном состоянии, и кинетические, описывающие релаксационные процессы. Установившиеся равновесные деформационные процессы характеризуются равновесным модулем упругости  $E_\infty$  и модулем сдвига  $G_\infty$ , которые определяются экспериментально при очень малых скоростях нагружения, когда релаксационные процессы успевают завершиться и не оказывают заметного влияния на их величину.

Абсолютно упругое состояние материала описывается мгновенными значениями модулей  $E_0$  и  $G_0$ , которые определяются при достаточно высоких скоростях нагружения (ударная нагрузка, взрывная

волна и т.д.), или при низких температурах с использованием температурно-временной аналогии.

Для характеристики изменения объема вводится понятие модуля объемного сжатия  $K$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , которые связаны с модулем Юнга соотношением  $E = 3K(1 - 2\nu)$ . Практически полагают, что резина – несжимаемый материал при деформации в закрытом объеме и её коэффициент Пуассона  $\nu = 0,5$ . Большой класс так называемых тонкослойных резинометаллических элементов (ТРМЭ) вызывает необходимость учитывать слабую сжимаемость с реальным коэффициентом  $\nu = 0,48 \dots 0,4995$ , зависящим от наполнения.

Авторами выполнена большая работа по обобщению, систематизации и разработке оригинальных методов расчета термомеханических и усталостных характеристик резиновых деталей, работающих в экстремальных условиях, рассмотрены возможности использования инженерных методов, описывающих указанные характеристики в аналитической форме.

Даны конкретные примеры расчета и рекомендации по выбору рациональных марок резин, условий нагружения, допускаемых нагрузок и деформаций для наиболее распространенных резинотехнических изделий (РТИ).

## ГЛАВА 1. РЕЗИНА КАК КОНСТРУКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

### 1.1. Общие сведения о резине

При выборе рациональных параметров резиновых деталей машин большое значение имеет правильная оценка свойств технических резин, использующихся в современном машиностроении. Ассортимент таких резин, выпускаемых в нашей стране и за рубежом, а также некоторые свойства и нормированные показатели описаны в [23]. Из приведенных данных и опыта применения резины в горных машинах [80, 82], специфической особенностью которых являются экстремальные условия нагружения, следует, что наиболее приемлемыми в данной ситуации являются резины на основе натурального НК и синтетических СКИ-3, СКД, СКИ-3+СКД каучуков. Они достаточно прочны, эластичны, имеют высокое сопротивление истиранию, морозостойки, хорошо крепятся к металлам и поэтому широко применяются для изготовления ответственных резиноталлических деталей.

В связи с заменой в отечественном производстве РТИ натурального каучука стереорегулярными СКИ и СКД был проведен комплекс исследований резин на основе этих каучуков [81]. Рассматривался ряд рецептур, включающих различные типы и массовые содержания наполнителей и ингредиентов ускорительной группы. В результате для работы при длительном циклическом нагружении и высоких амплитудах нагружения была рекомендована слабонаполненная резина на основе СКИ-3 с эластопаром. Резина защищена авторским свидетельством (№ 609302) и серийно внедрена (шифр 51-1562). Основной состав этой резины приведен в табл. 1.1.

Разработка и внедрение резины 51-1562 явилось крупным шагом на пути создания надежных комплектующих деталей для вибрационных машин. Основным достоинством резины является стабильность свойств при воздействии разнообразных эксплуатационных факторов.

Так, при непрерывной наработке до 25 тыс. часов ее жесткостные свойства увеличились не более, чем на 15%.

Таблица 1.1 –

Основной состав и механические характеристики резин

Шифр резины	Тип каучука	Наполнение, мас. ч.		$G_0$ , МПа	$G_{дин}$ , МПа	$G_{\infty}$ , МПа	$\psi$
		оксид цинка	технич. углерод ТМ-15				
2959	НК	15	45	1,76	1,59	0,74	0,31
1378	СКИ+СКД	5	15	1,30	0,94	0,73	0,13
1224	НК	50	5	1,30	1,16	0,93	0,11
4з	СКИ-3	27	34	1,60	1,24	0,90	0,40
11-67Л	СКИ	20	15	1,50	0,88	0,78	0,35
11-59Л	СКИ-3	40	10	1,50	0,88	0,72	0,32
28Э	СКИ-3	10	20	1,70	1,23	1,12	0,30
310	СКИ-3	15	15	1,40	0,91	0,90	0,25
169	СКИ-3	5	20	1,50	1,23	0,93	0,30
51-1562	СКИ-3	5	5	0,78	0,72	0,51	0,17
51-1711	СКИ-3	5	15	1,30	1,02	0,71	0,50
51-1714	СКИ-3	5	20	2,00	1,40	1,10	0,90

Нормированные показатели резины 51-1562 приведены ниже [81]

Предел прочности при разрыве, МПа.....	28
Относительное удлинение, %.....	720
Остаточное удлинение, %.....	16
Твердость по Шору А.....	40
Динамический модуль при ударном растяжении, МПа.....	2,1
Теплообразование, К.....	309
Модуль внутреннего трения, МПа.....	0,22
Динамическая выносливость, тыс. циклов.....	970

Вместе с тем, эта резина является одной из самых низкомодульных, детали на ее основе отличаются значительными габаритами при требованиях высокой несущей способности, что обуславливает в ряде случаев использование более наполненных резин. Состав резин, достаточно широко используемых в горном машиностроении, приведен в табл.1.1 [78].

Общеизвестно, что все наполненные резины демонстрируют в процессе эксплуатации специфические особенности, которые необходимо учитывать при расчете резиновых элементов, выполненных из этих резин.

К основным особенностям механического поведения резины при деформировании относятся: способность к большим обратимым, так называемым высокоэластическим деформациям в широком интервале температур; относительно небольшие значения модулей при деформациях растяжения, сжатия, сдвига; практически постоянный объем; наличие комплекса релаксационных свойств; способность существенно изменять механические свойства во времени и под действием внешней агрессивной среды; значительная диссипация энергии при циклических деформациях и т.д.

Учет этих особенностей при расчетах силовых резинотехнических изделий (РТИ) производится при следующих предположениях относительно свойств резины [57].

**Однородность.** Это предположение справедливо при исследовании резиновых массивов, объем которых значительно больше размеров неоднородных частиц (наполнителей и т.д.), составляющих его. Так как наименьший исследуемый объем содержит очень большое количество неоднородных частиц, можно на основании закона больших чисел принять, что усредненные показатели для объема являются постоянными. Этими постоянными обычно пользуются при расчетах силовых РТИ в рамках методов теории упругости и термовязкоупругости.

**Изотропность.** Предполагается, что резина является изотропным материалом, т.е. свойства ее во всех направлениях одинаковы. Незначительные отличия, возникающие из-за технологических особенностей изготовления РТИ, обычно меньше, чем точность расчета.

**Несжимаемость.** Технические резины практически несжимаемы. Коэффициент Пуассона  $\nu$  для них мало отличается от 0,5, а модуль упругости  $E$ , находящийся в основе статических и динамических расчетов резиновых элементов, и модуль сдвига  $G$  связаны соотношением  $E = 2(1 + \nu) = 3G$ . Вследствие несжимаемости в области малых деформаций (до 10-15%) упругие свойства резины полностью характеризуются одной постоянной – модулем сдвига  $G$ . При этом зависимость сила-осадка (деформация) линейна и для необходимых расчетов используется закон Гука.

Для тонкослойных элементов при малых деформациях необходим учет второй постоянной материала – объемного модуля сжатия  $K$ . Для большинства резин  $G = (0,6 - 2)$  МПа,  $K = (2 - 3) \cdot 10^3$  МПа.

При возрастании деформаций зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Для значений деформаций, меньших 50%, достаточную точность при расчетах силовых РТИ обеспечивает допущение, что удельная потенциальная энергия пропорциональна первому инварианту деформаций:

$$W = G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3).$$

Эта зависимость в качестве единственной постоянной содержит модуль сдвига  $G$ .

Проектировать конструкции, работающие при  $\varepsilon > 0,5$  не рекомендуется, так как в этом случае не удастся обеспечить достаточную долговечность резиновых элементов.

Значения модулей при статическом нагружении определяются согласно существующим стандартам, методикам измерений с использованием стандартной аппаратуры [79].

Имелись попытки установить некоторую корреляционную связь между твердостью и другими характеристиками материала, например, модулем Юнга, сдвига и т.д. Такая связь наблюдалась и были построены некоторые обобщенные кривые. Так, для резин из натурального каучука предложена следующая зависимость между модулем упругости и твердостью [82]

$$E = 3,57e^{0,033H}.$$

Для наполненных резин на основе СКИ-3 имеет место аналогичная зависимость [70]

$$G = 0,12e^{0,0391H},$$

где  $H$  – твердость в единицах по Шору А, значение модуля измеряется в МПа.

Вместе с тем, твердость как механическая характеристика резин при расчетах РТИ до настоящего времени не используется.

**Диссипативный разогрев.** Вязкоупругие свойства резины, обуславливающие существенные потери механической энергии, особенно при циклическом деформировании, а также низкая теплопроводность резин, препятствующая отводу тепла, приводят к существенному диссипативному разогреву. Уровень теплообразования в РТИ зависит от физико-механических свойств резины, режима нагружения, условий теплообмена с окружающей средой и т.д. В ряде случаев диссипативный разогрев является причиной разрушения РТИ, и в этой связи важными являются прикладные методы расчета, позволяющие проектировщику предсказать развитие процессов теплообразования в РТИ. При этом следует учитывать, что для исследуемых резин существует критическое значение температуры  $T_{кр} \approx 413 K$ , превышение которой обуславливает процессы термодеструкции, термическое разложение резины и другие отрицательные явления, пагубно сказывающиеся на свойствах РТИ.

Необходимые при расчете теплофизические свойства резин (коэффициент теплопроводности –  $\lambda_p$ , удельная теплоемкость –  $c_p$ , коэффициент температуропроводности –  $a_T$ ) приведены в табл. 1.2 [36, 81].

Анализ теплофизических свойств резины позволяет сделать следующие выводы: коэффициент температуропроводности резины с ростом температуры уменьшается, объемная теплоемкость возрастает, а коэффициент теплопроводности в пределах погрешности эксперимента можно полагать постоянным.

Коэффициент теплопроводности, использующийся при описании стационарных тепловых процессов, может быть рассчитан (при

изменении объемного содержания технического углерода  $\omega'$  в пределах 0,05-0,50) по аналитической формуле [17]

$$\lambda_p = \lambda_0 + \gamma\omega',$$

где  $\lambda_0$  – теплопроводность ненаполненного вулканизата,  $\gamma$  – коэффициент, зависящий от типа технического углерода.

Таблица 1.2 –

Теплофизические параметры резин

Резина	Теплофизические параметры	Значения параметров при температуре, К					
		293	313	333	353	373	413
На основе СКИ-3 + 3 ÷ 15 мас. ч. тех. Углерода	$\lambda_p, \frac{Вт}{м \cdot К}$	0,150	0,155	0,155	0,159	0,159	0,163
	$c_p \cdot 10^{-6},$	1,844	1,927	1,969	2,053	2,095	2,221
	$\frac{Дж}{(м^3К)}$ $a_T \cdot 10^7 м^2/с$	0,810	0,800	0,780	0,770	0,760	0,750
На основе НК + 45 мас. ч. тех. Углерода	$\lambda_p, \frac{Вт}{м \cdot К}$	0,235	0,235	0,239	0,243	0,243	0,247
	$c_p \cdot 10^{-6},$	1,676	1,802	1,927	2,011	2,179	2,430
	$\frac{Дж}{(м^3К)}$ $a_T \cdot 10^7 м^2/с$	1,390	1,310	1,230	1,160	1,100	0,990
На основе СКИ-3 + 50 мас. ч. тех. Углерода	$\lambda_p, \frac{Вт}{м \cdot К}$	0,268	0,268	0,268	0,264	0,264	0,264
	$c_p \cdot 10^{-6},$	1,760	1,844	1,866	1,927	2,011	2,137
	$\frac{Дж}{(м^3К)}$ $a_T \cdot 10^7 м^2/с$	1,510	1,460	1,410	1,370	1,320	1,250

Экспериментальные исследования коэффициента теплопроводности резины на основе СКИ-3 в зависимости от степени наполнения техническим углеродом и температуры окружающей среды проводились на установках типа Instron. Исследуемые образцы имели форму диска диаметром 15 мм, толщиной 0,5-0,6 мм. Они изготавливались на основе каучука СКИ-3 с различным наполнением техническим угле-

родом (5, 15, 30, 45, 60, 70 мас. частей). Коэффициент теплопроводности измеряли на промышленной установке ИТЛ-400 в нестационарном, регулярном режиме II-го рода [77, 87].

В результате обработки экспериментальных данных подтвержден факт независимости коэффициента теплопроводности от температуры: максимальное отклонение значения  $\lambda_p$  в диапазоне температур от 293 до 373 К составляет 3-4%.

Максимальная относительная погрешность измерений не превышала 7%; при этом изменение коэффициента теплопроводности при изменении технического углерода в пределах 0,05-0,075 близко к линейному и может быть описано зависимостью

$$\lambda_p = \lambda_0 + \alpha \frac{\omega'}{100},$$

где  $\lambda_0 = 0,15$  Вт/(м·К);  $\alpha = 0,22 \pm 0,02$ .

**Старение.** Необратимые изменения физико-механических свойств резиновых и резиноталлических элементов, происходящие под действием как длительно действующих циклических нагрузок, так и от действия разнообразных немеханических факторов, таких как свет, тепло, ионизирующее излучение и другие агрессивные среды, принято характеризовать термином старение.

На рис.1.1 приведены временные зависимости динамического модуля сдвига  $G$  и коэффициента диссипации  $\psi$  для резины 51-1562. Точка  $C$  на кривой  $G \sim t/t^*$  соответствует времени разрушения  $t^* = 32-40$  тыс.ч. Такому же состоянию соответствуют и точки  $A$  и  $B$  на кривой  $\psi \sim t/t^*$ . Заштрихованная область соответствует времени вероятного появления усталостных трещин. Графики построены для амплитуды относительного сдвига 0,12 и частоты циклического деформирования 11 Гц.

В общем случае при расчета силовых РТИ в предположении, что свойства материала являются медленно изменяющимися функциями времени, старение может быть учтено феноменологически, т.е. заменой упругих постоянных соотношениями типа [81]

$$G(t) = G^* \left\{ 1 + \frac{G^{**} - G^*}{G^*} [1 - \exp(-nt)] \right\}, \quad (1.1)$$

где  $G^{**}$  – модуль сдвига при максимальном времени старения резины;  $G^*$  – начальное значение модуля;  $n$  – параметр, зависящий от физико-механических свойств резины и условий нагружения;

$$G(D) = G_1 \left\{ 1 + \frac{G_2 - G_1}{G_1} [1 - \exp(-\alpha D^\xi)] \right\}, \quad (1.2)$$

где  $G_1$  – модуль сдвига необлученного образца;  $G_2$  – модуль сдвига образца при максимальной дозе облучения;  $D$  – доза облучения;  $\alpha$ ,  $\xi$  – параметры, зависящие от типа резины, действия внешней среды и т.д.

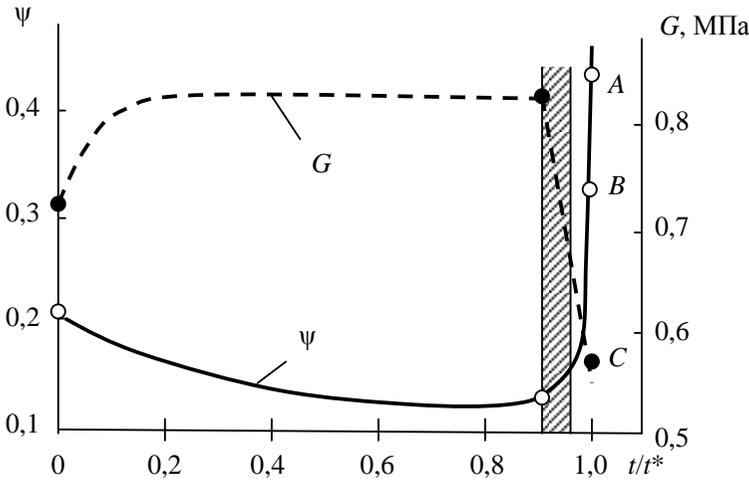


Рис. 1.1. Временные зависимости динамического модуля  $G$  и коэффициента диссипации  $\psi$

**Долговечность.** Оценка долговечности силовых резиновых элементов в экстремальных условиях нагружения производится в соответствии с энергетическим критерием разрушения, критерием разру-

нения по величине развивающейся поврежденности, а также по критериям максимально допустимых температур и напряжений.

В первом случае критериальными величинами, характеризующими разрушение резины, являются критическое значение энергии разрушения  $\Delta u_{\delta}^*$  и коэффициент тепловых потерь  $\gamma$ , показывающий, какая часть механической энергии переходит в тепло.

Значения этих параметров, полученные в результате длительных промышленных (более 20 лет) испытаний [37], а также специальных лабораторных исследований [34] для некоторых резин приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3 –

Параметры долговечности

Тип резины	Частота, с <sup>-1</sup>	Амплитуда деформации	$\gamma$	$\Delta u_p^* \cdot 10^{-12}$ , Дж/м <sup>3</sup>
2959	51,3	0,17	0,48	0,20
51-1562	74,9	0,30	0,82	1,00
169	59,4	0,21	0,46	0,10
169	59,4	0,26	0,41	0,10
274	59,4	0,18	0,79	5,00
СКИ+СКД	39,6	0,13	0,31	0,05

Следует отметить, что исследования параметров  $\Delta u_p^*$  и  $\gamma$  в диапазонах частот 20-50 Гц, амплитуд деформация 0-10% не выявили их существенного отклонения от приведенных в таблице. Отмечается зависимость параметра  $\Delta u_g^* = \Delta u_p^* / (1 - \gamma)$  от температуры для всех резин кроме 51-1562 и ее аналога 274. Эта зависимость может быть описана экспоненциальными функциями [31, 37]

$$\Delta u_g^* = \Delta u_g^0 \exp(A_1/T - A_2), \quad (1.3)$$

где параметры  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\Delta u_g^0$  определяются типом резины.

Для резин типа 169 и 2959 при условии, что  $T$  измеряется в градусах Кельвина, имеют место следующие значения:

$$\Delta u_g^0 = 10^{12} \text{ Дж/м}^3; A_1 = 1894 \text{ К}; A_2 = 6,47.$$

Значения микроструктурных параметров резин, необходимые для реализации критерия разрушения по величине развивающейся поврежденности, достаточно подробно описаны в работах [37, 38, 79].

Инженерные методы расчета силовых РТИ при экстремальных условиях нагружения основаны на использовании допускаемых значений отдельных характеристик параметров РТИ в соответствии с требованиями  $T \leq T_{дон}$ , где  $T_{дон}$  практически для всех технических резин находится в пределах (323-343) К.

Все перечисленные в этой главе свойства резины учитываются при создании прикладных методов расчета РТИ. Конкретные значения параметров, характеризующих механические, теплофизические и усталостные свойства резины, приведенные выше, получены на основании экспериментальных данных и общепринятых представлений о резине как конструкционном материале.

## **1.2. Применение концепций термодинамики необратимых процессов к механике деформирования и разрушения резин**

**Общие сведения.** К предмету термодинамики необратимых процессов и статистической физики относят явления, отличительной чертой которых является так называемый эволюционный характер внутренних процессов. Очевидно, что процессы разрушения, охватывающие все разнообразие явлений материального мира, по своему характеру являются процессами всеобщими и эволюционными, существенным образом неравновесными и нелинейными. В целом можно говорить, что процесс разрушения является одним из проявлений эволюции материалов, в то время как само эволюционное развитие является всеобщим свойством материального мира.

Идеи эволюции впервые были введены в физику в виде второго начала термодинамики. В 1924 г. Сади Карно опубликовал труд «Размышление о движущейся силе огня и о машинах, способных развивать эти силы». В нем была сформулирована теорема о коэффициенте полезного действия (к.п.д.) тепловых машин, работающих по фундаментальному циклу, названному впоследствии циклом Карно. Позднее Клаузиус и В. Томпсон по-новому обосновали эту теорему и создали современную формулировку второго начала термодинамики. Уже тогда стала выясняться фундаментальная связь между эволюционным развитием и процессами диссипации (рассеяния энергии). Работа, в которой Томпсон впервые дал общую формулировку второго начала, носила название «Об универсальной тенденции в природе к диссипации механической энергии» (1852). В своем общем виде второе начало применимо как для описания равновесных, так и для неравновесных процессов. Однако долгое время неравновесные процессы трактовались как некоторые случайные отклонения систем от фундаментального равновесного поведения. Обоснованием такой точки зрения, как это неудивительно, являлось одно из следствий второго начала термодинамики, которое исторически послужило толчком в создании этого начала. Теорема о к.п.д. тепловых двигателей утверждает, что максимальное к.п.д. будет иметь тот двигатель, во всех циклах которого устранены неравновесные процессы, т.е. устранена диссипация энергии.

Прошло немало времени прежде чем утвердилась иная точки зрения. Очевидно, это произошло в 1931 г., когда Онзагером было установлено соотношение взаимности и сформулирован принцип наименьшего рассеяния энергии. Эти открытия сделали возможным описание термодинамических неравновесных процессов, по крайней мере, вблизи состояния равновесия системы, и легли в основу линейной термодинамики необратимых процессов. И. Пригожин отметил в этой связи следующее: «Важность соотношений Онзагера впервые показала, что неравновесная термодинамика так же, как и равновесная термодинамика, приводит к общим результатам, не зависящим от выбора конкретной молекулярной модели. Открытие соотношений по

праву может считаться поворотным пунктом в истории термодинамики» [11].

Термодинамика и статистическая физика изучают свойства систем, состоящих из большого числа частиц. К таким макроскопическим системам относятся и эластомеры. Как известно, эластомеры представляют собой длинные подвижные нитеобразные молекулы, связанные между собой случайными поперечными связями-сшивками. Отдельные части длинных молекул, образующих молекулярную сетку, обладают высокой подвижностью, вызванной в основном броуновским изменением большого числа конфигураций посредством вращения вокруг одиночных валентных связей главной оси. Марк и Гут впервые стали рассматривать эти подвижные сегменты как независимые кинетические единицы. Это предположение впоследствии стало общепринятым [113]. Так как число сегментов в макроскопических частях эластомера велико, то эластомеры можно рассматривать как макроскопическую систему. Эластомеры в фазовом отношении имеют сложную структуру и относятся к так называемым гетерогенным системам. Все макроскопические величины, характеризующие такие системы и их связи с окружающими телами, называют макроскопическими параметрами. К ним относятся плотность, объем, модуль упругости и т.д. Макроскопические параметры разделяются на внешние и внутренние. Величины, определяемые положением тел, не входящими в состав эластомера, называются внешними параметрами. Внутренними параметрами называются величины, определяемые совокупным движением и распределением в пространстве, входящих в систему частиц. Такими величинами являются плотность, давление, энергия и т.д. В термодинамике и статистической физике предполагается, что пространственное расположение частиц зависит от расположения внешних тел таким образом, что внутренние параметры определяются совокупным движением частиц макроскопической системы и значением внешних параметров.

Совокупность скоростей и положений сегментов образует микроскопические параметры эластомера. Величины, не зависящие от предыстории эластомера и полностью определяемые его состоянием в данный момент, а, следовательно, и совокупностью микроскопических

параметров, называются функциями состояния. Стационарным называется такое состояние системы, когда параметры не меняются со временем. Нестационарным, соответственно, называется состояние системы, параметры которой зависят от времени.

Внутренние параметры разделяются, кроме того, по их зависимости от числа кинетически свободных сегментов эластомера. Параметры, не зависящие от массы эластомера или числа сегментов полимерной сетки, называются интенсивными величинами. К ним относятся давление, температура и др. Параметры, прямо пропорциональные массе эластомера или числу кинетически свободных сегментов, являются аддитивными или экстенсивными. Таковыми являются энергия, энтропия и др. Очевидно, что экстенсивные параметры характеризуют эластомер как целое, в то время как интенсивные параметры могут характеризовать каждую точку эластомера.

Описание поведения эластомера в термодинамике и статистической физике основано на том, что реализуемость его микроскопического состояния носит вероятностный характер. Наиболее вероятными микросостояниями являются состояния термодинамического равновесия. Вероятностное поведение эластомера, как и всякой термодинамической системы, является отличительной чертой теплового движения, отличающее его от детерминистического поведения, рассматриваемого в классической механике.

Одним из важнейших постулатов термодинамики и статистической физики является постулат о транзитивности термодинамического равновесия. Если из трех термодинамически равновесных систем  $A$ ,  $B$ ,  $C$  системы  $A$  и  $B$  порознь находятся в состоянии термодинамического равновесия с системой  $C$ , устанавливаемой посредством теплового контакта, то системы  $A$  и  $B$ , будучи приведенными в тепловой контакт, не будут обмениваться теплом.

Следствием этого постулата является существование температуры, которая описывает совокупное движение частиц эластомера и их положение в пространстве, т.е. конфигурацию. При этом все внутренние параметры эластомера оказываются некоторыми функциями внешних параметров и температуры.

Релаксацией эластомера называется самопроизвольный переход его в наиболее вероятное состояние, т.е. в состояние термодинамического равновесия. Этот процесс принято характеризовать временем релаксации  $\tau^*$ . Процесс изменения состояния эластомера можно считать равновесным, если скорость изменения его параметров во времени значительно меньше скорости изменения этих параметров в процессе релаксации, т.е.  $da/dt \leq \Delta a / \tau^*$ . Здесь  $da/dt$  – скорость изменения параметра  $a$ ;  $\Delta a$  – изменение величины  $a$  при ее релаксации в течение времени  $\tau^*$  в равновесное состояние. Если  $da/dt > \Delta a / \tau^*$ , то такой процесс называется неравновесным.

Очевидно, что процессы деформирования и разрушения эластомеров по своей сущности являются термодинамически неравновесными. Однако, если параметры эластомера изменяются физически бесконечно медленно, то можно полагать, что система находится в равновесном состоянии. Этот прием широко используется в экспериментальной практике при определении, например, условно-равновесного модуля Юнга  $E_\infty$  или модуля сдвига  $G_\infty$ . Согласно существующим стандартам,  $E_\infty$  можно определять при выдержке образца при постоянной деформации в течение одного часа, при этом предполагается, что скорость релаксационных процессов в эластомере будет достаточно мала.

Для эластомеров при длительном процессе разрушения существует также понятие неравновесия в «характерных» или локальных объемах материала. Хотя система в целом и находится в квазиравновесном состоянии, можно говорить о неравновесии в макроскопически малых частях системы. Так, например, в эластомерной конструкции при образовании магистральных трещин в очагах разрушения будет наблюдаться неравновесное состояние со своими термодинамическими величинами: температурой, скоростью накопления поврежденности, коэффициентом диссипации, модулем упругости и т.д.

В связи с тем, что в дальнейшем понятие «характерного» объема будет использоваться при прогнозировании долговечности эластомеров, обсудим этот вопрос более подробно. Эластомер будем считать

макроскопически однородной системой и рассматривать ее как совокупность двух взаимодействующих подсистем: одна имеет небольшой объем  $\Delta V$ , а другая занимает оставшийся объем  $V - \Delta V$ . Такой упрощенный подход [66], позволяющий осуществить приведенное описание системы, в принципе означает, что весь объем заполнен аналогичными подсистемами  $\Delta V$ , испытывающими различные флуктуации; при исследовании выделяется лишь одна подсистема, а по остальным проводится усреднение. Будем также считать, что в процессе эволюции система остается макроскопически однородной, а внутри малых подсистем локально однородность может нарушаться за счет флуктуаций термодинамических параметров.

### **Равновесная термодинамика деформирования эластомеров.**

В термодинамическом смысле физическая природа упругости эластомеров несколько отлична от традиционных материалов, например, металлов. Мейером и Ферри [113] экспериментально показано, что упругость каучука связана, прежде всего, с изменением энтропии, а не внутренней энергии, как для других твердых тел.

Внутренняя энергия  $U$  эластомера представляет собой ту часть энергии непрерывно движущихся и взаимодействующих сегментов молекулярной сетки, которая не связана с движением эластомера как целого и потенциальной энергией его в поле внешних сил.

Если пренебречь необратимыми процессами разрушения эластомера, то, согласно первому началу термодинамики, можно принять

$$dU = dQ + dW.$$

Здесь приращение внутренней энергии эластомера  $dU$  происходит за счет подведенного к нему тепла  $dQ$  и совершенной над ним работы  $dW$ .

Согласно первому закону термодинамики, в обратимом процессе деформирования

$$dQ = T \cdot dS,$$

где  $dS$  представляет собой приращение энтропии  $S$ , вызванное передачей эластомеру количества тепла  $dQ$  при температуре  $T$ . Здесь энтропия  $S$  зависит от макроскопического состояния системы и, согласно Больцману, является мерой неупорядоченности, т.е.

$$S = k \log P,$$

где  $k$  – универсальная постоянная Больцмана;  $P$  – число состояний системы.

Работу внешних сил по деформированию эластомера можно представить в виде

$$dW = f dl,$$

где  $f$  – сила внешнего нагружения, а  $dl$  – приращение длины эластомера.

В этом случае основное уравнение термодинамики обратимого деформирования эластомера примет вид

$$dU = T \cdot dS + f dl.$$

При изотермическом деформировании эластомера из основного уравнения следует

$$\left( \frac{dU}{dl} \right)_T = T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_T + f.$$

Индекс  $T$  при производных означает, что уравнение относится к изотермической деформации. Используя свойство частных производных свободной энергии  $E$ , можно записать

$$\left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_T = - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial l \partial T} \right) = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l.$$

Отсюда следует основное термодинамическое соотношение для изотермической деформации эластомеров

$$\left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_T = f - T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l.$$

Графически это соотношение представлено на рисунке 1.2.

Экспериментальные исследования Мейера и Ферри, а также исследования Джи [113] показали, что на диаграмме  $f \sim T$ , по крайней мере, для удлинения 100%, имеет место прямая пропорциональная зависимость  $f$  от температуры  $T$ .

Используя основное термодинамическое соотношение для деформации эластомера, имеем

$$f = \left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_T + T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l = \left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_T - T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_T.$$

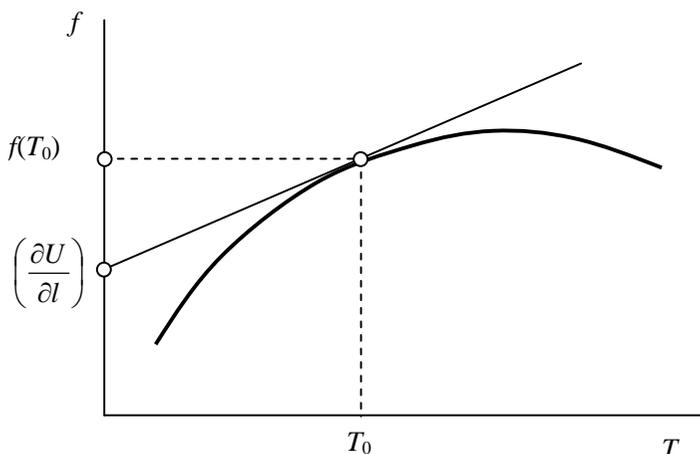


Рис. 1.2. Зависимость силы внешнего нагружения от абсолютной температуры при постоянной деформации эластомера

Опыты Джи свидетельствуют о том, что для обратимых изотермических деформаций эластомеров при удлинении до 100% изменение внутренней энергии при постоянном объеме равно нулю. Следовательно, имеет место зависимость

$$f = -T \cdot (\partial S / \partial l)_T,$$

т.е. сила, вызванная деформацией, в значительной степени обусловлена энтропийным членом.

Это свидетельствует о том, что упругость эластомеров имеет энтропийную природу. Именно этим эластомеры отличаются от большинства других деформируемых твердых тел, упругость которых имеет энергетическую природу, т.е. вызывается изменением внутренней энергии при деформировании. Такое различие является причиной аномальности тепловых эффектов при деформировании эластомеров. В то время, как для большинства твердых тел нагревание при постоянной нагрузке вызывает их удлинения, эластомеры при этом сокра-

щаются, т.е. модуль упругости эластомеров растет с температурой. Энтропийный характер упругости эластомеров, как сейчас принято считать, возникает вследствие особенностей их внутреннего строения: молекулы полимеров представляют собой длинные гибкие цепи, сегменты которых совершают тепловое движение практически независимо друг от друга. Такая внутренняя структура объясняет и главную особенность эластомеров – способность к огромным, по сравнению с другими материалами, обратимым деформациям.

Для описания деформационных свойств эластомеров используются обычно два подхода. Первый из них состоит в построении некоторой модели внутреннего строения эластомера в виде молекулярной сетки. При этом используются различного рода допущения, позволяющие производить вычисления измеряемых характеристик статистическими методами [113]. Наиболее простая модель, использующая так называемое гауссово приближение, приводит к следующему выражению для упругого потенциала

$$W = \frac{1}{2} G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3),$$

где  $G = Nkt$  – модуль сдвига;  $N$  – число молекулярных цепей в единице объема;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – главные степени растяжения  $\lambda$  в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Для одноосной деформации растяжения или сжатия при постоянстве объема ( $\lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ ) получим

$$W = \frac{1}{2} G \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right).$$

Отсюда для условного напряжения  $\sigma_y$ , равного отношению растягивающего усилия к площади поперечного сечения в недеформированном состоянии, можно получить

$$\sigma_y = G \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Для деформации простого сдвига получается линейная связь между напряжением сдвига  $\tau$  и деформацией  $\gamma$

$$\tau = G\gamma.$$

Полученные в описанной модели результаты справедливы лишь при небольших деформациях. При больших деформациях согласие с опытом достигается в более сложных моделях, не использующих гауссово приближение.

Второй подход к описанию деформационных свойств эластомеров состоит по существу в подборе таких выражений для упругого потенциала, которые дают наилучшее совпадение с опытом для измеряемых упругих характеристик. При этом используются достаточно общие и в то же время весьма ограничивающие допущения требования, в частности требование изотропии недеформированного материала. Одним из наиболее распространенных видов упругого потенциала, полученного таким способом, является потенциал Муни-Ривлина

$$W = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – произвольные постоянные.

Такой подход используется в большом числе работ, в которых получены различные выражения для упругих потенциалов или непосредственно для зависимостей напряжений от деформаций при различных условиях нагружения [8, 12, 13, 21, 113].

**Необратимая нелинейная термодинамика разрушения эластомеров.** В трудах ученых брюссельской школы [20, 67, 85] получили интенсивное развитие вопросы, связанные с сильнонеравновесными процессами, т.е. с процессами, выходящими за рамки линейно необратимых. Было показано, что сильнонеравновесные процессы лежат в основе возникновения так называемых «диссипативных структур». По определению Пригожина, диссипативная структура – это «... по существу, гигантская флуктуация, стабилизируемая за счет обмена энергией с внешним миром». Такой порядок характеризуется возникновением того, что принято называть «диссипативными структурами» [66]. Эта концепция Пригожина – возникновение порядка через флуктуации – является ведущей концепцией сильнонеравновесной термодинамики в трудах брюссельской школы.

На основе этих идей разработана термодинамическая концепция разрушения эластомеров, в основе которой лежат представления о разрушении их флуктуациями термодинамических параметров, усиленными действием внешнего нагружения [35]. В рамках этой концепции разрушение рассматривается как проявление флуктуационной неустойчивости эластомера в нелинейном термодинамическом процессе с источником энергии. Такое представление опирается на современные достижения в области термодинамики сильнонеравновесных процессов.

На микроскопическом уровне процесс разрушения эластомера представляет собой разрыв связей между атомами и молекулами необратимым образом. Физической причиной разрыва связей является достаточно сильные случайные отклонения микросостояний эластомера от его среднего, наиболее вероятного состояния. Разрыв отдельной связи на микроуровне происходит в тот момент, когда флуктуации энергии кинетических сегментов достигнут достаточно больших значений и превалят потенциальный барьер связи макромолекул. Как уже отмечалось, процесс разрушения эластомеров в отличие от обратимого процесса изотермического деформирования, является термодинамически неравновесным и необратимым. Первым необходимым условием неравновесности является открытость термодинамической системы, что характерно для эластомеров, разрушаемых при действии внешней нагрузки. При любых видах нагружения, циклических и статических, наблюдается передача энергии внешнего механического нагружения эластомеру, т.е. имеет место открытость эластомера потоку энергии от внешних механических источников.

Для открытых систем, обменивающихся энергией с окружающей средой, изменение энтропии  $dS$  за время  $dt$  можно представить в виде

$$dS = d_e S + d_i S,$$

где  $d_e S$  – поток энтропии из окружающей среды (рис. 1.3);  $d_i S$  – продукция энтропии вследствие необратимых процессов внутри системы. Второй закон термодинамики предполагает, что для всех физи-

ческих процессов  $d_i S \geq 0$ . Здесь равенство относится к равновесным процессам.

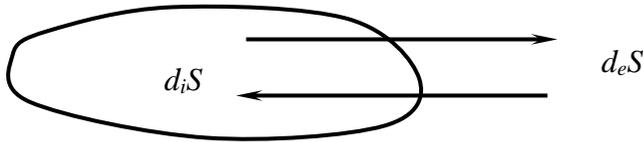


Рис. 1.3. Обмен энтропией в открытой системе

Для открытых систем энергию диссипации  $dU_g$  за время  $dt$  можно разложить на слагаемые

$$dU_g = dU_T + dU_p,$$

где:  $dU_T$  – поток тепловой энергии в окружающую среду (рис. 1.4);  $dU_p$  – энергия, идущая на осуществление необратимых процессов внутри системы, в частности, на разрушение структуры эластомера.

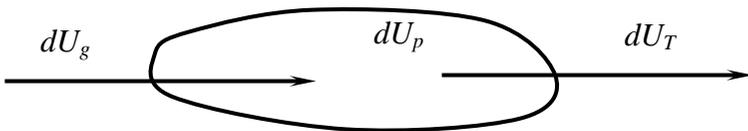


Рис. 1.4. Обмен энергией в открытой системе при разрушении

При этом для всех физических процессов работа разрушения

$$dU_p \geq 0,$$

причем равенство относится только к равновесным процессам.

Для открытых неравновесных систем процесс разрушения непосредственно связан с флуктуациями внутренних термодинамических параметров, т.е. с существенно стохастическими элементами. За флуктуациями обычно следует отклик, возвращающий систему в начальное состояние и являющийся детерминистическим процессом. В точке образования новой структуры флуктуации усиливаются, достигают макроскопического уровня и, наконец, делают устойчивым новый режим,

представляющий структуру, возникающую вслед за неустойчивостью [116]. Таким образом, разрушение материалов является одним из проявлений флуктуационной неустойчивости внутренних термодинамических параметров системы и носит необратимый, эволюционный характер. В целом процесс разрушения является ситуацией, преобладающей вблизи термодинамического равновесия.

На микроскопическом уровне процесс разрушения эластомера представляет собой разрыв связей между атомами и молекулами необратимым образом. Как показал Пригожин, критерием флуктуационной устойчивости термодинамических систем является выполнение условия

$$\delta_X \sigma = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta^2 S}{2} \right) \geq 0,$$

где  $\delta_X \sigma$  – избыток продукции энтропии вследствие флуктуации;  $\delta S$  – отклонение энтропии от равновесного значения флуктуацией.

Отсюда видно, что необратимое разрушение эластомера начинается тогда, когда нарушается условие флуктуационной устойчивости. Согласно критерию Пригожина, этому условию соответствует отрицательный вклад в избыток продукции энтропии. Как было показано Пригожиным [84], эти условия соответствуют нелинейным необратимым процессам в термодинамических системах. Другими словами, разрушение эластомера начинается тогда, когда внешнее нагружение вызывает значительный поток энергии в эластомере, при этом флуктуации усиливаются внешним источником и достигают значительных размеров. Прекращение действия внешнего источника вызовет ослабление и дальнейшее убывание флуктуаций и, в конечном итоге, приведет к прекращению разрушения.

Рассмотренный механизм разрушения более всего проявляется при циклических условиях воздействия, когда процесс разрушения эластомера наиболее неравновесен и нелинеен. Качественно это объясняет более низкую долговечность эластомеров при циклическом нагружении по сравнению со статическим при тех же средних значениях напряжений в эластомере.

Таким образом, закономерности разрушения эластомеров носят ярко выраженный нелинейный характер. Нелинейные уравнения, как известно, имеют множество решений даже для заданных граничных, внешних условий. Каждое такое решение представляет собой определенную кинетику процесса.

Процесс разрушения как эволюционный по своей сущности, является сильнонеравновесным и необратимым термодинамическим процессом, обусловленным флуктуационной неустойчивостью параметров системы.

Диссипация энергии, являясь всеобщим свойством термодинамических систем, непосредственно связана с механизмом разрушения эластомера.

При расчетах ресурса эластомерных конструкций вплоть до их отказа, т.е. до появления магистральных трещин, можно использовать детерминистические подходы.

При выборе критерия разрушения эластомеров для случая стационарного циклического нагружения критериальная величина должны учитывать явление диссипации.

### **1.3. Математическое описание вязкоупругого поведения резин**

Для рассмотрения вязкоупругих свойств эластомеров, как впрочем и других полимерных материалов, характерны два подхода: молекулярный (микроскопический) и феноменологический. Конечная цель в общем случае состоит в построении аналитических зависимостей между напряжениями и деформациями с учетом влияния факторов времени, температуры и предыстории деформирования на напряженное состояние системы. Задача адекватного описания этих свойств была осознана и поставлена давно. И хотя большинство достижений в теории вязкоупругости относится к последнему времени, все же частная теория, сформулированная для линейного изотропического случая, существует уже с конца XIX века. Это связано с вкладом таких ученых как Максвелл, Кельвин, Фойхт и других. Больцман в 1874 г. впервые

дал уравнения трехмерной теории изотропной вязкоупругости. В 1909 г. Вольтерра получил аналогичные зависимости для анизотропных тел.

Последующее развитие и широкое применение линейной и нелинейной теории вязкоупругости наблюдается сравнительно недавно, в послевоенные годы. Активность в этой области связана, в первую очередь, с широким распространением и использованием в настоящее время полимерных материалов. Многие из этих новых материалов обладают механическими свойствами, которые нельзя описать с помощью простых упругих и вязких моделей механического поведения. В силу этого становится очевидной необходимость построения более общей теории. Усилия современных исследователей проблемы вязкоупругости направлены на создания такой теории.

**Модели полимеров.** Одной из первых теорий, объясняющих особенности вязкоупругих свойств полимеров, является кинетическая теория высокоэластичности, развитая Куном [125], Гуттом и Марком [124]. В основу этой теории положена физическая концепция об энтропийном характере высокоэластической деформации, согласно которой линейные макромолекулы можно рассматривать как совершенно гибкие нити, принимающие любую форму и сохраняющие неизменную длину и величину валентного угла. В рамках этого подхода удалось объяснить некоторые особенности поведения эластомеров: увеличение модуля эластичности с ростом температуры, тепловые эффекты при деформации, развитие больших обратимых деформаций.

Более адекватная модель полимера разработана в работе Уолла [128]. Здесь в качестве модели полимера рассматривается уже сетчатая структура, что позволило выполнить расчет изменения энтропии сетки при ее деформации и на этой основе получить теоретическое соотношение между напряжением и относительной длиной образца.

В дальнейшем развитием кинетической теории высокоэластичности в рамках сетчатой модели полимера занимался Трелоар [113], распространив эту теорию на все виды деформации.

А.П. Александров и Ю.С. Лазуркин [5] разработали методику изучения высокоэластической деформации в периодическом режиме. Выполненные ими исследования в широком диапазоне частот и тем-

ператур позволили установить основные закономерности кинетики высокоэластической деформации.

Г.Л. Слонимский и В.А. Каргин [45] применили теорию упругого последствия Больцмана-Вольтерра к релаксационным механическим явлениям в полимерах, а также развили качественные представления о молекулярном механизме релаксационных процессов.

Важное исследование влияния интенсивности межмолекулярного взаимодействия на механические свойства эластомеров проведено В.Е. Гулем [32].

Новый подход к механизму деформации полимеров предложен Г.А. Патрикеевым [75]. Согласно развиваемым им представлениям при механическом нагружении работают не все макромолекулы, а лишь небольшая часть их, образующая каркас. Напряжение в этих макромолекулах существенно превышает среднее напряжение, рассчитанное на сечении всего образца.

Перечисленные выше молекулярные теории высокоэластической деформации построены на моделях, которые представляют собой в значительной степени идеализацию реальных свойств полимерных материалов. Они не позволяют описать количественно в достаточно широких пределах наблюдаемые в эксперименте закономерности вязкоупругого поведения полимеров.

**Вязкоупругость.** Вследствие этого, в последнее время возрос интерес к феноменологическим методам описания вязкоупругого поведения полимерных материалов. Разработке математического аппарата теории вязкоупругости посвящено значительное число работ [6, 7, 14, 16, 17, 30, 37, 43, 49, 51, 53, 62, 66, 79, 80, 86, 88, 91-93, 97, 98, 100, 102, 111, 114, 115].

Большое распространение получили реологические соотношения, включающие непрерывный релаксационный спектр ползучести и релаксации, и соотношения, использующие в качестве функций влияния ядра со слабой особенностью (сингулярностью). Эти ядра подбираются из условий мгновенного нагружения, при которых процессы ползучести и релаксации имеют весьма большие скорости:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \infty; \frac{d\sigma}{dt} \rightarrow \infty; \text{ при } t \rightarrow 0.$$

С учетом таких функций деформирование линейных вязкоупругих материалов описываются уравнениями Больцмана-Вольтерра

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right], \quad (1.4)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \int_{-\infty}^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right], \quad (1.5)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  – деформация и напряжение в момент времени  $t$ ;  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения;  $K(t-\tau)$  и  $R(t-\tau)$  – ядра релаксации и ползучести соответственно.

В теории интегральных уравнений Вольтерра функция  $K(t-\tau)$  – ядро уравнения (1.4), а функция  $R(t-\tau)$  – его резольвента. Если для ядра  $K(t-\tau)$  найдена его резольвента  $R(t-\tau)$ , то уравнение (1.5) является решением уравнения (1.4) и наоборот.

Это возможно при выполнении условий [93]

$$K(t-\tau) - R(t-\tau) = \int_{\tau}^t K(t-s)R(s-t)ds, \quad (1.6)$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение для определения резольвенты. Поэтому необходимо выбирать для ядер аппроксимирующие функции, для которых решение интегральных уравнений (1.4)-(1.6) может быть получено достаточно простым способом.

При ступенчатом нагружении  $\sigma(t) = \sigma_0 H(\tau)$  при  $\sigma_0 = const$  или  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(\tau)$  при  $\varepsilon_0 = const$ , где  $H(\tau)$  – функция Хевисайда,

$$H(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

уравнения (1.4) и (1.5) значительно упрощаются

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[ 1 - \int_0^t K(z) dz \right], \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ 1 + \int_0^t R(z) dz \right],$$

где  $E_0$  – мгновенный модуль упругости.

Выражения  $\left[ 1 - \int_0^t K(z) dz \right]$ ,  $\left[ 1 + \int_0^t R(z) dz \right]$  – функции релаксации и ползучести соответственно.

При гармоническом деформировании по закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$  уравнение (1.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_0 \varepsilon_0 \left[ \sin \omega t - \int_0^t K(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= E_0 \varepsilon_0 [ (1 - A(\omega)) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t ], \end{aligned}$$

где  $A(\omega) = \int_0^\infty K(z) \cos \omega z dz$  – косинус преобразование ядра релаксации;

$B(\omega) = \int_0^\infty K(z) \sin \omega z dz$  – синус преобразование ядра релаксации.

Аналогично при гармоническом нагружении  $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$  уравнение (1.5) будет

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ \sin \omega t + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} [ (1 + A_1(\omega)) \sin \omega t - B_1(\omega) \cos \omega t ], \end{aligned}$$

где  $A_1(\omega) = \int_0^\infty R(z) \cos \omega z dz$  – косинус преобразование резольвенты

$R(t - \tau)$ ;  $B_1(\omega) = \int_0^\infty R(z) \sin \omega z dz$  – синус преобразование резольвенты

$R(t - \tau)$ .

Следует отметить, что функции  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  являются действительной и мнимой частью одностороннего изображения по Лапласу ядра  $K(t - \tau)$ , если в последнее вместо аргумента подставить мнимую величину  $-i\omega$  [99]:

$$K^*(-i\omega) = \int_0^{\infty} K(z)e^{i\omega z} dz = \int_0^{\infty} K(z)(\cos\omega z + i \sin \omega z) dz = A(\omega) + iB(\omega).$$

Аналогично получена связь между  $A_1(\omega)$  и  $B_1(\omega)$  с изображением резольвенты  $R(t - \tau)$

$$R^*(-i\omega) = A_1(\omega) + iB_1(\omega).$$

Использование преобразования Фурье и алгебры комплексных величин [99, 103, 115] позволяют упростить получение тождественных соотношений, связывающих функции  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  и  $A_1(\omega)$ ,  $B_1(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= 1 - \frac{1 + A_1(\omega)}{[1 + A_1(\omega)]^2 + B_1^2(\omega)}; \\ B(\omega) &= \frac{B_1(\omega)}{[1 + A_1(\omega)]^2 + B_1^2(\omega)}; \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(\omega) &= 1 - \frac{1 - A(\omega)}{[1 - A(\omega)]^2 + B^2(\omega)}; \\ B_1(\omega) &= \frac{B(\omega)}{[1 - A(\omega)]^2 + B^2(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Формулы (1.7), (1.8) могут служить для определения синус и косинус преобразования ядра  $K(t - \tau)$ , синус и косинус преобразование резольвенты  $R(t - \tau)$  и наоборот. Ограничения, накладываемые на ядро

$K(t - \tau) \left( \int_0^{\infty} K(t - \tau) d\tau \leq 1 \right)$ , а также преобразования физической

наглядности и реализуемости взаимосвязей между функциями, описывающими механическую реакцию материала (приведенные выше функции ползучести и релаксации, синус и косинус преобразования

ядер ползучести и релаксации), накладывают дополнительные ограничения на выбор ядер релаксации.

**Выбор ядра.** Вид ядра выбирается в каждом конкретном случае с учетом физико-механических свойств материала и вида решаемой задачи. При этом большую роль играют такие факторы, как наличие явного выражения ядра релаксации для соответствующего ядра ползучести (резольвенты), количество определяемых параметров материала, методика определения этих параметров, математическая сложность этих ядер, а также гибкость полученных аналитических выражений при описании экспериментов. Сводное описание ядер, для которых получены соответствующие резольвенты, приведено в табл.1.4 [114], составленной Колтуновым.

Наиболее простым ядром, используемым для описания ползучести и релаксации полимеров, является экспонента

$$K(t - \tau) = \chi_0 e^{(-\beta_0(t-\tau))}, \quad (1.9)$$

где  $\chi_0$ ,  $\beta_0$  – параметры ядра, имеющие конкретный физический смысл. Параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$ , имеют размерность времени  $c^{-1}$ ;  $\beta_0^{-1} = t_0$

– называют временем релаксации;  $\chi_0 = \frac{E_0}{\eta}$ , где  $E_0$  – мгновенный модуль упругости;  $\eta$  – вязкость материала.

Интервал времени, в котором реальные кривые релаксации удастся описать одной экспонентой, весьма мал. Поэтому часто применяют в качестве ядра релаксации сумму экспонент

$$K(t - \tau) = \sum_{n=1}^N \chi_n e^{[-\beta_n(t-\tau)]},$$

где  $\chi_n$ ,  $\beta_n$  – параметры ядра.

Набор величин  $t_{on} = \beta_n^{-1}$  получил при этом название дискретного спектра. Заменяя суммирование интегрированием, получают ядра, соответствующие непрерывному спектру времен релаксации

$$K(t - \tau) = \int_0^{\infty} \rho(\beta) e^{[-\beta(t-\tau)]} d \ln \beta. \quad (1.10)$$

Функция  $\rho(\beta)$  определяется как плотность распределения времен релаксации  $\theta = \beta^{-1}$  или спектр релаксации. Методика определения параметров  $\chi_n$ ,  $\beta_n$ , приведена в [99]. Ядра вида (1.9), (1.10) позволяют привести сложные интегро-дифференциальные уравнения к обыкновенным дифференциальным, суть такого перехода показана в [54].

Однако применение математических моделей с такими ядрами не обеспечивает достоверного описания нагрузки в широком диапазоне [79, 93]. Определять параметры  $\chi_n$ ,  $\beta_n$  можно на основе метода наименьших квадратов. Экспоненциальные функции, получившие определенные преимущества при решении ряда задач, благодаря простоте выражений для ядер ползучести и релаксации и несложной методике определения параметров этих ядер, обладают существенным недостатком – такие функции не описывают процесс в начальный период, при  $t = 0$  они имеют конечную величину.

Наиболее простым ядром, имеющим слабую, интегрируемую особенность в нуле, является ядро

$$K(t - \tau) = \frac{A}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

впервые предложенное Абедем. Это ядро впоследствии широко применялось для описания поведения полимерных материалов, горных пород и т.д. Резольвента ядра Абеда определена Работновым [92].

Наибольшее распространение в механике полимеров при решении задач, описывающих релаксационный спектр в большом интервале времени, включая и начало отсчета, нашла дробно-экспоненциальная  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau)$  функция Ю.Н. Работнова [92, 93]

$$\mathcal{E}(-\beta, (t - \tau)) = \chi(t - \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (1.11)$$

где  $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$ ;  $\chi = \frac{\lambda}{t_0^{1+\alpha}}$ ;  $\lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}$  или  $\lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  – параметры ядра, являющиеся реологическими параметрами материала и имеющие конкретный физический смысл;  $t_0$  – время релаксации;  $\Gamma(\dots)$  – гамма-функция заданного параметра;  $E_0$  и  $G_0$  – мгновенные модули упругости и сдвига материала;  $E_\infty$  и  $G_\infty$  – установившиеся значения модуля упругости и модуля сдвига, определяемые как

$$E_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} E(\omega), G = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega).$$

Параметр  $\lambda$  обычно называют дефектом модуля,  $\chi = \lambda\beta$  – обобщенное время релаксации, а параметр дробности  $\alpha$  явно выражается через максимальное значение спектра  $\rho_{\max}$  и дефект модуля  $\lambda$

$$\alpha = -1 + \frac{4}{3} \pi^{-1} \arctg(2\pi\rho_{\max}\lambda^{-1}).$$

Синус и косинус преобразования Фурье дробно-экспоненциальной функции  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, (t - \tau))$  полученные в работе [54]

$$A(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\beta\omega^{1+\alpha} \cos \beta + \beta^2};$$

$$B(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \sin \delta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\beta\omega^{1+\alpha} \cos \beta + \beta^2}.$$
(1.12)

Такое ядро сохраняет особенность ядра Абеля, но допускает большую гибкость при описании механической реакции различных материалов. Эффективность аппарата  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в значительной степени связана с существованием алгебры резольвентных операторов [91, 92], позволяющей легко выписать точные решения многих задач вязкоупругости. Область практического использования дробно-экспоненциальных функций особенно возросла после составления таблиц [90] и разработки методик подбора реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  при помощи ЭВМ непосредственно по экспериментальным

данным [71] и методики определения реологических параметров резиновых деталей при циклическом деформировании [61] (см. табл. 1.4).

Таблица 1.4 –

Функции влияния для аппроксимации ядер ползучести и релаксации

Ядро	Резольвента	Параметры ядер
$\frac{Ae^{-\beta(t-\tau)^{k_1}}}{(t-\tau)^{k_1}}$	$\frac{e^{-\beta(t-\tau)^{k_1}}}{(t-\tau)^{k_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ A\Gamma\left(\frac{k_1+k_2-1}{k_1}\right) \right]^n (t-\tau)^{n(k_1+k_2-1)}}{\Gamma\left[n\left(\frac{k_1+k_2-1}{k_1}\right)\right]}$ ;	$A, \beta, k_1, k_2$
$\frac{\alpha_1 \lambda_1 e^{-\beta(t-\tau)^{\alpha_1}}}{(t-\tau)^{\alpha_1}}$ (Бронский А.П.)	$\frac{e^{-\beta(t-\tau)^{\alpha_1}}}{(t-\tau)^{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \alpha_1 \lambda_1 \Gamma\left(2 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \right]^n (t-\tau)^{(2\alpha_2-1)n}}{\Gamma\left[n\left(2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\right]}$ ;	$\alpha_1, \lambda_1, \beta$
$\frac{\alpha_2 \lambda_2 e^{-\gamma(t-\tau)^{\alpha_2}}}{(t-\tau)^{\alpha_2}}$ (Слонимский Г.Л.)	$\frac{e^{-\gamma(t-\tau)^{\alpha_2}}}{(t-\tau)^{\alpha_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \alpha_2 \lambda_2 \Gamma\left(2 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \right]^n (t-\tau)^{(2\alpha_2-1)n}}{\Gamma\left[n\left(2 - \frac{1}{\alpha_2}\right)\right]}$ ;	$\alpha_2, \lambda_2, \gamma$
$\frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ (Ржаницын А.Р.)	$\frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n (t-\tau)^{n\alpha}}{\Gamma[n\alpha]}$ ; (Колтунов М.А., Безухов В.Н.)	$A, \beta, \alpha$
$\frac{A_1 \alpha}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ (Дюффинг Г.)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_1 \Gamma(\alpha)]^n (t-\tau)^{n\alpha-1}}{\Gamma[n\alpha]}$ ;	$A, \alpha$
$\frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ; (Абель)	$\chi(t-\tau)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}$ ; (Работнов Ю.Н.)	$\alpha, \beta, \chi$

При описании вязкоупругих свойств полимеров широко используется трехпараметрическое ядро Ржаницына [98, 99]

$$K(t - \tau) = A(t - \tau)^\alpha e^{-\beta(t - \tau)}, \quad (1.13)$$

и его резольвента – ядро Колтунова [34, 87]

$$R(t - \tau) = \frac{e^{-\beta(t - \tau)}}{t - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n (t - \tau)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.14)$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры ядра;  $t$  – время;  $-1 < \alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ .

Параметр  $\beta$  имеет размерность  $c^{-1}$ ,  $A$  и  $\alpha$  – безразмерные величины.

Синус и косинус преобразования Фурье ядра Ржаницына [99] имеют выражения

$$A(\omega) = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}\right),$$

$$B(\omega) = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}\right). \quad (1.15)$$

Широкому применению ядер (1.11) и (1.13) способствовали создание практических методов определения их параметров по экспериментальным данным.

Ядро (1.13) и его резольвента, а также интегралы от этих функций табулированы в [51] для достаточно широкого диапазона изменения параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $A_i$  и интервала времени  $t \geq 0,0001$ .

Широко используется для описания последействия в резинах слабосингулярное ядро Бронского-Слонимского [16]

$$K(t - \tau) = \lambda\beta(1 - \lambda)(t - \tau)^{-\alpha} e^{(-\beta(t - \tau))^{-\alpha}}, \quad (1.16)$$

где  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры ядра.

Аналитическая форма интегральных преобразований ядра (1.16) отсутствует. При этом синус- и косинус-преобразования  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$

ядра (1.16) можно получить на основе равномерных аппроксимаций, используя формулы [79, с. 205].

Приведенные ядра содержат, как правило, три или четыре параметра, имеют дробную степень времени, так как только в этом случае возможно описание экспериментальных данных по релаксации напряжения и ползучести с хорошим приближением.

При описании квазистатических процессов поведение функции  $K(t - \tau)$ , где  $K(t - \tau)$  – наперед заданный вид ядра, изучено хорошо. Если среда не следует модели Работнова [93], то всегда найдется другое ядро  $K(t - \tau)$ , которое эту среду опишет. Однако механизмы, влияющие на процессы деформирования, при статических и динамических нагрузках могут быть различными. Поэтому нет полной ясности в том, применимы ли квазистатические ядра в случае динамических нагрузок. Для ответа на этот вопрос необходимо иметь достаточно много экспериментальных данных или какую-то иную информацию о среде.

Анализ существующих ядер показал [16, 45, 49, 93, 98], что при надлежащем выборе их параметров они с достаточной степенью точности описывают ход релаксационных процессов в различных материалах, однако физический смысл этих параметров не всегда ясен, а то и вовсе отсутствует. Попытки раскрытия физического смысла ядер предпринимались в [9, 44, 47, 48, 50, 106, 117, 119, 121].

В работе [106] делается попытка обосновать применение дробных интегральных операторов на основе модельного представления о физическом характере релаксационных явлений. Здесь предлагается теоретическое описание деформации эластомера с учетом его надмолекулярной структуры. Рассматривается релаксация в области перехода из застеклованного состояния к высокоэластическому. При этом движение имеет диффузионный характер и математически исследована одномерная модель диффузионного процесса. По мнению авторов [106, 117], физический смысл появления интегральных операторов состоит в диффузионном характере перестройки надмолекулярных образований, приводящей к развитию высокоэластической деформа-

ции. Ранее же [92] появление таких операторов предполагалось из феноменологических соображений.

В работе [44] на основании представления о зародышевом механизме релаксации, как следствие, делается вывод о чувствительности релаксационных характеристик к неоднородности в структуре реального полимерного тела.

Новые возможные типы ядер релаксации предложены в [9] на основании анализа изменения энтропии системы, к возрастанию которой в ходе релаксации напряжения приводят взаимодействия и диффузия кинетических единиц – релаксаторов и нерелаксаторов. Релаксаторами могут быть различные атомные группы, повторяющиеся звенья, микрополости, концентраторы напряжения и т.д., которые могут, взаимодействуя друг с другом, сливаться, перестраиваться и диффундировать в полимерном материале.

Ядра релаксации двух видов, полученные в предположении обратной зависимости ядра в уравнении (1.4) с энтропией, которая возрастает в процессе релаксации напряжения до максимального значения, имеют достаточно сложный вид: для них нет практической методики определения их параметров, могут применяться для описания лишь начальных участков кривых релаксации напряжения. Такие ядра, по мнению автора, с высокой точностью описывают кинетику релаксационного процесса и позволяют выявить кинетические и диффузионные области его протекания.

Зависимости параметров слабосингулярных ядер от структуры полимеров получены в работе [50] с помощью структурного микрорелаксационного подхода [48]. В работе предложена методика определения параметров слабосингулярного ядра (1.13) в зависимости от параметров структуры полимера на примере полиуретана и полипропилена: числа сегментов в полимерной цепочке, молекулярного веса сегмента, параметра энергии когезии молекулярных групп, степени кристалличности, размеров надмолекулярных образований, степени разветвленности, функциональности узлов.

В работе [47] сделана попытка связать процесс разрушения твердых тел под нагрузкой с изменением деформативности теории ползучести. Связь между долговечностью и деформативностью мате-

риала установлена посредством выражения ядра ползучести через параметры уравнения долговечности Журкова. Так, для материалов, у которых величина накопленной деформации ползучести, определяемая из эксперимента, является постоянной величиной, ядро ползучести имеет вид

$$K(t) = \frac{kTAE\gamma}{t \left[ U_0 - kT \ln \frac{t}{\tau_0} \right]^2},$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура;  $A$  – величина накопленной деформации ползучести;  $E$  – модуль упругости материала;  $\gamma$  – структурно-чувствительный коэффициент;  $t$  – долговечность;  $U_0$  – энергия активации процесса разрушения;  $\tau_0 = 10^{-13}$  с и совпадает по порядку с периодом тепловых колебаний атомов тела.

Такое ядро, вероятно, позволит прогнозировать деформативность материала при различных температурах. Ранее [91] подобным образом получено ядро ползучести, параметрами которого являются характеристики прочности горных пород. Исследованию влияния неоднородности структуры резин на характер релаксационных процессов посвящена работа [121]. По мнению авторов, различия в дислокации и распределение связей межмолекулярного, внутримолекулярного и внутрискрутурного взаимодействия связей каучук-наполнитель, наполнитель-наполнитель, наличие различных структурных образований и т.д., обуславливают широкий набор времен релаксации и, как правило, характеристики неоднородности резин. В [121] установлена эмпирическая корреляционная связь между параметрами спектра и характеристиками неоднородности резин.

Анализ результатов этих работ позволяет сделать вывод, что не все характерные механические свойства эластомеров, имеющих широкий спектр времен релаксации, основная часть которых лежит в области малых времен, могут быть удовлетворительно описаны уравнениями (1.4) и (1.5) с широко используемыми ядрами типа (1.11), (1.13), (1.14), (1.16). А такие свойства, как проявление эффекта Маллинза (зависимость коэффициента потерь от амплитуды), наличие остаточных

необратимых деформаций, химическое, термо- и прочие виды старения не заложены в эти модели и не могут быть ими описаны [69].

**Влияние температуры.** Опыт показывает [37, 51, 79, 88, 111, 114], что существенное влияние на реологические свойства всех материалов оказывает температура.

Решение конкретных задач с учетом последнего в общем случае весьма затруднительно. Чтобы обойти эти трудности, необходимо либо вводить в программу расчета вид ядра ползучести или релаксации при различных температурах, либо использовать понятие терморологически простых тел, для которых влияние температуры на реологические свойства учитывается путем введения в обычные упруго-наследственные соотношения типа (1.4), (1.5) модифицированного времени  $t'$  (принцип температурно-временной аналогии ТВА [115]).

Приведенное время или псевдовремя при разных постоянных температурах  $T$  вводится как

$$t' = a_T(T) \cdot t,$$

где  $t'$  – приведенное время;  $a_T(T)$  – функция температуры или коэффициент температурно-временного сдвига, коэффициент редукции;  $t$  – время наблюдения.

Коэффициент температурного сдвига выбирается таким образом, что  $a_T(T_0) = 1$ , где  $T_0$  – некоторая базовая температура приведения. Для нестационарных температурных полей условное время определяется как интеграл от произведения функции температуры на дифференциал истинного времени.

Если для данного материала температурно-временная аналогия имеет место, т.е. известна функция  $a_T(T)$  в некотором интервале температур, то заменив в уравнениях (1.4), (1.5) время  $t$  на  $t'$ , они внешне не изменяясь, а на самом деле будут отражать сильное влияние температуры [51, 93, 114]. Основным ограничением применимости принципа ТВА является требование неизменности материала и природы релаксационных процессов в области, где производится приведение. Так, для эластомеров невозможна прямая суперпозиция спектров, получен-

ных до и после старения и кристаллизации [17]. Вид функции  $a_T(T)$  определяется из эксперимента.

Для аппроксимации коэффициента  $a_T(T)$  предложено несколько формул. Наиболее употребляемая зависимость принята в виде [115] уравнения Вильямса-Ланделла-Ферри (ВЛФ)

$$\lg a_T = -\frac{C_1(T - T_S)}{C_2 + (T - T_S)}, \quad (1.17)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – эмпирические коэффициенты, зависящие от выбора  $T_S$ ;  $T_S$  – температура приведения.

Для практических целей за базовую температуру приведения удобно принимать температуру лабораторных испытаний [93]  $T_S = 20$  °С, где  $a_T = 1$ . В качестве первого приближения для большинства резиноподобных материалов в [115] приняты значения  $C_1 = 8,86$ ;  $C_2 = 101$  °С, получившие название универсальных коэффициентов приведения. Границы применимости температурно-временной аналогии – ТВА зависят от типа эластомера (резины). В [110] обоснована возможность использования универсальных параметров приведения для резин, содержащих до 30 мас. ч. техуглерода, при этом температура приведения  $T_S$  в (1.17) определяется как  $T_S = T_C + 50 = 252$  К, где  $T_C$  – температура стеклования резины. Здесь же показана возможность использования ТВА динамических функций наполненных техническим углеродом резин в нелинейной области, для которой сформулирован дополнительный критерий применимости приведения – симбатности (совместимости) изотерм амплитудных зависимостей динамических функций резин (модуль сдвига  $G'$  и тангенс угла механических потерь  $\text{tg}\delta$ ). Максимальная амплитуда деформаций, при которой возможно приведение, зависит от твердости резины и достигает 0,02 для любых резин (до  $H = 80$  ед. по Шору); 0,1 для средненаполненных резин ( $H = 50$  ед. по Шору) и 0,13 для мало-наполненных резин. Показано, что для резин, содержащих до 30 мас. ч. сажи ТВА осуществляется с универсальными параметрами приведения.

Коэффициенты приведения  $C_1$ ,  $C_2$  для резин с различным наполнением приведены в табл. 1.5 [110].

Таблица 1.5. –

Параметры ТВА

Содержание основных компонентов, мас. ч.					Параметры приведения		
НК	СКИ-3	СКД	Сера	Техуглерод	$T_S$ , К	$C_1$	$C_2$
100	-	-	2,5	30	297	24,4	101,6
-	100	-	2,5	40	289	8,86	101,6
-	100	-	2,5	50	297	-1743	-14720
100	-	-	3,0	45	298	28,6	256
-	75	25	3,0	80	284	8,86	101,6

Для резины типа 2959 принцип ТВА может быть переписан в виде [31]

$$a_T = e^{\frac{C_1(T-T_S)}{C_2+T-T_S}},$$

где  $C_1 = 28,6$ ;  $C_2 = 256K$ ;  $T_S = 298K$ .

Изменение модуля сдвига  $G$  и коэффициента диссипации  $\psi$  от температуры для резины 51-1562 показано на рис. 1.5.

Для этой резины, как и для других рассматриваемых резин, в интервале температур от 268 до 353 К вязкоупругие свойства практически не изменяются. Дальнейшее повышение температуры уменьшает модуль сдвига и увеличивает коэффициент поглощения энергии. Криогенные температуры увеличивают модуль сдвига и коэффициент диссипации энергии.

С учетом изложенного, если ползучесть или релаксация описываются уравнениями (1.4), (1.5) с дробно-экспоненциальным ядром  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau)$  Работнова (1.11), например,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right],$$

то при постоянной температуре  $\varepsilon_0 = a_T(T)$ , и известной функции  $a_T(T)t$ , для которой  $a_T(T_0)=1$  значения реологических параметров  $\chi$  и  $\beta$  при температуре приведения  $T_0$  были равны соответственно  $\chi_0$  и  $\beta_0$ , то из самого определения дробно-экспоненциальной функции (1.11) непосредственно следует, что при произвольной температуре  $T$  параметры ядра будут пересчитываться по формулам [93]

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 a_T^{1-\alpha}, \\ \beta &= \beta_0 a_T^{1-\alpha} \quad (-1 < \alpha < 0). \end{aligned} \tag{1.18}$$

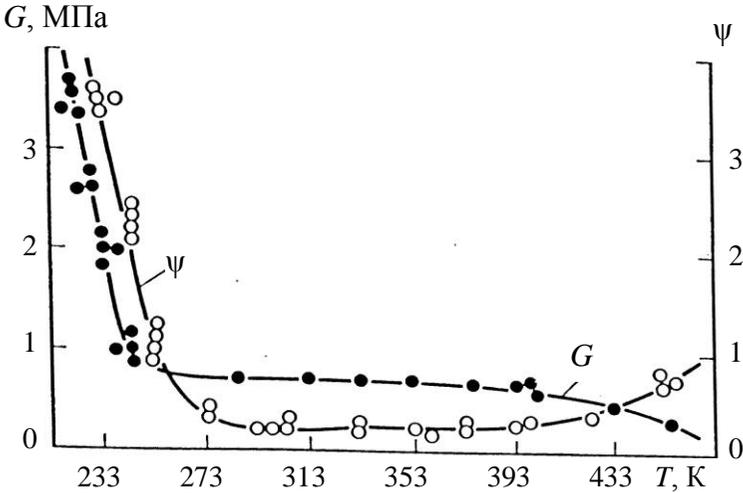


Рис. 1.5. Зависимость модуля сдвига  $G$  и коэффициента диссипации  $\psi$  от температуры  $T$

И если  $a_T$  аппроксимируется зависимостью (1.17), то для параметров ядра Работнова выражения (1.18) будут иметь следующий вид

$$\chi(T) = \chi_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)(1+\alpha)};$$

$$\beta(T) = \beta_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)(1+\alpha)}. \quad (1.19)$$

Аналогично получают зависимости параметров ядра Ржаницина (1.13) от температуры [51]

$$A = A_0 a_T^\alpha; \quad \beta = \beta_0 a_T;$$

параметр  $\alpha$  – не зависит от температуры.

Таким образом, проводя эксперименты на ползучесть (релаксацию) при различных значениях температуры, постоянных в каждом эксперименте и меняющихся от эксперимента к эксперименту, можно согласно методик [51, 61, 114] определить параметры ядер (1.11) и (1.13) в зависимости от температуры.

Адекватно влиянию температуры на вязкоупругие свойства эластомеров соответствует и изменение частоты нагружения. Такая адекватность была предметом многочисленных исследований. Интерес представлял вопрос, почему усиление зависимости от частоты сопровождается усилением зависимости от температуры и наоборот. Это явление получило название температурно-временной (частотной) аналогии и объяснено в рамках теории так называемого термореологически простого поведения материала [115]. Согласно этой теории, изотермические и неизотермические характеристики соотносятся следующим образом [79, 115]

$$\begin{aligned} G'(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G'(\omega a_T, T_0); \\ G''(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G''(\omega a_T, T_0), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотности полимера при абсолютных температурах  $T$  и  $T_0$  соответственно;  $G'$  и  $G''$  – составляющие комплексного модуля сдвига, определяемого как

$$\tilde{G} = G'(\omega, T) + iG''(\omega, T),$$

$a_T$  – коэффициент температурного приведения, определяемый по формуле (1.17).

Температурно-временная аналогия также представляет возможность прогнозирования процессов деформирования полимерных материалов путем проведения ускоренных экспериментов в более жестких условиях – при повышенных температурах. В рамках ТВА в настоящее время хорошо исследованы как в линейной, так и нелинейной областях краевые задачи для сред с нестабильными свойствами – воздействие температур, влажности и т.д. [52, 114, 115]. В работах [52, 114] приведены методики определения коэффициентов температурного сдвига  $a_T$  по экспериментальным данным, а также основные требования, предъявляемые к проведению таких экспериментов. Ввиду серьезных экспериментальных трудностей, ТВА часто является единственным средством оценки динамических свойств в широком интервале температур и частот, хотя такая оценка становится все менее надежной по мере выхода за верхнюю и нижнюю границы интервала параметров  $\omega$  и  $T$ . В каждом конкретном случае необходима тщательная экспериментальная проверка такого подхода.

**Нелинейные эффекты.** Для большинства эластомерных материалов область, когда реологические соотношения  $\sigma \sim \varepsilon \sim t$  можно описать линейными соотношениями типа (1.4), (1.5), достаточно мала и рассматривать ее следует с достаточными приближениями.

Дальнейшее развитие теории деформирования идет по пути учета физической нелинейности и сложных путей нагружения материала [18, 43, 51, 58, 89, 93, 100, 101, 126]. В общем случае основные уравнения, устанавливающие связь между малыми деформациями и напряжениями для вязкоупругих материалов, обладающих физической нелинейностью, представляются уравнения Вольтерра-Фреше [5, 69, 112] в виде суммы интегралов возрастающей кратности [112].

Уравнение такого вида для одномерного нагружения изотропного несжимаемого материала, обладающего одинаковыми деформационными свойствами при растяжении и сжатии (это позволяет исключить в кратно-интегральном ряде Фреше-Вольтерра четные степени и двойной интеграл) имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & a\sigma(t) + b_1 \int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + \\ & + b_3 \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_{33}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\sigma(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_3$  – параметры материала;  $K_{ns}$  – ядро ползучести, первый индекс  $n$  – обозначает степень нелинейности, второй  $s$  – число уровней напряжений, равное числу ядер.

Ядра кратных интегралов весьма чувствительны к степени точности экспериментальных данных, поэтому удержание даже двух или трех членов в (1.21) приводит к большому объему и сложности вычислений, что сильно ограничивает их практическое применение. Поэтому для описания нелинейной вязкоупругости используются зависимости, представляющие собой частные случаи уравнений главной нелинейной теории вязкоупругости [43] и содержащие, как правило, один или два члена в виде суммы однократных интегралов. Уравнение такого вида, в котором удержаны линейный и кубический член, имеет вид

$$\varepsilon(t) = a\sigma(t) + b_1 \int_0^t K_1(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + b_3 \int_0^t K_3(t-\tau)[\sigma(\tau)]^3 d\tau,$$

где  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_3$  – параметры материала;  $K_1$ ,  $K_3$  – ядра ползучести.

В настоящее время имеется много работ, посвященных построению нелинейных уравнений наследственного типа. Наиболее удобными в практически приложениях являются уравнения Ледермана-Розовского [101, 126]

$$\varepsilon(t) = \Psi(\sigma) + \int_0^t K_1(t-\tau)f[\sigma(\tau)]d\tau \quad (1.22)$$

и уравнение Работнова [89]

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (1.23)$$

где  $\Psi(\sigma)$  – некоторая нелинейная функция напряжения;  $\varphi[\varepsilon(t)]$  – аппроксимация кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  – мгновенного деформирования или изохронная зависимость  $\sigma = f(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow 0$ .

Уравнение Работнова (1.23) относится к числу наиболее известных уравнений вязкоупругости. Оно успешно применяется к металлам, полимерам и другим материалам [18, 43, 58]. Различные варианты уравнений (1.22), (1.23) используются для описания физически нелинейных наследственных сред при решении конкретных задач вязкоупругости.

Наряду с уравнениями (1.22), (1.23) используются методы введенных переменных, получившие название различных аналогий – термовременной, напряженно-временной и т.д. [22, 52, 114]. Однако необходимо с известной осторожностью использовать выводы теоретических работ, в которых уравнения нелинейной термовязкоупругости наследственного типа обобщаются на случай нелинейной термовязкоупругости путем введения условного времени и масштабной функции, найденной в линейной области [52, 110, 122].

**Эффекты физической нелинейности.** Для средне- и высоконаполненных резин в области малых гармонических деформаций область линейного деформирования незначительна, характерными являются эффекты физической нелинейности, проявляющиеся в амплитудной зависимости динамических характеристик, используемых в линейной теории: модуля сдвига  $\tilde{G}$  или упругости  $\tilde{E}$ , модуля объемного сжатия  $\tilde{K}$ , коэффициента Пуассона  $\nu$ . При аналитическом описании указанных характеристик удобно пользоваться комплексным представлением динамического модуля, являющегося функцией частоты, температуры, амплитуды гармонического деформирования [79, 111].

Для случая общего циклического деформирования соответствующая экспериментальная программа очень трудоемка и практически нереализуема. При простом (монофазном) гармоническом нагружении, характерном для условий эксплуатации резиновых деталей (РД) в вибрационных машинах, она существенно упрощается и требуемые зависимости могут быть получены из опытов на простой сдвиг [60, 111]. Обширные экспериментальные данные, приведенные в [39, 59,

94, 96], обзоры по нелинейным эффектам в эластомерах при циклическом деформировании [59, 79], свидетельствуют о решающем влиянии степени наполнения на уровень амплитудной зависимости сдвиговых динамических характеристик накопления  $G'$  и потерь  $G''$ . На рис. 1.6 представлены классические зависимости  $G'$  и  $G''$  от удвоенной амплитуды деформации сдвига  $\gamma$  для резин на основе бутилкаучука (28,8% объемного наполнения сажей), полученные в [127]. Эти зависимости свидетельствуют о необходимости учета амплитудной зависимости динамических характеристик резин.

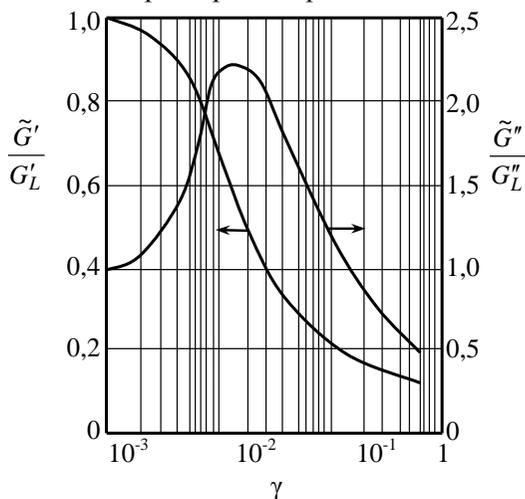


Рис. 1.6. Базовые амплитудные зависимости компонент комплексного модуля сдвига

В [39, 60] установлено, что закономерности изменения механических характеристик РД при гармоническом деформировании адекватно описываются математической моделью интегрального типа, учитывающей свойства материала, параметры конструкции и эксплуатационные факторы посредством конечных аналитических соотношений:

$$\tilde{N}_n = \tilde{E}_k \tilde{u}_n \frac{S}{H}; \quad \tilde{N}_\tau = \tilde{E}_\tau \tilde{G}_k \tilde{u}_\tau \frac{S}{H};$$

$$\begin{aligned}
 E_k^{i''} &= \beta_n^{i''} E_0; \quad G^{i''} = \beta_\tau^{i''} G_0; \\
 \beta_n^{i''} &= 2(1+\nu)\beta_{0n}(\omega, \theta, t)G_L^{i''} F^{i''}(\bar{e})/G_0; \\
 \beta_\tau^{i''} &= \beta_{0\tau}(\omega, \theta, t)F^{i''}(\bar{e})/G_0,
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

где  $\tilde{N}_n, \tilde{N}_\tau, \tilde{u}_n, \tilde{u}_\tau$  – амплитуды нормальных и касательных сил и перемещений на торцах РТИ;  $(\tilde{\bullet}) = (\bullet)' + i(\bullet)''$  – комплексное представление величин  $\tilde{N}_n = N_n' + iN_n''$ ,  $\tilde{u}_n = u_n' + iu_n''$  и т.д.;  $\tilde{E}_k, \tilde{G}_k$  – кажущиеся или условные модули, характеризующие конструкцию;  $\tilde{E}_L, \tilde{G}_L$  – модули материала (резины) в области линейного деформирования;  $\beta_{0n}, \beta_{0\tau}$  – параметры жесткости, соответствующие линейной области деформирования;  $F^{i''}$  – функции, описывающие зависимость модуля сдвига материала от амплитуды деформации,  $F^{i''}(0) = 1$ ;  $G_0, E_0$  – некоторые отсчетные модули, соответствующие частоте  $\omega_0$  и температуре  $\theta$ ;  $\bar{e}$  – среднеобъемная интенсивность деформаций.

Для параметров среднеобъемной интенсивности деформаций применительно к РД при сжатии, сдвиге, комбинированном нагружении, имеют место следующие выражения [60]

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= \varepsilon_{0y} [(1+\nu)\beta_{0n}]^{1/2}; \quad \bar{e} = \varepsilon_{0x} \left( \frac{\beta_{0\tau}}{2} \right)^{1/2}; \\
 \bar{e} &= [\varepsilon_{0x}^2 \beta_{0\tau} + 2(1+\nu)\varepsilon_{0y}^2 \beta_{0n}]^{1/2},
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

где  $\varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0x}$  – деформации торца РД под действием нормальной  $\tilde{N}_y$  и касательной  $\tilde{N}_x$  гармонических сил.

Инженерный метод расчета механических, в том числе силовых характеристик РД, состоит в конкретизации модели (1.24), (1.25) путем последовательного определения ее параметров:  $\beta_{0n}, \beta_{0\tau}, F^{i''}, \bar{e}, G^{i''}$  в соответствии с заданными формой РД, маркой резины и условиями эксплуатации РД [39]. При этом модуль сдвига материала зависит

от амплитуды деформаций, температуры и частоты следующим образом

$$\tilde{G} = \tilde{G}(\omega, \theta, e), \quad G^{\prime\prime} = G_L^{\prime\prime}(\omega, \theta) F^{\prime\prime}(\bar{e}),$$

где  $e$  – интенсивность амплитуды деформации,

$$e^2 = (e'_{ij} e'_{ij} + e''_{ij} e''_{ij}), \quad \tilde{e}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta \tilde{\varepsilon}_{kk}. \quad (1.26)$$

При конкретизации функций  $F^{\prime\prime}(\bar{e})$  используются экспериментальные зависимости  $G'$  и  $G''$  от амплитуды деформации. Для получения наиболее общих результатов в качестве базовых характеристик принимаются классические, существенно нелинейные зависимости Пейна [127], рис.1.6, построенные для бутилкаучука в широкой области изменения амплитуд деформаций и аппроксимлируемые в виде

$$\frac{G'}{G_L} = \begin{cases} 1 - 10^{(2,3075 \lg \gamma + 4,372)} & \gamma < 0,006, \\ -0,804 \lg \gamma - 0,937 & 0,006 < \gamma < 0,02, \\ 0,0765 \gamma^{-0,45} & 0,02 < \gamma < 0,3; \end{cases}$$

$$\frac{G''}{G_L} = \begin{cases} 0,933 + 0,055 \cdot 10^3 \gamma + 0,0121 \cdot 10^6 \gamma^2, & \gamma < 0,007, \\ 0,65 + 2,36 \cdot 10^2 \gamma - 0,80 \cdot 10^4 \gamma^2, & 0,007 < \gamma < 0,02, \\ -0,104 - 1,360 \lg \gamma, & 0,02 < \gamma < 0,3. \end{cases} \quad (1.27)$$

Представленные на рис.1.6 данные обобщаются на случай многоосной деформации путем использования вытекающей из формулы (1.26) связи интенсивности деформации с удвоенной амплитудой деформации сдвига

$$e = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, \quad F^{\prime\prime}(e) = \frac{G^{\prime\prime}(\sqrt{2}e)}{G_L^{\prime\prime}},$$

т.е. заменой в формулах (1.27)  $\gamma$  на  $\sqrt{2}e$  [111].

Основные результаты расчета отражены на примере плоских призматических элементов сжатия (рис.1.7).

Очевидны следующие закономерности: физическая нелинейность материала проявляется в зависимости механических характери-

стик РД от амплитуды деформации. При этом кривые, отвечающие разным соотношениям размеров  $y/y_0 = H/L$  ( $L$  – длина РД) смещены относительно друг друга и экспериментальных данных (штриховые линии), отвечающих однородному НДС в соответствии с нелинейными зависимостями Пейна. Их удается совместить путем введения параметра среднеобъемной интенсивности амплитуд деформаций  $\bar{\epsilon}$ . В [60] установлено, что указанные закономерности справедливы и для резин с другим характером физической нелинейности.

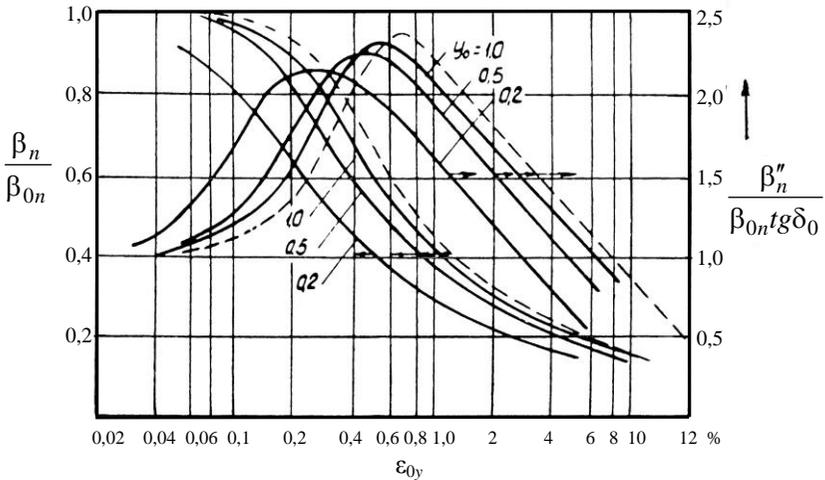


Рис.1.7. Механические характеристики РД в зависимости от амплитуды деформации и соотношения размеров

#### 1.4. Определение реологических параметров вязкоупругих материалов

Решение задач квазистатики и динамики вязкоупругих систем сводится, как правило, к анализу функциональных зависимостей, содержащих ограниченный набор функций времени или частоты. Эти

функции описывают механическую реакцию материала. Это, так называемые, механические характеристики материала (резин). К ним относятся приведенные выше функции ползучести и релаксации, синус и косинус преобразования ядер ползучести и релаксации.

По результатам экспериментальных исследований обычно получают кривые ползучести, релаксации и параметры петель гистерезиса при различных частотах, по которым находят механические характеристики. Затем реологические параметры выражают (явно или неявно) через механические характеристики при фиксированных значениях времени или частоты циклического деформирования.

Для определения реологических параметров используют несколько методов, дополняющих друг друга. К ним относятся определение реологических параметров непосредственно по кривой релаксации; по релаксационному пику на частотной зависимости коэффициента диссипации  $\psi \sim \lg \omega$ ; по параметрам петли гистерезиса при произвольной частоте нагружения.

Если в качестве ядра релаксации используются функции вида (1.11), (1.13), (1.16) и обобщенное время релаксации порядка  $t_0 = 10^4 \div 10^6$  с (что характерно для наполненных резин), определение реологических параметров целесообразно проводить непосредственно по кривым релаксации и ползучести. При исследовании ненаполненных амортизационных резин, для которых обобщенное время релаксации весьма мало  $t_0 = 10^{-1} \div 10$  с, целесообразно использовать метод обработки деформационных петель гистерезиса, полученных в широком частотном диапазоне. При наличии экспериментальных кривых  $\psi \sim \lg \omega$  в широком частотном диапазоне с четко обозначенным релаксационным пиком реологические параметры определяют по релаксационному пику на кривой  $\psi \sim \lg \omega$ . В общем случае при определении реологических параметров новых, особенно опытных марок резин, используют, как правило комбинацию перечисленных методов и сравнивают полученные результаты.

Перечисленные выше методы определения реологических параметров требуют проведения целого комплекса экспериментальных ис-

следований по определению физико-механических характеристик резин и резиновых элементов, включающих определение квазистатических характеристик (условно-равновесных)  $E_\infty$ ,  $G_\infty$ , мгновенных значений  $E_0$  и  $G_0$ , динамического модуля сдвига  $G_{дин}(\omega)$  и технического коэффициента диссипации энергии  $\psi$ , регистрации кривых ползучести и релаксации.

**Общие требования к проведению физико-механических испытаний.** На общие требования к проведению физико-механических испытаний резины существуют стандарты [24-27], устанавливающие требования к способам заготовки образцов, проведению испытаний и обработке их результатов. При отборе образцов необходимо выполнять следующие требования:

1) образцы отбираются по величине условно-равновесного модуля сжатия или сдвига, а также по твердости; образцы с различными дефектами резины, такими как царапины, вырывы, а также недовулканизованные образцы не испытываются;

2) исходя из жесткости образцов, они комплектуются по партиям, разброс жесткости не должен превышать 5%; для установления однородности резинового массива необходимо проводить выборочное расчленение образцов.

**Определение квазистатических характеристик.** В качестве экспериментального стенда для получения статических (условно-равновесных) характеристик  $E_\infty$  и  $G_\infty$  резиновых элементов использовалась установка, подробно описанная в [79], позволяющая фиксировать величину деформирующей силы  $P$  и величину относительной деформации  $\varepsilon$  или  $\gamma$ . Деформация образцов измерялась индикатором часового типа с точностью до 0,01 мм. Выдержка образцов под нагрузкой соответствовала 1 ч при температуре 343 К.

Нагрузению подвергались блоки резинометаллические (БРМ), шарниры резинометаллические (ШРМ), цилиндрические (полные и сплошные) детали.

Значения установившегося модуля  $E_\infty$  или  $G_\infty$  находились по величине деформирующей силы  $P_\infty$ , определяемой экстраполяцией

линейного участка кривой релаксации на ось сил  $P$  (рис. 1.8), при фиксированной величине относительной деформации  $\varepsilon_\infty$ , (или  $\gamma_\infty$ ) по формулам:

для пары плоских элементов сдвига типа БРМ

$$G_\infty = \frac{P_\infty h}{2F\Delta_\infty},$$

где  $F$  – площадь сдвига;

для цилиндрических элементов при сжатии

$$E_\infty = \frac{P_\infty h}{2F_y\Delta_\infty},$$

где  $F_y$  – площадь сжатия;  $h$  – высота элемента;  $\Delta_\infty$  – деформация.

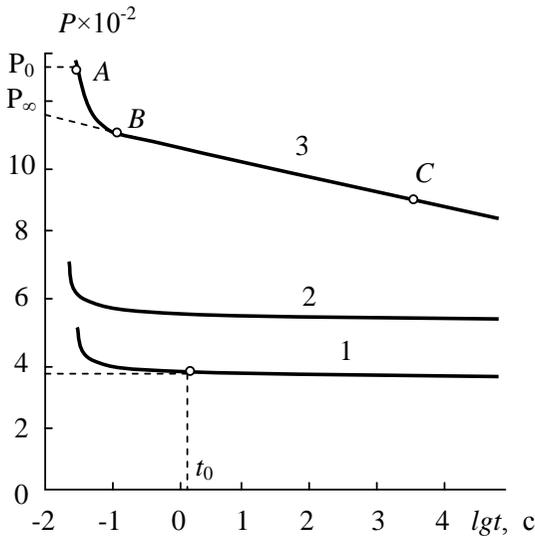


Рис. 1.8. Кривые релаксации при сдвиге БРМ 101 для резины 51-1562 (1,2) и 2959 (3)

**Определение мгновенного модуля сдвига.** При определении мгновенных значений  $E_0$  и  $G_0$  применялась специально созданная установка (рис. 1.9), которая позволяла реализовать быстрое нагруже-

ние (время нагружения  $0,05 \div 0,1$  с). Установка состоит (см. рис. 1.9) из электрического магнита 7 с неподвижной пластиной 6, который притягивает через подвижную пластину 5 образцы 4, расположенные в латунной скобе 3. Сила реакции резиновых образцов фиксируется тензоизмерительной втулкой 2, которая закреплена к станине 1, затем передается через тензоусилитель 8АНЧ на шлейфовый осциллограф Н-105. Величина деформации образцов  $\Delta$  определяется индикатором часового типа. После расшифровки осциллограмм рассчитываются мгновенные значения модулей  $E_0$  и  $G_0$ .

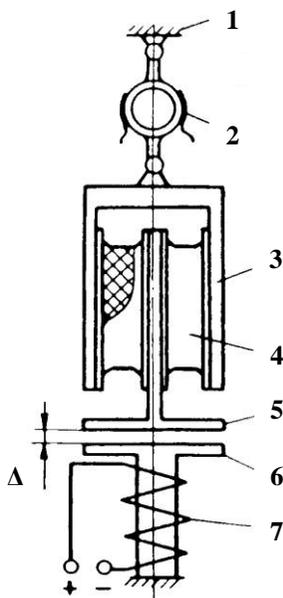


Рис. 1.9. Схема установки для определения мгновенного значения модуля

**Определение динамических характеристик.** Нагружение при определении динамических механических параметров и технического коэффициента поглощения энергии  $\psi$  резинометаллических деталей целесообразно производить с помощью деформационных машин с эксцентриковым регулируемым приводом при гармоническом стационарном нагружении.

нарном режиме. Конструкция экспериментальных стендов должна позволять исследовать резиновые детали: а) в зависимости от частоты нагружения при постоянной амплитуде; б) в зависимости от амплитуды нагружения при постоянной частоте.

При экспериментальном изучении механических характеристик резины используется стандартная тензометрическая аппаратура, состоящая из магнитоэлектрического осциллографа типа Н-105, электронно-лучевого осциллографа С1-19Б с двумя усилителями постоянного тока, тензоусилителя 8АНЧ, блоков питания и фоторегистрирующего приспособления. На рис. 1.10 показана схема подключения измерительной аппаратуры применительно к исследованию элементов сдвига. Эксцентриковый привод 3 экспериментального стенда задавал одноосные гармонические перемещения скобе 8 и присоединенным к ней резинометаллическим элементам 1. Перемещение скобы измерялось рекордным датчиком 2. Электрические сигналы, пропорциональные величине заданного перемещения, через усилитель 5 подавались на горизонтальную ось электронного осциллографа 6; на вертикальную ось подавались сигналы, пропорциональные силе реакции резинового элемента, регистрируемые тензоизмерительным кольцом 9. Числовые данные получали путем измерений петель гистерезиса, фотографируемых с экрана осциллографа 6; и измерений осциллограмм силы реакции, фиксируемых шлейфовым осциллографом 7. Для того, чтобы получить действительные результаты измерений, перед каждым испытанием проводится специальная проверка регистрирующей аппаратуры.

**Определение реологических параметров РД по кривым релаксации и ползучести.** В этом случае определение реологических параметров осуществляется следующим образом. По экспериментальным кривым релаксации напряжения (см. рис. 1.8, испытывались резиновые элементы типа БРМ101 с размерами резинового слоя  $0,100 \times 0,060 \times 0,035$  м из средненаполненных резин) определяли условно-равновесный модуль сдвига  $G_\infty$  и обобщенное время релаксации  $t_0$ , мгновенный модуль сдвига  $G_0$  определяли по максимуму на кривой релаксации (см. рис. 1.7), полученному при мгновенном (в

данном случае за  $0,01 \div 0,02$  с) нагружении образцов. Определяемые таким образом модули  $G_0$  и  $G_\infty$ , динамический модуль сдвига  $G_{дин}$ , коэффициент диссипации энергии  $\psi$  для различных марок резин приведены в табл. 1.1.

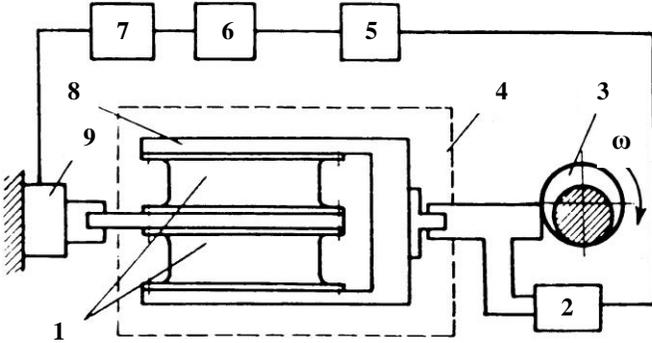


Рис. 1.10. Схема экспериментальной установки

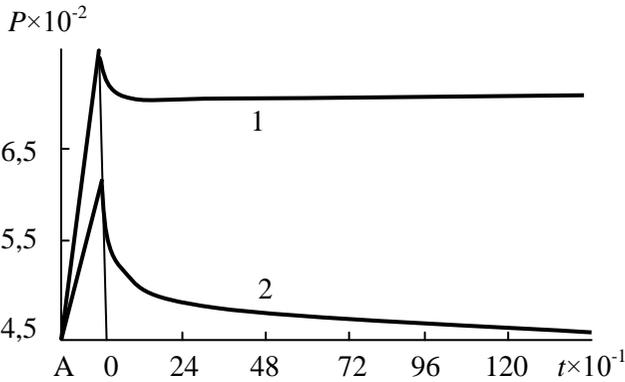


Рис. 1.11. Кривые релаксации для резины 51-1562 при сдвиге БРМ 101

Далее параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядер (1.11), (1.13), (1.14), являющиеся реологическими параметрами материала (резины), определяют с помощью применения к экспериментальной кривой релаксации (или

ползучести) численного преобразования Лапласа-Карсона [55, 56], к полученному изображению применяется квадратичный метод поиска оптимальных параметров без перехода к оригиналу. Методики таких вычислений приведены в [41, 42, 90, 104, 105].

Исходная информация обычно задается в виде совокупности значений моментов времени  $t = t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$  и соответствующих им значений напряжения  $\sigma_i = \sigma(t_i)$  (релаксация) или деформаций  $\varepsilon_i = \varepsilon(t_i)$  (ползучесть), последние представляют собой экспериментальные осциллограммы сил или перемещений.

Задача состоит в том, чтобы по имеющейся совокупности экспериментальных точек  $(t_i, \sigma_i)$  или  $(t_i, \varepsilon_i)$  найти параметры  $\alpha, \beta, \lambda$  аппроксимирующей кривой, построенной по формулам (1.4) или (1.5) с использованием ядер (1.11), (1.13), (1.14), (1.16)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t R(\alpha, \beta, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right]; \quad (1.28)$$

$$\sigma(t) = \Gamma \left[ \varepsilon(t) - \lambda \int_0^t K(\alpha, \beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]; \quad (1.29)$$

где  $\left( \lambda = \frac{\chi}{\beta} \right)$ .

При использовании кривой простой релаксации  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = const$  согласно [79] соотношение (1.28) с ядром (1.11) переписывается

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[ 1 - \chi \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t - \tau) \right] \quad (1.30)$$

$$\chi \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t - \tau) \cdot 1 = \chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau) d\tau.$$

Из-за чрезмерной сложности аналитического выражения интеграла в (1.28), (1.29) при обработке экспериментальных кривых возникают определенные трудности. Для ядра (1.11), в частности, эти трудности преодолеваются при помощи аппроксимации интегральных операторов с ядром (1.11) [101]

$$\chi \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta, t - \tau) = \chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau) d\tau \approx \frac{\chi}{\beta} \left[ 1 - e^{-\beta \cdot r \cdot t^r} \right] \quad (1.31)$$

$(r = 1 + \alpha).$

Упрощение задачи достигается применением численного преобразования Лапласа-Карсона исходной экспериментальной кривой, необходимые параметры определяются непосредственно по изображению без перехода к оригиналу, аналитическое выражение которого оказывается более простым.

Аналитическое выражение большинства используемых в механике полимеров ядер в пространстве изображений по Лапласу

$$f^L(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

может быть представлено в виде функции [42]

$$\lambda P_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, A}^L(B, p) = \lambda \left\{ \left[ \left( p^{\alpha+1} + \beta \right)^\gamma + A \right]^\delta + B \right\}^{-1}, \quad (1.32)$$

зависящей от семи параметров, определяемых по экспериментальным данным, и обобщающей ядра Абеля ( $A = B = \beta = 0, \delta = \gamma = 1$ ), Ржаницына ( $A = B = \alpha = 0, \delta = 1$ ), Работнова ( $A = B = 0, \delta = \gamma = 1$ ), Вульфсон-Колтунова ( $B = \alpha = 0, \delta = 1$ ), Гаврильяка-Негами ( $A = B = 0, \delta = 1$ ), Шермергора ( $B = 0, \delta = 1, \alpha = -2$ ). С помощью (1.32) удается описать асимметрию релаксационного спектра и фазовой диаграммы комплексного модуля [42].

Оригинал функций  $P_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, A}(B, t)$  может быть представлен в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по времени, однако в практических вычислениях применение этого ряда затруднительно из-за медленной сходимости при больших  $t$ . Поэтому оригинал целесообразно восстанавливать на основе численных методов обращения преобразования Лапласа.

Наиболее часто используются две различные схемы обращения преобразования Лапласа – применение известной формулы Меллина [55]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^L(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \varphi(p/t) \cdot p^{-1} e^p dt \quad (1.33)$$

и формулы Виддера [42]

$$f(t) \approx W_n(f, t) = (-1)^n p^{n+1} / n! f^{L(n)}(p) \Big|_{p=\frac{n}{t}}. \quad (1.34)$$

Здесь  $c_1, c$  – произвольные положительные числа;  $p$  – параметры преобразования,  $\text{Re } p > 0$ ;  $f(t), f^L(p)$  – функция и ее изображения по Лапласу параметра  $p$ ;  $f^{L(n)}$  – производная  $n$ -ого порядка изображения функции;  $\varphi(p) = p f^L(p)$ . Входящие в (1.34) производные изображения могут быть вычислены по формулам численного дифференцирования. Для приближенного вычисления интеграла в (1.33) используют интерполяционную квадратурную формулу с весом  $p^{-1} e^p$  вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} p^{-1} e^p \varphi\left(\frac{p}{t}\right) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k/t), \quad (1.35)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – различны и лежат в полуплоскости  $\text{Re } p > 0, \text{Re } \beta > 0$  [55].

Формула (1.35) точна для функций  $f(t) = t^j, j = 0, 1, \dots, n-1$ .

За счет специального выбора узлов  $p_k$  и коэффициентов  $A_k$  формула (1.35) может быть сделана наивысшей степени точности. Применение формул наивысшей степени точности оправдано, если оригинал может быть хорошо приближен многочленом от переменной  $t$ .

Для полимерных материалов функции ползучести или релаксации изменяются во времени медленно и допускают хорошее прибли-

жение многочленами от переменной  $t^a$  ( $0 < a < 1$ ). В таком случае следует применять формулы наивысшей степени точности (1.35), точные для функций  $f(t) = (t^a)^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n-1$ , то есть для дробных степеней времени.

Преобразования Лапласа ядер (1.11) и (1.13) имеют вид для функции  $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t)$

$$\mathcal{E}_\alpha^L(\beta, p) = \int_0^\infty \mathcal{E}_\alpha(\beta, p) e^{-pt} dt = \frac{1}{p^r - \beta}, \quad (r = 1 + \alpha); \quad (1.36)$$

Ржаницына

$$R_\alpha^L(\beta_1, p) = \frac{\Gamma(r)}{(p - \beta_1)^r}, \quad (\beta_1 < 0). \quad (1.37)$$

В случае простой релаксации при ядре Работнова  $R(t - \tau) = \chi \mathcal{E}_\alpha(\beta, t - \tau)$  формулы определения реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , имеют вид [104]

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\chi}{\beta} = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{\sigma_0}; \\ \beta &= \frac{\sigma^L(1) - \sigma_0}{\sigma^L(1) - \sigma_\infty}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$r = \frac{1}{\ln p} \ln \left\{ \beta \left[ 1 - \frac{\lambda \sigma_0}{p \cdot \sigma^L(p) - \sigma_0} \right] \right\}, \quad (r = 1 + \alpha),$$

где:  $\lambda$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  – реологические параметры;  $\sigma_\infty$ ,  $\sigma_0$  – равновесное и мгновенное значения релаксирующего напряжения;  $\sigma^L(p)$  – изображение по Лапласу функции релаксации;  $p$  – параметр преобразования Лапласа;  $\alpha$  – реологический параметр, параметр дробности;  $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t - \tau)$  – функции Работнова;  $t$  – время.

Обработка кривой релаксации при ядре А.Р. Ржаницына  $\chi \cdot R_\alpha(\beta_1, t) = \chi t^\alpha e^{\beta_1 t}$  ( $-1 < \alpha < 0, \beta_1 < 0$ ) приводит к формулам [104]

$$\left\{ \begin{array}{l} r \approx \frac{1}{\ln(p_2 / p_1)} \ln \frac{\sigma_0 - p_1 \sigma^L(p_1)}{\sigma_0 - p_2 \sigma^L(p_2)}, \\ \chi \cdot \Gamma(r)(-\beta_1)^{-r} = \frac{\sigma_0 - \sigma_\infty}{\sigma_0}, \\ \beta_1 = -p \left[ \frac{\sigma_0 - p \sigma^L(p)}{\sigma_0 - \sigma_\infty} \right]^{1/r}, \end{array} \right. \quad (1.39)$$

$$(p_1 \gg |\beta_1|, p_2 \gg \beta_2, r = 1 + \alpha),$$

где  $\alpha$  – реологический параметр;  $p_1, p_2, p$  – параметры преобразования Лапласа;  $\sigma_0$  – мгновенное значение релаксирующего напряжения;  $\sigma^L(p_1), \sigma^L(p_2), \sigma^L(p)$  – изображения по Лапласу функции релаксации параметров  $p_1, p_2, p$  соответственно;  $\chi, \beta_1$  – реологические параметры;  $\Gamma(r)$  – гамма-функция параметра  $r$ ;  $\sigma_\infty$  – равновесное значение релаксирующего напряжения;  $t$  – время.

Для эффективного вычисления преобразования Лапласа исходной кривой релаксации

$$p \sigma^L(p) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt$$

используется квадратурная интерполяционная формула наивысшей  $(2n-1)$  алгебраической степени точности [56], которая для узлов интерполяции  $\tau_k$ , расположенных в корнях многочлена Лягерра  $L_n(\tau)$ , дает

$$p \sigma^L(p) = \int_0^{\infty} \sigma\left(\frac{\tau}{p}\right) e^{-\tau} d\tau \approx \sum_{k=1}^n A_k \sigma\left(\frac{\tau_k}{p}\right).$$

Узлы  $\tau_k$  и коэффициенты  $A_k$  для различных  $n$  приведены в [56]. Последнее обстоятельство делает вычисления элементарными, если результаты эксперимента позволяют отобразить значения  $\sigma(t)$  при  $t = \tau_k / p$ . Этот метод обработки реологических кривых может быть

распространен на случай квазистатического эксперимента, если только в (1.4), (1.5), известны зависимости  $\sigma(t)$  или  $\varepsilon(t)$  соответственно.

Ядра (1.11), (1.13), (1.16) пригодны для описания и кривых ползучести, обладающих горизонтальной асимптотой, формулы для определения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  и  $\chi$  в этом случае аналогичны (1.38) и (1.39).

Определение реологических параметров ядра (1.11) по обобщенным кривым ползучести (релаксации) эластомеров, полученным при использовании гипотезы температурно-временного соответствия, можно производить графоаналитическим методом [33, 41]. Обобщенные вязкоупругие функции отличаются от обычных кривых протяженностью, составляющей 8-12 порядков в логарифмической шкале времени, а также резким различием условно мгновенного и равновесного модулей  $E_0/E_\infty = 10^2 - 10^3$ . Приближенные зависимости, связывающие положение точки перегиба нормированной экспериментальной кривой ползучести  $\varepsilon_n^0(t) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$  в полулогарифмических координатах (рис. 1.12) с параметрами дробно-экспоненциальной функции Работнова имеют вид

$$\operatorname{tg}\varphi \cong \frac{2}{3} \frac{\lambda}{\beta} F_1(\alpha, 1); \quad (1.40)$$

$$F_1(\alpha, 1) = \frac{1}{t^\alpha} \mathfrak{A}_\alpha(-\beta, t); \quad (1.41)$$

$$x = \beta t^{\alpha+1}, \quad (1.42)$$

где  $\varphi$  – угол наклона касательной к кривой ползучести в точке перегиба;  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  – реологические параметры;  $F_1(\alpha, x)$  – табулированные значения функции Работнова;  $t$  – время;  $x$  – промежуточная величина для определения значений  $\mathfrak{A}_\alpha$  – функции по таблицам, а также асимптотическое значение максимальной деформации

$$\varepsilon_{\max}(\infty) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\lambda}{\beta} \right), \quad (1.43)$$

$\varepsilon_{\max}$  – максимальное, равновесное значение деформации;  $\varepsilon_0$  – начальное, мгновенное значение деформации.

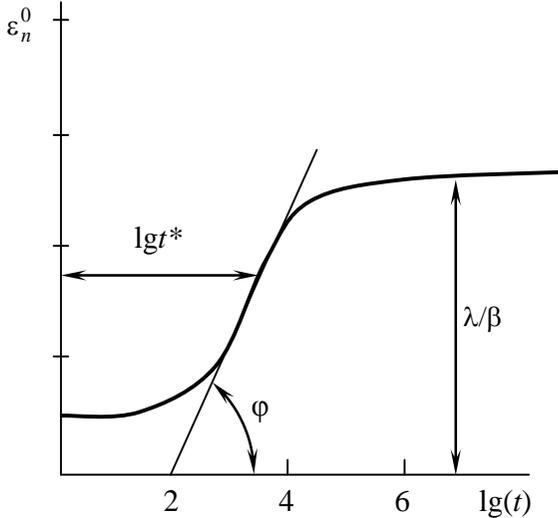


Рис. 1.12. Иллюстрация графоаналитического метода определения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  дробно-экспоненциальной функции Работнова  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta t)$

Из соотношения (1.43) сразу получается значение отношения  $\lambda/\beta$ . После этого из (1.40) находится  $F_1(\alpha, 1)$  и с помощью таблиц [90] определяется  $\alpha$ . Далее по зависимости (1.42) вычисляют параметр  $\beta$  и по известному значению отношения  $\lambda/\beta$  – параметр  $\lambda$ .

**Определение реологических параметров РД по релаксационному пику на частотной зависимости  $\psi \sim \lg \omega$ .** В этом случае реологические параметры РД для ядра релаксации (1.11) определяются по формулам

$$\alpha = 1 - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{\psi_{\max}}{\pi \lambda}; \quad (1.44)$$

$$\lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}; \quad (1.45)$$

$$\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}, \quad \chi = \lambda \cdot \beta, \quad t_0 = \frac{1}{\omega_0} = [\omega(\psi_{\max})]^{-1}, \quad (1.46)$$

где  $\omega_0$  – частота релаксационного пика, при которой  $\psi = \psi_{\max}$ .

Для использования этих соотношений необходимо располагать экспериментальной кривой  $\psi \sim \lg \omega$  в широком частотном диапазоне с четко обозначенным релаксационным пиком, как, например, на рис. 1.13.

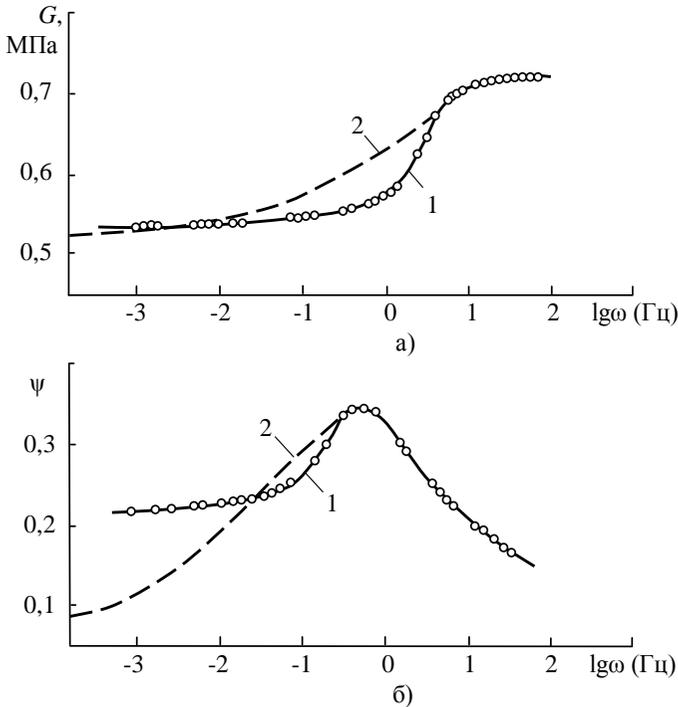


Рис. 1.13. Частотные зависимости динамического модуля сдвига (а) и коэффициента диссипации (б) для резин 51-1562: 1 – эксперимент; 2 – расчет по формулам (1.47)-(1.52)

Такие кривые, как правило, получают на специальных экспериментальных стендах типа «Инстрон». Кроме этого, экспериментальные исследования [54, 61, 79] показывают, что погрешность таких расчетов более 20% и связана прежде всего с трудностью определения частоты  $\omega_0$  ( $\omega_0 \ll 10 \text{ с}^{-1}$ ) и некоторой размытостью релаксационного пика для слабонаполненных резин. Все это в значительной степени затрудняет использование зависимостей (1.44)-(1.46) для инженерного определения реологических параметров РД. Они могут быть использованы для более глубокого изучения вязкоупругого поведения резин.

**Определение реологических параметров РД при циклическом деформировании.** Для более глубокого и всестороннего изучения резины, особенно опытных марок, целесообразней использовать определение реологических параметров по параметрам петель гистерезиса, регистрируемых в широком диапазоне изменений нагружения, температуры и влияния внешней активной среды.

В этом случае реологические параметры ядра Работнова определяются следующими соотношениями [61]:

$$\frac{G(\omega)}{G_0} = 1 - A(\omega) \quad \text{или} \quad \frac{E(\omega)}{E_0} = 1 - A(\omega); \quad (1.47)$$

$$\psi = 2\pi\chi B(\omega); \quad (1.48)$$

$$A(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (1.49)$$

$$B(\omega) = \frac{\chi \omega^{1+\alpha} \sin \delta}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\omega^{1+\alpha} \beta \cos \delta + \beta^2}; \quad (1.50)$$

где  $G(\omega)$ ,  $E(\omega)$  – модули динамический и упругости при частоте  $\omega$ ;  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  – косинус и синус преобразования ядра (1.11);  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  – реологические параметры ядра (1.11).

В результате экспериментальных исследований РД определяют параметры петель гистерезиса и амплитудные значения деформирующей силы  $P(\omega)$  при различных частотах нагружения в заданном диапазоне.

Типичная петля гистерезиса резиновых элементов представлена на рис. 1.14 и имеет вид эллипса, наклоненного под определенным углом  $\varphi_1$  к оси деформации. По найденным значениям  $P(\omega)$  и параметрам петель гистерезиса определяют величины динамических модулей и технического коэффициента диссипации энергии  $\psi(\omega)$  при конкретных значениях частоты нагружения, а также зависимости от частоты реологических параметров материала  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  по формулам

$$A(\omega) = 1 - \frac{G(\omega)}{G_0} = \sqrt{\frac{[P_1(\omega)]^2}{P_0^2} - \frac{\psi^2}{4\pi^2}}; \quad (1.51)$$

$$B(\omega) = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{S}{2\pi S_0}, \quad (1.52)$$

где  $S$  – площадь петли гистерезиса;  $S_0$  – площадь прямоугольного треугольника со сторонами  $X_0$  и  $P_0$ , т.е. полная энергия при идеальной упругости резины;  $P_0$  – амплитуда усилия в предположении идеальной упругости резины;  $X_0$  и  $P_1$  – амплитуда перемещения и усилия соответственно.

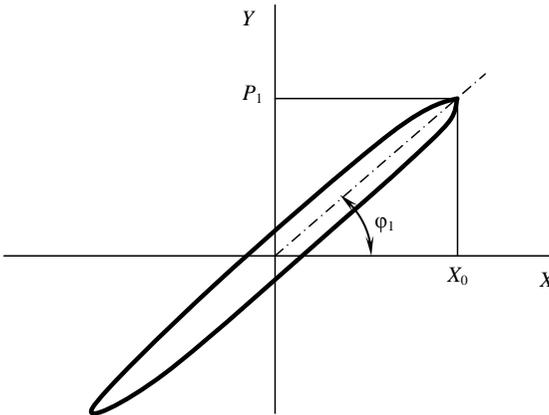


Рис. 1.14. Петля гистерезиса при циклическом нагружении

Далее по формулам (1.49), (1.50) и (1.44)-(1.46) определяют реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядра (1.11). В этом случае для определения реологических характеристик  $\alpha$  и  $\beta$  необходимо располагать данными о значении величины  $E(\omega)$  (или  $G(\omega)$ ) и  $\psi(\omega)$  в весьма широком диапазоне частот нагружения. Однако при  $\omega < 1,5$  Гц определение коэффициента поглощения энергии  $\psi(\omega)$  представляет значительные трудности. Поэтому ниже приводятся соотношения, обеспечивающие определение параметров  $\alpha$  и  $\beta$  через реологические характеристики  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , найденные опытным путем для произвольного значения частоты нагружения  $\omega = \omega_1$  [61]

$$\frac{A(\omega_1)}{B(\omega_1)} = -tg\delta + \frac{\beta}{\omega_1^{1+\alpha} \sin \delta}, \quad (1.53)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\omega_1^{1+\alpha}}{B} \left\{ 0,5\lambda \sin \delta - B(\omega_1) \cos \delta \pm \sqrt{[0,5\lambda \sin \delta - B(\omega_1) \cos \delta]^2 - [B(\omega_1)]^2} \right\}. \quad (1.54)$$

Эти формулы легко преобразуются в соотношения

$$\beta = \omega_1^{1+\alpha} \sin \delta A(\omega_1) B^{-1}(\omega_1) - \omega_1^{1+\alpha} \cos \delta; \quad (1.55)$$

$$\alpha = -1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\lambda B(\omega_1)}{\sqrt{[A^2(\omega_1) - \lambda A(\omega_1) + B^2(\omega_1)]^2 + \lambda^2 B^2(\omega_1)}}.$$

Таким образом, используя представленные выше математические соотношения, методика определения основных реологических параметров РД сводится к следующему.

1. На испытательной установке с помощью измерительной аппаратуры при гармоническом нагружении образцов в заданном диапазоне частот определяются амплитудные значения упругой деформирующей силы  $P$  резинового элемента и регистрируются петли гистерезиса.

2. По величине силы  $P$  с помощью соответствующих формул находятся значения модулей  $E(\omega)$  или  $G(\omega)$  при различных частотах нагружения.

3. На деформационных машинах при максимальной реализующей частоте нагружения или на установке, описанной выше, определяются мгновенные значения модулей  $E_0$ ,  $G_0$ .

4. Обрабатываются петли гистерезиса и определяются их основные параметры  $S$ ,  $S_0$ ,  $P_1(\omega)$  и  $P_0$ , по которым находится зависимость технического коэффициента поглощения энергии от частоты нагружения  $\psi(\omega)$ , а также величины реологических характеристик  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ .

5. По формулам (1.44)-(1.46), (1.49), (1.50) находятся величины основных реологических параметров резины  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $t_0$ .

Если известны величины  $G(\omega)/G_0$  и  $\psi(\omega)$ , найденные экспериментально при произвольном значении частоты нагружения  $\omega = \omega_1$ , то реологические параметры резины определяются соотношениями (1.53), (1.54) или (1.55). В этом случае методика обработки опытных данных сводится к тому, что описанным ранее способом находятся величины  $E(\omega)$  или  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  при определенном значении частоты  $\omega = \omega_1$ , а также находятся величины мгновенных модулей  $E_0$  и  $G_0$ ; вычисляются значения реологических характеристик  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  при  $\omega = \omega_1$ ; при решении уравнений (1.53), (1.54) находятся значения основных реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$ , в дальнейшем вычисляются реологические характеристики  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  в широком диапазоне изменения частот нагружения; по найденным значениям  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  с помощью соотношений (1.47), (1.48) находятся частотные зависимости величин  $G(\omega)/G_0$  и  $\psi(\omega)$ , проводится полный цикл экспериментальных исследований резинометаллических изделий, результаты которых сравниваются с результатами, найденными аналитическим путем.

С помощью приведенных соотношений и разработанной для ЭВМ программы были вычислены параметры ядра Работнова для исследуемых резиновых элементов (табл. 1.6) и определены частотные зависимости  $G(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , приведенные в полулогарифмических координатах на рис. 1.15. Эти зависимости удовлетворительно совпадают с экспериментом в области частот  $\omega > 0,8$  Гц. При более низких частотах нагружения экспериментальные и расчетные значения не совпадают, как показано на примере резины 51-1562 (рис. 1.13).

Таблица 1.6. –

Реологические параметры резин ( $\alpha$  – фиксировано)

Шифр резины	$G_0$ , МПа	$G_g$ , МПа	$G_\infty$ , МПа	$\psi$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
2959	1,76	1,59	0,74	0,31	-0,60	1,06	0,58
1378	1,30	0,94	0,73	0,13	-0,60	0,503	0,44
1224	1,30	1,16	0,93	0,11	-0,60	0,692	0,28
4з	1,60	1,24	0,90	0,40	-0,60	2,86	0,44
67Л	1,50	0,88	0,78	0,35	-0,60	1,73	0,48
59Л	1,50	0,88	0,72	0,32	-0,60	1,31	0,52
28Э	1,70	1,23	1,12	0,30	-0,60	2,57	0,34
169	1,50	1,23	0,93	0,30	-0,60	2,01	0,38
310	1,40	0,91	0,90	0,25	-0,60	1,61	0,36
51-1562	0,78	0,72	0,51	0,17	-0,60	0,91	0,35
51-1714	1,30	1,02	0,71	0,50	-0,60	5,405	0,454
51-1714	2,00	1,40	1,10	0,90	-0,60	2,082	0,45

Пример расчета. Рассмотрим определение реологических характеристик элементов типа БРМ101 (размер эластичного блока  $0,035 \times 0,060 \times 0,1$ ) из серийной марки резины типа 51-1562 (на основе СКИ-3, сажи 5 мас. ч., окиси цинка 5 мас. ч.). Три пары элементов, статическая жесткость которых отличалась от среднего значения не более 5% подвергались комплексу испытаний согласно изложенной методике. Найденные реологические характеристики показаны в табл. 1.7.

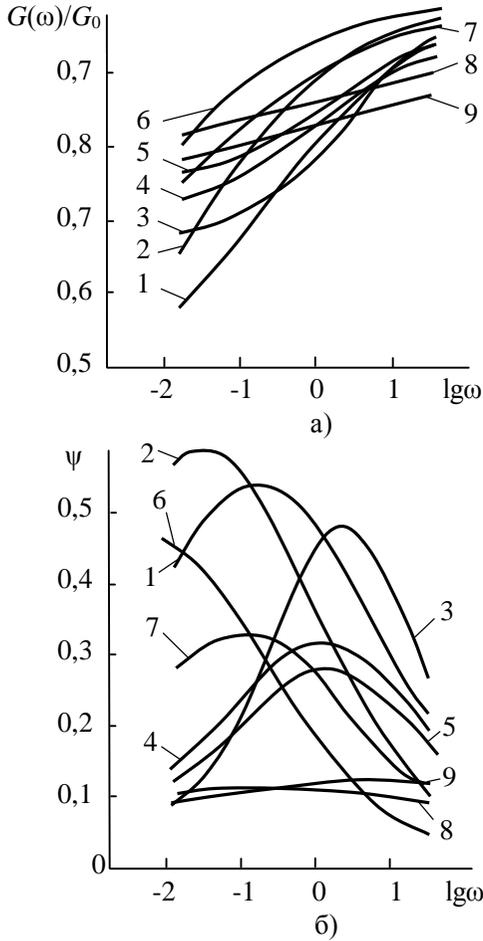


Рис. 1.15. Частотные зависимости  $G(\omega)/G_0$  (а) и  $\psi(\omega)$  (б) для элементов из различных резин: 1 – 2959; 2 – 1847; 3 – 30Э; 4 – 169; 5 – 67Л; 6 – 1378; 7 – 1562; 8 – 1224; 9 – 3311

Статический (условно-равновесный) модуль сдвига  $G_\infty$  определяется на установке при скорости нагружения 0,05 м/с, выдержке под

нагрузкой 60 мин при температуре 343 К (70°C) и величине деформации 5 мм.

Мгновенный модуль сдвига определялся на описанной выше установке при времени срабатывания магнита (время нагружения)  $t = 0,05$  с и величине деформации  $\Delta = 1,9$  мм.

Таблица 1.7. –

Реологические характеристики резин

Шифр резины	Наполнение		$\psi$	$G_0$ , МПа	$G_\infty$ , МПа	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
	тех. уг-лерод	$Z_n0$						
2959	45	15	0,31	1,76	0,74	-0,64	1,04	0,58
1378	15	5	0,13	1,30	0,73	-0,87	1,01	0,44
1224	3	50	0,11	1,30	0,93	-0,84	1,27	0,28
4Н	60	15	0,60	2,80	1,30	-	-	-
4з	34	27	0,40	1,60	0,90	-0,60	2,85	0,44
67Л	15	20	0,35	1,50	0,78	-0,60	1,73	0,48
59Л	10	40	0,32	1,50	0,72	-0,51	1,43	0,52
28Э	20	10	0,30	1,70	1,12	-0,60	2,57	0,34
169	20	5	0,30	1,50	0,93	-0,60	2,01	0,38
310	15	15	0,25	1,40	0,90	-0,60	1,61	0,36
1562	5	5	0,17	0,78	0,51	-0,64	0,89	0,35

Динамические характеристики исследуемых элементов определялись на специальном стенде в широком диапазоне изменения частоты нагружения (4÷20 Гц). При расшифровке петель гистерезиса и осциллограмм силы определялись значения динамического модуля  $G_{дин}$  и коэффициента диссипации  $\psi$ . На рис. 1.16 показаны эти значения для трех пар исследуемых элементов. В дальнейшем с помощью изложенного выше алгоритма расчета и программы на ИВМ производилась обработка полученных результатов при конкретной частоте нагружения  $\omega = 10,8$  Гц. На рис. 1.16 результаты обработки показаны сплошной линией. Как видно, результаты расчета при фиксированной частоте и экспериментальные результаты удовлетворительно совпадают.

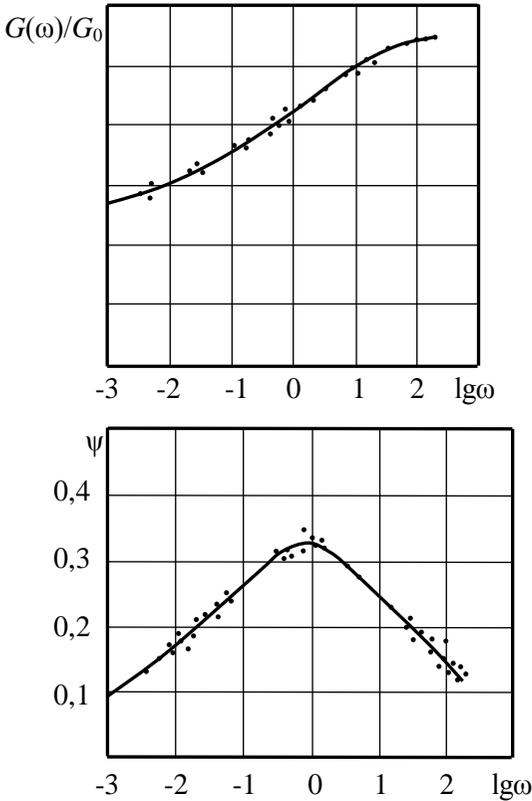


Рис. 1.16. Частотные зависимости  $G(\omega)/G_0$  (а) и  $\psi(\omega)$  (б) для БРМ101 из резины 1562 (данные получены на «Инстрон»-1162)

В таблице 1.7 представлены значения реологических характеристик резин (их определение осуществлялось по изложенной методике для элементов сдвига типа БРМ101, изготовленных в НИИРПе), наиболее часто используемых в общем машиностроении для изготовления виброизоляторов.

**Способ определения динамических характеристик вязкоупругих материалов по ударному нагружению.** В [10] разработан метод определения динамических характеристик эластичных материа-

лов на натуральных деталях из эластомеров произвольной формы, а также устройство для реализации этого способа [107].

Сущность способа заключается в том, что наносят удар подпружиненным твердым телом по испытываемому материалу, регистрируют время падения и отскока груза, вычисляют собственную частоту колебаний и по ним определяют динамический модуль упругости. В качестве ударника используют грибообразный индентор с грузом, наносят многократные удары, регистрируют амплитуды отскоков и определяют декремент затухания материала, являющийся вторым параметром динамических характеристик эластичного материала.

Способ и устройство основаны на определении декремента затухания и динамического модуля упругости по измеряемому времени контакта и времени отскока подвижной массы.

Для обеспечения возможности определения реологических характеристик материала на эластомерных конструкциях произвольной формы без их разрушения, деформации подвергают локальную зону испытываемого материала посредством периодического ударного воздействия на него грибообразного индентора, совершающего свободные колебания с одновременной регистрацией амплитуд отскоков.

При этом регистрируется время контакта индентора с испытываемым материалом, время его отскока и амплитуды. На основании экспериментально полученных величин вычисляется декремент затухания материала  $\delta(\omega)$ , коэффициент диссипации  $\psi(\omega)$ , динамический модуль упругости  $E(\omega)$ . Теоретической предпосылкой для разработки способа определения динамических характеристик является исходное уравнение движения штампа на этапе взаимодействия его с эластомером [65].

Динамический модуль с учетом идентифицированных на эталонном образце инерционных параметрам установки получают в виде [10]

$$E(\omega) = km(\omega^2 - \omega_\phi^2); \quad (1.56)$$

$$\delta(\omega) = \frac{\omega^2 \ln \frac{A_0}{A_1}}{\pi n (\omega^2 - \omega_\phi^2)} - \frac{\delta_1(\omega_\phi) \cdot \omega^2}{\omega^2 - \omega_\phi^2} - \frac{\delta_1(\omega) \cdot \omega_\phi^2}{\omega^2}, \quad (1.57)$$

где  $A_0$  и  $A_n$  – амплитуда свободных колебаний индентора и амплитуда отскока;  $\omega$ ,  $\omega_\phi$  – частоты свободных колебаний индентора и частота свободных колебаний индентора при соударении с испытуемым материалом

$$\omega = \frac{\pi}{T_1}, \quad \omega_\phi = \frac{\pi}{T_2};$$

где  $T_1$ ,  $T_2$  – время отскока и время его контакта (см. рис. 1.17);  $\delta_1(\omega)$  и  $\delta_1(\omega_\phi)$  – декремент затухания пружины индентора при соответствующих частотах;  $k$  – коэффициент, учитывающий форму индентора;  $m$  – приведенная масса подпружиненного индентора;  $n$  – число периодов колебаний индентора.

Технический коэффициент диссипации энергии определяют следующим образом

$$\psi(\omega) = 2\delta(\omega). \quad (1.58)$$

Формулы (1.56)-(1.58) являются основными для расчета динамических характеристик по результатам эксперимента.

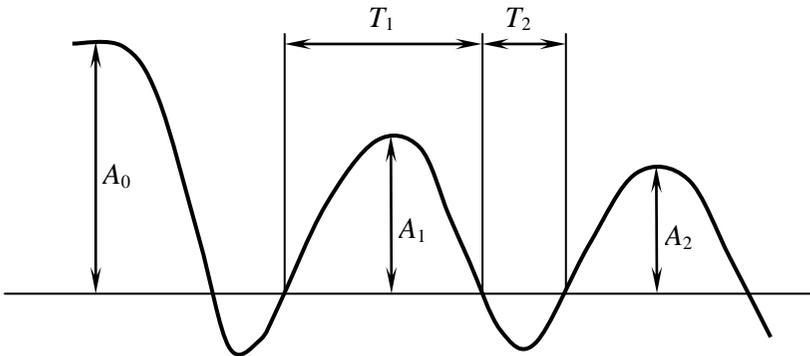


Рис. 1.17. Вид регистрируемой экспериментальной осциллограммы

**Идентификация математических моделей.** Выше рассматривались модели определения реологических параметров РД по результатам экспериментальных исследований, при этом предполагалось адекватное описание эксперимента используемыми феноменологическими соотношениями и возможности экспериментальной базы проводить специально поставленные эксперименты и измерения с наперед заданной и достаточно высокой степенью точности.

В практических исследованиях такая адекватность выполняется довольно редко. Поэтому необходимо использовать методы определения реологических параметров РД, учитывающие неадекватность математических моделей и реальные возможности эксперимента.

В зависимости от операторов, преобразующих исходную информацию, различают статические и динамические модели. Статические модели предполагают наличие заданных факторов – величин и фиксированных параметров, динамические же модели носят более общий характер, а их методы идентификации позволяют использовать широкий спектр экспериментальных данных или натуральных наблюдений [79].

Так как эксплуатация большинства резинотехнических изделий ограничивается диапазоном деформаций (до 30%), для практики актуальны модели поведения этого класса материалов в квазистатических и динамических режимах работы. Естественными требованиями при построении таких моделей являются: использование адекватного математического аппарата для учета влияния основных свойств материала, способность модели к описанию основных особенностей нелинейного поведения материала (физическая, геометрическая нелинейности) и возможность идентификации модели для конкретных материалов на базе доступного для реализации программ экспериментального исследования.

В настоящее время разработано значительное количество методик определения параметров ядер, приведенных в работах [2-4, 49, 61, 64, 71, 83, 90, 104, 111, 118].

Безусловно, каждая из методик имеет свои преимущества, но при описании реального материала возникают, как правило, основные

общие для всех методик затруднения: малая длительность опытов при существенном влиянии скорости растяжения на начальном участке кривых ползучести и релаксации, разброс экспериментальных данных до 15% (часто и выше), отсутствие данных о мгновенном модуле Юнга и коэффициенте Пуассона при малых деформациях.

Рассмотрим сначала вопрос об определении реологических параметров по участку кривой простой ползучести или релаксации. В этом случае [103]

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= E_0^{-1}(1 + \chi S(\alpha, \beta, t)); \\ \sigma(t) &= E_0(1 - \chi \varnothing(\alpha, \beta, t)).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}S(\alpha, \beta, t) &= \int_0^t R(x, \alpha, \beta) dx; \\ \varnothing(\alpha, \beta, t) &= \int_0^t K(x, \alpha, \beta) dx,\end{aligned}$$

где  $R(x, \alpha, \beta)$  и  $K(x, \alpha, \beta)$  – ядра ползучести и релаксации соответственно. Обозначив для сокращения записей  $\varepsilon_0(t_0) = \varepsilon_k$ ,  $S(\alpha, \beta, t_k) = S_k$ , получают после алгебраических преобразований

$$\begin{aligned}V_1(\alpha, \beta) &= S_n(1 - a) + aS_2 - S_1 = 0; \\ V_2(\alpha, \beta) &= S_1(1 - b) + bS_3 - S_3 = 0,\end{aligned}\tag{1.59}$$

где  $a = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}{\varepsilon_4 - \varepsilon_2}$ ;  $b = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}$ .

Аналогичные соотношения можно получить для случая простой релаксации [63]. Таким образом, задача определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  сводится к решению системы трансцендентных уравнений (1.59).

При наличии экспериментальных данных о величине реакции и сдвига фаз между напряжением и гармонической деформацией ( $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ ) задача определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  также может быть сведена к решению системы уравнений [79]

$$V_1(\alpha, \beta) = \frac{(A_1^2 + B_1^2)tg^2\varphi_1}{[B_1 + (A_1 + A_2)tg\varphi_1]^2 + B_2^2tg^2\varphi_1} - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 = 0;$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \frac{B_2 + A_2tg\varphi_2}{B_1 + A_1tg\varphi_1} - \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_2} = 0.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} K(x) \cos \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} x dx;$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} K(x) \sin \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} x dx,$$

где  $K(x)$  – ядро релаксации.

Решение системы (1.59) или (1.60), если оно существует, можно получить с наперед заданной точностью, используя в качестве критерия корня изменение знака невязки  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – решения каждого из уравнений системы при фиксированном  $\alpha$ . Обработка экспериментальных данных с использованием ядер Работнова или Слонимского-Бронского для разных марок резин показала, что чаще всего системы либо несовместимы, либо имеют несколько корней. Поэтому целесообразно использовать для нахождения оптимальных значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  методы минимизации функции цели вида

$$W = \sum_{k=1}^n V_k^2(\alpha, \beta), \quad (1.61)$$

где  $n > 2$  и определяется наибольшим числом существенно различных точек на кривой. Под существенно различными точками принимают точки, разность результатов измерений в которых хотя бы на порядок превышает погрешность эксперимента. Трудность построения программы поиска связана с не унимодальностью функции цели (1.61). Экспериментальная проверка различных методов [4, 79] показала, что наиболее рациональным в данном случае является алгоритм, основанный на методе пробных шагов с автоматическим выбором и дроблении-

ем шага в сочетании с выбором точек спуска по диагоналям прямоугольника в пространстве  $\alpha, \beta$ .

В случае определения реологических параметров (1.11), по участку кривой релаксации или ползучести, при обработке экспериментов, обладающих большим разбросом данных, может возникнуть неединственность решения задачи, т.е. одна и та же кривая может быть аппроксимирована расчетными кривыми, построенными по различным наборам параметров с почти одинаковой точностью. Имеется некоторый произвол при назначении данной кривой ползучести или релаксации набора положительных параметров.

Этот произвол необходимо использовать при обработке серии экспериментов на ползучесть или релаксацию для одного и того же материала. Установлено, что параметры  $\beta$  и  $\lambda$  [93] изменяются наиболее значительно, менее заметно изменяется параметр  $\alpha$  – являющийся структурно-чувствительным коэффициентом. В этом случае после обработки каждой кривой заданной серии фиксируют значение  $\alpha$  для всей серии (одного материала) наиболее близкое к среднему значению вычисленных параметров  $\alpha$ . Кроме этого, для устранения явления неединственности результатов поиска параметров по данным квазистатических испытаний, необходимо использовать методики поиска параметров ядер при совместном задании квазистатических опытов и значений комплексного динамического модуля сдвига или модуля Юнга в возможно более широком интервале частот [3, 4]. Анализ полученных динамических характеристик показывает, как рассмотренная модель, идентифицированная по данным квазистатического эксперимента, предсказывает основные нелинейные эффекты: отличие петли гистерезиса от эллиптической, уменьшение равновесного модуля с ростом удлинения, влияние амплитуды динамической и статической составляющих деформации.

В случае сложных математических моделей, учитывающих зависимость от температуры реологических параметров и некоторые нелинейные эффекты, их идентификацию проводят при совместном использовании данных квазистатических и динамических испытаний [3, 79].

При этом целесообразно минимизировать квадратичное отклонение температур и амплитуд колебаний осциллятора в зоне термомеханической неустойчивости. Такой подход позволяет определить реологические параметры полимеров, механическая реакция которых существенно зависит от температуры в рабочем диапазоне температур [2, 79]. Для идентификации нелинейных модулей необходима постановка серии сложных экспериментов по определению как частотных, так и амплитудных зависимостей механических характеристик.

В [2] предлагается следующая программа экспериментов в диапазоне максимальных удлинений 30-50% для идентификации и проверки принимаемых определяющих соотношений без привязки к типу образцов и испытательному оборудованию:

1) релаксация напряжений для периодически повторяющейся импульсной функции деформации с последовательно возрастающими амплитудами: минимальный уровень деформации порядка 1%, продолжительность отдыха после разгрузки не менее пятикратной выдержки при релаксации;

2) деформирование при различных постоянных (или близких к постоянным) скоростях с возможно более точной регистрацией данных эксперимента на начальных участках кривых;

3) деформирование в режиме вынужденных периодических колебаний при различных значениях статической и переменной составляющих деформации, период колебаний не больше времени задания деформации в опытах на релаксацию, для устранения влияния диссипативного разогрева достаточна регистрация начального участка и первых 5-10 циклов;

4) контрольные эксперименты в режимах ползучести и других видах напряженно-деформированного состояния, имеющих аналитические или численные реализации решений соответствующих краевых задач для рассматриваемой модели.

Во всех опытах для процедур численной идентификации необходима полная регистрация истории изменения параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние образца.

Используя следующие соотношения, рассмотрим последовательность процедур идентификации нелинейной модели поведения наполненных резин при конечных деформациях [2]

$$\hat{Q} = \bar{\mu} \left\{ [1 + b(I_1 - 3)]^n \left[ \hat{g} - \frac{I_1}{3} (\hat{G}^*)^{-1} \right] \right\} + p(\hat{G}^*)^{-1}; \quad (1.62)$$

$$I_3 = 1;$$

$$\bar{\mu} \cdot f(t) = \int_0^t R(t - \tau) df(\tau), \quad (1.63)$$

где:  $\hat{Q}$  – «энергетический» (редуцированный) тензор напряжений;  $\hat{g}$  – метрический тензор недеформированной конфигурации;  $\hat{G}^*$  – тензор меры деформаций Грина с его инвариантами  $I_1, I_3$ ;  $n, b$  – параметры;  $p$  – среднее «физическое» напряжение, определяемое при решении конкретной краевой задачи;  $f(t)$  – произвольная функция времени  $t$  (определяемая историей деформации);  $R(t)$  – функция релаксации.

По релаксационным кривым при максимальном времени наблюдения  $t_m$  строится изохронная кривая в координатах, соответствующих упругому решению для потенциала Трелоара. Если она нелинейна, определяются параметры модели  $n$  и  $b$ .

Для каждой кривой релаксации из уравнения связи напряжения с деформацией при известных значениях  $n$  и  $b$  определяются функция релаксации  $R(t)$  в интервале времен от (5-10)  $t_0$  до  $t_m$  ( $t_0$  – время выхода деформации на заданный уровень). Эта операция и для конечных деформаций приближенно выполняется путем вычисления (1.63) как произведения функции релаксации на функцию деформации, аппроксимированную функцией Хэвисайда. Если найденные функции релаксации отличаются несущественно и тангенс угла потерь для динамических испытаний, не зависит от амплитуды деформации, то принимается  $g_\gamma = 1$ . Задавшись аналитическим выражением для функции релаксации типа

$$R(t) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (t/t_k)} \quad (1.64)$$

с параметрами  $\mu_\infty$ ,  $\mu_0$ ,  $t_k$ , нужно с помощью численных методов нелинейного программирования определить эти параметры путем совместной аппроксимации кривых релаксации с начальными участками нагружения, кривых растяжения с различными скоростями и данных динамических экспериментов на начальных циклах нагружения. При удовлетворительных результатах аппроксимации получим идентифицированную модель (1.62), (1.63).

В противном случае несовпадающие кривые функций релаксации каждого уровня релаксационного эксперимента в полулогарифмических координатах смещаются по оси времени в единую кривую, при этом определяется первое приближение функции деформационно-временного сдвига и обобщенной функции релаксации. Для уточнения снова используется их аналитическая аппроксимация и поиск параметров по всей совокупности квазистатических и динамических данных.

Реализация алгоритмов поиска параметров методами нелинейного программирования должна учитывать математическую некорректность решаемой задачи [4] при полном использовании информации о допустимой области изменения параметров. Окончательное решение о пригодности идентифицированной модели выносится после описания данных контрольных экспериментов.

Значительные трудности возникают при идентификации нелинейных моделей, использующих в качестве ядра функцию  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau)$  Работнова (1.11), приводящую к потере устойчивости вычислительных процедур поиска на ЭВМ.

Для преодоления указанных трудностей используют метод аппроксимации интегральных операторов с ядром (1.11), разработанный и теоретически обоснованный Крушем И.И. [54], а идентификация реологической модели выполняется в два этапа [83, 118]. Суть метода состоит в следующем. Полагая в (1.11) показатель дробности  $\alpha=0$ , переходят к экспоненциальному ядру (1.9) и к соответствующему ему дифференциальному уравнению, определяя реологические параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$  в каждый момент времени из условия равенства реальных значений дефекта модуля  $\lambda = 1 - A$  и технического коэффициента погло-

щения энергии  $\psi=2\pi B(\omega)$  для ядра Работнова и экспоненциального ядра на заданной частоте  $\Omega$ .

Формулы для пересчета реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  ядра (1.11) в параметры  $\chi_0$  и  $\beta_0$  экспоненциального ядра (1.9) [83]

$$\beta_0 = \Omega \frac{A}{B}; \chi_0 = \Omega \left( B + \frac{A^2}{B} \right), \quad (1.65)$$

где косинус- и синус-преобразования  $A$  и  $B$  определяются по формулам (1.12) при условии замены в них  $\omega$  на  $\Omega$ .

Сначала определяются параметры экспоненциальных ядер  $\beta_{01}$ ,  $\chi_{01}$ ,  $\beta_{02}$ ,  $\chi_{02}$  при экспериментальной обработке данных (как правило, используются экспериментальные осциллограммы сил или перемещений), при двух существенно различных частотах  $\Omega_{01}$  и  $\Omega_{02}$  доставляющие минимум функции цели [83]

$$F_{\eta} = \sum_{i=1}^N \left[ \tilde{n}^{\varepsilon}(t_i) - \tilde{n}^T(t_i) \right]^2,$$

где  $\tilde{n}^{\varepsilon}(t_i)$  и  $\tilde{n}^T(t_i)$  – динамические нормальные давления в точках  $t_i$  экспериментальные и теоретические соответственно.

При этом теоретические получают при решении соответствующих уравнений (или систем) теории колебаний, полученных с использованием ядра (1.9). Это так называемый первый этап идентификации экспериментальных данных.

На втором этапе идентификации осуществляется переход от экспоненциального ядра (1.9) к параметрам ядра (1.11).

Для этого, исключая параметр  $\beta$ , соответствующий дробно-экспоненциальной функции, из соотношений (1.65)

$$\beta_{01} = \Omega_{01} \frac{\Omega_{01}^{1-\alpha} \cos \delta + \beta}{\Omega_{01}^{1-\alpha} \sin \delta}, \quad \beta_{02} = \Omega_{02} \frac{\Omega_{02}^{1-\alpha} \cos \delta + \beta}{\Omega_{02}^{1-\alpha} \sin \delta} \quad (1.66)$$

получают выражения для определения параметров  $\mathcal{E}_{\alpha}(-\beta, t - \tau)$  дробно-экспоненциального ядра [83]

$$\beta = \Omega_{01}^{1-\alpha} \left[ \frac{\beta_{01}}{\Omega_{01}} \sin \delta - \cos \delta \right], \quad (1.67)$$

$$\left[ \left( \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \operatorname{ctg} \delta - \left( \frac{\Omega_{01}}{\Omega_{02}} \right)^{1-\alpha} \cdot \frac{\beta_{01}}{\Omega_{01}} + \frac{\beta_{02}}{\Omega_{02}} = 0. \quad (1.68)$$

Параметр  $\alpha$  определяют из решения трансцендентного уравнения (1.68), после по (1.67) получают  $\beta$ . Значения  $\chi$  вычисляются через дефект модуля

$$\lambda = \chi_{01} \beta_{01}^{-1} = \chi_{02} \beta_{02}^{-1} = \chi \beta^{-1}.$$

В работе [118] показано, что ошибки приближенного расчета по сравнению с точным не превосходят погрешности эксперимента, используемого для определения параметров.

Задачи выбора и идентификации реологических параметров вязкоупругой модели, как правило, составляют только подпрограммы при решении задач оптимизации и синтеза резиновых деталей с заданными физико-механическими характеристиками. В каждом конкретном случае известными методами поиска идентифицируются трех- или четырехкомпонентная реологическая модель.

В качестве функции цели используют квадратичное отклонение вида  $F_y$  по реологическим параметрам. От качества идентификации выбранной модели зависит степень соответствия рассматриваемых функций (величин) реальным характеристикам исследуемых процессов. Подпрограммы идентификации используются и в задачах оптимального многокритериального проектирования вибрационных машин с заданными характеристиками. При этом для реологических параметров задают границы идентификации, отыскивается вектор параметров  $[x_0 = E_0, \alpha, \beta, \lambda]$ , доставляющий глобальный минимум целевой функции вида  $F_y$  и удовлетворяющий требуемым критериям качества проектируемой машины [83]. В основу алгоритма идентификации при этом может быть положен метод векторной многокритериальной оптимизации с использованием ЛП-поиска, предложенного в [108, 109].

## 1.5. Уточнение упругих постоянных резинокордного материала

Одной из наиболее широко используемых сфер применения резин является сфера производства резинокордных материалов, в частности шин. Определение упругих постоянных резинокордных материалов является достаточно сложной задачей, это связано с особенностями механического поведения, как матрицы, так и волокна и их сочетания в композите. Экспериментальные исследования требуют проведения большого количества опытов, изменения различных параметров таких, как объемное содержание корда, характер расположения армирующих волокон, применение различных материалов для матрицы и волокон.

Альтернативный структурный подход предполагает представление композиционного материала однородным анизотропным материалом с упругими характеристиками, зависящими от упругих характеристик матрицы и армирующих волокон, их объемной доли в композите, размеров и взаимного расположения армирующих элементов. На основе этого подхода с использованием различных гипотез получены упругие постоянные композита. Как правило, предполагалось, что частота армирования волокнами достаточно велика, то армированный слой можно считать трансверсальноизотропным с плоскостью изотропии  $x_2Ox_3$ . Тогда для определения упругих характеристик резинокордного слоя необходимо найти 5 независимых величин: модулей упругости  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ , модулей сдвига  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  и коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$ .

Для решения трехмерных задач механики композитов предложен ряд соотношений для определения упругих постоянных. Наиболее широко распространенными являются соотношения, предложенные Аболиньшем Д.С. [1] и Ваниным Г.А. [19]. Анизотропия волокон при расчете упругих характеристик композиционного материала учитывалась в работе [95]. Определение упругих характеристик композита на основе метода конечных элементов использовалось в работе [15].

В работе [46] элемент волокнистого композиционного материала, обладающий трансверсально-изотропными свойствами, представлялся виде комбинации двух цилиндров бесконечной длины – изотропного полого, моделирующего матрицу и трансверсально-изотропного сплошного, моделирующего волокно.

Упругие постоянные находятся из решения двух краевых задач: решается краевая задача совместного деформирования матрицы и волокна. В результате решения которой, получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции упругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Далее получаем решение аналогичной краевой задачи для композита, который представляется однородным трансверсально-изотропным материалом с пока еще неизвестными упругими постоянными. В результате получаем компоненты напряженно-деформированного состояния как функции неизвестных упругих постоянных однородного трансверсально-изотропного материала, моделирующего композит. Из условия согласования, как правило, в качестве такого условия выступает равенство каких-либо компонент вектора перемещений, находят неизвестные упругие постоянные трансверсально-изотропного материала как функции упругих постоянных материала матрицы и материала волокна, а также объемной доли каждого из них в композите. Получить аналитические решения для такой комбинации можно лишь для ограниченного числа краевых задач. Такие задачи решены в работе [46], при решении задачи на чистый поперечный сдвиг получены следующие постоянные композита:

$$E_{22} = \frac{1}{S_{22}}; \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}. \quad (1.69)$$

Упругие податливости вычисляются по формулам (знаком  $^{\circ}$  показаны упругие постоянные волокна, \* – упругие постоянные матрицы):

$$S_{22} = \frac{1}{2}(S_2 + S_3); S_{23} = \frac{1}{2}(S_2 - S_3);$$

$$S_2 = \frac{1}{E_{11}^\circ} \left( \alpha - \beta - \frac{2\alpha d_3 + \beta d_4}{d} \right),$$

где  $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;  $d_3 = a_{22}(\alpha k(1 - v^*) - (1 - v_{23}^\circ))f - 2a_{12}(\beta - v_{12}^\circ)f$ ;

$$d_4 = 2a_{11}(\beta - v_{12}^\circ)f - a_{21}(\alpha k(1 - v^*) - (1 - v_{23}^\circ))f; \quad \alpha = \frac{E_{11}^\circ}{E^*}; \quad \beta = v^* \frac{E_{11}^\circ}{E^*};$$

$$k = \frac{E_{22}^\circ}{E_{11}^\circ}; \quad f = \frac{a^2}{b^2} - \text{объемное содержание волокон; } a - \text{ радиус волок-}$$

на;  $b$  - внешний радиус цилиндра, моделирующего матрицу;

$$a_{11} = (1 - v_{23}^\circ)(1 - f) + \alpha k(1 + f) + \beta k(1 - f); \quad a_{12} = v_{21}^\circ(1 - f) + \beta k f;$$

$$a_{21} = 2\beta f + 2v_{21}^\circ(1 - f), \quad a_{22} = \alpha f + (1 - f),$$

Для вспомогательной податливости  $S_3$  в результате решения краевой задачи на чистый поперечный сдвиг получены два значения  $S_3'$  и  $S_3''$ :

$$S_3' = \frac{1}{E_{11}^\circ} (\alpha + \beta) \cdot \left( 1 + 4(1 - v^*) \frac{d_1 + d_2}{d} \right); \quad (1.70)$$

$$S_3'' = \frac{1}{E_{11}^\circ} (\alpha + \beta) \cdot \left( 1 + 4(1 - v^*) \frac{-d_1}{d} \right); \quad (1.71)$$

где  $d_1 = b_1(a_{22} - a_{12})$ ;  $d_2 = b_1(a_{11} - a_{21})$ ;  $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;

$$a_{11} = 3(1 + v_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 4(v_{23}^\circ + v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-2}) + \alpha k(1 + v^*)(3 - 4v^*f + f^{-2});$$

$$a_{12} = 2(1 + v_{23}^\circ)(f^{-1} - 1) + 2(v_{23}^\circ + v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + 2\alpha k(1 + v^*) \times$$

$$\times (1 - v^*f + (1 - v^*)f^{-1}); \quad a_{21} = 3(1 + v_{23}^\circ)(f^{-2} - 1) + 2(3 + v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) \times$$

$$\times (f - f^{-2}) + \alpha k(3(1 + v^*) - 2(3 + v^* - 2v^{*2})f - (1 + v^*)f^{-2}); \quad a_{22} = 2(1 + v_{23}^\circ) \times$$

$$\times (f^{-1} - 1) + (3 + v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(f - f^{-1}) + \alpha k(2(1 + v^*) - (3 + v^* - 2v^{*2})f -$$

$$- (1 - v^* - 2v^{*2})f^{-1}); \quad b_1 = ((1 + v_{23}^\circ) - \alpha k(1 + v^*)).$$

Первое значение получено для условия совместности, наложенного на радиальное перемещение, второе - на окружное. При исполь-

зовании значения податливости  $S_3$ , полученного по формулам (1.70) и (1.71), значения  $E_{22}$  и  $\nu_{23}$  могут существенно отличаться.

Воспользовавшись решениями, полученными в работе [46], найдем более точное аналитическое выражение для податливости  $S_3$  [28].

Чистый продольный сдвиг получается, если к рассматриваемой модели композита приложить следующие нагрузки:

$$\sigma_{rr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}(b, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta,$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты.

Согласно работе [46] в композиционном материале поле перемещений и напряжений описывается в виде:

для трансверсально-изотропного волокна

$$\sigma_{rr}^\circ(\theta) = -2A^\circ \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}^\circ(r, \theta) = (2A^\circ + 12B^\circ r^2) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{r\theta}^\circ(r, \theta) = (2A^\circ + 6B^\circ r^2) \sin 2\theta;$$

$$u_r^\circ(r, \theta) = -\frac{r}{E_{22}^\circ} \left( 2(1 + \nu_{23}^\circ) A^\circ + 4(\nu_{23}^\circ + \nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) B^\circ r^2 \right) \cos 2\theta;$$

$$u_\theta^\circ(r, \theta) = -\frac{r}{E_{22}^\circ} \left( 2(1 + \nu_{23}^\circ) A^\circ + 2(3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) B^\circ r^2 \right) \sin 2\theta,$$

для изотропной матрицы

$$\sigma_{rr}^*(r, \theta) = -\left( 2A^* + \frac{6C^*}{r^4} + \frac{4D^*}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta) = \left( 2A^* + 12B^* r^2 + \frac{6C^*}{r^4} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{r\theta}^*(r, \theta) = \left( 2A^* + 6B^* r^2 - \frac{6C^*}{r^4} - \frac{2D^*}{r^2} \right) \sin 2\theta;$$

$$u_r^*(r, \theta) = -\frac{1 + \nu^*}{E^*} r \left( 2A^* + 4\nu^* B^* r^2 - \frac{2C^*}{r^4} - (1 - \nu^*) \frac{4D^*}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$u_{\theta}^*(r, \theta) = \frac{r}{E^*} \left( 2(1 + \nu^*)A^* + 2(3 + \nu^* - 2\nu^{*2})B^*r^2 + (1 + \nu^*)\frac{2C^*}{r^4} - \right. \\ \left. - (2\nu^{*2} + \nu^* - 1)\frac{2D^*}{r^2} \right) \sin 2\theta.$$

Поле перемещений и напряжений композиционного материала описывается соотношениями:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin 2\theta; \\ u_r(r, \theta) = \frac{1 + \nu_{23}}{E_{22}} \sigma_0 r \cos 2\theta; \quad u_{\theta}(r, \theta) = -\frac{1 + \nu_{23}}{E_{22}} \sigma_0 r \sin 2\theta.$$

Условия неразрывности на стыке материала волокна и матрицы имеют вид:

$$\sigma_{rr}^*(a, \theta) = \sigma_{rr}^{\circ}(a, \theta); \quad \sigma_{r\theta}^*(a, \theta) = \sigma_{r\theta}^{\circ}(a, \theta); \\ u_r^*(a, \theta) = u_r^{\circ}(a, \theta); \quad u_{\theta}^*(a, \theta) = u_{\theta}^{\circ}(a, \theta).$$

В результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$ ,  $A^{\circ}$  и  $B^{\circ}$ .

Найдем  $S_3$ , используя энергетический критерий в качестве условия согласования, т.е.

$$U^* + U^{\circ} = U; \quad (1.72)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{r\theta} \varepsilon_{r\theta} + \sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} + \sigma_{zr} \varepsilon_{zr}) r dr d\theta dz.$$

Получим соотношения для компонент деформаций:  
волокна

$$\varepsilon_{rr}^{\circ}(r, \theta) = -\frac{1}{E_{22}^{\circ}} \left( 2(1 + \nu_{23}^{\circ})A^{\circ} + 4(\nu_{23}^{\circ} + \nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})B^{\circ}r^2 \right) \cos 2\theta; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ}(r, \theta) = -\frac{1}{E_{22}^{\circ}} \left( 6(1 + \nu_{23}^{\circ})A^{\circ} + 4(9 + 16\nu_{23}^{\circ} - 20\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})B^{\circ}r^2 \right) \cos 2\theta; \\ \gamma_{\theta z}^{\circ} = 0; \quad \gamma_{z\gamma}^{\circ} = 0; \quad \varepsilon_{zz}^{\circ} = 0;$$

$$\gamma_{r\theta}^{\circ}(r, \theta) = \frac{1}{E_{22}^{\circ}} \left( 4(1 + \nu_{23}^{\circ})A^{\circ} + 4(-3 + \nu_{23}^{\circ} + 4\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ})B^{\circ}r^2 \right) \sin 2\theta;$$

матрицы

$$\varepsilon_{rr}^*(r, \theta) = -\frac{1 + \nu^*}{E^*} \left( 2A^* + 12\nu^*B^*r^2 + \frac{6C^*}{r^4} + (1 - \nu^*)\frac{4D^*}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^*(r, \theta) = \frac{1}{E^*} \left( 2(1 + \nu^*)A^* + 12(1 - \nu^{*2})B^*r^2 + (1 + \nu^*)\frac{6C^*}{r^4} + \right. \\ \left. + (2 - \nu - 3\nu^{*2})\frac{4D^*}{r^2} \right) \cos 2\theta;$$

$$\gamma_{\theta z}^* = 0; \gamma_{z\gamma}^* = 0; \varepsilon_{zz}^* = 0;$$

$$\gamma_{r\theta}^*(r, \theta) = \frac{1}{E^*} \left( 4(1 + \nu^*)A^* + 12(1 + \nu^*)B^*r^2 - \frac{12C^*(1 + \nu^*)}{r^4} + \right. \\ \left. + 4(-3 + \nu + 4\nu^{*2})\frac{D^*}{r^2} \right) \sin 2\theta;$$

композиита

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1 + \nu_{23}}{E_{22}} \sigma_0 \cos 2\theta; \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{1 + \nu_{23}}{E_{22}} \sigma_0 \cos 2\theta;$$

$$\gamma_{\theta z} = 0; \gamma_{zr} = 0; \varepsilon_{zz} = 0; \gamma_{r\theta} = -\frac{1 + \nu_{23}}{E_{22}} 2\sigma_0 \sin 2\theta.$$

Тогда упругая энергия деформации для матрицы, волокна и композиита, примет вид:

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi b} \int_0^a \left( \sigma_{rr}^* \varepsilon_{rr}^* + \sigma_{\theta\theta}^* \varepsilon_{\theta\theta}^* + \sigma_{r\theta}^* \varepsilon_{r\theta}^* \right) r dr d\theta dz;$$

$$U^{\circ} = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi a} \int_0^0 \left( \sigma_{rr}^{\circ} \varepsilon_{rr}^{\circ} + \sigma_{\theta\theta}^{\circ} \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} + \sigma_{r\theta}^{\circ} \varepsilon_{r\theta}^{\circ} \right) r dr d\theta dz;$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi b} \int_0^0 \left( \sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \varepsilon_{r\theta} \right) r dr d\theta dz.$$

Подставляя вышеприведенные зависимости в (1.72) получаем:

$$S_3 = \frac{1}{E_{11}^{\circ}} \cdot \left( h^{00} + \frac{h^{01}d_1 + h^{02}d_2}{kd} + \frac{h^{12}d_1d_2 + h^{11}d_1^2 + h^{22}d_2^2}{kd^2} \right), \quad (1.73)$$

где  $h^{00} = \alpha(1 + v^*)(1 - f)$ ;  $h^{01} = 2(3k\alpha(1 + v^*)(f^2 - f) + (f^2 - 2/f) \times (3 + v_{23}^{\circ} - 2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}))$ ;  $h^{02} = k\alpha(1 + v^*)(3f^2 - 4f + 1) + (f^2 - 1)(3 + v_{23}^{\circ} - 2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})$ ;  $h^{12} = 3k\alpha(1 + v^*)(1/f^2 + 7f^2) - 6k\alpha(f(1 + 3v^* + 2(v^*)^2) + f^3(3 + v^* - 2(v^*)^2)) + (3 + v_{23}^{\circ} - 2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})(1/f^2 - 4/f + 2f + 7f^2 - 6f^3)$ ;  $h^{11} = k\alpha(1 + v^*)(3/f^3 - 9f + 18f^2) + (3 + v_{23}^{\circ} - 2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ}) \times (-6/f + 6 + 6f^2 - 6f^3) + 6k\alpha((1 - 3f^3) - v^*(1 + f^3) + 2(v^*)^2(f^3 - 1))$ .  $h^{22} = (3 + v_{23}^{\circ} - 2v_{12}^{\circ}v_{21}^{\circ})(1/2f - 6 + f + 2f^2 - 1,5f^3) + k\alpha((1,5/f - 2 - f + 6f^2 - 4,5f^3) + v^*(0,5/f + 2 - 7f + 6f^2 - 1,5f^3) + (v^*)^2(4 - 1/f - 6f + 3f^3))$ .

Сравним упругие постоянные композиционного материала, рассчитанные по формулам (1.69)-(1.71), (1.73), с экспериментальными результатами, приведенными в работе [29]. В данной работе предполагалось, что корд изотропный. Объемное содержание волокон  $f = 0,31$ . Упругие характеристики материала корда: модуль упругости  $E^{\circ} = 1600$  МПа, коэффициент Пуассона  $v^{\circ} = 0,8$ . Упругие характеристики резины: модуль упругости  $E^* = 4,5$  МПа, коэффициент Пуассона  $v^* = 0,49$ . Результаты расчетов для  $E_{22}$  приведены в табл. 1.8.

Таблица 1.8 –

Поперечный модуль упругости

	Формула (1.70)	Формула (1.71)	Формула (1.73)	Эксперимент

$E_{22}$ , МПа	14,17	6,71	9,13	10,96
----------------	-------	------	------	-------

На рисунке 1.18 приведена зависимость упругих постоянных резинокордного композита от объемного содержания волокон.

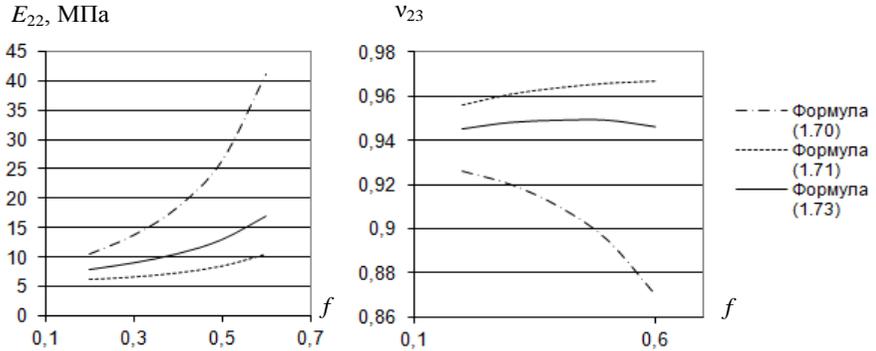


Рис.1.18. Упругие постоянные резинокордного материала

Предложенная методика определения упругих постоянных позволяет более точно определять поперечный модуль упругости резинокордного материала в сравнении с ранее предложенными формулами, что подтверждается сравнением с экспериментальными данными. Исследование зависимости упругих характеристик от объемного содержания волокон показывает, что предложенные формулы дают промежуточные значения в сравнении с формулами, полученными на основе других критериев согласования. При этом для коэффициента Пуассона в плоскости изотропии зависимость от объемного содержания волокон не является монотонной в отличие от зависимостей на основе согласования по перемещениям.

## 1.6. Современное состояние и тенденции развития резиновых деталей машин

Экономические и социальные проблемы современности поставили перед общим машиностроением ряд требований, среди которых

наиболее важными являются: современные машины наряду с выполнением технологических процессов должны обладать малым весом, высокой надежностью и долговечностью; должны позволять проведение автоматизации и не требовать постоянного присутствия операторов; должны быть удобны в обслуживании; не передавать вибраций и звукового давления; не создавать условий для травматизма оператора; не загрязнять окружающую среду и т.д. Такие требования заставили конструкторов обратить серьезное внимание на принципы конструирования и расчета, и, прежде всего, на длительную прочность и надежность машин, и осуществлять их проектирование с учетом динамических и усталостных характеристик. Эта тенденция (совсем недавно она была присуща в основном авто- и авиастроению) особенно заметна в горно-металлургическом и агропромышленном машиностроении, где в последние годы внедрены прогрессивные конструкции машин и механизмов, среди которых важное место занимают машины вибрационного типа.

Не исследуя развитие машиностроения в целом, что является предметом самостоятельного изучения, рассмотрим одни из важных аспектов этой проблемы – создание новых и совершенствование известных конструкций машин за счет внедрения в структурную схему эластомерных конструкций в виде упругих звеньев, виброизоляторов, демпферов, защитных футеровок и т.д. Упругие звенья в машинах, особенно при постоянных знакопеременных нагрузках, играют весьма важную роль, сводящуюся, в основном, к следующему:

- а) выполняют функциональные свойства: в вибромашинах, например, определяют режим работы;
- б) уменьшают вредные колебания и звуковое давление;
- в) защищают человека-оператора, электрооборудование, приборы управления и прилегающие машины, элементы зданий и т.д. от динамических нагрузок и звукового давления;
- г) служат для предотвращения усталостного разрушения конструкции за счет диссипирования энергии разрушения;
- д) уменьшают износ и ударные нагрузки, например, в машинах, рабочие органы которых имеют резиновые покрытия;

е) уменьшают перекосы конструкций, неточности монтажа, служат компенсаторами недостатков сборки, устраняют зазоры и т.д.

Достаточно привести примеры эволюции системы упругих подвесок автомобилей, гусеничных машин, подвижного состава, вибрационных машин и строительно-дорожных машин, чтобы убедиться, что развитие современного машиностроения неразрывно связано с развитием и постоянным совершенствованием упругих звеньев, оптимизацией их конструкций и выбором подходящих типов материалов.

В последнее время общая механика машин рассматривает машины и механизмы в совокупности с окружающей средой, человеком-оператором и обрабатываемой средой. Такому комплексному рассмотрению проблемы способствовали фундаментальные работы отечественных и зарубежных исследователей. Если рассматривать машину с позиций взаимосвязи человек-машина-обрабатываемая среда, то ее структурная блок-схема (применительно, например, к вибрационным машинам) может быть представлена в виде, показанном на рис. 1.19.

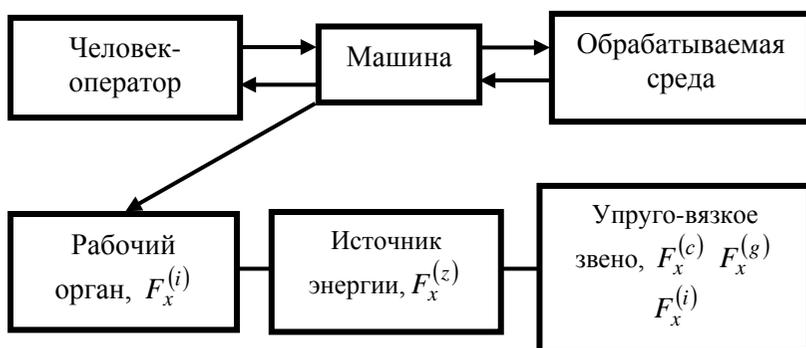


Рис. 1.19. Структурная схема машины

Схема включает в себя следующие элементы:

- машину – в общем случае система с конечным числом степеней свободы;

- обрабатываемую среду – сплошное или сыпучее тело, обладающее массой и упруговязкопластичными свойствами;
- источник энергии – для вибрационных машин, например, это вибровозбудитель, обладающий массой, функцией внутренних сил и моментом сопротивления;
- рабочий орган – в общем случае, жесткая конструкция, обладающая массой и упругими свойствами;
- человек-оператор – осуществляет управление машиной на основании полученной информации.

Исходя из представленной структурной схемы, рассмотрим конкретный пример одномассной вибромашины с одной степенью свободы. В этом случае уравнение движения будет иметь вид

$$F_x^{(i)} + F_x^{(c)} + F_x^{(g)} + F_x^{(z)} = 0.$$

Здесь  $F_x^{(i)} = m\ddot{x}$  – сила инерции колеблющихся частей машины массой  $m$ ;  $F_x^{(c)} = -cx$  – восстанавливающая сила упругого звена с жесткостью  $c$ ;  $F_x^{(g)} = -k\dot{x}$  – диссипативная сила упругого звена, в общем случае пропорциональна с некоторым коэффициентом  $k$  скорости движения;  $F_x^{(e)} = F(x, \dot{x}, \ddot{x})$  – сила взаимодействия рабочего органа машины с обрабатываемой средой;  $F_x^{(z)}$  – возмущающая сила вибровозбудителя.

Как видно, в общем уравнении движения рассматриваемой колебательной системы роль упругого звена выражается вторым и третьим членами и сводится к определению функционального закона движения и величины диссипативных сил.

Следует подчеркнуть, что диссипативные силы являются малыми по сравнению с величинами упругих сил и сил инерции. Тем не менее, при определенных условиях роль этих малых сил чрезвычайно велика. Диссипация является одним из основных факторов, определяющих амплитуды установившихся вынужденных колебаний при резонансе и при стационарном случайном возбуждении. Она оказывает также основное влияние на положение границ, разделяющих области устойчивости и неустойчивости многих колебательных систем. Поми-

мо этого диссипация в значительной мере ответственна за усталостное разрушение системы, за снижение вредных колебаний, уменьшение звукового давления и т.д.

Все перечисленное определяет роль упругого звена в общей структурной схеме машины, определяет его силовую и диссипативную характеристики, и, как следствие, его конструктивное оформление и выбор материала.

На первом этапе развития машиностроения роль упругих звеньев выполняли металлические рессоры и пружины, а в последние годы все более широкое распространение получили эластомерные конструкции, так называемые резинотехнические изделия (РТИ). Эволюция использования резины в общем машиностроении началась с автомобильных шин, сантехнических изделий, а также различного рода уплотнений, трубопроводов, шлангов и т.д. Впоследствии резина стала широко использоваться и в качестве деталей, несущих значительные силовые нагрузки, таких, как виброизоляторы, демпферы, упругие звенья, защитные футеровки и т.д., чему способствовали как ценные конструкционные свойства резины, так и несомненные успехи химии, создавшей материалы с самыми разнообразными физико-механическими свойствами. На сегодняшний день трудно назвать отрасли промышленности, в которой не использовалась бы резина в качестве конструкционного материала, и в которой резиновые детали не позволили бы улучшить существующие машины или создать машины с новыми свойствами.

Заметно возросло использование резины в агропромышленной, строительной и горно-металлургической промышленности. Резиновые уплотнения, рукава высокого давления, воздухопроводы, приводные ремни, различные мембраны и сальники, элементы приводных муфт, конвейерные ленты, защитные покрытия насосов, сита, подшипники скольжения, электроизоляционные изделия, виброизоляторы, пневмобаллоны крепей, направляющие ролики скипов, ограничители колебаний канатов и т.д. – все эти изделия на сегодняшний день стали традиционными. Особенно заметен прогресс в развитии транспортного и транспортно-технологического машиностроения за счет использования резиновых силовых элементов.

Так, в ленточных конвейерах помимо лент, совершенствование которых шло исключительно за счет применения новых типов резин, резина используется также для футеровки ведущих и натяжных барабанов и в качестве упругих звеньев в специальных конструкциях податливых роlikоопор. Применение резины позволило создать новые типы эффективных высокопроизводительных ленточных конвейеров для транспортирования крупнокусковой горной массы. Это также позволило улучшить динамические характеристики конвейеров, повысить их надежность и долговечность, особенно за счет увеличения срока службы ленты, улучшить работу конвейера в неблагоприятных климатических условиях, уменьшить энергоемкость транспортирования горной массы и т.д.

В шахтном подвижном составе повышение скорости движения в системе вагонетка – рельсовый путь было достигнуто благодаря подрессориванию вагонеток с помощью резиновых элементов, установке резинометаллических буферно-сцепных устройств и резиновых виброизолирующих прокладок под рельсами. В результате этого увеличилась производительность рельсового транспорта, увеличилась долговечность отдельных узлов и агрегатов, уменьшилось количество поломок.

Аналогичные результаты при использовании резиновых деталей были достигнуты в рудничных тепловозах при установке резиновых буферно-сцепных устройств, в скиповом подъеме при установке виброизолирующих роликов и резино-тросовых концевых канатов, в выбивных решетках, формовочных машинах, и в других горных машинах.

Широкое распространение в общем машиностроении получили резиновые виброизоляторы для защиты машин, оборудования, приборов и человека-оператора от воздействия вибраций.

Применение резиновых защитных футеровок и покрытий позволило предохранять рабочие органы горных машин (классификаторов, углесосов, мельниц, скипов, рудоспусков и т.д.) от износа и ударных нагрузок, существенно увеличить долговечность и надежность машин, уменьшить шум, экономить дорогостоящие легированные металлы, уменьшить вес машин в целом и т.д.

Особенно заметна положительная роль резины как конструкционного материала в вибрационном машиностроении и машинах, работающих при стационарных циклических нагрузках. Использование резиновых элементов (упругих звеньев, виброизоляторов и защитных футеровок) позволило не только значительно повысить эффективность и качество существующих вибромашин, но и создать принципиально новые конструкции, которые, в свою очередь, позволили осуществлять новые технологические процессы. В последние годы роль вибрационных машин с резиновыми элементами заметно возросла, и это связано, прежде всего, с созданием высокоэффективных и надежных конструкций.

Первые вибрационные машины использовались, в основном, для осуществления транспортных операций. Их упругие звенья выполнялись в виде металлических рессор и пружин, которые позже в ряде случаев изготавливались из стеклопластика и других полимерных материалов. Такие машины имели умеренный режим работы и сравнительно низкую производительность. К достоинствам металлических пружин и рессор следует отнести стабильность жесткостных характеристик и возможность эксплуатации при повышенных температурах; к недостаткам – низкую коррозионную стойкость; большую металлоемкость и, как результат, увеличение веса машины в целом; необходимость использования дорогостоящих легированных сталей типа 60С2; сложность технологии изготовления; низкую диссипацию; внезапность отказа и низкую долговечность при интенсивных режимах нагружения. Эти недостатки ограничивали круг применения металлических рессор и пружин в качестве упругих звеньев тяжелых вибромашин и способствовали успешной замене их резиной.

Как пример такой замены можно отметить конвейеры КВ2Т, в которых применение резинометаллических блоков типа БРМ вместо металлических пружин позволило: повысить амплитуду колебаний до 10-12 мм и тем самым резко увеличить производительность; в 1,7-3,0 раза снизить удельную металлоемкость; в 10 раз повысить долговечность; существенно увеличить надежность машин; долговечность БРМ свыше 80000 ч при отсутствии внезапности отказа, коэффициент готовности конвейера свыше 99,8%, а наработка на отказ свыше 5000 ч.

Не останавливаясь подробно на применении резины в вибротехнике, что является предметом самостоятельных исследований, рассмотрим некоторые наиболее характерные примеры использования эластомерных конструкций в вибромашинах (рис. 1.20), применяемых преимущественно в горно-металлургическом, строительном и химическом производствах.

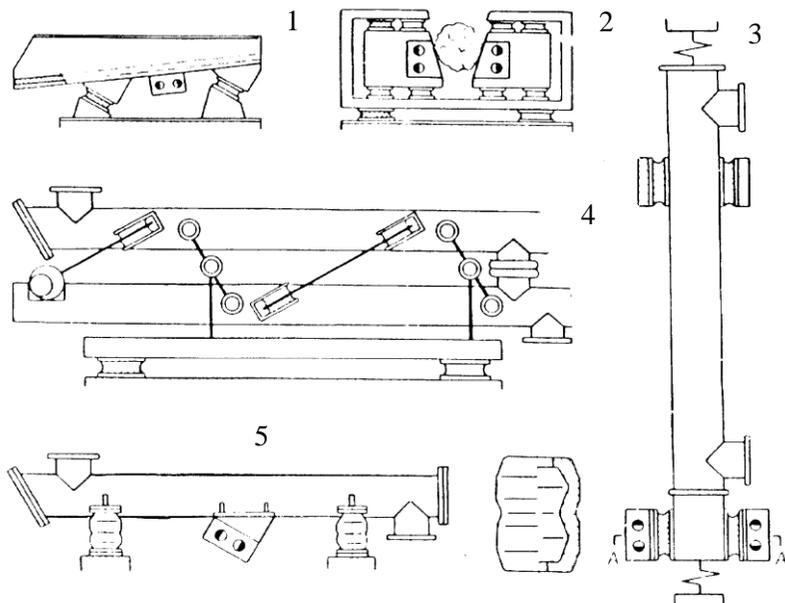


Рис. 1.20. Схемы вибрационных машин:

- 1 – вибрационный питатель ПВГ;
- 2 – вибрационная дробилка;
- 3 – вертикальный вибрационный конвейер;
- 4 – вибрационный конвейер типа КВ2Т;
- 5 – вибрационный конвейер типа КВ1Т.

Тяжелый горный вибропитатель типа ПВГ предназначен для выпуска руды из аккумулирующих емкостей в подземных условиях и погрузки ее в транспортные средства. В качестве основных упругих

звеньев вибропитателя используются элементы сдвига типа БРМ и резиновые буфера; рабочий орган футеруется специальным резиновым покрытием. Питатель обладает заданной долговечностью и практически не имеет отказа.

В вибрационной дробилке, двухмассном горизонтальном и трехмассном вертикальном конвейерах используются элементы типа БРМ (блоки резинометаллические). В горизонтальных конвейерах применяются элементы типа ВР (виброизоляторы резиновые). Такие же элементы используются и в конусных инерционных дробилках типа КИД.

Как видно из приведенных примеров, резина как конструкционный материал получила широкое распространение в общем машиностроении и, прежде всего, благодаря наличию целого ряда весьма ценных свойств, выгодно отличающих ее от традиционных конструкционных материалов, таких, как металлы и жесткие пластики. Это, в первую очередь, способность к большим обратимым деформациям и высокие диссипативные свойства. К положительным качествам резины следует отнести: большую энергоемкость, большие обратимые деформации, до 1000% и более; хорошую перерабатываемость и легкость изготовления деталей особенно при серийном методе; чрезвычайную гибкость - изменяя структуру резины, можно изменить ее свойства от жидкого состояния до эбонитоподобного; высокую надежность – резиновые детали не имеют внезапного отказа; высокую долговечность; по этим свойствам резина практически не имеет конкурентоспособных материалов; достаточно сказать, что при динамических деформациях сдвига до 35% наработка до отказа резиновых элементов конструкции превышает  $1,5 \cdot 10^9$  циклов; высокие демпфирующие и звукопоглощающие свойства; удовлетворительную химическую стойкость к воздействию агрессивной среды.

К отрицательным качествам резины как конструкционного материала следует отнести: высокую ползучесть и релаксацию; зависимость механических свойств от режима нагружения – частоты, амплитуды, величины статической деформации; изменение механических свойств во времени эксплуатации (старение) и от действия агрессивной среды (масел, кислот, солнечной радиации, излучений высоких

энергий, озона и т.д.); сравнительно узкий температурный диапазон эксплуатации для элементов упругой подвески машин от 220 до 360 К.

Комплекс перечисленных физико-механических и технологических свойств позволил резине занять особое место среди современных конструкционных материалов. Вибропоглощающие устройства и демпферы, упругие звенья и защитные футеровки, гуммированные поверхности и уплотнительная арматура – это изделия, в которых резина не имеет на сегодняшний день конкурентов и не может быть заменена ни одним из существующих материалов.

Особое место среди перечисленных изделий занимают элементы упругой подвески машин. Под системой подвески машин обычно понимают комплекс упругих звеньев, функционирующих при движении как единое целое и обеспечивающих заданный режим нагружения. К системе подвески относятся виброизоляторы подвески различных узлов и агрегатов машин (например, двигателей внутреннего сгорания, кабин дорожных, транспортных и добычных машин, металлорежущего и кузнечнопрессового оборудования, вибрационных машин и т.д.). При этом совершенство упругого звена определяется следующим: оптимальной силовой характеристикой; заданным сроком службы; простотой обслуживания; чувствительностью к переменной нагрузке (например, для подвески экипажей); отношением собственного веса к несущей способности (по этой характеристике гидropневмоамортизаторы и металлические рессоры не имеют явного преимущества перед резиной).

Применяемые в настоящее время элементы упругой повески отличаются большим разнообразием как по форме, так и по своему функциональному назначению. Помимо выполнения своей непосредственной роли они могут служить компенсаторами неточностей монтажа узлов машины, устранять перекосы, уменьшать шум, вибрацию и т.д.

На рис. 1.21 показаны основные типы резиновых элементов используемых в общем машиностроении. Элементы разбиты на группы в зависимости от вида испытываемых нагрузок. Следует подчеркнуть условность такой разбивки, так как один и тот же элемент может од-

новременно испытывать различные виды напряженного состояния и работать на сжатие, сдвиг, сдвиг со сжатием и т.д.

Виды нагрузок	Типы резиновых элементов				
СЖАТИЕ	1 	2 	3 	4 	5 
УДАРНЫЕ НАГРУЗКИ	6 	7 	8 	9 	10 
СКРУЧИВАНИЕ	11 	12 	13 	14 	15 
СДВИГ	16 	17 	18 	19 	20 
СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ	21 	22 	23 	24 	25 
СДВИГ СО СЖАТИЕМ	26 	27 	28 	29 	30 
РАСТЯЖЕНИЕ	31 	32 	33 	34 	35 
УДАРНЫЕ НАГРУЗКИ С ИЗНОСОМ	36 	37 	38 	39 	39 

Рис. 1.21. Конструкции наиболее распространенных резиновых деталей

Приведенные на рис. 1.21 эластомерные конструкции являются наиболее распространенными, однако их конструктивное оформление не является окончательным. В зависимости от назначения и требований к силовой характеристике, долговечности и т.д. размеры и форма

резиновых элементов могут быть самыми различными. Существует много конструктивных приемов, позволяющих достичь этого: так, например, для изменения силовой характеристики изделия свободной поверхности резины придают соответствующую форму (вогнутую или выпуклую) или сам резиновый элемент помещают под углом к действующей силе, разделяют металлическими пластинами и т.д. В работах [40, 57, 80, 81] подробно рассмотрены методы конструирования резиновых элементов машин и даны конкретные примеры их применения.

Разнообразию форм резиновых элементов позволяет создавать различные типы упругих подвесок машин. На рис.1.22 показаны наиболее распространенные схемы упругих подвесок (1-3), упругих приводов (4-6), футеровок (7-9) и виброизоляторов (10-12), характерных для современного машиностроения.

В двухмассной (рис.1.22) уравновешенной системе (по схеме, отмеченной ранее, изготавливаются вибрационные конвейеры типа КВ2Т, конвейеры-грохоты, а также различные другие вибромашины), в качестве поддерживающих упругих звеньев используются резинометаллические цилиндры, работающие на коаксиальное скручивание и радиальное сжатие, и в качестве основных упругих звеньев используются призматические элементы, испытывающие деформацию сдвига.

В одномассной схеме (рис.1.22), положенной в основу многих вибромашин, например, конвейеров типа КВ1Т, в качестве элементов упругой подвески используются резиновые детали со сложной формой свободной поверхности типа ВР. Резиновые элементы сдвига в одной вибромашине могут применяться как в качестве основных звеньев, так и в виде виброизоляторов, как это показано на рис.1.22.

Перечисленные резиновые элементы (шарниры, элементы сдвига и цилиндры) используются в приводах вибромашин (рис.1.22). Для защиты горных машин от износа и ударных нагрузок используются специальные защитные футеровки. Конструкции их могут быть самыми различными: от обычного резинового листа, закрепляемого на рабочей поверхности машины с помощью клея или механическим способом, до резинометаллических конструкций в виде плит или клиньев со сложным профилем поверхности, присоединяемых к машине спе-

циальным способом (рис. 1.22). Защитные покрытия выполняют из резин износостойких марок, а их толщина определяется из соображений защиты машины от ударных нагрузок и абразивного износа.

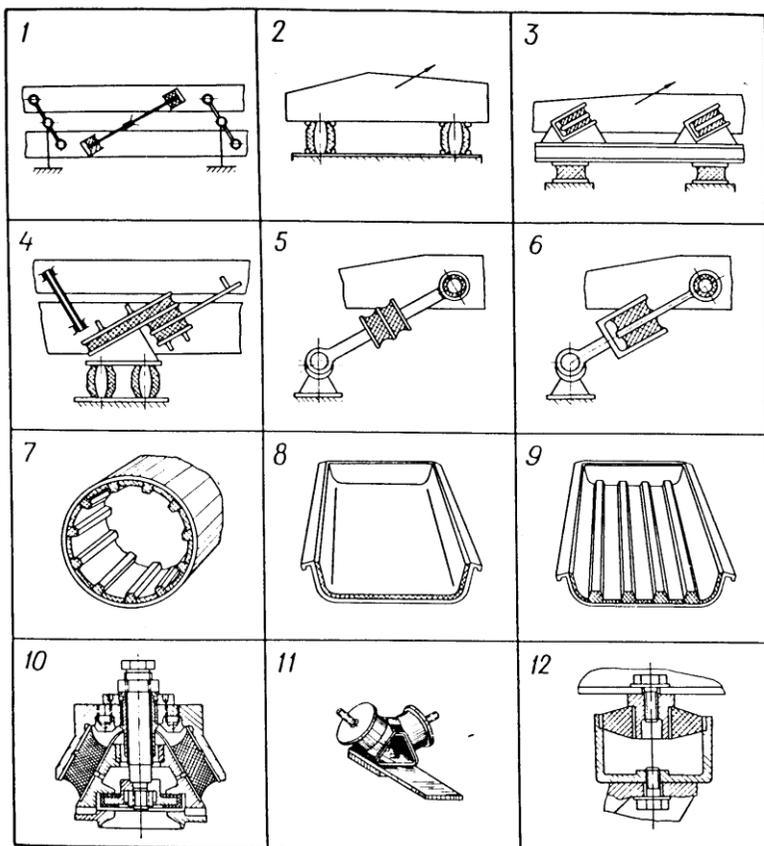


Рис. 1.22. Примеры использования резиновых деталей

Резиновые детали довольно часто выполняют роль виброизоляторов машин и оборудования. В этом случае их конструктивное оформление может быть самым различным. Однако для тяжелых машин сохраняется тенденция простоты формы.

Как видно из приведенных рисунков, упругие звенья и виброизоляторы машин могут иметь различное конструктивное оформление и различные типы силовых характеристик. Достаточно ознакомиться с монографиями [38, 40, 57, 79-81], чтобы убедиться в разнообразии форм и конструкций резиновых деталей. Особенно в таких отраслях, как приборостроение, при виброизоляции объектов для получения нелинейных силовых характеристик свободной поверхности резины придается самое различное оформление. Однако в тяжелых вибрационных машинах, где требуются массивные резиновые детали, работающие в экстремальных условиях, т.е. при стационарных интенсивных режимах нагружения и в агрессивной среде зачастую используются конструкции простой формы. Простота формы резиновых элементов вызвана, прежде всего, технологичностью их изготовления и высокими требованиями относительно долговечности и надежности: отсутствие резких переходов в резине, отсутствие отверстий, создающих дополнительные очаги разрушения, надежный способ крепления резины к металлу и т.д. Поэтому в большинстве случаев используются конструкции в виде призматических элементов сдвига БР (блоки резиновые), БРМ (блоки резинометаллические), шарниров ШРМ (шарниры резинометаллические) и цилиндрических деталей.

Обобщая многолетний опыт создания и эксплуатации тяжелых машин, можно выделить основные черты, характерные для работы этих машин в условиях, например, горно-металлургического производства: большие объемы перерабатываемой горной массы требуют создания высокопроизводительных машин; так, например, производительность питателей типа ПВГ и ВПР на выпуске руды должна быть 800-1000 т/ч и более; перерабатываемый материал может быть крупнокусковым, в том числе и негабаритным с большой абразивностью, что требует наличия металлоемких машин со специальными защитными покрытиями, например, резиновыми; перерабатываемый материал может быть пылящим, токсичным, и это требует его герметичной транспортировки, для чего необходимы специальные резиновые герметизаторы; материал может обладать тонкодисперсностью и склонностью к налипанию, что требует интенсивного режима работы машин (например, виброконвейеры типа КВ2Т имеют амплитуду подвижных

масс 10-12 мм при частоте 9-12 Гц; внешние условия могут быть весьма разными: на открытых площадках температура внешней среды может изменяться от 220 К до 360 К, при этом на упругие подвески может оказывать влияние солнечная радиация, атмосферные осадки, озон, топливо и масла, а в условиях горно-металлургического производства помимо этого – доменный газ, газ тип  $SO_2$  и т.д.); в подземных условиях эксплуатации температура внешней среды может колебаться в пределах 272-310 К; при этом агрессивное влияние оказывают шахтные воды; требования к долговечности машин различны: в стационарных условиях вибромашины могут эксплуатироваться в течение 10-15 лет и более; в подземных условиях долговечность составляет 1-3 года и зависит как от интенсивности работы машины, так и от наличия перерабатываемого материала; при этом параметры упругой подвески, особенно для машин резонансного типа, должны изменяться в незначительных пределах.

Суммируя эти особенности, можно сформулировать требования, предъявляемые практикой к разработке конструкции, выбору параметров и марок резин элементов упругой подвески, виброизоляторов и защитных футеровок тяжелых машин: резиновые элементы должны обеспечивать механические характеристики, определяемые их функциональным назначением, и заданную долговечность; резиновые элементы должны изготавливаться методами, доступными для их серийного производства на стандартном технологическом оборудовании; они должны по возможности иметь простую геометрическую форму, исключая резкие переходы, малые радиусы и другие места, создающие концентрацию напряжений; метод крепления резины к металлической арматуре должен обеспечить прочность порядка 2-3 МПа и позволять эксплуатацию при многократных циклических нагрузках; резина должна быть стойкой к действию агрессивной среды, характерной для данных условий эксплуатации; изменение механических свойств резины в процессе всего срока службы не должно выходить за нормы, установленные для данной машины, и не влиять на рабочий режим машины таким образом, чтобы это приводило к недопустимому изменению технологического процесса.

При создании резиновых элементов вибрационных машин с учетом указанных выше требований и специфики условий эксплуатации, как, впрочем, и при создании многих деталей ответственного назначения, необходимо разработать конструкции с учетом ряда противоречивых требований. С одной стороны, нужно создать элементы большой жесткости, чтобы использовать малые объемы деталей и небольшое их количество, и, следовательно, нужна высокомодульная, а значит, и высоконаполненная резина; с другой стороны, необходимо реализовать большие деформации для интенсификации технологических процессов, а этим требованиям удовлетворяет низкомодульная резина с малой диссипацией энергии. Помимо этого довольно противоречивые требования предъявляются и к объему резиновых конструкций.

Длительный опыт эксплуатации массивных эластомерных конструкций в условиях горного и горно-металлургического производства показывает, что они хорошо противостоят разрушающему действию внешней среды – озону, солнечной радиации, доменному газу типа  $SO_2$  и другим активным агентам именно благодаря своей массивности. При этом разрушения резины от действия перечисленных воздействий и от механических повреждений (царапины, сколы, порезы и т.д.) ограничиваются поверхностным слоем толщиной примерно 1-2 мм и на механические свойства, прежде всего, на силовую характеристику, заметного влияния не оказывают. Вместе с тем массивные элементы имеют ряд существенных недостатков. Так, при их изготовлении трудно добиться однородности структуры в объеме резинового массива; верхние слои, как правило, оказываются перевулканизованными, а внутри изделия могут наблюдаться дефекты типа раковин, пор и т.д.

Помимо этого, при интенсивном циклическом нагружении такие детали имеют повышенный диссипативный разогрев и, следовательно, более низкую долговечность. Достаточно рассмотреть следующий пример. Элементы сдвига БРМ102 (размер по резине  $0,05 \times 0,1 \times 0,2$  м) из резины 51-1562 при относительном сдвиге 0,21 и частоте 11,6 Гц имеют наработку до отказа свыше 35 тыс.ч. При этом температура их диссипативного разогрева в центре резинового массива достигает примерно 325 К. Такую же долговечность при частоте 11,6 Гц и такую же температуру саморазогрева в центре изделия имеют элементы типа

БРМ101 (размер по резине  $0,035 \times 0,06 \times 0,1$  м) из той же резины 51-1562, но при относительном сдвиге 0,33. Как видно, более интенсивный режим нагружения достигнут благодаря меньшей массе элемента БРМ101 и, следовательно, более высокому теплоотводу.

Для устранения указанных противоречий и создания эластомерных конструкций с заданными механическими свойствами и максимальной долговечностью необходимо использовать комплексный подход с использованием методов рационального проектирования эластомерных конструкций (выбор марки резины, технологии изготовления, размеров изделия и т.д.), широкого круга расчетных и экспериментальных исследований, включающих определение реологических параметров, параметров макро- и микроразрушения, выяснения механизмов разрушения модельных и натуральных образцов и т.д. Такой подход привел к созданию принципиально нового типа малонаполненной резины и на ее основе, а также на основе традиционных марок резин – новых конструкций упругих элементов.

Как видно, РД получили на сегодняшний день широкое применение, как в общем машиностроении, так и в горно-металлургическом в частности. Перспективность использования их в дальнейшем также не нуждается в особых доказательствах и основана, на уже отмеченных ценных качествах резины как конструкционного материала.

## **1.7. Способы изготовления массивных резиновых и резинOMETаллических деталей**

Резиновые и резинOMETаллические детали могут изготавливаться путем вулканизации в формах и без них. Если детали имеют сложную конфигурацию и их размеры должны быть строго определенными, то вулканизация таких деталей производится в формах, а изделия носят название формовых. Если к внешнему виду, конфигурации и размерам деталей такие требования не предъявляются, то изготовление их может производиться без форм, а изделия в этом случае называют неформовыми.

Резинометаллические детали могут изготавливаться либо в один прием, когда в процессе вулканизации изделий в форме происходит присоединение резины к установленным в ней металлическим частям, либо в два приема, когда путем вулканизации в форме получается резиновый элемент, который затем прикрепляется к металлической части детали.

Изготовление формовых резиновых и резинометаллических деталей состоит из следующих последовательных операций: приготовления резиновой смеси, заполнения формы смесью, вулканизации и отделки готовых деталей.

Приготовление резиновой смеси заключается в получении механически однородного материала, включающего в себя каучук, серу, сажу и другие компоненты, обеспечивающие резиновым изделиям необходимые свойства. Для приготовления резиновых смесей применяется специальное оборудование по смешению, размельчению, резке, транспортированию исходных материалов и т.д.

Форма заполняется приготовленной смесью путем формования или литья под давлением. При формовании часть резиновой смеси-заготовки, достаточную для получения требуемой детали, помещают в полость открытой формы и запрессовывают. Форма закрывается под прессом и придает резиновой смеси необходимое очертание.

Заготовкам резиновой смеси часто стремятся придать форму, близкую к очертаниями изготавливаемой детали, так как это способствует лучшему заполнению формы смесью при меньшем давлении прессования. Сложные фасонные заготовки вырезают с помощью штанцевых ножей, штампов или вырезают, применяя закройные шаблоны. Изготовление заготовок сопровождается контролем их веса, который должен на 3-5% превышать вес готового резинового изделия. Излишнее количество выпрессовывается через специальные отверстия, выполненные в форме.

Более перспективен метод литья под давлением, который осуществляется с помощью плунжерных гидравлических прессов, через литьевые отверстия, выполненные в прессформе. Преимущества этого метода состоят в следующем: отпадает необходимость приготовления заготовок для формования и связанных с этим трудовых затрат; со-

кращаются потери смеси в связи с тем, что объем, заполняющий литниковую систему, как правило, меньше объема смеси, потерянной в запрессовках; заполнение формы горячей резиновой смесью с температурой 80-100°C сокращает время вулканизации изделий; возможна автоматизация и механизация технологического процесса; улучшается качество и повышается точность изготавливаемых изделий благодаря лучшему заполнению формы и точной дозировке по объему и весу.

Наряду с плунжерными прессами для заполнения форм применяются также червячные литьевые прессы, однако развиваемое ими давление резиновой смеси не превышает обычно 12-14 МН/м<sup>2</sup>, в то время как для получения монолитных, плотных заготовок необходимо давление 50-60 МН/м<sup>2</sup> для смесей из синтетических каучуков и свыше 80 МН/м<sup>2</sup> – для натурального каучука.

Разработаны конструкции автоматов для изготовления резинотехнических изделий, сочетающие червячные литьевые головки с вулканизационными аппаратами непрерывного действия.

После заполнения формы резиновой смесью начинается процесс вулканизации, в результате которого каучук из пластичного превращается в прочный эластичный материал. В основном процесс состоит в том, что резиновые смеси, содержащие серу и ускорители, нагревают до 130-160°C и выше. Вулканизация представляет собой сложный физико-химический процесс, в результате которого макромолекулы каучука образуют определенную пространственную структуру.

Процесс вулканизации является одним из важнейших этапов изготовления резиновых деталей, от которого существенно зависит их работоспособность и физико-механические свойства. Исследования показывают, что режим вулканизации оказывает большое влияние как на статические, так и на динамические характеристики резины. Поэтому весь ход процесса вулканизации, особенно тепловой режим, должен строго контролироваться. Вулканизационные прессы оснащаются автоматическими устройствами, осуществляющими контроль и регулирование температуры прогрева и давления в гидравлической системе. Автоматизация процесса вулканизации позволяет без участия оператора с высокой точностью выдерживать заранее установленный режим работы прессы.

На получение высококачественных резиновых деталей с необходимыми физико-механическими свойствами большое влияние оказывают конструкция и материал вулканизационной формы. Правильно спроектированная и изготовленная форма должна обеспечивать:

- а) получение резиновых и резинометаллических деталей заданной конфигурации и размеров;
- б) быстрое и полное заполнение полости формы резиновой смесью;
- в) быструю и удобную сборку и разборку формы, закладку заготовки, выемку вулканизованного изделия и очистку формы;
- г) прием выпрессовок и легкое удаление заусенцев, не нарушающее рабочих кромок и поверхностей резиновой детали.

Вулканизационные формы изготавливаются обычно из углеродистых сталей. Применение легированных сталей диктуется их стойкостью против коррозии, которая может иметь место под влиянием химически активных ингредиентов, входящих в состав резиновой смеси, или от атмосферного воздействия. Для получения резиновых деталей с чистыми и гладкими поверхностями внутренние полости пресс-форм полируются и хромируются.

Вулканизационные формы должны иметь также и высокую механическую прочность, достаточную для выдерживания значительных усилий прессования, достигающих  $80 \text{ МН/м}^2$ . Требование высокой прочности формы должно согласовываться со стремлением к изготовлению форм с минимальной толщиной стенок, обеспечивающих небольшой вес и быстрый прогрев.

С точки зрения конструкции различаются три основных типа форм: открытые, закрытые или плунжерные, и формы с литьевыми надставками.

В соответствии с конструкциями форм применяются различные способы формования резиновых и резинометаллических деталей. Так называемое простое прессование производится в открытых формах. Заготовка резиновой смеси вместе с металлической арматурой помещается в этом случае в среднюю часть формы и сжимается верхней и нижней плитами. Этот способ производства резиновых деталей не сложен и широко распространен в промышленности. Однако, он имеет

существенные недостатки: при прессовании нижняя пластина резинометаллической детали, помещаемая в форму заранее, лежит неподвижно, в то же время как верхняя пластина занимает свое положение постепенно, по мере опускания верхней плиты; в результате этого резиновая смесь перемещается относительно верхней пластины, что вредно отражается на процессе крепления резины к металлу.

Плунжерное прессование производится в закрытых формах (рис. 1.23, б), устроенных так, что в полость формы заранее устанавливается как верхняя, так и нижняя пластина, между которыми закладывается смесь, а верхняя часть формы имеет специальный плунжер, плотно замыкающий и прессующий резиновую смесь. Преимущества плунжерного прессования: получение изделий с меньшим числом выходов заусенцев, большее начальное удельное давление на резиновую смесь, более устойчивое и надежное положение металлической арматуры и меньшее движение резиновой смеси по ее поверхности.

Простое и плунжерное прессование применяется для изготовления деталей сравнительно простой конфигурации.

Для изготовления ответственных деталей с точным соблюдением их размеров и хорошим креплением резины к металлу применяется плунжерно-литьевое формование (рис. 1.23, в).

Резиновая смесь в этом случае выдавливается плунжером через литьевые отверстия в полость формы, в которой заранее может устанавливаться металлическая арматура (в зависимости от конструкции изделия). Основные преимущества плунжерно-литьевого формования: хорошее заполнение формы смесью; экономия резины вследствие точного контроля навески смеси; фиксированное положение арматуры, обеспечивающее ее надежное крепление к резиновому элементу.

При изготовлении сложных по конфигурации деталей возникают затруднения с извлечением их из формы. Поэтому формы в этом случае собираются из нескольких разъемных частей, вкладываемых в наружную обойму. Для получения в детали замкнутой полости форма снабжается сердечником или стержнем, устанавливаемым в полости пресс-формы (рис. 1.23, в).

После вулканизации в прессе процесс изготовления резиновых деталей заканчивается отделкой, включающей в себя удаление вы-

прессовки и заусенцев, обработку поверхности, резку, лакирование и т.д.

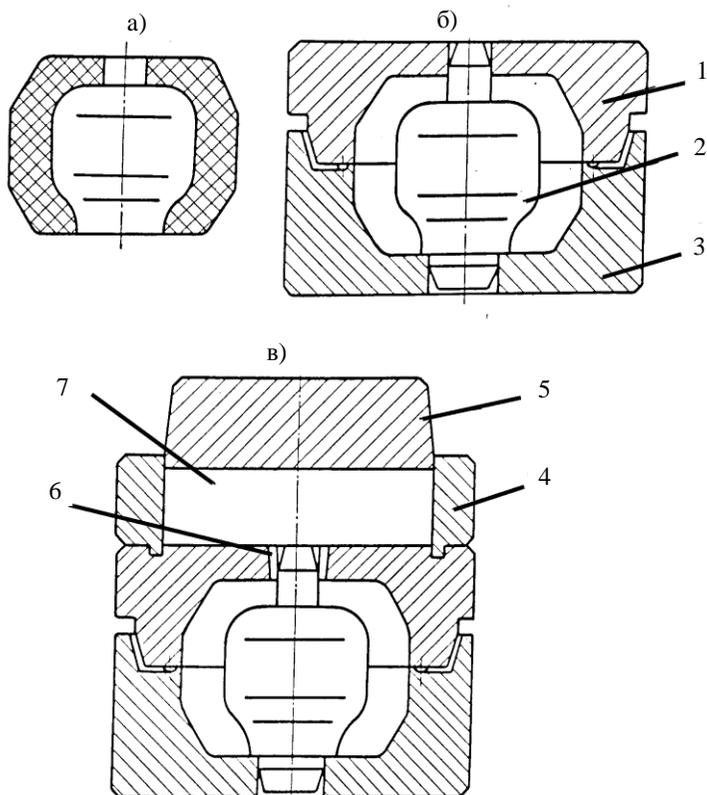


Рис. 1.23. Распространенные типы прессформ (а – резиновое изделие; б – прессформа для плунжерного прессования; в – прессформа для плунжерно-литьевого прессования):  
1 – нижняя часть формы; 2 – сердечник; 3 – верхняя часть формы; 4 – матрица; 5 – плунжер; 6 – литник; 7 – камера

При изготовлении резиноталлических элементов особое внимание уделяется методам крепления резины к металлам, как фактор существенно влияющий на работоспособность резиноталлических элементов особенно при динамических нагрузках.

Способы крепления резины к металлам можно разделить на две группы: способы горячего крепления (резина присоединяется к металлу в процессе вулканизации) и способы холодного крепления (резина присоединяется к металлу с помощью клеев или механическим путем).

Способность каучука, резины или другого полимера соединяться с металлом, пластиком, тканью и другими материалами называется адгезией.

При горячем креплении резина присоединяется к металлу либо непосредственно, либо через промежуточный слой. Непосредственно прикрепляются к металлам эбонит или резина, в состав которых введены соединения меди, железа или некоторых других металлов. Объясняется это тем, что согласно современным представлениям, основным звеном, связывающим каучук с металлом, является сера, наличие которой в резиновой смеси является обязательным. Сера, вступая в реакцию с металлами, образует сульфидные соединения, обеспечивающие крепление резины к металлической поверхности и дающие прочное соединение.

В качестве промежуточных слоев при креплении резины к металлам используют эбонит, латунь и различные клеи с хорошей адгезией как к металлам, так и к резине в процессе ее вулканизации.

Одним из наиболее старых способов крепления резины к металлам является способ, использующий в качестве промежуточного слоя эбонит. Эбонит, как и резина, является вулканизатом каучука, но, в отличие от резины, у которой количество серы в смеси составляет в среднем от 2 до 4%, у эбонита это число повышается до 30-40% и более. Наличие значительного количества серы и обеспечивает, очевидно, прочное присоединение эбонита к металлам.

При использовании эбонита в качестве промежуточного слоя крепление резины к металлам производится следующим образом. На предварительно очищенную и обезжиренную поверхность металла наносят тонкий слой клея, приготовленного из эбонитовой смеси. На просохший клеевой слой накладывается и прикатывается резиновая смесь, после чего деталь подвергается вулканизации, в процессе которой происходит прочное соединение металла с эбонитом, а последнего – с мягкой резиной.

При помощи слоя эбонита резина может прикрепляться не только к стали, но и к алюминиевым сплавам, латуни, бронзе и другим металлам. Наряду с эбонитами из натурального каучука, для крепления резины к металлам получили широкое применение эбониты из различных синтетических каучуков.

Однако крепление резины к металлам с помощью слоя эбонита имеет и ряд существенных недостатков. В их числе следует назвать длительность процессов вулканизации эбонита, снижающую производительность оборудования и неблагоприятно отражающуюся на свойствах резины. Хрупкость эбонита, его чувствительность к ударам и вибрации исключает использование резинометаллических деталей с эбонитовой прослойкой при действии динамических нагрузок.

Недостатком, ограничивающим применение метода крепления резины к металлу с помощью эбонита, является также и то, что при повышении температуры детали выше  $70^{\circ}\text{C}$  прочность крепления снижается. Кроме этого, вследствие различного линейного расширения при нагревании эбонита и стали происходит отслаивание эбонита, резко ухудшающее прочность крепления.

Более совершенным методом крепления резины к металлу является метод крепления через промежуточный слой латуни. С его помощью можно осуществлять крепление резины к стали, алюминию, бронзе и другим металлам.

Сущность метода состоит в электрохимическом нанесении на поверхность металлических деталей тонкого (0,00125-0,0015 мм) слоя латуни. Этот метод обеспечивает высокую прочность, температуроустойчивость крепления и хорошее сопротивление ударам и вибрации: он состоит из двух основных процессов: латунирования арматуры и непосредственного крепления резины к металлу.

Недостатки рассматриваемого метода: сложность подготовки арматуры к латунированию, потребность в специальном оборудовании и установках, а также трудности, связанные с равномерным и прочным осаждением латуни на большие поверхности.

К способам горячего крепления резины к металлам относят также крепление с помощью клеев, получившее в последнее время широкое распространение. Отсутствие необходимости в сложной и дорогой

стоящей подготовке металлических поверхностей, требующейся при креплении с помощью слоя латуни, а также возможность надежного крепления резины не только к стали, но и к другим металлам, делают методы клеевого крепления очень выгодными и перспективными.

Независимо от типа клея технологический процесс крепления сводится к очистке металлической поверхности и нанесению на нее тонких слоев клея. После просушивания и прогрева металлической арматуры с нанесенным слоем клея, на нее накладывается резиновая смесь и производится вулканизация детали. Получение качественного соединения резина-металл зависит от многих факторов и, прежде всего, от состояния металлической поверхности, правильно подобранной резиновой смеси; соблюдения технологии нанесения клея и вулканизации.

Разработаны и находят широкое промышленное применение клеи на основе изоцианатов, синтетических смол и ряда других химических соединений.

Что же касается соединения резины с металлом, способных выдерживать действие криогенных температур порядка  $-100 \pm 250^\circ\text{C}$ , то работы в этом направлении до настоящего времени не увенчались успехом. Наиболее подходящими являются эпоксидно-полиамидные клеи горячего отверждения для крепления металла к металлу или пластикам. Такие клеи обеспечивают криопрочность соединения при температурах от  $-60$  до  $-253^\circ\text{C}$ . Удовлетворительную прочность при температурах  $-60 \pm 150^\circ\text{C}$  показывают также каучукофенольные клеи. Однако сведения о поведении клеевых соединений резина-металл при таких температурах в литературе практически отсутствуют.

В качестве арматуры можно использовать не только металл. Резина имеет хорошую адгезию к стеклопластикам, фторопласту и т.д. Такие конструкции имеют меньший, чем резинометаллические, вес и явное преимущество перед ними по коррозионной стойкости. Имеются сведения о креплении серийных резин на основе НК к эпоксидному стеклопластику с помощью изоцианатного клея.

Методы горячего крепления резины к металлам в процессе вулканизации являются наиболее разработанными и надежными. Однако

эти методы требуют форм, вулканизационных прессов и другого специального оборудования, имеющегося лишь на заводах резинотехнических изделий. В связи с этим уже длительное время ведутся поиски в направлении создания методов холодного крепления, не требующих вулканизации и дающих возможность их применения в любых производственных условиях.

Несмотря на явные преимущества методов холодного крепления резины к металлам, их развитие несколько отстает от методов крепления с помощью вулканизации. Объясняется это тем, что не созданы такие клеи холодного отверждения, которые обеспечивали бы прочность крепления на отрыв более 2,5-3 МПа. Помимо этого, методы холодного крепления уступают методам горячего крепления по теплостойкости, металлостойкости, а также по стойкости к агрессивным средам и вибрациям.

Процесс крепления резины к металлам холодным способом состоит в подготовке поверхностей металла и резины, нанесении на них слоя клея, прикатке резины к металлу или прижатии соединяемых частей и выдержке склеенной детали в зафиксированном положении в течение времени, необходимого для полимеризации клея. Процесс полимеризации может быть устранен введением в клей некоторых добавок или термической обработкой склеенных деталей - нагревом их до 50 °С и выдержкой в течение нескольких суток или нагревом до 90 °С и выдержкой в течение нескольких часов. Термическая обработка способствует также повышению прочности и теплостойкости крепления резины к металлам.

В последнее время для холодного крепления резин к металлам применяют клеи на основе синтетических смол, цианкрилатов и полиуретанов. Из синтетических клеев наиболее изученными являются клеи на основе эпоксидных смол, однако широкого распространения они не получили из-за малой схватываемости с металлом, медленного отверждения и токсичности. Эти недостатки могут быть уменьшены или полностью устранены специальными добавками.

Технологическая схема производства резинометаллических элементов показана на рис. 1.24.



Рис. 1.24. Технологическая схема производства резинометаллических элементов

## 1.8. Влияние технологических факторов на свойства резиновых деталей

Как уже отмечалось, технология изготовления резиновых деталей существенно влияет на их физико-механические свойства и долговечность. Рассмотрим некоторые особенности этого влияния на примере изготовления массивных резинометаллических деталей типа БРМ (блоки резинометаллические) и ШРМ (шарниры резинометаллические), которые используются в качестве элементов упругой подвески вибрационных конвейеров. В процессе длительной эксплуатации такие детали испытывают интенсивные циклические нагрузки; их долговечность составляет для БРМ - примерно 60-80 тыс.ч. (для резины 51-1562) и для ШРМ – свыше 70-100 тыс.ч (для резины 2959). При этом как физико-механические свойства деталей, например, модуль сдвига  $G$  и коэффициент диссипации энергии  $\psi$ , так и их долговечность до отказа в значительной мере определяются качеством изготовления: соблюдением технологических регламентов, качеством исходной смеси и ингредиентов и т.д.

**Изготовление массивных резиновых деталей. Общие сведения.** Изготовление массивных резиновых деталей на специализированных заводах, в цехах и участках вызывает, как правило, определенные затруднения, особенно в процессе освоения новых конструкций.

Как известно, низкая теплопроводность резины требует длительного времени вулканизации для обеспечения равномерного провара всего резинового массива. В то же время увеличение времени вулканизации может привести к перевулканизации внешних слоев и к преждевременному выходу деталей из строя. Помимо этого к исходной смеси должны предъявляться повышенные требования, так как наличие летучих веществ, низкое качество каучука или ингредиентов не позволяют получить качественные изделия.

При отработке технологии изготовления резинометаллических шарниров и блоков были опробованы прессовой и литьевой методы вулканизации.

Вулканизация прессовым методом проводилась при следующих параметрах: температура  $416 \pm 1$  К, время вулканизации 60 мин. Данный режим позволил получить детали, равномерно вулканизованные по всей массе, с качественной наружной поверхностью и небольшим разбросом по жесткостным характеристикам.

Прессовой метод уступает литьевому, который является в настоящее время наиболее перспективным. Применение специальных литьевых прессов позволяет повысить степень вулканизации внутренней части резинового элемента, так как увеличивается начальная температура смеси перед вулканизацией, а это приводит к улучшению качества изделий, снижает время вулканизации, ликвидирует отходы резиновой смеси. При литьевом методе вулканизация проводилась при параметрах: температура  $431 \pm 2$  К, время вулканизации 30 мин.

Таким образом, практически при одинаковом качестве резино-металлических блоков время вулканизации сокращается вдвое.

Отработанные технологические регламенты изготовления резиновых изделий [74, 76, 120] позволяют освоить выпуск изделий не только на специализированных заводах, но и в цехах РТИ на машиностроительных заводах и горнообогатительных комбинатах. Для этого необходимо соблюдать определенные требования, предъявляемые к технологии изготовления массивных резиновых деталей, а именно:

а) конструкция пресс-форм должна обеспечивать геометрические размеры детали, чистоту поверхности резины, легко разбираться и собираться;

б) применяемые резины должны быть технологичными и по своим физико-механическим свойствам соответствовать стандартам;

в) изготовление деталей должно проводиться в строгом соответствии с технологическим регламентом, поскольку даже незначительные отклонения могут привести к отрицательным результатам.

**Виды технологических дефектов.** При изготовлении массивных деталей типа шарниров и призматических блоков встречается ряд технологических дефектов.

Наиболее массовым является так называемый дефект «втянутая кромка», который достаточно хорошо известен и название определяет его характер. «Втянутая кромка» имеет вид рваной трещины в месте

разъема частей пресс-формы. Причиной появления этого дефекта является то, что резиновая смесь заливается в пресс-форму, имеет температуру ниже температуры вулканизационного пресса. На стадии вулканизации происходит увеличение объема за счет термического расширения и резиновая смесь вытекает через зазоры. Одновременно с поверхности начинается подвулканизация смеси и, если давление внутри не упало, происходит прорыв слабовулканизированной резины. При охлаждении детали релаксация приводит к образованию рваной трещины. Для устранения этого дефекта рекомендуются следующие мероприятия:

- а) увеличение температуры резиновой смеси до 373-383 К;
- б) снижение температуры вулканизации до 416-434 К;
- в) снижение температуры пресс-формы на стадии заполнения ее резиновой смесью;
- г) плотное закрытие литевых и дренажных отверстий плитами прессов;
- д) создание высокого внешнего усилия сжатия на пресс-форму, предотвращающее ее раскрытие под действием распорных усилий.

Другим дефектом, наиболее часто встречающимся при освоении массивных резиновых деталей, являлась «недопрессовка». Причинами являются: недостаточное давление в процессе заполнения пресс-формы, утечка резиновой смеси в зазоры, блокировка воздуха в полостях формы. «Недопрессовка» может быть ликвидирована следующими способами:

- а) увеличением сечения литевых каналов;
- б) увеличением числа литевых отверстий, поддержанием постоянной температуры резиновой смеси при литье.

Описанные выше дефекты могут быть обнаружены внешним осмотром. Значительно более опасны скрытые дефекты, к которым относятся «непровар», перевулканизация и внутренние раковины.

Массивные резиноталлические детали, в отличие от мелких и тонкостенных изделий, склонны к «непровару» резиновой смеси, особенно в центральной части элемента. Причиной образования дефекта «непровар» является, в первую очередь, нарушение технологии вулканизации, а также неправильно подобранная резиновая смесь.

Стремление избежать дефекта типа «непровар» может привести к другому дефекту – перевулканизации внешних слоев резинового элемента, возникающего вследствие длительного прессования детали. Перевулканизованная резина, как правило, имеет повышенную твердость, более хрупка и менее эластична.

Выявить дефекты типа «непровар» и перевулканизации можно лишь при стендовых испытаниях, поскольку элементы, имеющие «непровар», обладают более низкой жесткостью, а детали с перевулканизованной поверхностью – более высокой жесткостью по сравнению с номинальными значениями.

Качество изготовления резиновых деталей в значительной мере зависит от компонентов резиновой смеси, применяемых в процессе производства. При изготовлении блоков в средней части иногда обнаруживались раковины, возникающие из-за наличия летучих веществ в составляющих резиновой смеси, блокировка воздуха в рабочей поверхности вследствие неправильно выбранных дренажных и литевых отверстий.

Устранению дефектов способствует, прежде всего, качественная подготовка ингредиентов в подготовительном отделении; применение составляющих, которые отвечают техническим требованиям; правильные конструкции пресс-форм.

**Влияние технологических дефектов на свойства и долговечность резиновых элементов.** На свойства и долговечность резиновых элементов большое влияние оказывает режим вулканизации, технологические дефекты и поверхностный эффект.

Исследование влияния технологических факторов на свойства массивных резиновых элементов производилось обычными методами. Из двух наиболее важных характеристик резиновых деталей – динамического модуля сдвига и коэффициента диссипации энергии  $\psi$  – наиболее чувствительных к изменению параметров вулканизации является коэффициент  $\psi$ . Как известно, недовулканизация образца приводит к уменьшению пика частотной зависимости  $\psi$ , сдвигу его в сторону меньших частот и увеличению значения  $\psi$  [73]. При этом стадия физической релаксации у недовулканизованной резины существенно больше, а модуль сдвига меньше. Этот эффект вообще-то известен ре-

зинщикам-технологам, однако исследователи и расчетчики им обычно пренебрегают.

Для анализа влияния степени вулканизации на долговечность и разрушение массивных резиновых элементов использовались опытные элементы сдвига типа БРМ-102 из резины 51-1562 (опытные партии деталей, вулканизованных в оптимуме: температура вулканизации 416-424 К, время вулканизации для БРМ-102 – 40 мин.), и при серийном освоении (ускоренная вулканизация при температуре 431 К, время вулканизации 20 мин.).

В деталях со временем вулканизации 20 мин. имели место трещины, условно названные трещинами скола. Они появлялись обычно на свободной поверхности изделия после 15-20 тыс. часов циклического нагружения в виде небольших (2-3 мм длиной) лунообразных каверн и распространялись преимущественно в поверхностном слое резины глубиной 5-7 мм. Скорость их роста обычно больше, чем скорость роста усталостных трещин, что отмечалось как при прямом измерении скорости, так и при фрактографических исследованиях. Такие трещины служили в ряде случаев инициаторами разрушения и уменьшали долговечность (по сравнению с аналогичными деталями, вулканизованными в оптимуме) примерно на 15-20%. Причиной их появления следует считать, по-видимому, перевулканизацию поверхностных слоев резины; в деталях, вулканизованных в оптимуме, трещины скола не наблюдались.

Для фрактографических исследований и поиска дефектов структуры часть образцов на различных стадиях разрушения расчленялась. В ряде изделий были обнаружены технологические дефекты в виде каверн диаметром 0,1-1 мм с блестящей гладкой поверхностью. Наибольшая информация по таким дефектам накоплена для элементов сдвига типа БРМ-101 и БРМ-102 из резины 51-1562. В них технологические дефекты были обнаружены в неразрушенном массиве разрушенных образцов после 30-35 тыс. ч нагружения. Экспериментально показано, что подобные технологические дефекты (их плотность не превышала 4-6 1/см<sup>3</sup>) не оказывают влияния на долговечность изделий, о чем уже отмечалось выше. Этот факт весьма интересен: для появления усталостных трещин, по-видимому, недостаточно иметь де-

фекты структуры материала. Нужно, чтобы материал в целом устал, т.е. в нем появились рассеянные повреждения с достаточной концентрацией, и эти бы повреждения изменили бы физико-механические свойства материала. Этот вывод ставит под сомнение правомочность предположения А. Деви [123], который считал, что начальным дефектом в резине при определении скорости роста трещин по Гриффитсу можно считать дефекты порядка  $10^{-2}$ - $10^{-3}$  см, всегда присутствующие в резине в силу специфики технологических особенностей ее изготовления.

Особая роль поверхности при анализе процессов разрушения и долговечности массивных резиновых элементов заключается в том, что тонкий поверхностный слой резины всегда имеет большую повреждаемость, чем внутренние слои материала. Это отмечалось ранее [37, 79] при макроразрушении натуральных конструкций такой поверхностный эффект полностью подтверждается. Выше отмечалось, что зарождение трещин происходит преимущественно на поверхности резины, скорость усталостных трещин на поверхности резины больше, чем в глубь массива; именно поверхность резины в первую очередь соприкасается с внешней активной средой, и это проявляется в действии на нее как механических факторов (порезы, царапины и т.д.), так и факторов немеханического происхождения (кислоты, щелочи, солнечная радиация, озон и т.д.). Все эти факторы отрицательно влияют на долговечность резиновых элементов. Отсюда следуют выводы, которые необходимо учитывать при расчете и проектировании резиновых элементов машин:

а) поверхность элемента должна быть чистой, гладкой без каких-либо механических дефектов;

б) массивные элементы хорошо противостоят действию немеханических факторов, например, в условиях горно-металлургического производства, однако по возможности их следует защищать от активного влияния внешней среды;

в) при расчете долговечности резиновых элементов следует учитывать особое свойство поверхности.

*Литература к главе 1*

1. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала // *Механики полимеров*. – 1965. – № 4. – С. 52-59.
2. Адамов А.А. К построению нелинейной модели вязкоупругого поведения наполненных резин при конечных деформациях // *Каучук и резина*. – 1996. – № 5. – С. 27-30.
3. Адамов А.А. Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях // *Структурная механика неоднородных сред*. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 8-11.
4. Адамов А.А. Описание вязкоупругого поведения несжимаемости материалов при конечных деформациях: Дис... канд. техн. наук, защищена 11.03.80. М.: МИЭМ, 1980. – 177 с.
5. Александров А.П., Лазуркин Ю.С. Изучение полимеров. 1. Высокоэластическая деформация полимеров. Динамический метод исследования эластичных материалов // *Журнал технической физики*. – 1939. – Т.9, № 14. – С. 1249.
6. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. – М.: ИЛ, 1952. – 619 с.
7. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.-Л.: Геотехиздат, 1952. – 324 с.
8. Аскадский А.А. Деформация полимеров. – М.: Химия, 1973. – 448 с.
9. Аскадский А.А. Новые возможные типы ядер релаксации // *Механика композитных материалов*. – 1987. – № 3. – С. 403-409.
10. А.С. 9835506(СССР). G 01 N 3/30. Способ определения динамических характеристик эластичных материалов / В.Н. Потураев, А.Г. Червоненко, И.И. Круш, В.П. Надутый. – Оpubл. в Бюл., 1982. – № 47.
11. Базаров И.П. Термодинамика. – М.: Высшая школа, 1983. – 344 с.
12. Бартенев Г.М., Зеленев Ю.В. Курс физики полимеров. – Л.: Химия, 1976. – 288 с.
13. Бартенев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров. – М.: Химия, 1984. – 280 с.
14. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 116 с.
15. Болтыров А.А. Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала / Труды восемнадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ООО «Научно-технический центр «НИИШП», 2007. – Т.1. – С. 73-82.

16. Бронский А.П. Явление последействия в твердом теле // Прикладная математика и механика. – 1941. – Т.5, № 1. – С. 21-30.
17. Бухина М.Ф. Техническая физика эластомеров. – М.: Химия, 1984. – 284 с.
18. Бучаков И.И., Чеповецкий М.А. Исследование уравнения Работнова и его применение к полимерным материалам // Вест. ЛГУ. – Сер.1. – 1987. – Вып.1. – С. 54-58.
19. Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 593-602.
20. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
21. Годовский Ю.К. Теплофизика полимеров. – М.: Химия, 1982. – 280 с.
22. Гольдман А.Я. Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимеров и композиционных материалов. – М.: Химия, 1988. – 272 с.
23. Горелик Б.М. Цилиндрические резинометаллические амортизаторы: Обзор // Производство резинотехнических и асбестотехнических изделий. – М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1989. – № 1. – 68 с.
24. ГОСТ 11053-75. Резина. Метод определения условно-равновесного модуля. – Взамен 11053-64; Вед. 01.01.78 до 01.01.93. – М.: Изд-во стандартов, 1976. – 3 с.
25. ГОСТ 23326-78. Резина. Методы динамических испытаний. Общие требования; введ. 01.01.80 до 01.01.95. – М.: Изд-во стандартов, 1979. – 13 с.
26. ГОСТ 269-66. Резина. Общие требования к проведению физико-механических испытаний. – Взамен ГОСТ 269-53; введ. 01.07.66 до 01.01.97. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 11 с.
27. ГОСТ 9982-76. Резина. Методы определения релаксации напряжения при сжатии. – Взамен ГОСТ 9982-62, ГОСТ 11099-64 в части метода определения напряжения; введ. 01.01.78 до 01.01.93. – М.: Изд-во стандартов, 1976. – 10 с.
28. Гребенюк С.Н. Определение упругих постоянных резинордного материала при помощи энергетического критерия согласования / Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип.11. – С. 79-86.
29. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Методы исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных оболочек с приложением к механике пневматических шин / Научно-технический прогресс в машиностроении. – М.: Международный центр научной и

- технической информации, институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 1993. – Вып. 39. – 49 с.
30. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
  31. Губанов В.В. Прогнозирование срока службы резинотехнических изделий, работающих при циклических деформациях // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1982. – Вып. 40. – С. 21-33.
  32. Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров. – М.: Высшая школа, 1972. – 320 с.
  33. Демидова И.И., Екельчик В.С. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: ЛГУ, 1978. – Вып. 12. – С. 107-113.
  34. Дырда В.И., Голуб Г.Н. Определение соотношения тепловых и механических потерь в резине / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1982. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 03.03.83, № 1952-52.
  35. Дырда В.И., Мажаров М.В. Термодинамические аспекты механики разрушения / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1986. – 15 с. – Библиогр. 10 назв. – Деп. в ВИНТИ 23.09.86, № 6827-86.
  36. Дырда В.И., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Расчет силовых резинотехнических изделий в горном машиностроении. – М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1991. – 62 с.
  37. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – К.: Наукова думка, 1988. – 232 с.
  38. Дырда В.И. Резиновые элементы вибрационных машин. – К.: Наукова думка, 1980. – 100 с.
  39. Дырда В.И., Сенченков И.К., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Универсальный конструкционно-деформационный параметр и  $\beta$ -метод в механике деформирования резиновых деталей // Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров. – Днепропетровск, 23-26 июня 1997. – Днепропетровск: Поліграфіст, 1997. – С. 204-234.
  40. Дырда В.И., Чижик Е.Ф. Резиновые детали в машиностроении. – Днепропетровск: Поліграфіст, 2000. – 581 с.
  41. Екельчик В.С. Применение дробно-экспоненциальных функций для описания вязкоупругого поведения полимеров в широком температурном диапазоне // Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 116-123.
  42. Екельчик В.С., Рябов В.М. Применение преобразования Лапласа для численного решения линейных уравнений вязкоупругости // Процессы релаксации в твердых телах. – М.: Наука, 1982. – С. 21-25.

43. Ильюшин А.А., Победри Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
44. Кабанов В.А. К вопросу о кинетике релаксационных процессов в реальных полимерных телах // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 195, № 2. – С. 402-405.
45. Каргин В.А., Слонимский Г.Л. 1. О законах деформирования реальных материалов. 2. Деформация высокополимерных материалов // Журнал технической физики. – 1941. – Т. 11, № 4. – С. 34.
46. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.
47. Ковров В.Н. Ядро ползучести с параметрами уравнения долговечности С.Н. Журкова // Полимерные материалы в машиностроении. – Пермь: ППИ, 1976. – С. 51-53.
48. Колокольчиков В.В. О неравновесной статистической термодинамике твердых тел // Механика деформируемого твердого тела. – 1975. – № 1. – С. 15-23.
49. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 483-497.
50. Колтунов М.А., Ли Л., Колокольчиков В.В. Зависимость слабосингулярных ядер от структуры полимера / Куйбышевский политехнический ин-т. – Куйбышев, 1980. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ 03.03.82, № 896-82.
51. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
52. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. – М.: Наука, 1985. – 303 с.
53. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
54. Круш И.И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 6. – С. 90-94.
55. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1979. – 223 с.
56. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 372 с.

57. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
58. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 151 с.
59. Лукомская А.И., Евстратов В.Ф. Основы прогнозирования механического поведения каучуков и резин. – М.: Химия, 1975. – 360 с.
60. Мазнецова А.В. Разработка прикладных методов расчета силовых резиновых деталей горных вибрационных транспортно-технологических машин // Дис... канд. техн. наук. – Днепропетровск, АН УССР. – Ин-т геотехнической механики. – 1990. – 205 с.
61. Методика определения реологических параметров резиновых деталей при циклическом деформировании / В.Н. Потураев, И.И. Круш, В.И. Дырда, Н.Н. Науменко. – К.: Наукова думка, 1970. – 27 с.
62. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 327 с.
63. Надутый В.П. Исследование релаксационных характеристик резиновых элементов и идентификация их математической модели для выбора режима вулканизации // Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров, Днепропетровск, 23-26 июня 1997. – Днепропетровск: Поліграфіст, 1998. – Т. 3. – С. 346-355.
64. Надутый В.П., Круш И.И. Определение реологических характеристик полимерных просеивающих поверхностей грохотов // Вибрационные эффекты в горных машинах и технологиях. – К.: Наукова думка, 1990. – С. 94-98.
65. Надутый В.П., Ободан Ю.Н. Экспериментальные исследования взаимодействия жесткого штампа с эластичным слоем // Транспортные и горные машины. Сб. науч. трудов. – К.: Наукова думка, 1983. – С. 69-73.
66. Нельсон К.В., Ткаченко Г.Т., Ионина Н.В. Исследование ориентационных превращений надмолекулярных структур на поверхности однорастянутых эластомеров // Высокомолекулярные соединения. Сер. Б. – 1973. – 15, № 1. – С. 178-182.
67. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 283 с.
68. Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин В.П. Механика полимеров. – М.: МГУ, 1975. – 528 с.
69. Описание вязкоупругого поведения резиновых элементов при конечных деформациях / В.И. Дырда, А.А. Адамов, Е.И. Селиванов,

- А.В. Мазнецова; АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1984. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 25.01.85, № 746-85.
70. Определение зависимости твердости и модуля сдвига наполненных резин / В.И. Дырда, В.В. Гаевский, А.В. Коваль, А.В. Мазнецова; АН УССР. ИГТМ. – Днепропетровск, 1990. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 27.06.90, № 3668-В90.
  71. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ / Е.Н. Звонов, Н.И. Малинин, Л.Х. Паперник, В.М. Цейтлин // Инж. ж. Механика твердого тела. – 1968. – № 5. – С. 76-82.
  72. ОСТ 95.10196-86. Виброизоляторы резиновые. Конструкция и размеры. – Введ. 01.01.87. – 7 с.
  73. ОСТ 95.465-84. Шарниры резинометаллические. Конструкции и размеры. Технические требования. – Взамен ОСТ 95.465-76; введ. 01.01.85. – 8 с.
  74. ОСТ 95.609-86. Блоки резинометаллические. Конструкция и размеры. – Взамен ОСТ 95.609-78; введ. 01.01.87. – 6 с.
  75. Патрикеев Г.А. Макромолекулярная механика // Механика полимеров. – 1971. – № 2. – С. 221-231.
  76. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
  77. Платунов Е.С. Теплофизические измерения в монотонном режиме. – Л.: Энергия, 1973. – 150 с.
  78. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – К.: Наукова думка, 1975. – 214 с.
  79. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – К.: Наукова думка, 1980. – 260 с.
  80. Потураев В.Н., Дырда В.И., Надутый В.П. Резина в горном деле. – М.: Недра, 1974. – 152 с.
  81. Потураев В.Н., Дырда В.И. Резиновые детали машин. – М.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
  82. Потураев В.Н. Резиновые и резинометаллические детали машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 300 с.
  83. Потураев В.Н., Червоненко А.Г., Ободан Ю.Я. Динамика и прочность вибрационных транспортно-технологических машин / Под ред. К. Рагульскаса. – М.-Л.: Машиностроение, 1989. – 112 с.
  84. Пригожин И., Николис Г. Биологический порядок, структура и неустойчивость // Успехи физ. наук. – 1973. – Вып. 3. – С. 517-543.

85. Пригожин И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
86. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С.И. Дымников, Э.Э. Лавендел, А.-М.А. Павловскис, М.И. Сниегс / Под ред. Э.Э. Лавендела. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
87. Промышленные теплофизические приборы первого поколения / В.В. Куренин, Г.С. Петров, В.Т. Карпов, С.Е. Буровой // Пром. теплотехника. – 1981. – Т. 1, № 1. – С. 29-34.
88. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 742 с.
89. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74-78.
90. Работнов Ю.Н., Паперник М.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. – М.: Наука, 1969. – 132 с.
91. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 712 с.
92. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 51-54.
93. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
94. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем / Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Наукова думка, 1980. – 386 с.
95. Растеряев Ю.К., Агальцов Г.Н. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования // Геотехнічна механіка: міжвідомчий збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2005. – Вип. 60. – С. 200-248.
96. Резиновые детали в инженерной практике / В.И. Дырда, У.Ф. Чижик, В.П. Кияшко, Н.Г. Карачабан. – Днепропетровск: Полиграфист, 1998. – 303 с.
97. Релаксационные явления в полимерах / Под ред. Г.М. Бартенева, Ю.В. Зеленева. – Л.: Химия, 1972. – 373 с.
98. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.
99. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 478 с.

100. Розовский М.И. Механика упруго-наследственных сред: обзор // Итоги науки. Механика. Упругость и пластичность. – М.: ВИНТИ, 1967. – С. 165-250.
101. Розовский М.И. Некоторые свойства операторов, применяемых в теории ползучести // Прикладная математика и механика. – 1959. – 23, № 5. – С. 978-980.
102. Розовский М.И. Ползучесть и длительное разрушение материалов // Журнал технической физики. – 1951. – Т. 21, № 11. – С. 29-37.
103. Рябов В.М. Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул // Методы вычислений. – 1976. – Вып. 10. – С. 110-115.
104. Синайский Е.С. Об одном способе обработки кривых экспериментальной реологии // Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 127-130.
105. Синайский Е.С. О численной реализации функции наследственного оператора // Прикладная математика и механика. – 1978. – Т. 42. – С. 1115-1122.
106. Слонимский Г.Л., Шестопад В.О. Статистическое описание релаксационных процессов в полимерах // Высокомолекулярные соединения. Сер. А. – 1978. – Т. 20, № 8. – С. 1712-1721.
107. Способы определения динамических характеристик эластичных материалов / В.Н. Потураев, А.Г. Червоненко, И.И. Круш, В.П. Надутый и др. // Тез. докл. симп. "Вопросы механики резиновых конструкций тяжелых горно-металлургических машин". – Днепропетровск, 1983. – С. 21-22.
108. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 112 с.
109. Соболев И.М., Статников Р.Б. ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования // Проблемы случайного поиска. – 1972. – № 1 – С. 117-135.
110. Температурно-частотное приведение динамических функций саженополненных резин в нелинейной области / Г.В. Виноградов, В.И. Гарцман, Б.М. Горелик, А.Я. Малкин // Механика полимеров. – 1973. – № 4. – С. 751-754.
111. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов и др. / Под ред. В.Н. Потураева. – К.: Наукова думка, 1987. – 288 с.
112. Томпсон Я. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
113. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 240 с.

114. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1975. – 416 с.
115. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 536 с.
116. Хаазе И. Термодинамика необратимых процессов. – М.: Мир, 1967. – 614 с.
117. Шестопал В.О. Диффузия вакансий и реологические свойства металлов при высоких температурах // Физика твердого тела. – 1979. – Т. 12. – С. 291-294.
118. Червоненко А.Г. Математическое моделирование реологических процессов взаимодействия сыпучей среды с вибрационным питателем для выпуска руды // Теория и расчет горных машин. – К.: Наукова думка, 1982. – С. 101.
119. Черняк И.Л., Бухны Д.И., Лоскутов О.Д. Ядро ползучести с прочностными параметрами // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1973. – С. 117-119.
120. Чижик Е.Ф., Пенкин Н.С., Капралов Е.П. Повышение износостойкости горнообогатительного оборудования. – М.: Недра, 1992. – 200 с.
121. Эпштейн В.Г., Веницкий Л.Е., Евсеева Л.Г. Оценка неоднородности резин с помощью спектров времен релаксации // Механика полимеров. – 1969. – № 5. – С. 916-953.
122. Arai Koichi, Ferry John D. Temperature dependence of viscoelastic properties carbon-black-filled rubbers in small shearing deformation // Rubber Chem. and Technol. – 1986. – 59, N 11. – P. 592-604.
123. Davey A.B., Payne A.R. Rubber in Engineering Practice. – London; New York, 1961. – P. 501.
124. Guth E., Mark H. // Sitzungsber. Akad. Wiss. – Wien, 1934. – N 11b. – S. 143.
125. Kuhn W. // Koll. Z. – 1934. – N 68. – S.2.
126. Leaderman H. Elastic and creep properties of filament materials and other highpolymers. – Washington: Textill foundation, 1944. – 289 p.
127. Payne A.R. Histeresis in Rubber Vulcanisates // J.Pol. Sci., Symp. – 1974. – P. 169-196.
128. Wall F.T. // J.Chem. Phys. – 1942. – N 10. – P. 132.

## ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ

### 2.1. Общий алгоритм расчета резиновых деталей

Экстремальные условия нагружения и особенности технологии изготовления силовых РТИ обуславливают простоту их форм. Они представляют собой в основном разные конструктивные варианты призматических и цилиндрических элементов (см. рис. 2.1).

Общий алгоритм расчета представляет собой последовательность операций, направленных на определение коэффициентов жесткости, температуры диссипативного разогрева и долговечности, так как именно эти параметры оказывают существенное влияние на эффективность и надежность машин при экстремальных условиях нагружения. Реализация алгоритма осуществляется по следующей схеме.

**Определение напряженно-деформированного состояния (НДС). Малые деформации.**  $\varepsilon_{ij} \leq 10\text{-}20\%$ . Задача для определения НДС формулируется в рамках линейной теории вязкоупругости; при отсутствии массовых сил и в предположении несжимаемости материала имеет вид: квазистатические уравнения равновесия

$$\nabla \vec{U} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} \vec{U} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\nabla$  – оператор Лапласа;  $\vec{U}$  – вектор перемещений;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}), \quad (2.2)$$

где  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты вектора перемещений и тензора деформаций соответственно,  $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;

уравнения, определяющие закон состояния тела

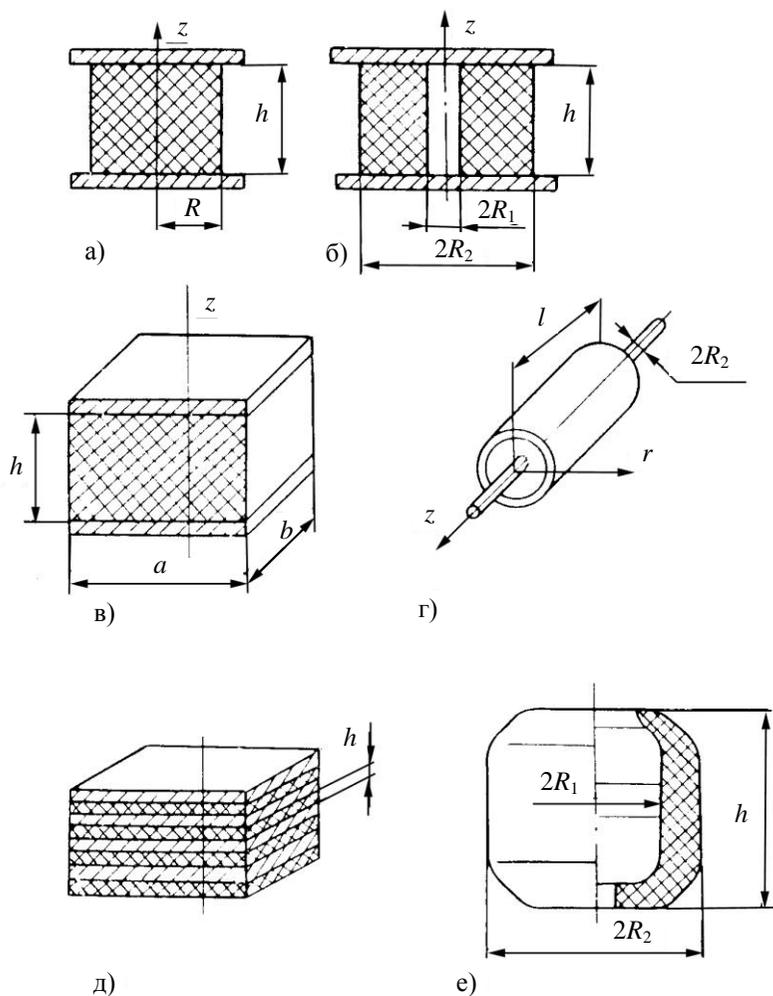


Рис. 2.1. Схемы силовых резиновых деталей: а – сплошной резиноталлический цилиндр; б – полый резиноталлический цилиндр; в – призматический резиноталлический элемент; г – резиноталлический шарнир; д – слоистый элемент; е – элемент со сложной формой свободной поверхности

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu \delta_{ij}}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \right); \quad (2.3)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j, k = x, y, z$ .

Условие несжимаемости запишется в виде  $\varepsilon_{ii} = u_{ii}$ .

Граничные условия, описывающие нагружение РТИ в процессе их эксплуатации, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= t_{0i}(\bar{x}, t) \quad \text{на } F_\sigma, i=1,2,3; \\ u_i &= u_{0i}(\bar{x}, t) \quad \text{на } F_u, F_v = F_\sigma + F_u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $F_u$  и  $F_\sigma$  – части поверхности  $F_v$ , ограничивающей объем РТИ, к которым приложены соответственно перемещения и напряжения;  $t_{0i}$  – вектор нагрузки.

Для расчета НДС силовых резиновых деталей при малых деформациях используются известные методы линейной теории упругости [18, 27, 48, 54, 55].

Вязкоупругие свойства РТИ учитываются путем замены модуля сдвига  $G$  в (2.3) интегральным оператором  $G^*$ , определяющимся через реологические свойства резины.

При этом используются соотношения линейной наследственной теории вязкоупругости

$$\begin{aligned} \sigma &= E_0 \left[ \varepsilon_0 - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]; \\ \varepsilon &= \frac{1}{E_0} \left[ \sigma_0 - \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\sigma, \varepsilon$  – напряжения и деформации;  $E_0$  – мгновенный модуль упругости;  $\varepsilon_0, \sigma_0$  – значения деформаций и напряжений в начальный момент времени;  $\Gamma(t - \tau)$  и  $K(t - \tau)$  – ядра релаксации и ползучести;  $t$  – время.

В качестве ядра релаксации обычно используется дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [49]

$$\chi \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t - \tau) = \chi(t - \tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (2.6)$$

$$\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}; \chi = \frac{\lambda}{t_0^{1+\alpha}}; \lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}; -1 < \alpha < 0,$$

где  $\alpha, \beta, \chi$  – параметры ядра, реологические параметры материала;  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения;  $\Gamma$  – гамма функция;  $t_0$  – обобщенное время релаксации;  $\lambda$  – дефект модуля;  $G_0, G_\infty$  – мгновенный и условно-равновесный модули сдвига, и ядро Ржаницына  $T(t)$  [23, 53]

$$T(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1},$$

где  $A, \beta, \alpha$  – параметры ядер;  $t$  – время наблюдения.

При гармоническом нагружении удобно пользоваться комплексным представлением модулей

$$G^* = G' + iG''; E^* = E' + iE'',$$

где  $G', E'$  – динамические модули, характеризующие упругие свойства резины;  $G'', E''$  – модули потерь, характеризующие диссипативные свойства резины.

Результаты экспериментальных измерений реакции резины на механическое воздействие могут быть выражены через любые составляющие этих функций и пересчитаны следующим образом [59]

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G''}{G'}; G' = |G^*| \cos \delta;$$

$$G'' = |G^*| \sin \delta; |G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2}.$$

Для других вязкоупругих функций выражения аналогичны.

Расчет НДС силовых РТИ позволяет определить коэффициенты жесткости согласно следующим соотношениям:

$$C_\tau = \beta_\tau \frac{G^* F}{h}, C_n = \beta_n \frac{G^* F}{h}, \quad (2.7)$$

здесь  $C_\tau$ ,  $C_n$  – коэффициенты жесткости в направлениях действия касательной и нормальной нагрузок;  $F$  – площадь приложения нагрузок;  $h$  – высота РТИ;  $\beta_\tau$ ,  $\beta_n$  – параметры жесткости, зависящие от геометрии РТИ и определяемые выражениями типа:

для призматических РТИ сдвига и сжатия

$$\beta_\tau = F^{-1} \int \frac{\sigma_{xy}}{G_0 \varepsilon_{ox}} dF, \quad \varepsilon_{ox} = \frac{u_{ox}}{h},$$

$$\beta_n = F^{-1} \int \frac{\sigma_{yy}}{G_0 \varepsilon_{oy}} dF, \quad \varepsilon_{oy} = \frac{u_{oy}}{h} \quad (2.8)$$

для круговых цилиндрических РД сдвига и сжатия

$$\beta_\tau = F^{-1} \int \frac{t_x}{G_0 u_{ox}} dF, \quad t_x = \sigma_{zr} \cos \theta - \sigma_{z0} \sin \theta,$$

$$\beta_n = F^{-1} \int \frac{\sigma_{zz}}{E_0 \varepsilon_{oz}} dF, \quad \varepsilon_{oz} = \frac{u_{oz}}{h}. \quad (2.9)$$

Выше обозначено:  $u_{oy}$ ,  $u_{oz}$ ,  $u_{ox}$  – амплитуды нормальных и касательных перемещений на торце РТИ;  $G_0$ ,  $E_0$  – некоторые отсчетные модули материала, соответствующие частоте нагружения  $\omega$  и температуре  $\theta_0$ ;  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta$  – текущие координаты;  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{z\theta}$  и т.д. – компоненты тензоров напряжений в декартовой и цилиндрической системе координат.

**Средние и большие деформации.** Такие деформации имеют место при статическом нагружении РТИ.

Для средних деформаций ( $\varepsilon_{ij} \leq 0,4$ ) расчет НДС использует сформулированную выше постановку задачи и пошаговую процедуру решения, поскольку сохраняется справедливость применения аппарата малых деформаций внутри каждого шага [48].

Для больших деформаций ( $\varepsilon_{ij} > 0,4$ ) уравнения равновесия сохраняют тот же вид, что и в линейной теории, но с учетом деформированного состояния; в соотношениях типа Коши учитываются нелинейные (квадратичные) члены [5], а физические соотношения обычно вы-

ражают с помощью упругого потенциала  $W = W(I_1, I_2, I_3)$  (удельная потенциальная энергия деформации) через инварианты тензора деформации  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Конкретизация потенциала производится в соответствии с разнообразными видами упругих потенциалов [1, 58, 60], использующихся при расчетах РТИ.

Для большинства резин при деформациях  $\varepsilon_{ij}$  до 40-50% хорошие результаты дают простые однопараметрические потенциалы:

«неогуковский потенциал» [58]

$$W_1 = \frac{1}{2} G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3),$$

потенциал Бартенева-Хазановича [204]

$$W_2^0 = 2G (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3),$$

где  $\lambda_i$  – главные степени удлинений, а также потенциал дельта-метода [48].

Обобщенную форму имеет упругий потенциал, предложенный Огденом [63]

$$W_2 = \sum_{n=1}^N \beta_n (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3),$$

где  $\beta_n, \alpha_n$  – экспериментальные коэффициенты. Этот потенциал включает в себя в качестве частных случаев известные одноконстантные потенциалы, методика определения входящих в него констант приведена в [63].

При решении нелинейных задач, как правило, используются три группы методов [48]:

- 1) приводящие к системе нелинейных алгебраических уравнений;
- 2) использующие разные процедуры поиска экстремума функционала;
- 3) основанные на шаговых процедурах, где на каждом шаге решается линейная задача.

Существенные упрощения в решении нелинейных задач при этом достигаются за счет возможности линеаризации основных соотношений нелинейной теории [3, 27].

На основе линеаризации разработана теория наложения малых упругих деформаций на конечные деформации [5, 7, 17, 27, 62, 65].

Указанная теория позволяет сформулировать поправки к коэффициентам жесткости, полученным в рамках линейной теории вязкоупругости [54].

Отметим также, что все приведенные выше постановки задач и методы их решения существенным образом используют допущение о несжимаемости резины.

**Определение полей температур диссипативного разогрева.** В общем случае необходимо рассматривать связанную задачу термовязкоупругости, включающую наряду с расчетом НДС решение уравнения теплопроводности [28].

В области малых деформаций в инженерных расчетах используется система допущений (в частности, о несущественности влияния тепловых напряжений и деформаций на температуру разогрева и др.), позволяющая определять стационарное поле температур путем решения уравнения энергии с источником внутреннего теплообразования, усредненным за цикл нагружения

$$\Delta T + D' = 0, \quad (2.10)$$

$$D' = \frac{\omega}{2} \left[ 2G'' \left( |\varepsilon_{xx}|^2 + |\varepsilon_{yy}|^2 + |\varepsilon_{zz}|^2 + 2|\varepsilon_{xy}|^2 \right) + \frac{K'' - 2G''}{3} \left( \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

С граничными и начальными условиями, отражающими свободный теплообмен на поверхности РТИ с окружающей средой

$$-\lambda_p \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_0) = 0 \text{ на } S_v,$$

$$T = T_0(\bar{x}) \text{ при } t = 0, \quad (2.12)$$

где  $\omega$  – частота нагружения;  $\lambda_p$  – коэффициент теплопроводности;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_0$  – температура окружающей среды.

Рассматриваемая задача (2.10)-(2.12) может быть решена одним из следующих методов: точным и весьма громоздким методом Фурье [42, 44]; достаточно эффективным методом конечных разностей с реализацией по явной схеме [53] или одним из приближенных методов – Бубнова-Галеркина, Ритца или МКЭ, использующих прямые вариационные принципы [24, 48].

В ряде случаев используются упрощенные постановки задачи (2.10)-(2.12), представляющие достаточно простые и точные аналитические выражения для оценки максимальной температуры диссипативного разогрева в РТИ.

Предварительное статическое нагружение РТИ в пределах  $\varepsilon_{ij} \leq 5-10\%$  не оказывает существенного влияния на температуру диссипативного разогрева [43]. В других случаях ее можно учесть путем использования решений упругой статической задачи о наложении малых упругих деформаций на предварительно деформированное состояние, использующие потенциалы неогуковского тела и дельта-метода [48, 58].

**Оценка долговечности РТИ.** Для определения долговечности РТИ решаются критериальные уравнения разрушения. К настоящему времени применительно к РТИ в экстремальных условиях отработаны два критерия:

критерий по развивающейся в процессе циклического нагружения резины допускаемой поврежденности [13, 41]

$$\Delta P_{кр} = \int_0^{t^*} P(t) dt,$$

где  $\Delta P_{кр}$  – критическое значение развивающейся в материале поврежденности;

энергетический критерий диссипативного типа, допускающий две формы критериального уравнения [12, 31]

$$\int_0^{t^*} \frac{D'(\omega, T, t)}{\Delta u_p^{кр}(T)} dt = 1, \quad \int_0^{t^*} \frac{D'(\omega, T, t)}{\Delta u_g^{кр}(T)} dt = 1, \quad (2.13)$$

где  $t^*$  – время локального разрушения РТИ;  $D'$  – диссипативная функция, определяемая согласно (2.11);  $\Delta u_p^{kp}(T)$  и  $\Delta u_g^{kp}(T)$  – критические значения энергии разрушения и энергии, диссипируемой в материале.

Учет предварительного нагружения производится либо параметрически, на основании экспериментальных данных, либо на базе математических моделей предварительно деформированных тел. При этом общий вид уравнений (2.13) сохраняется.

В качестве ориентировочной оценки долговечности на практике широко используются односторонние оценки долговечности по нескольким параметрам, наиболее полно характеризующим работу резиновых элементов. Для резины в качестве таких параметров используются допускаемые значения температур, напряжений и деформаций [12, 13, 41, 43].

## 2.2. Методы расчета силовых резиновых деталей

**Блоки резинометаллические.** Резинометаллические блоки (БРМ) и их разновидность – резиновые блоки (БР) предназначены для применения в качестве упругих элементов в вибрационных машинах, конвейерах, питателях, технологических аппаратах, там, где необходимо использование элементов, работающих в условиях знакопеременных нагрузок.

Конструктивно резинометаллический блок представляет собой (рис. 2.1, в) резиновый параллелепипед ( $a \times b \times h$ ) с привулканизованными к нему двумя металлическими пластинами, имеющими отверстия для крепления к другим частям машин.

Резиновый блок БР представляет собой резиновый параллелепипед, который крепится к колеблющимся частям вибромашин исключительно вследствие сил трения. Он является разновидностью резинометаллического блока и отличается от него отсутствием металлических пластин.

Блоки резиновые и резинометаллические в зависимости от компоновки их в узлах вибромашин могут испытывать деформацию сдви-

га, сжатия или сдвига со сжатием. Соответственно этим видам нагружения проводится их силовой расчет.

**Статические расчеты.** Расчет деталей при статическом нагружении обычно сводится к определению параметров жесткости при заданных геометрических размерах резинового элемента и известной величине условно-равновесного модуля сдвига. Для этого используются аналитические зависимости, характеризующие связь между силой и перемещением и учитывающие в большинстве случаев вязкоупругие свойства материала посредством введения модуля сдвига, величина которого определяется экспериментально

Ниже приводятся формулы расчета жесткостей резинометаллических упругих элементов при различных видах деформаций.

**Сжатие.** Расчетные модули для параметров жесткости при сжатии параллелепипеда даны в табл. 2.1 [2, 11].

Таблица 2.1 –

Формулы для расчета БРМ сжатия

$\Delta/h$			
<0,1	$\beta_1 < 20$	$\alpha_1 > 1;$ $\beta_1 > 1$	$C_n = \frac{3Gab}{h} \beta_n;$ $\beta_n = \frac{\pi^2}{2} \left[ 36 + \pi^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \right.$ $\left. + \frac{\pi^2}{48} \alpha_1^2 \beta_1^2 \right] \left[ 48 + \pi^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \right]^{-1}$
		$\alpha_1 > \beta_1$	$C_n = \frac{Gab}{h} (3 + \beta_1^2)$
	$20 < \beta_1 < 300$		$C_z = \frac{C_n C_z^0}{C_n + C_z^0}$
	$\beta_1 > 300$		$C_z^0 = \alpha_1 \beta_1 K'$

Продолжение табл. 2.1

$<0,5$	$\beta_1 < 20$	$\alpha_1 > 1;$ $\beta_1 > 1$	$C_n = \frac{3Gab}{\Delta_z} \left\{ -\frac{8}{5} \ln \lambda_z + \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha_1^2 \beta_1^2 (\lambda_z - 1)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \right.$ $\left. + \frac{1}{5} \ln \left[ \left( \frac{8}{5} \lambda_z^2 + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{3} \right) \left( \frac{8}{5} + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{3} \right)^{-1} \right] + \right.$ $\left. + \frac{4}{5} \frac{\alpha_1^2 \beta_1^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} \ln \left[ \lambda_z^2 \left( \frac{8}{5} + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{3} \right) \times \right. \right.$ $\left. \left. \times \left( \frac{8}{5} \lambda_z^2 + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{3} \right)^{-1} \right] \right\}$ <p>При <math>a = b</math></p> $C_n = \frac{Gab}{\Delta_z} (1 + 0,131 \alpha_1^2 (\lambda_z - \lambda_z^{-2}))$
		$\alpha_1 >$ $\beta_1$	$C_n = \frac{Gab}{\Delta_z} \times \left[ -4,8 \ln \lambda_z + \frac{\beta_1^2}{2} (\lambda_z^{-2} - 1) \right]$
	$20 < \beta_1 < 300$		$C_z = \frac{C_n C_z^o}{C_n + C_z^0}$
	$\beta_1 > 300$		-

Примечание:  $\beta_1 = \frac{b}{h}$ ;  $\lambda_z = 1 - \frac{\Delta_z}{h}$ ;  $K' = K \left( 1 + 0,015 \frac{\Delta_z}{h} K \right)$ .

В случае плоской задачи о сжатии призматических элементов могут быть использованы точные решения соответствующих граничных задач, приведенные в [54]. Значения коэффициентов ужесточения  $\beta_n$ , полученные в соответствии с [54], приведены в табл. 2.2.

Эти данные могут быть использованы как непосредственно в инженерной практике, так и для оценки качества приближенных методов расчета элементов данного типа.

Таблица 2.2 –

Коэффициенты ужесточения призматических резиновых элементов  
(плоская задача)

Соотношения размеров $y_0 = \frac{h}{a}$	Коэффициент ужесточения	
	$\beta_n$	$\beta_\tau$
0,1	33,8	0,98
0,2	9,37	0,95
0,3	4,91	0,93
0,4	3,37	0,91
0,5	2,67	0,88
0,6	2,29	0,86
0,7	2,07	0,84
0,8	1,92	0,81
0,9	1,82	0,79
1,0	1,75	0,76
5,0	1,40	-

Для плоских БРМ сжатия используются аппроксимационные формулы [56]

$$\beta_n = \frac{\pi^2}{6} \left( 1 + \frac{\pi^2}{48} \alpha_1^2 \right) \left( 0,992 - 0,304\alpha_1^{-1} + 0,200\alpha_1^{-2} \right), \quad (2.14)$$

в зависимости от коэффициента Пуассона [54]

$$\beta_n \approx \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) + 5,882\nu(1 - \nu)y_0^2}, \quad (2.15)$$

где  $\alpha_1 = a/h$ ;  $y_0 = h/a$ .

Формула (2.14) применима при  $h \leq a \leq 20h$ , ее точность составляет 1%.

Точность формулы (2.15) не ниже 12% соответственно при  $0 \leq y_0 \leq 1$  и  $1/3 \leq \nu \leq 1,3$ .

При предварительном сжатии на величину  $\Delta_z$

$$C_n = \frac{Gab}{h} \frac{\xi}{\operatorname{tg} \xi},$$

где  $\xi$  находится из уравнения

$$1 - \frac{\Delta_z}{h} = \frac{\sin 2\xi}{2\xi}. \quad (2.16)$$

**Сдвиг.** При деформациях сдвига параллелепипеда коэффициенты жесткости определяются выражениями [54, 56]

$$C_\tau = \beta_\tau \frac{Gab}{h}, \quad (2.17)$$

где  $\beta_\tau = 1 - 0,234 \frac{h}{a}$ .

Формула (2.17) при  $h \leq a$  с точностью не ниже 3 % может быть использована для вычисления жесткости при сдвиге в случае трехмерной и плоской задач, так как при сдвиге параллелепипед деформируется практически плоско [54, 56].

Если элемент работает на сдвиг со сжатием, а сжимающая сила  $P$  направлена под углом  $\alpha$ , то перемещение  $\Delta$  и жесткость  $C$  могут быть определены по формулам [43]

$$\Delta = \frac{Ph}{2F(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha)};$$

$$C = \frac{2F}{h}(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha),$$

где  $F = ab$  – площадь поперечного сечения БРМ в плоскости сдвига.

При изгибе соответственно моменту  $M_y$  относительно оси  $\theta_y$  при  $\theta_y \leq 0,2$  угловая жесткость определится [11]

$$C_y^y = \frac{M_y}{\theta_y} = 0,411 G \alpha_1^3 \beta_1 \left\{ 1 + \frac{6,08 + \alpha_1^2}{18,2 + 5\beta_1^2 \alpha_1^{-2} (1,22 + \alpha_1^2)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{9} \left[ 1 + \frac{0,676 + \alpha_1^2}{2,02 + 5\beta_1 \alpha_1^{-2} (0,135 + \alpha_1^2)} \right] \Bigg\}^{-1}.$$

При кручении соответственно моменту  $M_z$  относительно оси  $\theta_z$  при  $\beta_1 \cdot \theta_z \leq 0,2$  угловая жесткость будет [11]

$$C_z^y = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{Gab}{12h} (a^2 + b^2).$$

Динамическая жесткость при циклическом нагружении определяется на основании приведенных выше формул, в которых вместо значений статического модуля  $G$  используется динамический модуль  $G_g(\omega)$ .

Методика его расчета дана в подразделе 2.3, формула расчета  $G_g$  имеет вид

$$\frac{G_g(\omega)}{G_0} = 1 - A(\omega),$$

где  $A(\omega)$  – синус-преобразования ядра, используемого при описании вязкоупругих свойств резины.

Значения  $G_g(\omega)$  для конкретных резин в случае использования ядра Работнова приведены в табл. 1.6. и на рис.1.15.

Для резиновых блоков при отсутствии смазки, что соответствует реальным условиям эксплуатации БР в машинах, справедливы все приведенные выше формулы для жесткости с приемлемой для практики точностью [29, 52].

Теплообразование в призматических резинометаллических элементах типа БРМ, испытывающих деформации сдвига и сжатия, изучены достаточно хорошо [12-14, 24, 26, 39, 42, 43, 45, 54, 57]. Как правило, определение полных полей температуры для таких элементов сводится к решению уравнения теплопроводности (2.10) с соответствующими граничными условиями (2.12) одним из указанных в подразделе 2.1 методов.

В общем случае решение температурной задачи (2.10)-(2.12) для БРМ имеет вид [42-44]

$$T(x, y, z) = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{A_{ijk} \cos \frac{\alpha_i x}{a} \cos \frac{\beta_j y}{b} \cos \frac{\gamma_k z}{h}}{\lambda_p \left( \frac{\alpha_i^2}{a^2} + \frac{\beta_j^2}{b^2} + \frac{\gamma_k^2}{h^2} \right)}, \quad (2.18)$$

где  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$  – корни уравнений

$$\alpha t g \alpha = a H_1; \beta t g \beta = b H_1; \gamma t g \gamma = h H_2;$$

$$A_{ijk} = \frac{64 \alpha_i \beta_j \gamma_k \omega \psi(\omega) \int_V W(x, y, z) \cos \frac{\alpha_i x}{a} \cos \frac{\beta_j y}{b} \cos \frac{\gamma_k z}{h} dV}{V (2 \alpha_i + \sin 2 \alpha_i) (2 \beta_j + \sin 2 \beta_j) (2 \gamma_k + \sin 2 \gamma_k)},$$

где  $V$  – объем параллелепипеда;  $W$  – поле удельной потенциальной энергии, которое определяется из решения задачи теории упругости.

Достоверность решения (2.18) подтверждается экспериментальными данными и другими численными и аналитическими решениями.

Результаты экспериментальных исследований теплообразования в элементах типа БРМ приведены на рис. 2.2-2.4.

На рис. 2.2 приведены частотные и амплитудные зависимости установившейся температуры нагрева для центральных точек элементов БРМ101 и БРМ102 из резины 51-1562. Частотные зависимости имеют практически линейный характер, амплитудные кривые – нелинейный, достаточно хорошо аппроксимирующийся квадратичной зависимостью. Распределения температуры в массиве элементов по координатам (рис. 2.3, 2.4) носят параболический характер с максимумом в центральной точке резинового массива. На рис. 2.3 приведено распределение температуры в элементе БРМ102 из резины 2959, условия нагружения и теплофизические характеристики шие:  $G_0 = 1,76$  МПа; относительная деформация 0,12;  $T_0 = 21^\circ\text{C}$ ;  $\psi = 0,33$ ;  $\lambda_p = 0,294$  Вт/(м·К);  $\omega = 10,8$  Гц;  $H_1 = H_2 = 40$  м<sup>-1</sup>;  $H_3 = 120$  м<sup>-1</sup>. Кривая 1

получена при точном решении методом Фурье (2.18), кривая 2 – способом приближенного решения, используя вариационные методы.

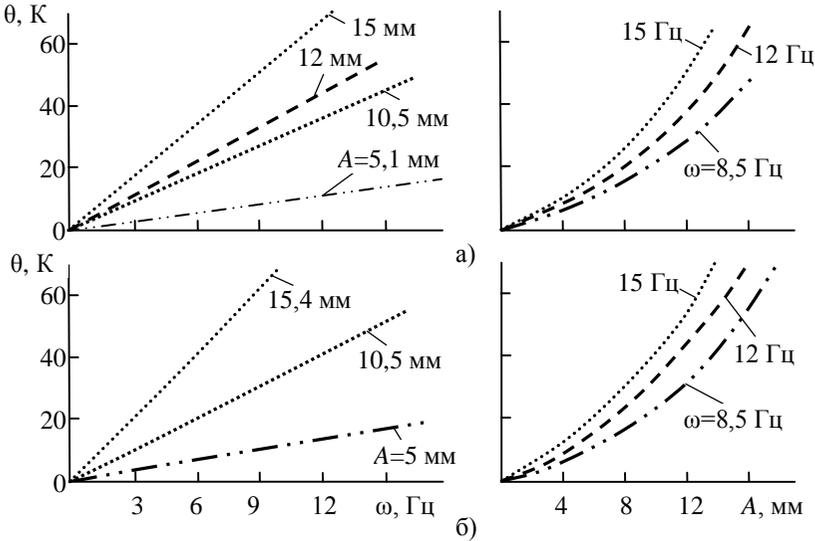


Рис. 2.2. Частотные и амплитудные зависимости температуры нагрева для центральной точки резиновых элементов сдвига типа БРМ 102(а) и БРМ101(б) из резины 51-1362

Для элементов сдвига БРМ102 из резины 51-1562 распределение температуры по координатам приведено на рис. 2.4, параметры нагружения и физико-механические характеристики имели следующие значения:  $G_0=0,83$  МПа;  $A=10,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\psi=0,16$ ;  $\lambda_p=0,155$  Вт/(м·К);  $\omega=10,8$  Гц. Аналогичные распределения получают и при деформациях сжатия призматических резинометаллических элементов.

В инженерной практике для оценки работоспособности резиновых элементов в большинстве случаев можно ограничиться максимальной температурой нагрева (рис.2.5). Поэтому в практических расчетах необходимо пользоваться приближенными методами расчета [57] или номограммами [42, 43].

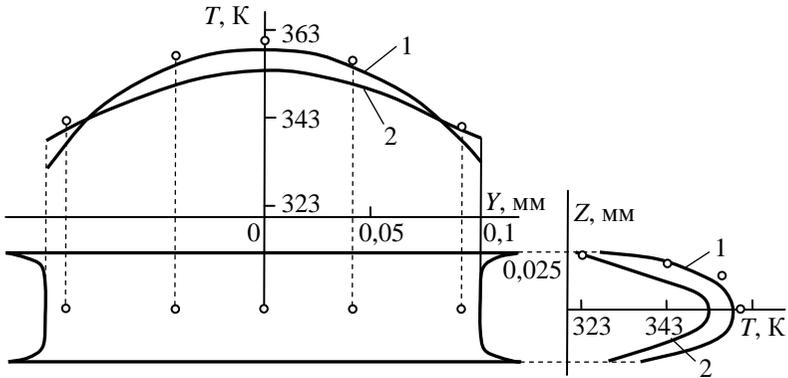


Рис. 2.3. Распределение температуры в элементе сдвига типа BPM102: сплошные линии – расчет; точки – экспериментальные данные

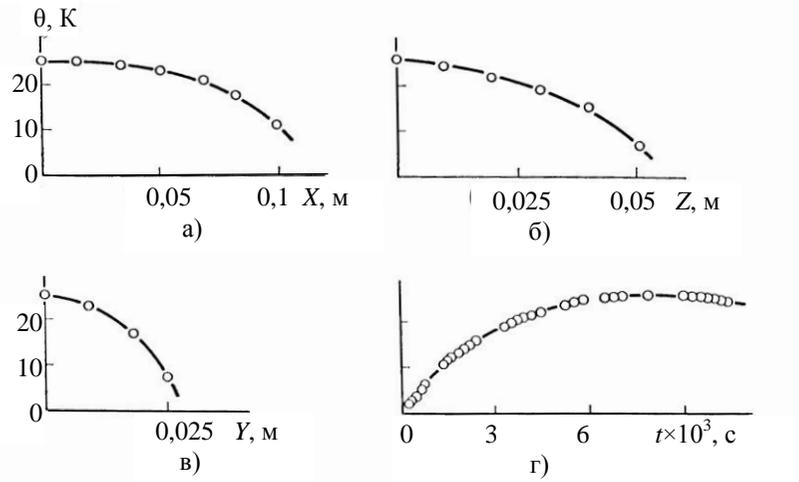


Рис. 2.4. Распределение температуры по координатам в BPM102 из резины 51-1562: а – вдоль оси  $X$ ; б – вдоль оси  $Z$ ; в – вдоль оси  $Y$ ; г – рост температуры со временем в центральной точке резинового массива

Такие приближенные оценки температуры, полученные при решении уравнения (2.4) в предположении, что теплоотвод через сво-

бодные поверхности ( $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ ) незначителен по сравнению с теплоотводом через поверхность резина-металл имеют вид [57]:

$$\theta = \frac{W}{\lambda_p} \left( \frac{h^2}{2} + \frac{h}{H_2} - \frac{z^2}{2} \right),$$

с максимальным значением температуры в центре упругого элемента

$$\theta_{\max} = \frac{\bar{W}h^2}{\lambda_p} \left( 0,5 + \frac{1}{hH_2} \right), \quad (2.19)$$

где  $\bar{W} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\omega \psi c \Delta^2}{4\pi V}$  – усредненная по всему объему упругого

элемента функция рассеяния энергии в единице объема за единицу времени, необратимо переходящая в тепло;  $H_1$  и  $H_2$  – коэффициенты теплообмена резина-воздух и резина-металл, соответственно;  $c$  – жесткость элемента на сжатие или сдвиг, определяемая по приведенным выше формулам;  $\Delta$  – амплитудное значение динамической составляющей осадки или сдвига элемента. В практических расчетах для резин можно принять  $H_1 = 40 \text{ м}^{-1}$  и  $H_2 = 5240 \text{ м}^{-1}$ .

В табл. 2.3, 2.4, заимствованных из работы [57], приведены оценочные значения максимальной температуры, полученные по формулам (2.18) и (2.19) для резинометаллических элементов различных размеров. Условия нагружения и теплофизические характеристики были следующими:  $G = 1 \text{ МПа}$ ;  $\omega = 1 \text{ Гц}$ ;  $\psi = 1$ ;  $\lambda_p = 0,294 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $H_1 = 40 \text{ м}^{-1}$ ;  $H_2 = 5240 \text{ м}^{-1}$ ; относительная деформация  $\delta = 0,1$ .

Небольшая погрешность формулы (2.19) (в пределах точности определения теплофизических характеристик резины) позволяет рекомендовать ее к применению в инженерных расчетах [57].

Точность полученных результатов проверяли [57] на решении задачи о циклическом растяжении-сжатии длинного резинометаллического элемента, полученного другим способом в плоской постановке [54], при этом максимальное расхождение решений, отнесенное к максимальной температуре, составляет не более 5%.

Таблица 2.3 –  
Температура разогрева резинометаллического элемента при циклическом растяжении-сжатии

Размер, см			Температура в центре, °С	Координаты точки максимальной температуры			Максимальная температура, °С		
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>h</i>		<i>x/a</i>	<i>y/b</i>	<i>z/h</i>	формула (2.18)	формула (2.19)	погрешность, %
10	10	10	61,48	0	0	0	61,48	77,82	26,6
10	10	5	25,93	0	0,293	0	25,99	26,27	1,1
10	10	2	5,08	0,849	0	0,226	10,76	12,14	12,8
10	10	1	1,40	0,916	0	0,309	11,70	10,34	-11,6
10	5	5	21,65	0	0	0	21,65	21,90	1,2
10	3	3	9,50	0	0	0	9,50	8,79	-7,5
10	2	2	4,74	0	0	0	4,74	4,19	-9,5
10	1	1	1,31	0	0	0	1,31	1,14	-13,0
16	9	3	12,48	0,511	0,123	0	17,20	18,06	5,0
10	5	2	5,71	0	0,617	0	6,80	6,82	0,3
4	4	2	4,37	0,350	0,350	0	4,41	4,30	-2,5

**Долговечность.** Наиболее перспективным в настоящее время является критерий, сочетающий теоретические возможности термодинамики процессов разрушения и механики сплошной среды – энергетический критерий диссипативного типа, постулирующий следующее: разрушение системы происходит в тот момент, когда плотность энергии разрушения достигнет некоторой критической величины, являющейся постоянной характеристикой материала. С использованием известных решений уравнений теории упругости и вязкоупругости для определения полей напряжений и деформаций, а также уравнений теплопроводности с внутренними источниками тепла для элементов сдвига типа БРМ было получено критериальное уравнение [13]

$$\Delta U_p^* = N^* \left[ \frac{G_0 \gamma_0^2 \psi (2h)^2}{4a^2} f_1(x, y, z) - \frac{2\pi}{\omega} \dot{q} \right]; \quad (2.20)$$

$$\dot{q} = \frac{2\lambda_p \theta(x, y, z) \left[ \frac{H_1 b h}{2 + H_1 a} + \frac{H_1 a h}{2 + H_1 b} + \frac{H_2 a b}{2 + H_2 h} \right]}{a b h \left[ 1 - \frac{H_1 x^2}{a(2 + H_1 a)} + \frac{H_1 y^2}{b(2 + H_1 b)} + \frac{H_2 z^2}{h(2 + H_2 h)} \right]},$$

где  $\Delta U_p^*$  – критическое значение плотности энергии разрушения;  $\gamma_0$  – относительная деформация сдвига;  $H_1, H_2$  – коэффициенты теплообмена резина-воздух и резина-металл соответственно, для рассматриваемых БРМ принимают  $H_1=40 \text{ м}^{-1}$  и  $H_2=5240 \text{ м}^{-1}$ ;  $x, y, z$  – пространственные координаты;  $\theta(x, y, z)$  – приращение поля температур в массиве детали;  $N^* = \frac{2\pi}{\omega} t^*$  – число циклов до разрушения,

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4a_0^2 G_0^2} \left( (\sigma_x^0)^2 + (\sigma_y^0)^2 + (\sigma_z^0)^2 + 2(\sigma_{xy}^0)^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma^0)^2 \right); \quad t^* -$$

время локального разрушения;  $G^* = G' + iG''$ ;  $\sigma^0 = \sigma_x^0 + \sigma_y^0 + \sigma_z^0$  – напряжения, равные упругим при  $G^* = G_0$ .

По зависимости (2.20) можно прогнозировать долговечность в определенном диапазоне условий нагружения, границы применимости критерия связаны с инвариантностью  $\Delta U_p^*$ , относительно параметров нагружения. В табл. 2.5 и на рис. 2.6 приведены значения приращения плотности энергии разрушения в зависимости от максимальной температуры диссипативного разогрева блоков из резины 51-1562 при частоте 10,8 Гц и различных значениях относительного сдвига.

Приращение температуры диссипативного разогрева  $\theta$ , рассчитанное в соответствии с (2.30), долговечность  $t^*$  и  $\lg N^*$  элементов сдвига типа БРМ-102, разрушаемых при амплитуде  $A=10,5 \text{ мм}$  ( $\gamma=0,21$ ) и частоте  $\omega=11,6 \text{ Гц}$  приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.4 –  
Температура разогрева резинометаллического амортизатора при циклическом сдвиге в направлении оси Z

Размер, см			Температура в центре, °С	Координаты точки максимальной температуры		Максимальная температура, °С		
a	b	h		x/a	y/b	формула (2.18)	формула (2.19)	погрешность, %
10	10	10	11,850	0	0	11,850	16,080	35,7
10	10	5	5,070	0,157	0	5,080	4,670	-8,1
10	10	2	0,861	0	0,300	0,877	0,825	-5,9
10	10	1	0,223	0,717	0,769	0,233	0,219	-6,0
16	9	3	0,910	0,511	0,123	1,930	1,840	-4,7
9	16	3	1,900	0,334	0,290	1,990	1,770	-11,1
10	5	2	0,857	0,494	0	0,869	0,825	-5,1
5	10	2	0,864	0,277	0,295	0,877	0,784	-11,6
10	2	2	0,781	0,451	0	0,797	0,825	3,5
2	10	2	0,687	0	0,347	0,700	0,663	-5,3
10	100	10	13,90	0	0,753	16,220	16,080	-0,9

Таблица 2.5 –  
Значения приращения плотности энергии разрушения

Блок	Относительный сдвиг	$\theta$ , °С	$N^* \cdot 10^{-9}$ , циклы	$\Delta U_p^* \cdot 10^{-12}$ , Дж/м <sup>3</sup>
БРМ-101	0,30	40	1,15	1,20
БРМ-102	0,21	32	1,17	1,25
БРМ-102	0,30	60	0,39	1,03
БРМ-102	0,36	90	0,02	0,06

При деформациях сжатия критериальное уравнение аналогично (2.20). В ряде случаев удобно пользоваться модифицированным критерием [13, 31] в виде

$$t^* = \frac{\Delta U_g^*}{D'}, \tag{2.21}$$

где  $\Delta U_g^*$  – критическое значение диссипируемой в материале энергии;  
 $t^*$  – время до разрушения локального объема, определенное значением усредненной за цикл диссипативной функции  $D'$  (2.11).

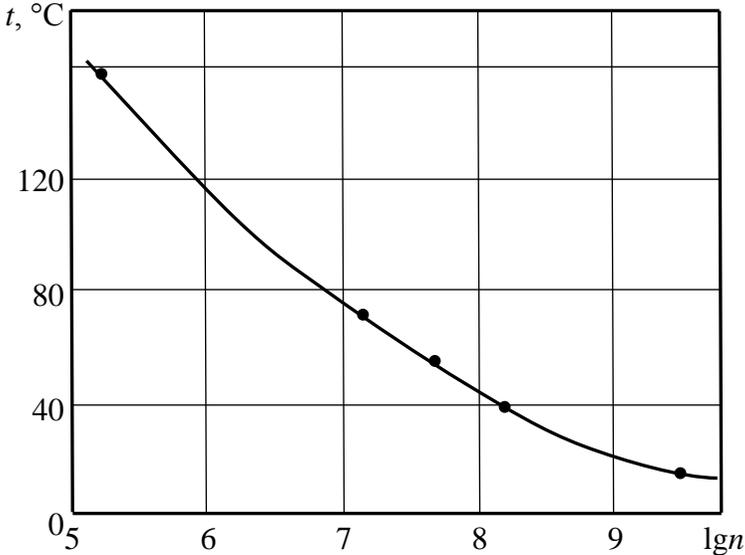


Рис. 2.5. Долговечность резиновых элементов БРМ102 из резины 51-1562 в зависимости от температуры диссипативного разогрева

Следует отметить, что критериальное уравнение (2.21) справедливо в применении к описанию процессов усталостного разрушения, протекающих в диапазоне температур  $0 < T < T_{дон}$ , амплитуд деформаций 2-10 % и частот 5-50 Гц.

В случае зависимости критериальной величины  $\Delta U_g^*$  от температуры выражение (2.21) принимает вид

$$t^* = \frac{\Delta U_g^*}{D'} \varphi_T, \quad (2.22)$$

где  $\varphi_T$  для средненаполненных резин типа 2959 определяется согласно [6, 12];  $\varphi_T = \exp(k_1/T - k_2)$ ;  $k_1=1894$  К;  $k_2=6,47$ ;  $T$  – максимальная температура диссипативного разогрева, К.

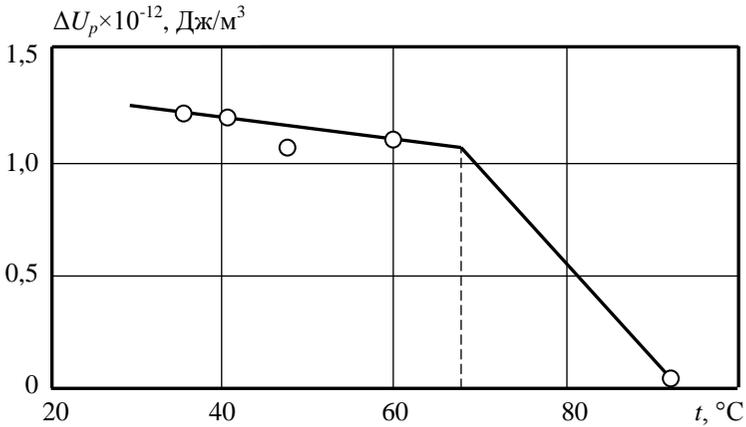


Рис. 2.6. Зависимость плотности энергии разрушения от температуры диссипативного разогрева

Для определения долговечности резиновых элементов, работающих в режиме статического поджатия  $\alpha = \alpha_{ст} + \alpha_{дин}$ , где  $\alpha$  – нагрузка (сила, напряжение, деформация), причем статическая составляющая  $\alpha_{ст}$  значительно больше  $\alpha_{дин}$  – динамической составляющей, зависимость (2.21) будет иметь вид [6]

$$t^* = \frac{\Delta U_g^*}{W_0 \left( \frac{1}{\eta_3} + \frac{\psi \chi f}{2E_1} \right)}, \quad (2.23)$$

где  $W_0 = \sigma_{ij}^{cm} \cdot \sigma_{ij}^{din}$ ;  $\psi$  – коэффициент диссипации;  $f$  – частота;  $\eta_3, E_1, \chi$  – параметры реологической модели, принятой для описания вязкоупругих свойств материала.

Таблица 2.6 –  
Установившаяся температура и долговечность  
для резины разных марок

Марка резины	$\theta$ , °C	$t^*$ , тыс.ч.	$\lg N^*$
2959	160	0,01	5,6
1378	70	0,4-0,6	7,2-7,4
1224	40-45	0,6-1,1	7,4-7,5
4 <sub>3</sub>	74-76	1,45-1,9	7,8-7,86
67Л	64-66	7,0-8,0	8,4-8,5
59Л	60-62	7,5-8,5	8,38-8,6
28Э	54-62	9,6-11,4	8,57-8,65
169	58-61	10-12	8,58-8,66
310	45-50	10-12	8,58-8,66
1562	32-36	35-40	9,06-9,2

Определение долговечности резинометаллических элементов по развивающейся в материале поврежденности. Локальное время до разрушения упругих элементов типа БРМ при их циклическом нагружении может быть определено по уравнению [13]

$$t^* = \tau_0 \ln \frac{\Delta p_\infty}{\Delta p_\infty - \Delta p_{kp}} \exp \left[ \frac{U_0 - \gamma(\sigma, T)\sigma}{RT} \right], \quad (2.24)$$

где  $\tau_0$  – константа материала,  $\tau_0 = 10^{-13}$  сек;  $\Delta p_\infty$  – концентрация перенапряженных связей, которые способны порваться под действием тепловых флуктуаций;  $\Delta p_{kp}$  – критическая концентрация повреждений в объеме резины, являющаяся для каждой конкретной ее марки постоянной (резина 51-1562  $\Delta p_\infty = 7,05$ ;  $\Delta p_{kp} = 5,6$ );  $U_0$  – энергия активации,  $U_0 = 133,9 \cdot 10^6$  Дж/кмоль;  $\gamma$  – структурно-чувствительный коэффициент, определяемый экспериментально [13], для резины 51-1562 может

быть определен по эмпирической зависимости  $\gamma = 103,9 - 8,3\sigma - 0,23T$ ;  $\sigma$ ,  $T$  – напряжение и температура, характеризующие условия нагружения;  $R$  – газовая постоянная,  $R = 8,32 \cdot 10^3$  Дж/(кмоль · К).

При расчетах натуральных элементов величина  $\ln \frac{\Delta p_\infty}{\Delta p_\infty - \Delta p_{kp}}$  принимается равной 3,5 для элементов с температурой диссипативного разогрева до 323 К и 4,5 – с температурой свыше 323 К.

В качестве иллюстрации приведены два примера прогнозирования долговечности по рассмотренным зависимостям.

**Пример 1.** Определим время до локального разрушения резинового элемента типа БРМ-102 из резины 51-1562 при следующих параметрах нагружения и значениях физико-механических величин; температура в центре резинового массива ( $x = y = z = 0$ ) для партии изделий  $T = 323 \div 329$  К;  $\gamma_0 = 0,21$ ;  $\sigma = 0,15$  МПа;  $\gamma$  в зависимости от температуры составляет  $29,60 \div 30,93$ . Время до разрушения определяем по формуле

$$t^* = \tau_0 \ln \frac{\Delta p_\infty}{\Delta p_\infty - \Delta p_{kp}} \exp \left[ \frac{U_0 - \gamma(\sigma, T)\sigma}{RT} \right] =$$

$$= 10^{-13} 3,5 \exp \left[ \frac{133,9 \cdot 10^6 - 29,6 \cdot 0,16 \cdot 10^6}{8,32 \cdot 10^3 \cdot 323} \right] = 1,12 \cdot 10^8 \text{ с.}$$

Если принять  $T = 329$  К;  $\gamma = 30,93$ ;  $\ln \frac{\Delta p_\infty}{\Delta p_\infty - \Delta p_{kp}} = 4,5$ , то время до разрушения  $t^* = 1,33 \cdot 10^8$  с. Экспериментально для партии БРМ-102 нижний предел наработки до появления магистральной трещины составляет  $(1,01 \div 1,08) \cdot 10^8$  с.

**Пример 3.** Определим долговечность резинового элемента типа БРМ-102 из резины 51-1562 для условий нагружения предыдущего примера. Долговечность центральной точки определим в соответствии с (2.20).

Если принять  $\Delta U_p^* = 1,2 \cdot 10^{12}$  Дж/м<sup>3</sup>, то для приведенного выше примера долговечность центральной точки

$$N^* = \frac{\Delta U_p^*}{\frac{G_0 \gamma_0 \Psi (2h)^2}{4a^2} f_1(x, y) - \frac{4\pi \lambda_p \theta(x, y, z) \cdot 0,23}{\omega abh}} =$$

$$= \frac{1,2 \cdot 10^{12}}{\frac{0,82 \cdot 10^6 \cdot 0,32^2 \cdot 0,16 \cdot 0,05^2}{4 \cdot 0,1^2} 8,05 - \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 0,35 \cdot 0,23}{68 \cdot 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,025}} =$$

$$= 1,08 \cdot 10^9 \text{ циклов.}$$

Здесь функция координат  $f_1(x=0, y=0, z=0) = 8,05$ ; значение  $\theta(x, y, z) = 35$  К определено экспериментально. Найденный экспериментально нижний предел долговечности, т.е. времени до появления трещины  $N_{эксн} = (1,12 \div 1,26) \cdot 10^9$  циклов.

Совпадение расчетных данных с данными промышленных экспериментов, как следует из обоих примеров, удовлетворительное.

**Цилиндрические резиновые элементы.** Наиболее распространенным типом резиновых упругих элементов, работающих при деформациях сжатия или комбинированных деформациях сжатия со сдвигом, являются элементы с осевой симметрией цилиндрической формы. Конструктивно такие элементы представляют собой сплошные или полые цилиндры с привулканизованной металлической арматурой или без нее.

На рис. 2.1, а, б приведены основные виды цилиндрических упругих элементов. Наличие центрального отверстия снижает жесткость элемента, способствует его равномерному нагружению, значительно улучшает тепловой режим (рис. 2.1, б). Увеличивая диаметр внутреннего отверстия и наружный диаметр, можно повысить его продольную устойчивость, сохраняя постоянной продольную жесткость. Повышенную устойчивость имеет сборный элемент (слоистый), состоящий из ряда цилиндрических с металлическими дисками, слу-

жащими для их соединения. Это позволяет конструировать элементы, упругая характеристика которых может легко изменяться путем присоединения новых элементов.

**Сплошной резинометаллический цилиндр. Сжатие.** В случае малых деформаций ( $\varepsilon \leq 20\%$ ) жесткость при сжатии сплошного цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $h$  с закрепленными торцами определится зависимостями (2.7), (2.9), имеющими вид

$$C_n = \beta_n \frac{\pi R^2 E}{h},$$

а для определения коэффициента ужесточения  $\beta_n$  пользуются соотношениями, полученными различными авторами:

Бидерманом В.Л. [52]

$$\beta_n = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{\sqrt{6}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{6}}{\rho}}; \quad (2.25)$$

Пейном [64]

$$\beta_n = 1 + 0,413\rho^2; \quad (2.26)$$

Лавенделлом Э.Э. [25]

$$\beta_n = 0,92 + 0,5\rho^2; \quad (2.27)$$

или Дымниковым С.И. [8]

$$\beta_n = 1 + \frac{\pi^2}{24} \rho^2, \quad (2.28)$$

где  $\rho = R/h$ .

Точность приведенных зависимостей может быть оценена при решении плоской задачи о сжатии цилиндра точными методами [54], табл. 2.7. Соответствующая аппроксимационная формула при деформации сжатия для  $z_0 = h/R < 0,1$  имеет вид

$$\beta_n = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) + 15,42\nu(1 - \nu)z_0^2}, \quad (2.29)$$

или при  $\nu = 0,5$

$$\beta_n = 1,05 + \frac{1}{8} \frac{D^2}{h^2}, \quad (2.30)$$

где  $D$  – диаметр цилиндра.

Зависимость (2.29) дает погрешность не выше 15% при  $z_0 < 0,1$  и  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

Таблица 2.7. –

Коэффициент ужесточения  $\beta_n$  сплошных цилиндрических резиновых элементов при сжатии

$\nu$	Соотношения размеров $z_0$										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	5,0
0,5	13,10	4,03	2,37	1,81	1,54	1,40	1,32	1,26	1,23	1,20	1,04
0,3	7,01	3,36	2,20	1,73	1,50	1,58	1,30	1,25	1,21	1,19	1,02

В [10] выполнен сравнительный анализ этих зависимостей и установлено, что в случае средних деформаций ( $\varepsilon \leq 50$  %) наиболее близкие результаты при аналитическом расчете жесткости рассматриваемых цилиндрических РТИ дают формулы

$$C_n = \beta_n \frac{G\pi R^2}{\Delta_z} \left( \frac{1}{\lambda_z^2} - \lambda_z \right),$$

где  $\lambda_z = 1 - \varepsilon = 1 - \frac{\Delta_z}{h}$  – степень сжатия цилиндра.

Для коэффициента  $\beta_n$  в этом случае рекомендуется аппроксимационная зависимость Пейна.

$$\beta_n = 1 + 0,413\rho^2 \approx 1 + 1,65\Phi,$$

где  $\Phi$  – фактор формы цилиндра  $\left( \rho = \frac{R}{h} = 2\Phi \right)$ .

Расчетные формулы для определения жесткости цилиндра при сжатии приведены в зависимости от фактора формы в табл. 2.8 [31].

**Растяжение.** Следует пользоваться формулами для сжатия, подставляя  $\lambda_z = 1 - \frac{\Delta_z}{h}$  и модуль объемного растяжения  $K$ .

Таблица 2.8 –  
Формулы расчета цилиндрического виброизолятора на сжатие

$\Delta/h$	$\Phi < 5$	$5 < \Phi < 100$	$\Phi > 100$ или исключены боковые перемеще- ния
$\leq 0,1$	$C_n = 3\pi G\rho R\beta_n$ ; $\beta_n = (0,92 + 0,5\rho^2)$	$C_n = K\pi R\rho \left( \begin{matrix} 0,92 + \\ + 0,5\rho^2 \end{matrix} \right) \times$ $\times (0,92 + 0,5\rho^2 + 0,33\theta)^{-1}$	$C_z^0 = \pi R\rho K'$

Примечание.  $\lambda_z = 1 - \frac{\Delta_z}{h}$ ;  $\theta = \frac{K}{G}$ ;  $K' = K \left( 1 + 0,015 \frac{\Delta_z}{h} K \right)$ .

**Сдвиг.** Коэффициенты жесткости при сдвиге сплошного резинометаллического цилиндра определяются соотношениями (2.7)

$$C_\tau = \beta_\tau \frac{\pi R^2 G}{h}$$

а коэффициенты  $\beta_\tau$  определяются по аппроксимационной формуле [51].

Это выражение справедливо с точностью не выше 15% при  $D \geq h$ .

В зависимости от фактора формы  $\Phi = D/4h$  формула для  $\beta_\tau$  имеет вид [46].

$$\beta_\tau = \left( 1 + \frac{1}{36\Phi^2} \right)^{-1}.$$

**Сдвиг со сжатием.** Если сжимающая сила  $P$  направлена под углом  $\alpha$  к элементу и последний испытывает одновременно деформацию сжатия и сдвига, то перемещение и жесткость можно найти по следующим формулам [43, 55]

$$\Delta = \frac{Ph(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha)}{FGE};$$

$$C = \frac{GEF}{h(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha)},$$

где  $P$  – приложенная нагрузка;  $F = \pi R^2$ .

Сдвиг предварительно сжатого на  $\Delta_z$  виброизолятора [2, 24]

$$C_r = \pi G' R \rho \frac{\xi}{tg \xi}; \quad G' = G \left( 1 + 0,15 \frac{\Delta_z}{h} K \right),$$

где  $\xi$  находится из уравнения (2.16).

**Кручение.** Действует момент  $M_z$ . Для всех  $\rho$  [2, 24]

$$C_z = \frac{\pi GR^3}{2} \rho.$$

При  $\Delta_z = 0$  появляется сжимающая сила

$$P_z = \frac{M_z \theta_z}{2h}.$$

При кручении предварительно сжатого цилиндра

$$C_z^y = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot R^3 \cdot \lambda_z^{-3/2} \cdot \rho.$$

**Кручение и сжатие.** Сжимающую силу  $P_z$ , крутящий момент  $M_z$ ,  $\lambda_z$  и  $\theta_z$  связывают выражения [2, 24]

$$P_z = \pi GR^2 \left[ (\lambda_z - \lambda_z^2) + \frac{\theta_z^2 \rho}{4 \lambda_z^3} (1 - 2 \lambda_z) \right];$$

$$M_z = \frac{\pi}{2} GR^3 \rho \theta_z \lambda_z^{-3/2}.$$

**Изгиб.** Действует момент  $M_r$ . При  $\rho \leq 5$ ;  $\theta_r \cdot \rho \leq 0,1$  [2, 24]

$$C_r^y = \frac{M_r}{\theta_r} = \frac{7GR^3}{3\rho^{-1} - th(3\rho^{-1})}.$$

**Полый резинOMETаллический цилиндр. Сжатие.** Коэффициенты жесткости при сжатии полого резинOMETаллического цилиндра определяются по аналогии со сплошным цилиндром зависимостями (2.7), (2.9), имеющими в этом случае вид

$$C_n = \beta_n \frac{G\pi(R_1^2 - R_2^2)}{h},$$

где  $R_1, R_2$  – наружный и внутренний радиусы цилиндра соответственно.

Рассчитанные точными методами [54] параметры ужесточения  $\beta_n$  для  $\nu=0,5$  приведены в табл. 2.9.

Таблица 2.9 –

Значения коэффициента  $\beta_n$  для полого цилиндрического виброизолятора при сжатии в зависимости от соотношения размеров

$\alpha_1$	$z_0=h/R_1$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	9,219	3,488	2,239	1,757	1,523	1,392	1,311	1,258	1,220	1,192
0,2	7,020	2,912	2,038	1,675	1,484	1,370	1,297	1,247	1,211	1,184
0,3	5,526	2,495	1,865	1,594	1,442	1,345	1,279	1,233	1,200	1,175
0,4	4,361	2,180	1,727	1,524	1,401	1,319	1,261	1,219	1,187	1,164
0,5	3,427	1,934	1,615	1,463	1,363	1,292	1,240	1,202	1,174	1,152
0,6	2,691	1,743	1,526	1,409	1,326	1,264	1,218	1,183	1,158	1,138
0,7	2,135	1,596	1,450	1,358	1,288	1,233	1,191	1,160	1,138	1,121
0,8	1,747	1,482	1,381	1,304	1,239	1,190	1,155	1,131	1,113	1,100
0,9	1,492	1,374	1,291	1,215	1,160	1,126	1,104	1,090	1,080	1,073

Примечание  $\alpha_1 = \frac{R_2}{R_1}$ .

Для частного случая полых цилиндрических РТИ – шайбы – имеют место данные, приведенные в табл. 2.10, коэффициент ужесточения аппроксимируется формулой Пейна [2].

**Сдвиг.** Коэффициенты жесткости при сдвиге полого цилиндра определяются в соответствии с (2.7), (2.9) [64] соотношениями

$$C_\tau = \beta_\tau \pi G (1 - \alpha_1^2) \rho R_1,$$

где  $\beta_\tau = \left[ 1 + \left( 0,336 + 1,15\alpha_1^{1,72} \right) z_0^{1,16} \right]^{-1}$ ;  $z_0 = \frac{h}{R_1}$ ;  $\alpha_1 = \frac{R_2}{R_1}$ .

При сдвиге предварительно сжатого на  $\Delta_z$  цилиндра [2, 24]

$$C_r = \pi G (1 - \alpha_1^2) \rho R_1 \frac{\xi}{tg \xi},$$

где  $\xi$  определяется по формуле (2.16).

Таблица 2.10 –

Формулы расчета цилиндрической шайбы на сжатие

$\Delta/h$	$(1-\alpha_1) \rho < 6$	$6 < \rho(1-\alpha_1) < 150$	$\rho(1-\alpha_1) > 150$
$< 0,1$	$C_n = \pi R_1 \rho G (1 - \alpha_1^2) \left\{ \left( \frac{3}{4} \rho^2 + 1 \right) (1 - \alpha_1^2) - \right.$ $\left. - 1,5 \rho^2 \frac{(1 - \alpha_1^2) \rho^{-2} - 3}{\rho^{-2} (1 - \alpha_1^{-2}) + 6 \ln \alpha_1} - 6 \alpha_1^2 \ln \alpha_1 \right\} \approx$ $\approx \pi R_1 \rho G (1 - \alpha_1^2) \left( 1 + 0,413 [\rho (1 - \alpha_1)]^2 \right)$	$C_z = \frac{C_n C_z^0}{C_n + C_z^0}$	$C_z^0 = \pi R_1 \rho K' \times$ $\times \Delta_z (1 - \alpha_1^2)$
$< 0,5$	$C_n = \frac{9 \pi R_1^2}{8 \Delta_z} G (1 - \alpha_1^2) \left\{ - \frac{16}{5} \ln \lambda_z + \frac{2}{3} \times \right.$ $\times \left( 1 + \alpha_1^2 - \frac{(1 - \alpha_1^2)}{\ln \alpha_1} \right) \rho^2 (\lambda_z^{-2} - 1) - \frac{2}{15} \times$ $\times \left( \frac{(1 - \alpha_1^2)}{\alpha_1 \ln \alpha_1} \right)^2 \ln \left[ \lambda_z^2 \left( \frac{(1 - \alpha_1^2)}{5 \alpha_1^2} - \rho^2 \ln \alpha_1 \right) \times \right.$ $\left. \times \left( \frac{(1 - \alpha_1^2)}{5 \alpha_1^2} \lambda_z^2 - \rho^2 \ln \alpha_1 \right)^{-1} \right] \right\} \approx$ $\approx \frac{\pi R_1^2}{\Delta_z} (1 - \alpha_1^2) G \times$ $\times \left\{ 1 + 0,413 \rho^2 (1 - \alpha_1)^2 (\lambda_z^{-2} - \lambda_z) \right\}$	$C_z = \frac{C_n C_z^0}{C_n + C_z^0}$	

Примечание:  $\rho = \frac{R_1}{h}$ ;  $\lambda_z = 1 - \frac{\Delta_z}{h}$ .

**Кручение.** Действует момент  $M_z$  [2, 24]

$$C_z^y = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{\rho}{2} \pi G R^3 (1 - \alpha_1^4).$$

**Изгиб.** Действует момент  $M_r$ . При  $\rho \leq 5$ ,  $\theta_r \cdot \rho \leq 0,1$  [2, 24]

$$C_r^y = \frac{M_r}{\theta_r} = \frac{2,35(1 - \alpha_1^4)NGR_1^3}{N\rho^{-1} - th(N\rho^{-1})}; N = 3\sqrt{\frac{1 - \alpha_1^4}{1 - \alpha_1^6}}.$$

**Сдвиг со сжатием.** Суммарная жесткость  $C$ , осадка  $\Delta$  определяются из соотношений [42]

$$\Delta = \frac{Ph(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha)}{\pi EG(R_1^2 - R_2^2)};$$

$$C = \frac{GEF(R_1^2 - R_2^2)}{h(E \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha)}.$$

**Теплообразование.** Основными уравнениями при определении температурных полей цилиндрических элементов являются уравнения равновесия (2.1) и теплопроводности (2.10) с источником внутреннего теплообразования.

Методы решения задач теплопроводности изложены в разделе 2.1.

В инженерной практике для оценки работоспособности РТИ можно ограничиться максимальной температурой нагрева, определяемой, как правило, упрощенными методами расчета [2, 24] или номограммами [42, 43].

Значительно упрощается определение максимальной температуры в сплошном цилиндре при использовании цепной номограммы [42, 43], составленной в соответствии с уравнениями [26, 44]

$$\theta = \frac{2G_0 \varepsilon^2 R^2 \omega \Psi}{\pi \lambda_p J} \Phi(Bi_1, Bi_2, \gamma_1),$$

$$\Phi = 1,125 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_m Q_n}{\left( \frac{v_m^2}{\mu_n^2} + \gamma_1^2 \right)} \left[ \gamma_1 \left( 1 - \frac{4}{v_m^2} + \frac{2}{Bi_2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( 1 - \frac{2}{\mu_n^2} + \frac{2}{Bi_1} \right) - \frac{24}{\mu_n^2} \left( 1 - \frac{3}{\mu_n^2} + \frac{3}{Bi_1} \right) \right], \quad (2.31)$$

где  $\varepsilon$  – относительная деформация;  $\gamma_1 = 2R/h$ ,  $R$  и  $h$  – радиус и высота цилиндра;  $Bi_1$ ,  $Bi_2$  – критерии Био, определяемые как  $Bi_1 = H_1 h / 2$ ,  $Bi_2 = H_2 h / 2$ ;  $J$  – механический эквивалент теплоты;

$$P_m = \frac{Bi_2}{v_m^2 \left( 1 + \frac{Bi_2^2}{v_m^2} I_0(v_m) \right)};$$

$$Q_n = \frac{\sin \mu_n}{\mu_n^3 \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right)},$$

где  $I_0$ ,  $I_1$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода действительного аргумента;  $v_m$  и  $\mu_n$  – корни трансцендентных уравнений,

$$v I_1(v) - Bi_2 I_0(v) = 0; \quad \mu g \mu - H_1 h / 2 = 0.$$

Расчет теплового поля сплошного цилиндрического элемента при сжатии может быть осуществлен методом Бубнова-Галеркина [2, 24] с аппроксимацией температуры в виде

$$\theta(r, z) = c \left( r^2 - \xi_1 \right) \left( z^2 - \beta_1 \right),$$

где

$$c = \frac{9G\Delta^2 \omega \Psi}{4\pi \lambda_p h^2} \left[ \frac{R^2 h^3}{280} - \xi_1 \left( \frac{R^2 h}{80} + \frac{h^3}{140} \right) - \beta_1 \left( \frac{R^4}{18h} + \frac{R^2 h}{10} \right) + \xi_1 \beta_1 \left( \frac{R^2}{12h} + \frac{h}{5} \right) \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{R^2 h^2}{80} + \frac{R^4 h^3}{36} - \xi_1 \left( \frac{h^5}{40} + \frac{R^2 h^3}{12} \right) - \beta_1 \left( \frac{R^2 h^3}{6} + \frac{R^4 h}{3} \right) + \xi_1 \beta_1 \left( \frac{h^3}{3} + R^2 h \right) - (2\beta_1 + \xi_1) \xi_1 \beta_1 h + \xi_1^2 \frac{h^3}{12} + \beta_1^2 R^2 h \right]^{-1};$$

$$\xi_1 = 2R / H_1 + R^2; \quad \beta_1 = h / H_2 + h^2 / 4.$$

Точка с наибольшей температурой находится в середине, т.е. при  $r=0$  и  $z=0$ .

Температура в цилиндре определится как

$$T(r, z) = T_0 + \theta(r, z) = T_0 + c(r^2 - \xi_1)(z^2 - \beta_1).$$

Распределение температуры в сплошном резиновом цилиндре может быть определено из краевой задачи теплопроводности с использованием точных решений изотермической задачи термовязкоупругости [54] и служить оценкой точности приведенных выше приближенных методов.

Для полого цилиндра функция  $\Phi$  в (2.31) зависит от пяти параметров, имеет довольно громоздкий вид [42, 43]. Распределение температуры в полом цилиндрическом элементе может быть определено методом среднеквадратической ошибки [42, 44] или методами [24, 54].

Достоверность и физическая обоснованность применения указанных методов расчета температурных полей в сплошных и полых циклических элементах подтверждается обширными экспериментальными данными [13, 40, 43].

На рис. 2.7 приведено распределение установившейся температуры в полом цилиндрическом элементе, выполненном из резины 2959, деформация циклического сжатия с амплитудой 0,010 м (предварительное поджатие 0,012 м), частота 13 Гц. Сплошные линии – расчетные данные; точки – экспериментальные данные.

По аналогии с элементами сдвига, распределение температуры нагрева по длине  $l$  и радиусу  $r$  полого цилиндра имеет параболический характер, а максимальная температура устанавливается в центре резинового массива.

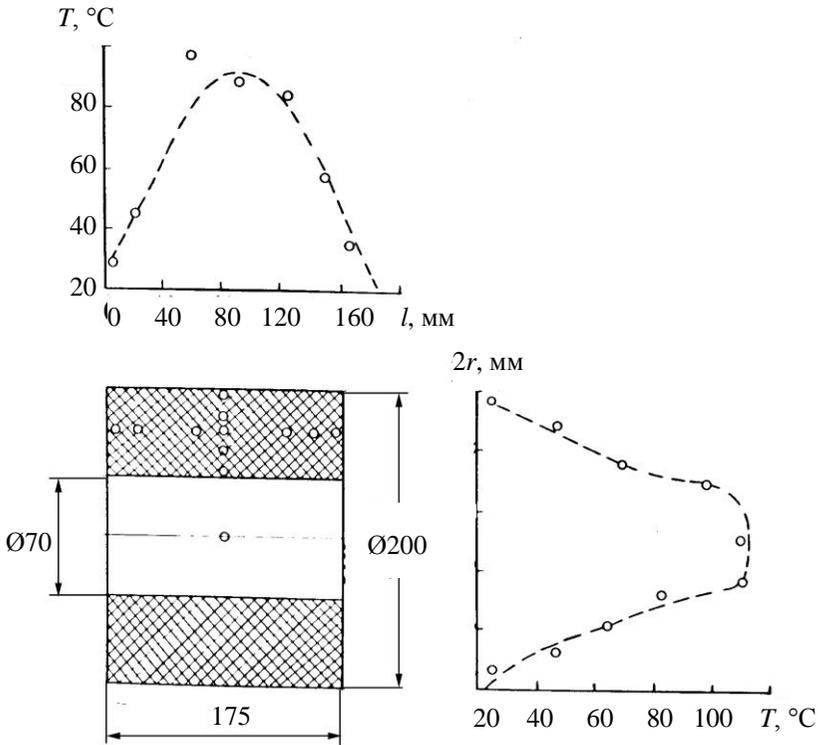


Рис. 2.7. Температурное поле в резиновом цилиндре ( $r$  – радиус цилиндра)

На рис. 2.8 дано сопоставление распределений стационарных избыточных температур для полого (сплошные кривые) и сплошного – штриховые кривые) цилиндров в случае теплоизолированной внутренней поверхности ( $B_3=0$ ), полученные в [54] с использованием точных решений изотермической задачи термовязкоупругости

$$\left( \xi = \frac{z}{R_1}; \rho = \frac{r}{R_1}; \xi_0 = \frac{h}{R_1}; \alpha_1 = \frac{R_2}{R_1}; \rho^* = \frac{\rho - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right).$$

Видно, что в обоих случаях максимальные температуры устанавливаются в среднем сечении ( $\xi=0$ ), причем для сплошного цилиндра они оказываются несколько выше. Это объясняется тем, что осевая жесткость сплошного цилиндра выше, чем полого, поэтому мощность внешних сил (а следовательно, и рассеяние) в первом случае больше при одинаковых колебательных скоростях перемещения торцов. Если на внутренней поверхности происходит теплообмен с окружающей средой, то максимальное по объему значение температуры уменьшается, а точка его достижения смещается с внутренней поверхности тела. Зависимость максимальной температуры от параметра  $\alpha_1$  для двух значений  $B_3$  показана на рис. 2.9. Отмечается снижение температуры при уменьшении толщины стенки. В начальный момент нестационарного процесса происходит разогрев, близкий к адиабатическому.

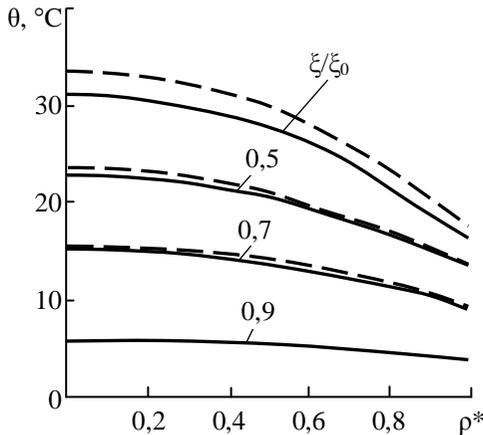


Рис. 2.8. Распределение установившихся температур в полом (сплошные кривые) и сплошном (штриховые кривые) цилиндрах

Затем за счет теплопроводности и теплообмена характер распределения температуры изменяется и ее максимальное значение из окрестности угловой точки смещается внутрь тела.

В представленных результатах расхождение теоретических и экспериментальных данных не превышает совокупной погрешности эксперимента.

**Долговечность.** Определение долговечности цилиндрических элементов может быть осуществлено по изложенному выше общему алгоритму расчета с использованием энергетического критерия разрушения, конкретизация применения которого для расчета долговечности элементов типа БРМ и шарниров приведена в [12, 13] и рассмотрена в предыдущих разделах. Существенным при этом является наличие решений задачи (2.10)-(2.12) в замкнутом виде для таких элементов.

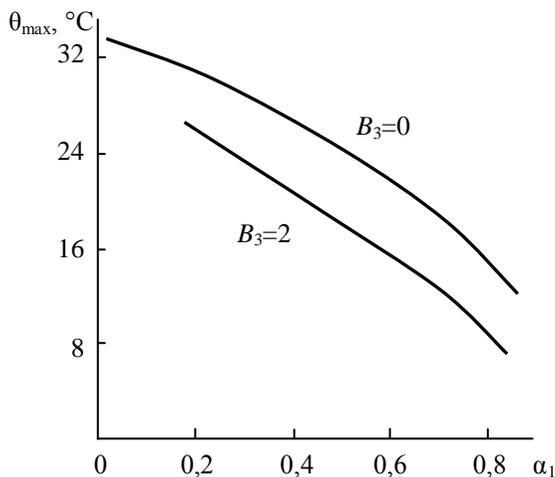


Рис. 2.9. Зависимость максимальной температуры в полых цилиндрах от условий теплообмена на внутренней поверхности

Для цилиндрических (сплошных и полых) элементов такие решения построить невозможно, для расчета полей температур, как правило, используются численные методы. В этой связи для определения долговечности цилиндрических элементов целесообразно использовать модифицированное критериальное уравнение в виде (2.31).

В табл. 2.11 приведены расчетные данные долговечности для цилиндрических элементов трех типоразмеров.

Таблица 2.11 –

## Долговечность цилиндрических элементов

Высота $h$ , м	Диаметр $2R$ , м	$D'_{\max}$ , Дж/(м <sup>3</sup> ·с)	$t_1^*$ , ч	$\theta_{\max}$ , °С	$t_2^*$ , ч
0,100	0,180	15800	23400	25,0	62000
0,065	0,200	32470	11400	18,0	40000
0,040	0,195	58750	6300	10,5	27000

Максимальное значение диссипативной функции  $D'_{\max}$  (соответствует границе резина-металл), максимальное приращение температуры диссипативного разогрева  $\theta_{\max}$  (соответствует среднему сечению резинового массива), им соответствует значение времени локального разрушения  $t_1^*$  и  $t_2^*$ . Полученные результаты подтверждают вывод об очагах разрушения, провоцирующих начало разрушения элементов на границе резина-металл.

**Резинометаллические шарниры.** Конструкции шарниров разнообразны, но в большинстве случаев различают конструкции основных двух типов – сварные и сборные. В сварных шарнирах резиновый элемент присоединяется к металлической арматуре клеями и привулканизовывается. Сборные резинометаллические шарниры изготавливаются запрессовкой резинового элемента в металлическую втулку с натягом. Конструктивно же шарнир представляет собой резиновый полый цилиндр, помещенный во внутреннюю и наружную металлические обоймы. Общий вид и схема наиболее распространенной конструкции резинометаллического шарнира первого типа показана на рис. 2.1, г.

При эксплуатации резиновые элементы шарниров испытывают деформации коаксиального скручивания, осевого сдвига и радиального сжатия. Последовательность расчета шарниров адекватна изложенной выше. Для расчета шарнира (расчетная схема на рис. 2.10) необходимо знать величину приложенного внешнего крутящего момента  $M$ , величины осевой  $P_z$  и радиальной  $P_r$  нагрузок.

**Статический расчет шарниров.** При малых и средних деформациях формулы для определения перемещения и жесткости будут иметь вид [2, 24, 52]. При осевом сдвиге в случае

$$\frac{\Delta_z}{R_1(1-\alpha_1)} \leq 0,5, C_z = -\frac{2\pi Gl}{\ln \alpha_1}, \Delta_z = \frac{p_z}{2\pi Gl} \ln \alpha_1,$$

где  $\alpha_1 = R_2/R_1$ ;  $R_1, R_2$  – соответственно внутренний и наружный радиусы резинового элемента шарнира;  $l$  – длина шарнира.

При коаксиальном кручении соответственно моменту  $M_z$  при  $\theta_z \leq 0,3(1-\alpha_1)$  угловая жесткость

$$C_z^y = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{4\pi G l R_2^2}{1-\alpha_1^2}, l = 2h;$$

при  $\theta_z \leq 1-\alpha_1$ ;  $\theta_z = \arccos\left(\frac{M_z}{4\pi G l R_1^2}\right) - \arccos\left(\frac{M_z}{4\pi G l R_2^2}\right)$ .

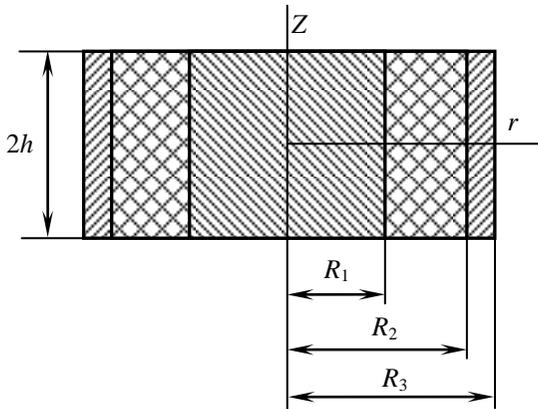


Рис. 2.10. Схема расчета шарнира

Касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_z}{2\pi r^2 l}$$

и достигают максимального значения на поверхности при  $r = R_1$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2\pi R_1^2 l}.$$

Угол закручивания шарнира определится из выражения

$$\gamma = \frac{M_z}{4\pi Gl} \frac{(\alpha_1^2 - 1)}{R_2^2}.$$

При радиальном сжатии в случае, когда длина шарнира велика по сравнению с диаметром  $2R_2$ , радиальное смещение определится выражением

$$\Delta_r = \frac{P_r}{4\pi Gl} \beta_2,$$

где  $\beta_2$  – коэффициент, зависящий от  $R_2/R_1$ .

В общем случае [24, 52]

$$\beta_2 = \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}.$$

При  $\frac{R_2}{R_1} \leq 2$

$$\beta_2 \approx \frac{8}{3} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^3.$$

Радиальная жесткость

$$C_r = \frac{3\pi Gl}{\left( \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^3}.$$

Радиальная нагрузка  $P_r$  вызывает растяжение и сжатие слоя резины между внутренней и наружной обоями. При этом для наиболее часто встречающегося соотношения геометрических размеров, когда величины  $l$  и  $2R_2$  соизмеримы, а  $R_2/R_1 > 2$ , радиальное перемеще-

ние оси шарнира  $\Delta_r$  и радиальная жесткость  $C_r$  [52] определяются соотношением

$$\Delta_r = \frac{2P_r \left[ l^2 + 3(R_1 + R_2)^2 \right]}{3\pi Gl \left[ l^2 + 6(R_2 - R_1)^2 \right]} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \right)^3,$$

$$C_r = \frac{3\pi Gl}{2} \cdot \left( \frac{l^2 + 6(R_2 - R_1)^2}{l^2 + 3(R_1 + R_2)^2} \right) \cdot \left( \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right)^3.$$

Эти формулы справедливы при  $l/(R_1 + R_2) > 6$ .

При  $\frac{\Delta_r}{R_1(1 - \alpha_1)} < 0,2$  радиальная жесткость шарнира может быть определена в соответствии с [2, 24]

$$C_r = Gl \left\{ 1,94 \left( \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \left[ 3 + n - \frac{(1 + n)^2}{4 + n + 0,82 \rho} \right] \right\},$$

где  $\rho = \frac{l}{R_1 - R_2}$ ;  $n = 1,57 \left[ 3 + \pi \frac{1 + \alpha_1^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right]$ .

Эта формула справедлива при  $\alpha_1 > 0,5$ .

Сборный резинометаллический шарнир отличается от сварного тем, что резина прессуется с предварительным натягом  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по радиусам  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. При деформациях кручения и аксиального сдвига такого шарнира угловая жесткость определится по формулам [9, 24, 56].

При кручении соответственно моменту  $M_z$  относительно оси  $\theta_z$

$$C_z^y = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{4\pi Gl R_2 r_1 r_2 R_1}{r_1 R_1 - r_2 R_2},$$

$r_1$  и  $r_2$  – радиусы до монтажа, т.е.  $R = r + \Delta_r$ .

При аксиальном сдвиге

$$C_z = Gl \frac{2\pi(1+6A)}{\ln \alpha_2^{-1} - 0,5 \ln \left[ \frac{1+6A-2B(\alpha_1 \cdot \lambda_2)^{-2}}{1+6A-2B\lambda_1^{-2}} \right]},$$

где  $\alpha_2 = \alpha_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ,  $\alpha_0 = \frac{r_2}{r_1}$ ,  $A = \frac{\Delta_1}{r_1} - B$ ,  $B = \frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ ,  $\lambda_1 = \frac{R_1}{r_1}$ ,

$$\lambda_2 = \frac{R_2}{r_2}.$$

**Теплообразование в шарнирах.** При установившемся процессе теплообразования уравнения теплопроводности для шарнира можно представить в виде [42, 47]

$$\nabla^2 \theta_1 = 0; r \leq R_1; \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 \theta_2 + \frac{W'}{\lambda_p} = 0; R_1 \leq r \leq R_2; \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 \theta_3 = 0; R_2 \leq r \leq R_3, \quad (2.34)$$

где  $W = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \dot{\gamma} \tau d\tau = \frac{W_1}{r^4}$  – усредненное за период деформации значение источника теплообразования

$$W_1 = \frac{4\gamma_0 G_0 \omega \Psi R_1^4}{\lambda_p (1-\alpha^2)^2}; \alpha = R_1 / R_2;$$

где  $\gamma_0$  – амплитудное значение угла закручивания;  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  – приращение температуры во внутренней металлической обойме, резиновом элементе шарнира и наружной металлической обойме соответственно.

Граничные условия, характеризующие теплообмен между резиной, металлом и окружающей средой, имеют вид

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \pm H_1 \theta_1 = 0 \text{ при } z = \pm h, r \leq R_1; \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \pm H_2 \theta_2 = 0 \text{ при } z = \pm h, R_1 \leq r \leq R_2; \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial z} \pm H_1 \theta_3 = 0 \text{ при } z = \pm h, R_2 \leq r \leq R_3; \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial z} \pm H_1 \theta_3 = 0 \text{ при } r = R_3, \quad (2.38)$$

где  $r$  – текущее значение радиуса.

Общее решение уравнения (2.32), удовлетворяющее граничному условию (2.35) и ограниченное при  $r=0$ , записывается в виде

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} I_0 \left( \frac{b_1 \mu_n r}{R_1} \right) \cos \frac{\mu_n z}{h},$$

где  $I_0$  – функция Бесселя мнимого аргумента первого рода нулевого порядка;  $\mu_n$  – корни трансцендентного уравнения

$$\mu_n \operatorname{tg} \mu_n = H_1 h, \quad b_1 = \frac{R_1}{h}.$$

Общее решение уравнения (2.34), удовлетворяющее граничным условиям (2.37), (2.38), имеет вид:

$$\theta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} C_{3n} S_0 \left( \frac{b_3 \mu_n r}{R_3} \right) \cos \frac{\mu_n z}{h},$$

где функция  $S_0$  выражается через функции Бесселя мнимого аргумента первого ( $I_0, I_1$ ) и второго ( $K_0, K_1$ ) рода нулевого и первого порядков следующим образом:

$$S_0 \left( \frac{b_3 \mu_n r}{R_3} \right) = \left[ I_0(b_3 \mu_n) + \frac{b_3 \mu_n}{H_1 R_3} I_1(b_3 \mu_n) \right] \times \\ \times K_0 \left( \frac{b_3 \mu_n r}{R_3} \right) - \left[ K_0(b_3 \mu_n) - \frac{b_3 \mu_n}{H_1 R_3} K_1(b_3 \mu_n) \right] I_0 \left( \frac{b_3 \mu_n r}{R_3} \right),$$

где  $b_3 = R_3/h$ .

Решение неоднородного уравнения (2.33), удовлетворяющее граничному условию (2.36), запишется в виде суммы общего решения

соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, причем это частное решение может быть определено методом среднеквадратической ошибки:

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_{2n} K_0 \left( \frac{b_3 \lambda_n r}{R_2} \right) + C_{4n} I_0 \left( \frac{b_3 \lambda_n r}{R_2} \right) + C_{5n} \frac{R_2^2}{r_2} \right] \cos \frac{\lambda_n z}{h}, \quad (2.39)$$

где  $b_2 = R_2/h$  собственные числа  $\lambda_n$  являются корнями уравнения

$$\lambda g \lambda = H_2 h.$$

Неизвестные постоянные  $C_{5n}$  определяются из условия

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_{-h}^h \left[ \nabla^2 \theta_2 + \frac{W}{r^4} \right]^2 r dr dz \rightarrow \min.$$

Откуда после подстановки уравнения (2.39), минимизации и интегрирования получают

$$C_{5n} = \frac{W \sin \lambda_n \left[ 1 - \alpha^4 + \frac{8(1 - \alpha^6)}{3b_1^2 \lambda_n^2} \right]}{\lambda_n^3 b_1^2 R_2^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\lambda_n}{2\lambda_n} \right) \left[ 1 - \alpha^2 - \frac{4(1 - \alpha^4)}{b_1^2 \lambda_n^2} + \frac{16(1 - \alpha^6)}{3b_1^2 a^2 \lambda_n^4} \right]}.$$

Оставшиеся неизвестными постоянные определяются из четырех условий равенства температуры и тепловых потоков на цилиндрических поверхностях с  $r=R_1$  и  $r=R_2$  (т.е. на стыке резина-металл), которые удовлетворяют по высоте шарнира лишь в интегральном смысле. После интегрирования этих выражений получают систему линейных алгебраических уравнений, решением которой определяются неизвестные постоянные, подставив которые в уравнение (2.39), получают окончательное выражение для вычисления температурного поля шарнира, более подробно этот метод решения изложен в [42, 43].

Для шарниров типа ШРМ распределения температуры по координатам представлены на рис. 2.11: сплошные линии – расчет, точки – эксперимент, частотные и амплитудные зависимости установившейся температуры приведены на рис. 2.12. Полученные зависимости качественно аналогичны зависимостям для БРМ.

Температура нагрева резиновых элементов шарниров имеет нелинейную зависимость от частоты и амплитуды нагружения, максимальная температура устанавливается на границе крепления резины к внутреннему металлическому цилиндру (рис. 2.11), при этом для большей толщины резинового элемента (ШРМ103) наблюдается значительная разница (до 20-22%) между температурами нагрева внутренних и наружных слоев резины.

Несколько иная картина наблюдается при исследовании температуры нагрева резинового элемента шарнира по его длине. На рис. 2.11,а показаны значения температуры нагрева для различных точек по длине резинового элемента  $l$  шарнира типа ШРМ103. Точки расположены по окружности шарнира с радиусом 0,041 м. Как видно, зависимость имеет примерно параболическую форму, однако разница между максимальной и минимальной температурой незначительна, что объясняется малой теплопроводностью резины. Для шарнира типа ШРМ103 (см. рис.2.11) распределение температуры по длине резинового элемента аналогично.

**Долговечность.** При циклическом нагружении шарниров наибольшая деформация шарнира наблюдается при коаксиальном скручивании, и этот вид деформации наиболее часто встречается в практике эксплуатации вибромашин, поэтому целесообразно определить и долговечность шарниров при этом же виде нагружения. При этом в качестве критерия выхода шарниров из строя считается время появления на поверхности резины видимых усталостных трещин.

Экспериментально установлено, что для частот и амплитуд, при которых работает большинство вибрационных машин, теплообразование в резиновых шарнирах не превышает допустимых норм. Приращение температуры в центральной точке резинового массива равно примерно (303-313) К, что значительно меньше допускаемого значения (350-360) К.

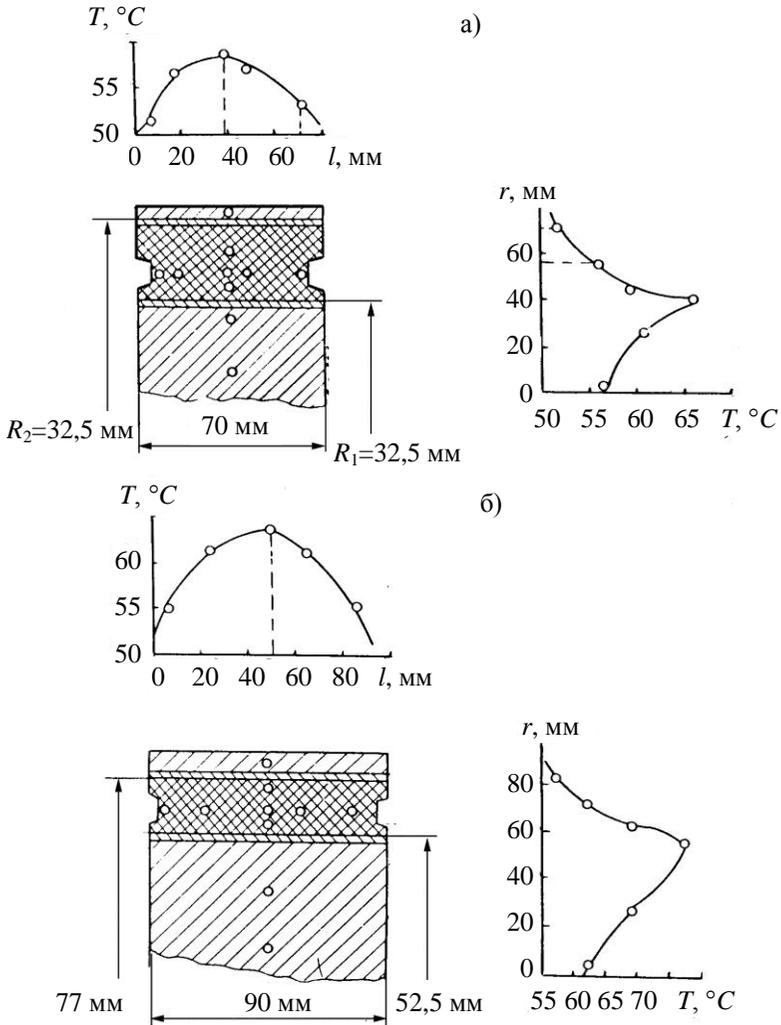


Рис. 2.11. Температурное поле в резиновых элементах шарниров типа ШРМ102 при  $\omega=13,5$  Гц;  $\gamma=0,18$  (а) и шарнира типа ШРМ103 при  $\omega=13,5$  Гц;  $\gamma=0,21$  (б);  $r$  – радиус

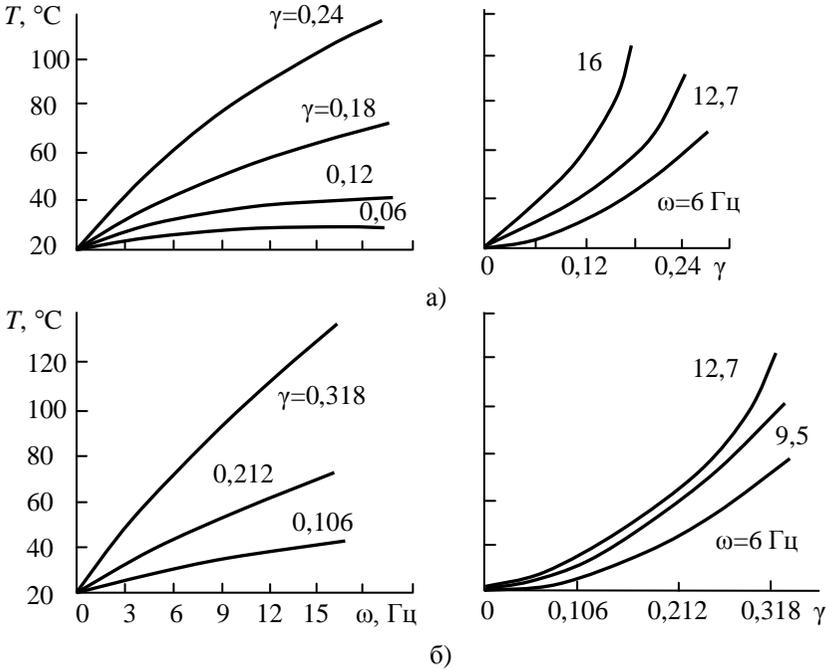


Рис. 2.12. Зависимости температуры нагрева резиновых элементов от режима нагружения для шарниров типа ШРМ102 (а) и ШРМ103 (б)

По аналогии с элементами сдвига количество циклов до локального разрушения центральной области резинового элемента шарниров можно представить в виде [13, 41]

$$N^* = \frac{\Delta U_p^* - \dot{\chi}}{\frac{1}{2} G_0 \gamma_0^2 \Psi - \frac{2\pi}{\omega} \dot{q}} ;$$

$$\dot{q} = \frac{4\lambda_p \theta(x, y, z)}{\left[ R_2^2 - r^2 + 2R_1^2 \ln(r/R_2) + 2(R_2^2 - R_1^2) \frac{\lambda_p}{\lambda_c} \left( \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\lambda_c}{R_3 H} \right) \right]} , \quad (2.40)$$

где  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности стали;  $r$  – текущее значение радиуса шарнира;  $R_1, R_2, R_3$  – радиусы резинового элемента и металлической арматуры;  $H$  – коэффициент теплоотдачи металл-воздух;  $\dot{\chi}$  – энергия немеханического воздействия.

Для учета изменений во времени физико-механических характеристик  $G$  и  $\psi$  необходимо воспользоваться зависимостями, полученными с учетом аппроксимации экспериментальных данных. Зависимость  $\psi \sim t$ , полученная для партии из 56 шарниров типа ШРМ102, показана на рис. 2.13.

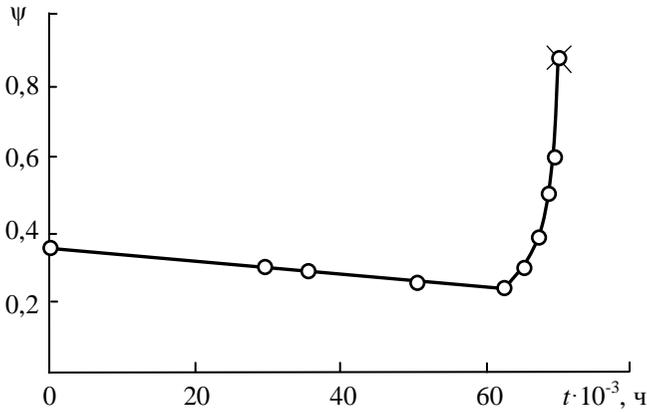


Рис. 2.13. Временные зависимости коэффициента диссипации

Для рассматриваемых шарниров энергия разрушения  $\Delta U_p^*$ , как и для элементов сдвига, не является постоянной величиной, а в некоторой степени зависит от температуры. На рис. 2.14 представлены результаты вычисленных по формуле (2.40) значений  $\Delta U_p^*$  при различных величинах  $\gamma_0$  и, следовательно, различных значениях температур диссипативного разогрева (табл. 2.12). Как видно, с увеличением относительного сдвига и температуры разогрева величина  $\Delta U_p^*$  линейно уменьшается.

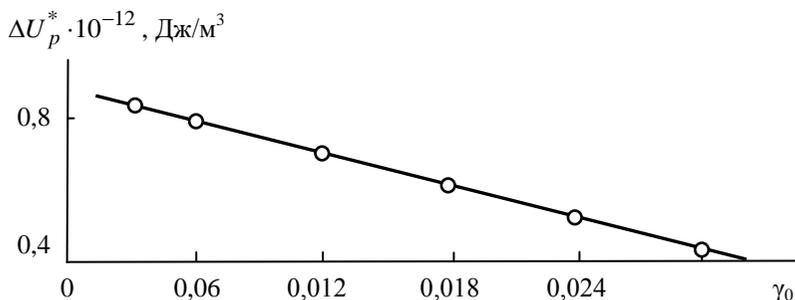


Рис. 2.14. Зависимость  $\Delta U_p^* \sim \gamma_0$  для шарниров типа ШРМ102 из резины 2959

Для инженерных расчетов величину  $\Delta U_p^*$  можно принимать постоянной, например, для резины 2959 равной  $0,6 \cdot 10^{12}$  Дж/м<sup>3</sup>. Найденные при этом значения долговечности до локального разрушения шарниров представлены в табл. 2.12 и, как видно, удовлетворительно совпадают с нижними уровнями долговечности, полученными при экспериментальном исследовании партии (из 300 образцов) натуральных элементов.

Таблица 2.12 –

Долговечность шарниров

$\gamma$	$\theta, ^\circ\text{C}$	Экспериментальная долговечность		Расчет по формуле (2.40), ч
		$t_{\min}^*$	$t_{\max}^*$	
0,03	2	70000	-	60000
0,06	5	12200	17100	13100
0,12	15	3500	6900	3100
0,18	36	870	2200	1400
0,24	70	400	900	800
0,30	120	250	500	550

**Резиновые элементы со сложной формой свободной поверхности.** Элементы со сложной формой свободной поверхности ВР [12,

13] являются конструктивным развитием полых цилиндров. С целью повышения устойчивости последних разработан параметрический ряд таких виброизоляторов [13], основные технические характеристики, общий вид и конструктивная схема которых приведены в табл. 2.13 и на рис. 2.15 соответственно.

Таблица 2.13 –

Резиновые виброизоляторы типа ВР

Тип вибро- изолятора	Номинальные размеры		Жесткость на сжатие, кН/м
	наружный диаметр $D_n$ , мм	высота $h$ , мм	
ВР-201	100	80	25-100
ВР-202	100	127	75-150
ВР-203	200	180	200-400
ВР-204	230	200	250-600
ВР-205	160	150	
ВР-103	120	148	150-350

**Статические расчеты элементов типа ВР.** Для определения НДС и параметров жесткости элементов со сложной формой свободной поверхности точные аналитические методы не применимы из-за непреодолимых в настоящее время трудностей в решении нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных при решении краевых задач термовязкоупругости. Используются численные методы, основным из которых является метод конечных элементов (МКЭ) [16, 34]. Конкретная постановка и решение задач термовязкоупругости с его использованием даны в [4, 15, 20-22, 30, 32, 33, 35, 48, 50, 61]. Результаты расчета НДС позволяют определить жесткость на сжатие элементов типа ВР в соответствии с формулами (2.7), (2.9), которые в этом случае имеют вид

$$C = \beta_n \frac{E\pi(R_0^2 - r_0^2)}{h}, \quad (2.41)$$

где  $\beta_n = 2 \int_{r_0}^{R_0} r \sigma_z(r, h) dr / [(R_0^2 - r_0^2)(\alpha_0 / h)E]$ ;  $R_0$  и  $r_0$  – наружный и внутренний радиусы сечения виброизолятора, принятого за отсчетное (площадь приложения нагрузки, среднее сечение или произвольное другое);  $\alpha_0$  – заданное смещение торца виброизолятора;  $h$  – высота виброизолятора;  $r, z$  – радиальная и осевая координаты;  $\sigma_z$  – нормальное напряжение.

Расчетные значения параметра  $\beta_n$  при малых деформациях сжатия (до 10%, рис. 2.16) являются постоянными величинами. В табл. 2.14 приведены отнесенные к среднему сечению значения коэффициента жесткости  $\beta_n$  и значения жесткости  $C$  для каждого из исследуемых элементов, определенные по формуле (2.41).

Таблица 2.14 –

Значения жесткостных параметров

Тип ВР	$R_0$ , м	$r_0$ , м	$h$ , м	$\beta_n$	$C_1$ , кН/м	$C_2$ , кН/м
ВР-201	0,050	0,038	0,080	0,47	29,2	79,1
ВР-203	1,100	0,065	0,180	0,91	137,5	330,0
ВР-204	0,115	0,076	0,200	0,86	150,9	362,1
ВР-205	0,080	0,055	0,150	0,83	88,0	211,0
ВР-101	0,060	0,036	0,148	0,87	63,8	153,2

Значения  $C_1$  соответствуют слабонаполненной резине на основе синтетического каучука СКИ-3 типа 51-1562 ( $E_1=1,5$  МПа);  $C_2$  – средненаполненной резине на основе натурального каучука типа 2959 ( $E_2=3,6$  МПа). Расчетные данные хорошо согласуются с опытными.

**Теплообразование.** Определение температур диссипативного разогрева в резиновых элементах типа ВР выполняется в соответствии с методикой, изложенной в разделе 2.1. При этом осредненная за цикл диссипативная функция  $D'$  определяется зависимостью (2.11).

Алгоритм численного решения задачи теплопроводности для элементов со сложной формой свободной поверхности типа ВР строится на основе решений [54], использующих в качестве основного ме-

тогда – метод конечных элементов в сочетании с методом пошагового интегрирования.

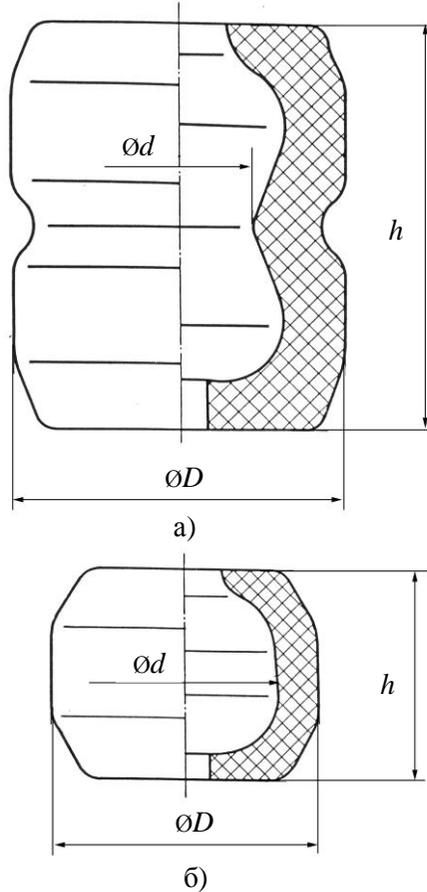


Рис. 2.15. Схема виброизоляторов ВР-100(а) и ВР-200(б)

Результаты выполненных расчетов поля температур для элементов ВР201 приведены на рис. 2.17. Экспериментальное распределение полей температур приведено на рис. 2.18 [20].

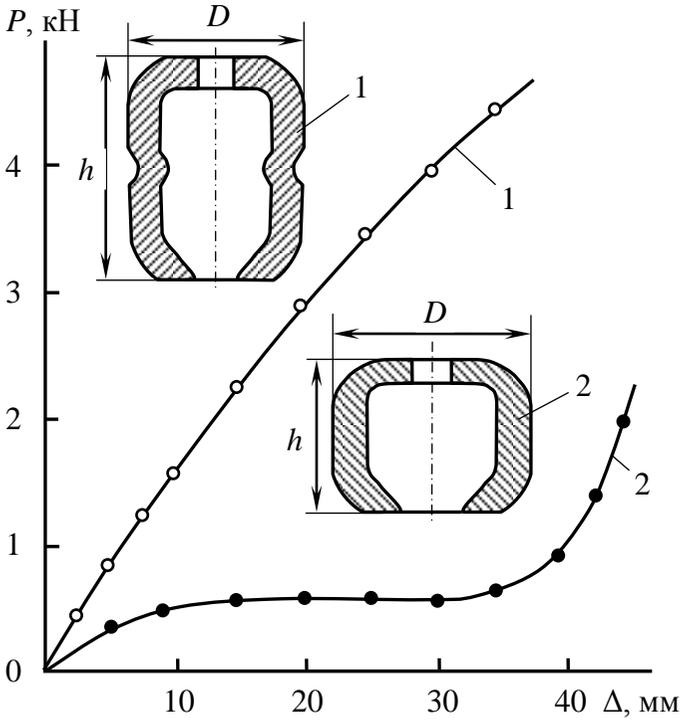


Рис. 2.16. Зависимость силы от перемещения для элементов из резины 51-1714: 1 – ВР103; 2 – ВР201

Исследование распределения полей температур диссипативного разогрева в виброизоляторах показывает, что максимальные их значения устанавливаются в центральных областях и могут быть аппроксимированы следующей формулой

$$T_{\max}^* = T_0 + k'' G \psi \omega a_0^2, \quad (2.42)$$

где  $T_0$  – температура окружающей среды;  $k''$  – коэффициент, зависящий от типа резины и условий теплообмена с окружающей средой (табл. 2.15);  $\psi$  – коэффициент диссипации энергии;  $\omega$  – частота циклического нагружения;  $a$  – амплитуда колебаний ( $a(t) = a_0 \sin \omega t$ ).

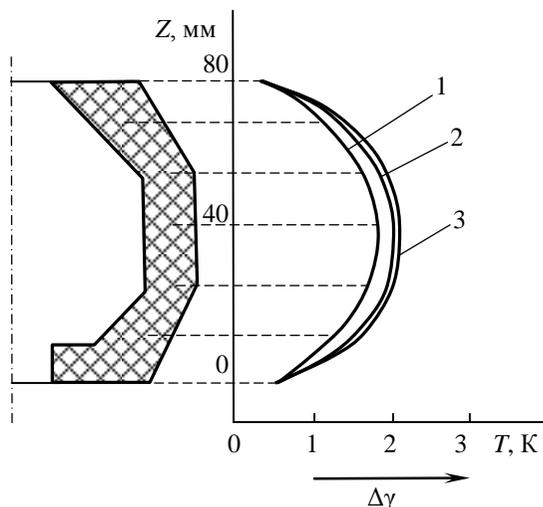


Рис. 2.17. Распределение поля температур в виброизоляторе ВР201: 1 –  $t=500$  с; 2 –  $t=1000$  с; 3 –  $t=1500$  с

Таблица 2.15 –

Значения коэффициента  $k''$

Тип ВР	Тип резины	$k''$ , °C/(Па·м <sup>2</sup> ·с <sup>-1</sup> )
ВР-201	51-1562	0,02670
	2959	0,02160
ВР-203	51-1562	0,04818
	2959	0,03614
ВР-204	51-1562	0,04510
	2959	0,03350
ВР-205	51-1562	0,03880
	2959	0,03014
ВР-101	51-1562	0,03670
	2959	0,02860

В таблице 2.16 приводятся значения максимальных температур, установившихся в виброизоляторах, при следующем режиме эксплуа-

талии: частота нагружения  $\omega=94 \text{ с}^{-1}$ , амплитуда нагружения  $a_0=0,003 \text{ м}$ ; температура окружающей среды  $T_0=20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

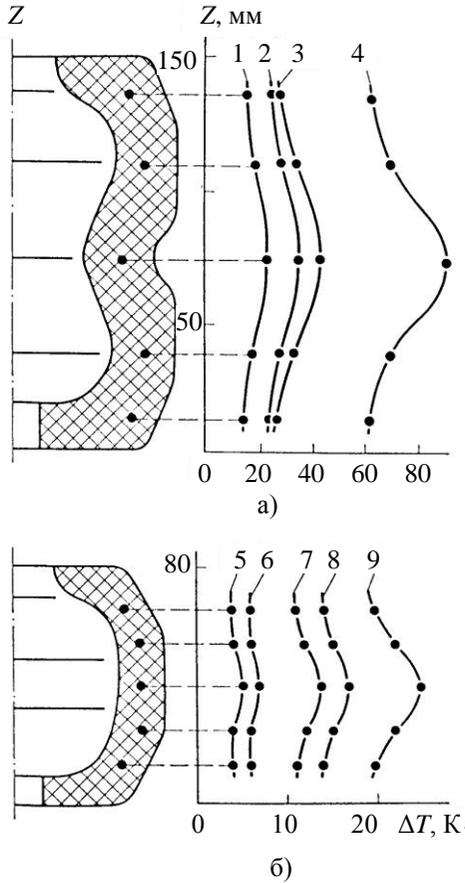


Рис. 2.18. Распределение полей температур в элементах BP103 (а) и BP201 (б) из резины 51-1714:  
 1, 7 –  $A=3 \text{ мм}$ ;  $\omega=3,3 \text{ Гц}$ ; 2, 8 –  $A=3 \text{ мм}$ ;  $\omega=20 \text{ Гц}$ ;  
 3, 9 –  $A=5 \text{ мм}$ ;  $\omega=13,3 \text{ Гц}$ ; 4 –  $A=10 \text{ мм}$ ;  $\omega=13,3 \text{ Гц}$ ;  
 5 –  $A=1,5 \text{ мм}$ ;  $\omega=13,3 \text{ Гц}$ ; 6 –  $A=1,5 \text{ мм}$ ;  $\omega=20 \text{ Гц}$

Значения  $T_{\max}^*$  получены по формуле (2.42), значения  $T_{\max}^{**}$  рассчитаны методом конечных элементов [50].

Анализ установившихся температур в рассмотренных типах виброизоляторов показывает, что для них выполняется условие [30]

$$T_{\max}^* < T_{\text{доп}},$$

где  $T_{\text{доп}}$  – допускаемое значение рабочих температур, которое в соответствии с [12, 13] составляет  $T_{\text{доп}} \approx 60\text{-}70^\circ\text{C}$ . Это условие исключает возможность термомеханического разрушения виброизоляторов и обеспечивает их длительную работу в предположении, что предварительное поджатие не превышает 10-15%.

**Долговечность ВР.** Оценка локальной долговечности резиновых виброизоляторов типа ВР производится в соответствии с общим алгоритмом расчета, при этом используется энергетический  $\psi$ -критерий диссипативного типа [12], конкретизация которого для расчета долговечности параметрического ряда элементов типа ВР выполнена в [31]. В соответствии с [31] время до разрушения любого локального объема резинового массива  $t^*$  определится выражением (2.21).

Таблица 2.16 –

Значения максимальных температур

Тип ВР	Тип резины	$T_{\max}^*$ , °C	$T_{\max}^{**}$ , °C
ВР-201	51-1562	22,8	22,846
	2959	29,0	29,035
ВР-203	51-1562	25,1	25,142
	2959	35,1	35,110
ВР-204	51-1562	24,8	24,814
	2959	34,0	34,023
ВР-205	51-1562	24,1	24,144
	2959	32,6	32,603

Значения критериальной величины  $\Delta U_g^*$ , полученные в результате экспериментальных исследований для резин 2959 и 51-1562 [41], соответственно равны  $\Delta U_g^* - 1,15 \times 10^{12}$  и  $4,48 \times 10^{12}$  Дж/м<sup>3</sup>.

В случае температурной зависимости  $\Delta U_g^*$  необходимо использовать соотношение (2.22).

Долговечность резиновых элементов типа ВР можно определять в точках с максимальной температурой диссипативного разогрева, предварительно вычислив в этих же точках значение диссипативной функции.

В табл. 2.17 приведены значения долговечности виброизоляторов типа ВР с учетом значений максимальных установившихся температур  $T_{\max}^*$  при режиме нагружения:  $a_0=0,003$  м;  $\omega=94$  с<sup>-1</sup> [50].

Таблица 2.17 –

Значения  $t^*$  виброизоляторов типа ВР с учетом температур

Тип ВР	$D$ , Дж/м <sup>3</sup>	$T_{\max}^*$ , °С	$t^*$ , ч
ВР-201	13859	29,035	19722
ВР-204	4120	34,023	59872
ВР-205	6281	32,603	40415

### 2.3. Рекомендации для инженерных расчетов

**Параметрические ряды рекомендуемых силовых РТИ. Блоки резинометаллические (БРМ) и резиновые (БР).** Конструктивное оформление разработанных резинометаллических блоков типа БРМ и резиновых типа БР представлено на рис. 2.19 и рис. 2.20 соответственно. Блоки типа БРМ стандартизованы и для параметрического ряда из шести типоразмеров разработан ГОСТ 95.609-86 «Блоки резинометаллические. Конструкция и размеры» [38]. В табл. 2.18 и табл. 2.19 представлены основные параметры элементов БРМ. Характеристики блоков БР сведены в табл. 2.20.

Таблица 2.18 –  
Основные параметры блоков типа БРМ

Параметры элемента, м	Условное наименование элемента					
	БРМ- 101	БРМ- 102	БРМ- 103	БРМ- 104	БРМ- 202	БРМ- 203
$L$	0,180	0,280	0,400	0,420	0,280	0,400
$B$	0,060	0,100	0,100	0,120	0,100	0,100
$H$	0,045	0,060	0,060	0,060	0,040	0,040
$l$	0,100	0,200	0,320	0,400	0,200	0,320
$h$	0,035	0,050	0,050	0,050	0,030	0,030
$b$	0,035	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
$l_l$	0,140	0,240	0,360	0,440	0,240	0,360
$\Delta_1$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

Таблица 2.19 –  
Жесткость БРМ и допустимые параметры вибрации

Тип блока	Номинальная жесткость при сдвиге, кН/м	Номинальная жесткость при сжатии, кН/м	Частота ко- лебаний, Гц (кол/мин), не более	Амплитуда при сдвиге, мм, не более
БРМ-101	110	600	11,7 (770)	10
БРМ-102	250	1500		12
БРМ-103	420	2500		
БРМ-104	640	3800	25 (1500)	7
БРМ-202	445	2670		
БРМ-203	710	4250		

Изготовление БРМ рекомендуется производить по ТУ 105 1325-79 из резины 51-1562. Серийное производство таких элементов освоено Свердловским заводом РТИ согласно технологическому регламенту ТР № 51-300130, разработанному НИИРП (Москва).

90% ресурс наработки блоков типа БРМ из резины 51-1562 при параметрах нагружения (для БРМ-101 относительный сдвиг 0,15-0,30; частота 10-25 Гц; для других блоков параметрического ряда табл. 2.20 – относительный сдвиг 0,15-0,24 и частота 10-25 Гц) согласно [12] со-

ставляет 15000 ч. На практике наработка блоков значительно больше, например, блоки из резины 51-1562 при относительном сдвиге 0,33 и частоте нагружения 10-12 Гц имели наработку до отказа свыше 25-40 тыс.ч.

Таблица 2.20. –

Характеристики блоков типа БР

Параметры блоков	Типоразмеры блоков	
	БР-202	БР-203
Размеры, м:		
$L$	0,200	0,320
$B$	0,100	0,100
$H$	0,030	0,030
Жесткость, кН/м	450	710
Масса, кг	0,600	1,00

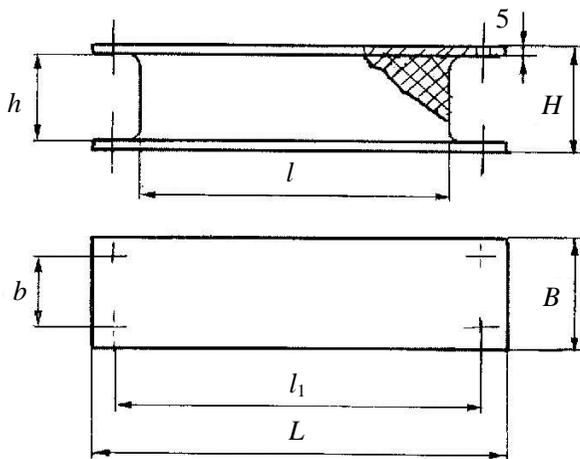


Рис. 2.19. Резинометаллический блок БРМ

В табл. 2.21 приведены значения допустимых напряжений и деформаций, полученные экспериментально из условий разрушения элементов типа БРМ при наиболее характерных для практики режимах

эксплуатации вибромашин: амплитуде 10-12 мм, частоте 12-13 Гц, температуре окружающей среды 20 °С.

Таблица 2.21 –

Значения допускаемых деформаций и напряжений

Резина	Твердость по ТМ-2	Модуль сдвига, МПа	Допускаемое напряжение сдвига, МПа	Допускаемая деформация сдвига, %	Допускаемое напряжение сжатия, МПа	Допускаемая деформация сжатия, %
2959	45-60	1,5-1,7	0,25	15	0,4	5-10
1224	45-60	1,0-1,3	0,25	15	0,3	5-10
51-1562	40-45	0,6-0,85	0,20	35	0,3	10-15

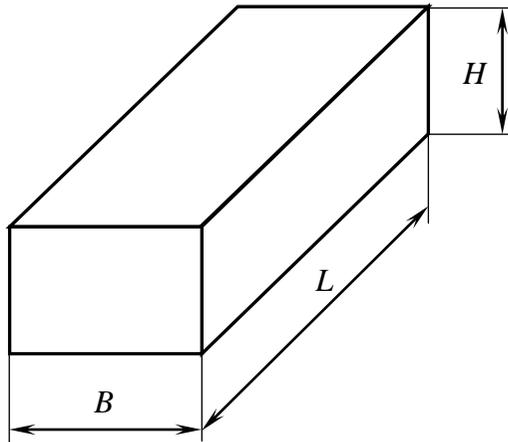


Рис. 2.20. Резиновый блок БР

При увеличении частоты колебаний допускаемое значение амплитуды деформации элемента соответственно снижается. Так, при частоте 25 Гц блоки из резины 51-1562 сохраняют длительную работоспособность только при амплитуде до 5-6 мм. Данные, приведенные в табл. 2.21, рекомендуется использовать при расчетах и БРМ, прогно-

зировании долговечности аналогичных элементов, работающих при идентичных режимах нагружения. При этом необходимо учитывать не только режим нагружения, но и температуру окружающей среды, длительность эксплуатации, массивность изделий, температуру их диссипативного разогрева.

Практически важными в этом случае являются режимы интенсивного и умеренно интенсивного нагружения резиновых элементов (табл. 2.22, 2.23).

В случае интенсивного режима нагружения при кратковременной работе машин температура разогрева в наиболее опасных областях элементов превышает критическую температуру для рассматриваемых резин  $T_{кр} \leq (353-363)$  К и может достигать (380-400) К. В таком режиме работают некоторые типы питателей на выпуске руды; продолжительность их работы может составлять 2-3 мин., а перерыв между включениями 10-15 мин. В этом случае можно допускать кратковременный перегрев резиновых элементов. Как результат этого, можно назначать и более высокие значения напряжений и деформаций. Следует подчеркнуть, что при интенсивных стационарных режимах нагружения (см. табл. 2.23) долговечность до отказа резинового элемента составляет 10-14 ч.

Таблица 2.22 – Допускаемые значения напряжений и деформаций для резиновых элементов вибромашин при сжатии

Тип резины	При статическом нагружении		Режим длительного циклического нагружения $t^* > 5000$ ч, $T < T_{кр}$	
	$\sigma$ , МПа	$\epsilon$	$\sigma$ , МПа	$\epsilon$
2959	0,9-1,1	15-20	0,4	5-10
1224	0,7-0,8	15-20	0,3	5-10
67Л, 59Л, 289, 169, 310	0,9	25-30	0,4	10-15
51-1562	0,8	30-40	0,3	10-15

Таблица 2.23 –  
Допускаемые значения напряжений и деформация для резиновых де-  
талей вибромашин при циклическом сдвиге

Тип ре- зины	Интенсивный режим $t^* = 1-10$ ч; $T \geq 380-400$ К		Умеренно- интенсивный режим $t^* = 500-$ $1000$ ч; $T \geq 353-363$ К		Режим длительной эксплуатации $t^* = (10-40) \cdot 10^3$ ч; $T \geq 353$ К	
	$\tau$ , МПа	$\gamma$	$\tau$ , МПа	$\gamma$	$\tau$ , МПа	$\gamma$
2959	0,35	0,20	0,25	0,15	0,15	0,10
1224	0,30	0,25	0,25	0,20	0,20	0,15
4 <sub>3</sub>	0,45	0,30	0,35	0,25	0,30	0,20
67Л, 59Л, 28Э, 169, 310	0,45	0,30	0,40		0,25	0,20
51-1562	0,30	0,40	0,25	0,35	0,20	0,25-0,35

При эпизодическом непродолжительном нагружении и последующем охлаждении долговечность элементов существенно возрастет и достигает 1000-3000 ч и более.

При умеренно интенсивном режиме резиновые детали машин испытывают разогрев, близкий или незначительно превышающий критическое значение  $T_{кр}$ . Эти режимы характерны для вибромашин, работающих в стационарном режиме нагружения непродолжительное время (500-1000 ч). Так, например, у вибрационных питателей для выпуска руды при установке их в блоки с небольшим запасом руды для повышения производительности в некоторых случаях увеличивают амплитуду колебаний. В результате этого долговечность резиновых деталей резко уменьшается. Обычно подбираются такие параметры нагружения, чтобы срок службы до отказа совпадал с окончанием технологической операции.

При усталостном разрушении элементов, наиболее характерном для резиновых элементов при режиме длительного циклического нагружения, температура разогрева  $T$  значительно ниже критического

уровня  $T_{кр}$  ( $T < T_{кр}$ ). Допустимые значения напряжения  $\tau$  и деформаций при таком режиме нагружения приведены в табл. 2.23, долговечность элементов при этом составляет  $(10-40) \cdot 10^3$  ч.

**Шарниры резинометаллические типа ШРМ.** Конструкция шарниров типа ШРМ представлена на рис. 2.21.

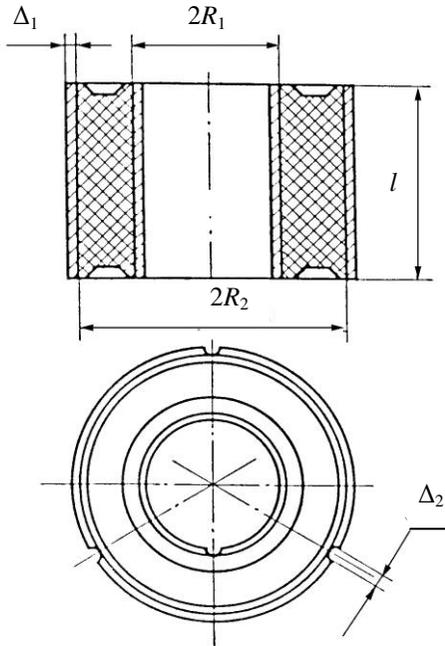


Рис. 2.21. Резинометаллический шарнир ШРМ

Шарниры такого типа стандартизованы и для трех типоразмеров разработок ОСТ 95.465-84 «Шарниры резинометаллические. Конструкция и размеры. Технические требования» [37]. Рекомендуемый параметрический ряд таких шарниров приведен в табл. 2.24, а основные их эксплуатационные параметры в табл. 2.25.

В вибрационных машинах шарниры, как правило, выполняют функции элементов межсекционных упругих связей, позволяют созда-

вать компактные узлы подвесок, а также устраняют шумы и вибрацию, позволяют компенсировать перекосы деталей и неточности их сборки.

Таблица 2.24 –

Параметрический ряд шарниров

Параметр (рис. 2.21)	Условное обозначение шарнира		
	ШРМ101	ШРМ102	ШРМ103
$R_1$	0,0200	0,0325	0,0525
$R_2$	0,0340	0,0510	0,0770
$l$	0,0500	0,0700	0,0900
$\Delta_1$	0,0025	0,0025	0,0025
$\Delta_2$	0,0030	0,0030	0,0030

При работе ШРМ испытывают деформацию сжатия от веса рабочего органа вибромашины и коаксиального скручивания. Они могут использоваться в качестве упругих элементов приводных устройств, при этом необходимо учитывать еще и радиальную жесткость резинового элемента.

При использовании резинометаллических шарниров в качестве виброизоляторов и элементов сдвига осевая жесткость составляет для шарнира ШРМ101 – 1000 кН/м; для ШРМ102 – 1550 кН/м; для ШРМ103 – 2200 кН/м.

Таблица 2.25 –

Основные эксплуатационные параметры шарниров

Условное обозначение шарнира	Крутильная жесткость, кН·м/рад	Допускаемый угол закручивания, рад	Допускаемая радиальная статическая нагрузка, кН	Масса, кг
ШРМ101	0,4	0,056	1,5	0,45
ШРМ102	2,0	0,044	4,0	1,00
ШРМ103	8,0	0,032	10,0	2,90

До последнего времени шарниры изготавливались промышленностью из резины 2959, выполненной на основе натурального каучука. В настоящее время, в связи с имеющей место тенденцией замены

натурального каучука на искусственный, для изготовления шарниров рекомендуется резина марки 51-1714 на основе СКИ-3. Серийное изготовление параметрического ряда ШРМ освоено Ярославским заводом РТИ. 90%-ый ресурс ШРМ составляет 60000 ч. Гарантийный срок хранения – 12 месяцев с момента изготовления.

**Виброизоляторы резиновые со сложной формой свободной поверхности типа ВР.** Виброизоляторы такой формы предназначены для использования в вибрационной технике для виброизоляции машин, а также в качестве упругих связей резонансных вибромашин. Особенностью таких элементов является малая поперечная жесткость, что весьма существенно при бесфундаментной установке оборудования. Конструкции разработанных элементов типа ВР представлены на рис.2.15. Элементы такого типа стандартизованы и для двух типоразмеров виброизоляторов ВР-100 и ВР-200 разработан ОСТ 95.10196-86 «Виброизоляторы резиновые. Конструкции и размеры» [36]. Рекомендуемый параметрический ряд таких виброизоляторов представлен в табл. 2.13.

Для изготовления элементов типа ВР [36] рекомендуется использовать резину марки 51-1562 ТУ 105 1325-79. В настоящее время используются также резины 51-1711 и 51-1714, а также средненаполненные резины, аналогичные по свойствам резине 2959.

**Приближенные формулы, рекомендуемые для определения теплообразования силовых РТИ.** Для оценки максимальной температуры диссипативного разогрева рассматриваемых силовых РТИ рекомендуются следующие простые аналитические выражения: для сплошных элементов типа БРМ и цилиндрических РТИ (сдвиг и сжатие)

$$\theta_{\max} = \frac{\omega \psi C \Delta^2}{4\pi V} \left( 0,5 + \frac{1}{hH_2} \right),$$

для элементов типа ВР (2.42)

$$\theta_{\max} = k'' \psi G \omega a_0^2,$$

где  $k''$  приведены в табл. 2.15;  $\theta_{\max} = T_{\max}^* - T_0$ .

Для элементов типа БРМ и цилиндров при неизменных коэффициентах теплообмена  $H_1$  и  $H_2$ , но в разных условиях нагружения ( $G_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ ) и марках резин ( $\lambda_1$ ) максимальное значение приращения температур можно получать пересчетом по формуле

$$\theta_1 = \theta \frac{G_1 \omega_1 \psi_1 \varepsilon_1^2 \lambda}{G \omega \psi \varepsilon \lambda_1},$$

где  $\theta_1$  – приращение температуры диссипативного разогрева в искомом варианте;  $\theta$  – приращение температуры в известном варианте;  $\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{h}$  – относительная деформация;  $\lambda$  и  $\lambda_1$  – коэффициенты теплопроводности резин в исходном и искомом вариантах соответственно.

Для указанных элементов кроме приближенных формул рекомендуется использовать и номограммы [42, 43].

**Прогнозирование долговечности силовых РТИ по инженерным критериям разрушения.** Для прогнозирования долговечности натуральных резиновых элементов рекомендуется использовать односторонние оценки долговечности по допускаемым значениям температур, напряжений и деформаций, которые наиболее полно характеризуют работу РТИ при заданных условиях нагружения.

**Прогнозирование долговечности РТИ по допускаемым значениям температуры диссипативного разогрева.** При использовании этого критерия температура диссипативного разогрева в наиболее опасной точке элемента сравнивается с допускаемым значением температуры нагрева, характерным для рассматриваемого типа резины и определяемым экспериментально. Длительным экспериментированием установлено, что при  $T < T_{\max}$  долговечность резиновых элементов будет больше некоторого значения, в ряде случаев удовлетворяющего инженерную практику.

В этом случае прогнозирование долговечности элементов можно производить на основании условия

$$T_{\max} \leq [T_{\text{дон}}],$$

где  $T_{\max}$  – максимальное значение температуры разогрева РТИ;  $T_{\text{дон}}$  – некоторая допустимая температура, определяемая экспериментально.

Для рассматриваемых БРМ из исследуемых марок резин на основе НК и СКИ-3  $T_{дон}=80-90^{\circ}\text{C}$ . Выше температур  $T_{кр} \geq 140^{\circ}\text{C}$  долговечность детали незначительна.

Таким образом, располагая определенной экспериментальной информацией о сроках службы натуральных РТИ, можно назначать такие допускаемые значения температур саморазогрева, при которых конструкция будет работать не меньше некоторого, определяемого практикой времени, т.е. можно задавать такие физико-механические свойства резины, геометрические параметры элементов и режим нагружения, которые в совокупности обеспечивали бы выполнение условия  $T_{\max} \leq [T_{дон}]$ .

В этом случае задача сводится к исследованию стационарного уравнения теплопроводности при независимости реологических параметров резины от температуры. Для элемента сдвига, в частности, можно рассматривать уравнение типа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \xi \Phi(x, y, z) = 0; \quad \xi = \frac{G_0 \omega \psi A^2 \beta_1}{8\pi \lambda_p},$$

где  $\Phi(x, y, z)$  – координатная часть диссипативной функции;  $\beta_1$  – коэффициент, показывающий, какая часть энергии переходит в тепловую (в данном случае принимаем  $\beta_1=1$ );  $\xi$  – параметр, характеризующий интенсивность тепловыделения.

Результаты решения позволяют определять зависимость параметра  $\xi$  от температуры. Исследования показали, что в пределах погрешности эксперимента для исследуемых элементов сдвига типа БРМ (БРМ101, БРМ102, БРМ103) из резины 51-1562 эта зависимость одна и та же.

Используя этот прием для определенного класса эластомерных конструкций, характеризующегося общими признаками геометрии, размеров и свободным теплообменом с внешней средой, определение допускаемой температуры можно свести к расчету некоторого допускаемого значения параметра  $\xi$ . В этом случае условие можно записать в виде [30]

$$\xi \leq \xi_{кр},$$

где  $\xi_{кр}$  – допускаемое или критическое значение параметра, соответствующее критической температуре.

Рассматриваемый метод прогнозирования долговечности позволяет выбирать нагружения резиновых элементов и значения реологических и теплофизических характеристик резины, соответствующих заданной долговечности (в этом случае используют условие  $\xi = \xi_{кр}$  и выражение для  $\xi$ ), а также определять допускаемые значения напряжений и деформаций, которые при фиксированных параметрах нагружения обеспечивают выполнение условий  $\xi \leq \xi_{кр}$  или  $T \leq T_{кр}$ .

Ранее была рассмотрена зависимость между долговечностью до отказа элементов сдвига типа БРМ и установившимися значениями температуры их диссипативного разогрева (рис. 2.5). При наличии таких экспериментальных кривых температурное прогнозирование долговечности не составляет особых затруднений. Однако в случае изменения режима нагружения, например, частоты, эти зависимости уже непригодны. Получение их связано с большим объемом экспериментальных работ и с многолетними трудоемкими исследованиями. Теоретически рассчитать долговечность резиновых элементов только по температуре их диссипативного саморазогрева не представляется возможным.

**Прогнозирование долговечности по допускаемым значениям напряжений и деформаций.** Прогнозирование долговечности по допустимым напряжениям и деформациям сводится к определению по известным формулам напряжений  $\sigma$ ,  $\tau$  и деформаций  $\epsilon$ ,  $\gamma$  для элементов с общими признаками геометрии, размеров и свободным теплообменом, сравнению с допускаемыми значениями напряжений и деформаций, полученными экспериментально из условий разрушения данного типа элементов и обеспечивающими указанный уровень долговечности. Для элементов типа БРМ допускаемые значения напряжений и деформаций представлены в табл. 2.23-2.25 для рекомендуемых марок резин.

В случае превышения допускаемых значений напряжения и деформации необходимо изменить марку резины или геометрические размеры элемента.

Позволяя просто и наглядно назначать режимы эксплуатации резиновых элементов и прогнозировать их долговечность, этот метод пригоден в узком диапазоне изменения режима нагружения и температуры (при других режимах нагружения и разработке новых конструкций, особенно из новых марок резин, допускаемые значения напряжений и деформаций следует определять заново). Поэтому данный метод рекомендуется использовать в сочетании с аналитическими расчетами долговечности.

Пересчет значений долговечности от любого известного варианта к искомому производится по формулам типа

$$t_1^* = t_2^* k',$$

где  $t_1^*$  – искомая величина локальной долговечности элемента, выполненного из резины с известными параметрами  $\Delta U_{g1}^*$ ,  $\psi_1$ ,  $G_1$ , при заданных значениях частоты и относительной деформации  $\varepsilon_1 = \Delta_1/h$ ;  $t_2^*$ ,  $\Delta U_{g2}^*$ ,  $\psi_2$ ,  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_2$  – параметры, соответствующие исходному варианту;

$$k' = \frac{\Delta U_{g1}^* \omega_2 G_2 \psi_2 \varepsilon_2^2}{\Delta U_{g2}^* \omega_1 G_1 \psi_1 \varepsilon_1^2}.$$

### *Литература к главе 2*

1. Бартенев Г. М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичности деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – Т. 2, № 1. – С. 20-28.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. – 1981. – 509 с.
3. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.

4. Горелик Б.М. Цилиндрические резинометаллические амортизаторы: Обзор // Производство резинотехнических и асбестотехнических изделий. – М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1989. – № 1. – 68 с.
5. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
6. Губанов В.В. Прогнозирование срока службы резинотехнических изделий, работающих при циклических деформациях // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1982. – Вып. 40. – С. 21-33.
7. Гузь А.М. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наукова думка, 1973. – 270 с.
8. Дымников С.И. Об одном приближенном методе решения задач теории упругости для несжимаемого материала // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1967. – Вып. 15. – С. 42.
9. Дымников С.И. Расчет резинометаллических шарниров // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1974. – Вып. 29. – С.153.
10. Дырда В.И., Мажаров М.В. Термодинамические аспекты механики разрушения / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1986. – 15 с. – Библиогр. 10 назв. – Деп. в ВИНТИ 23.09.86, № 6827-86.
11. Дырда В.И., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Расчет силовых резинотехнических изделий в горном машиностроении. – М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1991. – 62 с.
12. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – К.: Наукова думка, 1988. – 232 с.
13. Дырда В.И. Резиновые элементы вибрационных машин. – К.: Наукова думка, 1980. – 100 с.
14. Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е., Мазнецова А.В. Расчет полей температур в резиновых конструкциях с учетом изменяющегося коэффициента диссипации / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1976. – 11 с. – Деп. в ВИНТИ № 2310-76.
15. Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е., Чижик Е.Ф. Реология упруго-последственных сред // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Полиграфист, 1999. – Вып. 11. – С. 257-347.
16. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
17. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, Вып. 5. – С. 849-852.

18. Ильюшин А.А., Победри Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
19. Исследование напряженно-деформированного состояния и расчет жесткости резинометаллических виброизоляторов при деформациях сдвига / И.К. Сенченков, В.И. Дырда и др.; АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1989. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 29.05.89, №3543-В89.
20. Исследование термомеханического поведения эластомерных конструкций, имеющих форму тел вращения / В.И. Дырда, В.И. Козлов и др.; АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1987. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 3.08.87, № 5548-В87.
21. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наукова думка. 2002. – 655 с.
22. Козлов В.И., Карнаухов В.Г. Конечноеэлементный метод исследования термомеханического поведения вязкоупругих тел при циклическом нагружении // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 11. – С. 40-45.
23. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
24. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
25. Лавендел Э.Э. Расчет цилиндрических резинометаллических амортизаторов сжатия // Изв. АН Латв. ССРС. – 1960. – № 4. – С. 153.
26. Лавендел Э.Э., Санкин Б.А. Расчет температурного поля при кинетическом возбуждении амортизатора // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1969. – Вып. 19. – С. 84-89.
27. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 945 с.
28. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
29. Ляпунов В.Г., Лавендел Э.Э., Шляпочников С.А. Резиновые виброизоляторы: Справочник. – Л.: Судостроение, 1988. – 216 с.
30. Мазнецова А.В. Использование температурного критерия при оценке долговечности резиновых деталей / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1978. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 14.01.78, № 389-78.
31. Мазнецова А.В. Прогнозирование локальной долговечности резинометаллических элементов горных машин / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1987. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 24.04.87, № 2954.

32. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. – К.: Наукова думка, 2005. – 416 с.
33. Некоторые аспекты повышения безопасности и надежности машин и сооружений / Н.С. Сургай, В.И. Дырда, А.В. Мазнецова, Т.Е. Твердохлеб // Труды 2 Международного симпозиума по механике эластомеров, Днепрпетровск, 23-26 июня 1997. – Днепрпетровск: Полиграфист, 1998. – Т. 2. – С. 349-394.
34. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
35. Определение показателей надежности эластомерных элементов машин / В.И. Дырда, Т.Е. Твердохлеб и др. // Труды 2 Международного симпозиума по механике эластомеров, Днепрпетровск, 23-26 июня 1997. – Днепрпетровск: Полиграфист, 1997. – Т.1. – С. 235-296.
36. ОСТ 95.10196-86. Виброизоляторы резиновые. Конструкция и размеры. – Введ. 01.01.87. – 7 с.
37. ОСТ 95.465-84. Шарниры резинометаллические. Конструкции и размеры. Технические требования. – Взамен ОСТ 95.465-76; Введ. 01.01.85. – 8 с.
38. ОСТ 95.609-86. Блоки резинометаллические. Конструкция и размеры. – Взамен ОСТ 95.609-78; Введ. 01.01.87. – 6 с.
39. Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Мазнецова А.В., Сенченков И.К. Исследование вибрационного разогрева прямоугольной вязкоупругой призмы при циклическом сдвиге // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 57-61.
40. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – К.: Наукова думка, 1975. – 214 с.
41. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – К.: Наукова думка, 1980. – 260 с.
42. Потураев В.Н., Дырда В.И., Надутый В.П. Резина в горном деле. – М.: Недра, 1974. – 152 с.
43. Потураев В.Н., Дырда В.И. Резиновые детали машин. – М.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
44. Потураев В.Н., Дырда В.И., Санкин В.А. Методики расчета диссипативного разогрева резиновых амортизаторов горных машин / АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепрпетровск, 1973. – 26 с. – Библиогр. 5 назв. – Деп. в ВИНТИ 29.11.73, № 74386-73.

45. Потураев В.Н., Дырда В.И., Санкин В.А. О теплообразовании в резиновых призматических элементах при циклических деформациях сжатия и сдвига // Каучук и резина. – 1973. – № 9. – С. 41-44.
46. Потураев В.Н. Резиновые и резинOMETаллические детали машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 300 с.
47. Потураев В.Н., Санкин В.А., Дырда В.И. О теплообразовании в резинOMETаллических шарнирах при многократном циклическом нагружении // Каучук и резина. – 1972. – № 12. – С. 36-39.
48. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С.И. Дымников, Э.Э. Лавендел, А.-М.А. Павловскис, М.И. Сниегс / Под ред. Э.Э. Лавендела. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
49. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
50. Расчет параметров резиновых виброизоляторов со сложной формой свободной поверхности / В.И. Дырда, В.И. Козлов и др.; АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1990. – 14 с. – Деп. в ВИНТИ 03.08.90, № 4477-В90.
51. Расчет слоистых резинOMETаллических виброизоляторов / В.И. Дырда, Г.Н. Голуб и др.; АН УССР. Ин-т геотехнической механики. – Днепропетровск, 1989. – 11 с. – Деп. в ВИНТИ 22.11.89, № 6987-В89.
52. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др. – М.: Машгиз, 1958. – Т.2. – 974 с.
53. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.
54. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов и др. / Под ред. В.Н. Потураева. – К.: Наукова думка, 1987. – 288 с.
55. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 501 с.
56. Тихомиров П.В. Определение жесткости призматического резинOMETаллического амортизатора // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1983. – № 42. – С. 104-111.
57. Тихомиров П.В. Определение стационарного температурного поля при кинематическом возбуждении призматического резинOMETаллического амортизатора // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1984. – Вып.44. – С.70-79.
58. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 240 с.

59. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 536 с.
60. Черных К.Ф., Шубина И.М. Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов (феноменологический подход) // Механика эластомеров. Межвед. сб. – Краснодар: Изд-во Кубанского гос. ун-та, 1977. – С. 54-64.
61. Cost T.L., Heard M. Finite-element analysis of coupled thermoviscoelastic structures undergoing sustained periodic vibrations // AIAA Journal. – 1978. – V. 16, № 18. – P. 795-799.
62. Green A.E., Rivlin R.S., Shield R.T. General theory of small elastic deformations superposed of large elastic deformations // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – London. – 1953. – V.211. – P. 128-154.
63. Ogden R.W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids // Proc. Roy. Soc. – London. – 1972. – V.A.326. – P. 565-584.
64. Payne A.R. Shape factors and functions in rubber engineering // Engineer. – 1959. – V. 207. – P. 51-59.
65. Spenser A.J.-M. The static theory of finite elasticity // J. Inst. Math. – 1970. – V.6. – P. 164-200.

## ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ

### 3.1. Основные соотношения механики деформируемого твердого тела

При расчете реальных резиновых конструкций возникает необходимость учета ранее перечисленных свойств резины, что оказывает существенное влияние на результаты расчета. Кроме того, все разнообразие сложных геометрических форм резиновых деталей достаточно сложно описать и далее использовать в математической модели при расчете аналитическими методами. Поэтому широкое распространение получили численные методы, которые позволяют задавать любую геометрическую форму детали и любые граничные и начальные условия при расчете. В подавляющем большинстве численных методов решение дифференциальных и интегральных уравнений, описывающих поведение сплошной среды в континуальной области, сводится к решению системы алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются дискретные значения искомой функции.

Основными численными методами при проектировании резиновых деталей являются следующие: метод конечных разностей (МКР), вариационно-разностный метод (ВРМ) и метод конечных элементов (МКЭ).

В МКР переход к системе линейных алгебраических уравнений осуществляется заменой дифференциальных уравнений для континуальной области сеточными дифференциальными уравнениями, в каждом из которых производные аппроксимируются конечными разностями. Сужает возможности этого метода тот факт, что при формировании системы разрешающих уравнений не используются вариационные принципы.

В ВРМ записывается выражение функционала энергии для всей континуальной области. В этом выражении производные заменяются разностными формулами, а интегралы – конечными суммами через узловые значения искомой функции. Последующее варьирование

функционала энергии по узловым значениям функции дает систему сеточных уравнений.

В МКЭ происходит предварительное разделение всей области на подобласти малой, но конечной формы – конечные элементы. Внутри каждого конечного элемента задается закон аппроксимации искомой функции через ее узловые значения, а затем записывается выражение функционала энергии для каждого конечного элемента. А функционал энергии для всей рассматриваемой области находится в виде суммы по всем конечным элементам. Последующее варьирование функционала энергии по узловым значениям функции приводит к системе алгебраических уравнений.

Несмотря на то, что процедура применения рассмотренных методов к задачам механики достаточно хорошо разработана, использование ее к расчетам резиновых деталей имеет ряд особенностей, которые будут рассмотрены ниже на примере МКЭ.

Предварительно рассмотрим соотношения механики деформируемого твердого тела, основываясь на монографиях В.В. Киричевского [13, 15].

Для описания геометрических и физических параметров сплошной среды используют несколько систем координат: базисную, местную, систему координат трещины и другие. В качестве базисной системы координат принимается, как правило, ортогональная декартова система. В качестве местной системы координат используется, в общем, неортогональная криволинейная система координат, связанная с КЭ. Могут вводиться и другие системы координат, в частности, при решении задач механики композитов – система армирования.

При исследовании задач механики возникает необходимость в преобразовании тензоров из базисной системы координат в местную, либо из местной в базисную, либо из одной местной системы в другую местную. Рассмотрим формулы преобразования при переходе от одной криволинейной системы координат к другой. Данные формулы справедливы и для всех других систем координат, являющихся частным случаем криволинейной. Для систем координат

$x_k = x_k(z^1, z^2, z^3)$  и  $y_{\tilde{k}} = y_{\tilde{k}}(z^1, z^2, z^3)$  формулы преобразования для компонент метрического тензора имеют вид

$$g_{ij} = c_i^{\tilde{n}} c_j^{\tilde{m}} g_{\tilde{n}\tilde{m}}, \quad g_{\tilde{i}\tilde{j}} = c_{\tilde{i}}^n c_{\tilde{j}}^m g_{nm}, \quad (3.1)$$

где  $c_{\tilde{i}}^n = \frac{\partial x_n}{\partial y_{\tilde{i}}}$ ,  $c_i^{\tilde{n}} = \frac{\partial y_{\tilde{n}}}{\partial x_i}$  – компоненты тензора преобразования координатных систем.

Поля деформаций деформированного тела можно определять в начальном состоянии среды  $\nu$ -объеме и в конечном (деформированном) состоянии  $V$ -объеме. Это можно выполнить, вводя понятие первой и второй меры деформации.

Первая мера деформации обозначается  $\hat{G}^x$ , иначе, называемая мера деформации Коши–Грина, позволяет определить деформации в начальном состоянии среды  $\nu$ -объеме и порождает тензор деформаций Коши–Грина

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\hat{G}^x - \hat{g}) = \varepsilon_{ij} \vec{r}^i \vec{r}^j. \quad (3.2)$$

Введением тензора  $\hat{G}^x$  можно определять изменение геометрии  $V$ -объема по их заданию в  $\nu$ -объеме.

На основании (3.2) определяются ковариантные компоненты тензора конечных деформаций по формуле

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( c_j^m \nabla_i u_m + c_i^m \nabla_j u_m + \nabla_i u_m \nabla_j u_n g^{mn} \right), \quad (3.3)$$

где  $\nabla_i u_m$  – ковариантная производная.

Для тензора малых деформаций, используемого в линейной теории упругости, компоненты получаются из (3.3) и имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( c_j^m \nabla_i u_m + c_i^m \nabla_j u_m \right). \quad (3.4)$$

При переходе от одной системы координат к другой компоненты тензоров деформаций Коши–Грина преобразуются по формулам преобразования тензоров:

$$\varepsilon_{m'n'} = \varepsilon^{ij} c_{im'} c_{jn'} = \varepsilon_{ij} c_m^i c_n^j. \quad (3.5)$$

При составлении выражения для удельной элементарной работы внешних сил в некоторых случаях необходимо будет пользоваться при свертке с первой мерой деформации понятием тензора напряжения, определенного в начальном  $v$ -объеме. Этот тензор называется энергетическим тензором напряжений и представляется в виде

$$\hat{Q} = t^{ij} \bar{r}_i \bar{r}_j. \quad (3.6)$$

Контравариантные компоненты  $t^{ij}$  этого тензора равны контравариантным компонентам  $\sigma^{ij}$  тензора Коши:

$$t^{ij} = \sigma^{ij}. \quad (3.7)$$

При переходе от одной системы координат с векторами базиса  $\bar{e}^i$  к другой, с векторами базиса  $\bar{e}^{i'}$ , компоненты тензора напряжений преобразуются по зависимостям

$$\sigma^{m'n'} = \sigma_{ij} c^{im'} c^{jn'} = \sigma^{ij} c_i^{m'} c_j^{n'} = \sigma_j^i c_i^{m'} c^{jn'}, \quad (3.8)$$

где

$$C^{im'} = \bar{e}^i \cdot \bar{e}^{m'}. \quad (3.9)$$

В механике деформированного тела тензор упругих постоянных играет особую роль – посредством этого тензора устанавливается связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Этот тензор является тензором четвертого ранга с контравариантными компонентами  $C^{ijkl}$  (либо ковариантным  $C_{ijkl}$ ) и имеет 81 компоненту. Однако доказано [5], что для анизотропного тела существует 21 различная компонента. Для изотропного тела компоненты тензора упругих постоянных выражаются через параметры Ляме  $\lambda$ ,  $\mu$  и компоненты метрического тензора  $\hat{g}$

$$C^{ijkl} = \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}, \quad (3.10)$$

где параметры Ляме определяются через физические постоянные (модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ) формулам

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (3.11)$$

Коэффициенты тензора упругих постоянных  $C^{ijkl}$  либо  $C_{ijkl}$  обладают симметрией относительно индексов  $i, j, k, l$ :

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &= C^{klij}; & C^{ijkl} &= C^{jikl}; \\ C^{ijkl} &= C^{jilk}; & C^{ijkl} &= C^{jilk}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Контравариантные и ковариантные компоненты тензора упругих постоянных связаны соотношениями

$$C^{ijkl} = g^{i\mu} g^{j\nu} g^{k\rho} g^{ls} C_{\mu\nu\rho s}; \quad (3.13)$$

$$C_{\mu\nu\rho s} = g_{\mu i} g_{\nu j} g_{\rho k} g_{s l} C^{ijkl}, \quad (3.14)$$

а преобразование их контравариантных и ковариантных компонент при переходе от местной системы координат в базисную и обратно вычисляется по формулам

$$C^{\mu' \nu' \rho' s'} = c_i^{\mu'} c_j^{\nu'} c_k^{\rho'} c_l^{s'} C^{ijkl}; \quad (3.15)$$

$$C^{ijkl} = c_{\mu'}^i c_{\nu'}^j c_{\rho'}^k c_{s'}^l C^{\mu' \nu' \rho' s'}. \quad (3.16)$$

**Уравнения равновесия и граничные условия** получены на основе вариационных принципов теории упругости. Для этой цели используется принцип возможных перемещений.

Рассмотрим некоторый функционал  $\Pi$ , представляющий собой полную потенциальную энергию деформации в виде

$$\Pi = W - A, \quad (3.17)$$

где  $W$  – энергия внутренних сил;  $A$  – работа внешних сил, действующих на тело.

Используя вариационный принцип Лагранжа, заключающийся в том, что из всех возможных изменений перемещений тела (системы), удовлетворяющим заданным граничным условиям, в действительности имеют место те перемещения, при которых функционал полной потенциальной энергии деформации принимает стационарное значение, получаем

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0, \quad (3.18)$$

где  $\delta$  – оператор варьирования.

Для трехмерной задачи теории упругости вариацию внутренней энергии деформации можно представить в виде

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.19)$$

Вариация работы внешних сил как функция поверхностных и объемных нагрузок представляется соотношением

$$\delta A = \iiint_V \rho^i \delta u_i dV + \iint_s q^i \delta u_i ds. \quad (3.20)$$

Элемент объема вычисляется по формуле смешанного произведения базисных векторов:

$$dV^2 = [r_1 r_2 r_3] = g, \quad (3.21)$$

где  $g$  – определитель матрицы  $|g_{ij}|$ .

Исходя из (3.21) имеем

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (3.22)$$

Условия стационарности функционала  $\Pi$  (3.17) позволяют получить дифференциальные уравнения равновесия Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} C_k^{j'} \sigma^{ki} \right) + P^{j'} = 0 \quad (3.23)$$

и соответствующие граничные условия:

$$u_{i'}|_{S_i} = \bar{u}_{i'}(x^1, x^2, x^3), \quad (3.24)$$

$$C_i^{k'} \sigma^{ij} n_j = q^{k'}. \quad (3.25)$$

Приведенные в вариационной формулировке уравнения трехмерной задачи теории упругости в криволинейных координатах, ниже будут служить основой для получения уравнений метода конечных элементов для эластомеров в различного рода задачах механики деформируемого твердого тела.

Граничные условия задаются при решении статических задач. Они могут записываться в виде значений перемещений по  $i$ -му направлению на какой-либо поверхности  $S$ :

$$u_i|_S = u_i^*(x, y, z), \quad (3.26)$$

где  $u_i^*(x, y, z)$  – известная функция координат.

Достаточно часто  $u_i^*(x, y, z) = 0$ , т.е. данная поверхность тела  $S$  закреплена по  $i$ -му направлению и не может перемещаться.

Граничные условия могут также задаваться в виде поверхностных и сосредоточенных сил, действующих на поверхности тела  $S$ :

$$\sigma_{ij}n_j = P_i, \quad (3.27)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений на границе  $S$  тела,  $n_j$  – направляющие косинусы между нормалью  $n$  к поверхности тела  $S$  и  $j$ -м направлением координатных осей,  $P_i$  – проекции силы  $P$  на  $i$ -е направление координатных осей.

При решении динамических задач в перемещениях дифференциальные уравнения теории упругости содержат не только неизвестную функцию перемещений, но и ее производную по времени. Поэтому для того, чтобы получить однозначное решение, следует задавать начальные условия на вектор перемещений и ее первую производную во всех точках тела при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z, 0) &= u_{i0}(x, y, z), \\ \dot{u}_i(x, y, z, 0) &= \dot{u}_{i0}(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Совокупность граничных и начальных условий будем называть краевыми условиями.

Данные условия добавляются к полной системе уравнений теории упругости.

*Законы состояния* определяют связь между компонентами тензоров напряжений (энергетический, тензор истинных напряжений Коши) и компонентами тензоров, либо мер, деформаций. Эта связь осуществляется через функцию внутренней энергии деформации. Для сжимаемого линейно-упругого тела функция внутренней энергии деформации имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \left[ \lambda I_1^2(\hat{\varepsilon}) + 2\mu I_1(\hat{\varepsilon}^2) \right], \quad (3.29)$$

где  $I_1(\hat{\varepsilon})$ ,  $I_1(\hat{\varepsilon}^2)$  – инварианты первой меры деформаций.

Связь компонент тензора напряжения и деформации в общем случае определяется по формуле Грина [5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3.30)$$

Особенности расчета конструкций из высокоэластичных материалов обусловлены тем, что в подавляющем большинстве случаев они работают при больших деформациях, когда линейные зависимости, используемые для традиционных материалов, перестают быть справедливыми, поэтому для описания поведения конструкций из эластомеров необходимо привлечение теории конечных деформаций. В свою очередь, напряженное состояние эластомера, как правило, не является одноосным, вследствие чего требуется исследование поведения конструкций в общем, трехмерном случае напряженного состояния. Особое значение приобретает разумный выбор закона состояния, связывающего компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, учитывающего свойства материала при больших деформациях и конечных перемещениях при расчете наполненных и ненаполненных эластомеров [28]. Установлено, что эта связь зависит от степени наполнения материала.

Имеющиеся в литературе многообразие уравнений состояния объясняется наличием различных мер деформаций и различных видов тензоров напряжений.

Для исследования больших деформаций эластомеров воспользуемся квадратичной аппроксимацией законов состояния для сжимаемых тел [20, 22]. Квадратичная аппроксимация следует из теоремы Кейли–Гамильтона о соосности пар тензоров  $\hat{Q}$ ,  $\hat{G}^x$  и  $\hat{T}$ ,  $\hat{g}^x$ . В линейной постановке это понятие отсутствует, а квадратичная зависимость заменяется линейной.

Энергетически приемлемые законы состояния для сжимаемых материалов представим в форме Фингера [20], вид которой для каждого конкретного случая зависит от того, через какие инварианты выражается функционал потенциальной энергии деформации  $W$ .

Например, в случае функционала Синьорини

$$W = \frac{1}{\sqrt{I'_3}} [a_1(I'_2 + 1) + a_2(I_1'^2 + 3) + a_3(I'_1 - 1) + a_4] + \text{const}, \quad (3.31)$$

где  $I'_1, I'_2, I'_3$  – инварианты второй меры деформаций,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – константы.

Запишем закон состояния Синьорини в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{sk} = & \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{c}{2} - \mu - 3\lambda \right) I'_1 + \frac{1}{8} \left( \lambda + \mu - \frac{c}{2} \right) I_1'^2 + \frac{1}{4} c I'_2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left( 9\lambda + 5\mu - \frac{c}{2} \right) \right] G^{sk} - \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda + \mu + \frac{c}{2} \right) I'_1 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{c}{2} - \mu - 3\lambda \right) \right] g_{mj} G^{ms} G^{jk} + \frac{1}{2} c g_{mj} g_{in} G^{ji} G^{ms} G^{nk}, \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{sk} = & \lambda j_1' + 2\mu \varepsilon_{mn} G^{ms} G^{nk} + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) j_1'^2 G^{sk} - \\ & - 2(\lambda + \mu) j_1' \varepsilon_{mn} G^{ms} G^{nk}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

где  $j_1'$  – инвариант тензора деформаций Альманзи–Гамеля.

Из других законов состояния используются:

– закон состояния Сетха, связывающий тензор напряжений Коши и тензор деформаций Альманзи–Гамеля [20]

$$\sigma^{sk} = \lambda G^{mn} \varepsilon_{mn} G^{sk} + 2\mu G^{ms} G^{nk} \varepsilon_{mn}; \quad (3.34)$$

– интегральный закон состояния

$$\sigma^{ij} = \int_0^* \varepsilon_{kl} \left( G^{*mi} G^{*nj} - \frac{1}{3} G^{*mn} G^{*ij} \right) d\tilde{\varepsilon}_{mn} - \int_0^* B \left( \sqrt{I_3(\hat{G}^x)} - 1 \right) d\hat{G}^{*ij}; \quad (3.35)$$

– закон состояния Пенга–Ландела:

$$\sigma^{ij} = \sqrt{I_3} \left\{ \mu \left[ I_3^{-4/3} g^{ij} + \left[ I_3^{-1/3} + \frac{4}{9} (I_3 - 1)(I_1 - 2) + \right. \right. \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9}(I_3 - 1) \right] G^{ij} \left. + \frac{1}{2} B(I_3 - 1) G^{ij} \right\}, \quad (3.36)$$

где  $I_1, I_3$  – инварианты первой меры деформаций,  $B$  – модуль объемного сжатия;

– закон состояния Линдли

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left[ (g^{ij} - I_3 G^{ij}) \mu + \frac{BC}{2} I_3 (I_3 - 1) G^{ij} \right], \quad (3.37)$$

где  $C$  – константа.

Принятие того или иного закона состояния для расчета требует его обоснованности.

*Термоупругость.* Если кроме силовых нагрузок на тело действуют еще и температурные, то тензор деформаций можно записать в виде суммы упругой и температурной составляющей [16]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(y)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}. \quad (3.38)$$

Для изотропного материала имеем:

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_T (T - T_0) g_{ij}, \quad (3.39)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициенты температурного расширения изотропного материала.

Компоненты тензора температурных напряжений, когда силовые воздействия отсутствуют, находят из выражения:

$$\sigma_{(T)}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)}. \quad (3.40)$$

В случае совместного действия силовой и температурной нагрузки тензор напряжений определяется по формуле:

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(y)}^{ij} - \sigma_{(T)}^{ij}, \quad (3.41)$$

где  $\sigma_{(y)}^{ij}$  – тензор упругих напряжений, возникающих при действии силовых нагрузок, а  $\sigma_{(T)}^{ij}$  – тензор температурных напряжений.

**Вязкоупругие свойства материалов.** Во всех приведенных зависимостях между напряжениями и деформациями считается, что дей-

ствие нагрузок на тело происходит мгновенно и вызывает мгновенную деформацию, т.е. деформирование происходит за период времени, близкий к нулю. И далее предполагалось, что с течением времени зависимость между напряжениями и деформациями остается постоянной, либо изменяется незначительно.

Однако это предположение справедливо не для всех материалов. Существует достаточно много материалов, для которых зависимость между напряжениями и деформациями носит временной характер.

Наиболее общая связь между напряжениями и деформациями для таких материалов устанавливается с помощью интегральных уравнений вязкоупругости. Основываясь на принципе суперпозиций Л. Больцмана, уравнения состояния запишем с помощью наследственной теории Больцмана-Вольтерра в виде [29]:

$$\sigma^{ij}(t) = C^{ijkl} \left[ \varepsilon_{kl}(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \right], \quad (3.42)$$

$$\varepsilon^{ij}(t) = S^{ijkl} \left[ \sigma_{kl}(t) + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \right], \quad (3.43)$$

где  $S^{ijkl}$  – компоненты тензора податливости.

При описании вязкоупругих свойств материалов, как упоминалось в главе 1, в качестве разностных ядер релаксации используются ядра, получившие хорошее подтверждение на практике в ходе экспериментов и реологические параметры которых определены для широкого класса материалов. Среди разностных ядер большое распространение получили следующие ядра:

– ядро релаксации А.Р. Ржаницына [30]:

$$R(t-\tau) = \chi e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}, \quad (3.44)$$

где  $\alpha, \beta$  – реологические параметры ядра,  $\chi$  – параметр релаксации;

– ядро ползучести М.А. Колтунова [17]:

$$K(t-\tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n}{\Gamma[\alpha n]} (t-\tau)^{\alpha n}. \quad (3.45)$$

где  $\alpha, \beta$  – реологические параметры ядра;

– ядро релаксации на основе  $\mathcal{E}_\alpha$  – функций Ю.Н. Работнова [29]:

$$R(t - \tau) = \chi(t - \tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}, \quad (3.46)$$

где  $\alpha, \beta$  – реологические параметры ядра ( $-1 < \alpha < 0, \beta > 0$ ),

$\chi$  – параметр релаксации ( $\chi > 0$ ),  $\Gamma$  – гамма-функция.

Для эластомеров, у которых объемная деформация лишена релаксационных свойств, необходимо ввести в рассмотрение понятие

объемного модуля  $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ , тогда

$$\tilde{\sigma}^{ij} = 2\tilde{\mu}(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta) + B g^{ij} \theta, \quad (3.47)$$

где модуль сдвига  $\tilde{\mu}$  представляется интегральным оператором Вольтерра:

$$\tilde{\mu}\varphi = \mu \left[ \varphi(t) - \int_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau \right]. \quad (3.48)$$

Подставив соотношение (3.48) в выражение (3.47), получим зависимость между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформаций для вязкоупругого материала:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(t) = & B g^{ij} \theta(t) + 2\mu(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t) - \\ & - \int_0^t R(t - \tau)(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1(\tau)) d\tau), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где  $J_1$  – первый инвариант тензора деформаций.

**Теплопроводность.** Определение температурных полей, в общем случае, можно найти с помощью нестационарного уравнения теплопроводности

$$\operatorname{div} \bar{q} - w_o = C \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.50)$$

С учетом закона Фурье для потока тепла  $q$

$$q = -\lambda_q \operatorname{grad} T \quad (3.51)$$

уравнение (3.50) запишем так:

$$\operatorname{div}(\lambda_q \operatorname{grad} T) - w_o = C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.52)$$

где  $\lambda_q$  – коэффициент теплопроводности материала,  $w_o$  – удельная мощность внутренних источников,  $C$  – удельная теплоемкость материала,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  – скорость изменения температуры во времени.

Для решения данного уравнения необходимо задать начальные и граничные условия.

Начальные условия определяются заданием температуры  $T = T_0(t_0, z^i)$  в начальный момент времени.

Граничные условия выражаются в виде:

- задание распределения температуры по поверхности тела в произвольный момент времени (I рода):

$$T_s = T_0(t, z^i); \quad (3.53)$$

- задание плотности теплового потока в каждой точке поверхности тела (II рода)

$$q(t, z^i) = -\lambda_q \frac{\partial T(t, z^i)}{\partial n}; \quad (3.54)$$

- задание конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой (III рода)

$$-\lambda_q \frac{\partial T(t, z^i)}{\partial n} = \alpha_q [T(t, z^i) - T_c(t, z^i)], \quad (3.55)$$

где  $\alpha_q$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_c$  – температура среды.

**Диссипативный разогрев.** Гармонические колебания упругих систем всегда сопровождаются процессами, при которых часть механической энергии переходит в тепловую и затем рассеивается в окружающую среду. В результате такого явления все свободные колебания являются затухающими. Для сохранения постоянства амплитуды колебательного процесса необходимо подводить столько энергии, сколько рассеивается за цикл колебания. Особенности молекулярного стро-

ения эластомеров, обладающих четко выраженными релаксационными свойствами, обуславливают высокие гистерезисные потери при их циклическом деформировании. Поглощаемая в течении каждого цикла энергия вызывает разогрев резинового элемента и примыкающей металлической арматуры. Количественную оценку рассеянной энергии можно охарактеризовать коэффициентом рассеивания энергии  $\psi$ , который определяется как отношение поглощенной энергии за цикл  $\Delta W$  к максимальному, амплитудному значению энергии  $W$ .

Функции источников теплообразования при циклическом деформировании принимаем усредненной за период колебания [16]:

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt. \quad (3.56)$$

Если нагружение вязкоупругого материала происходит по гармоническому закону  $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^0 \sin \omega t$  ( $\varepsilon_{ij}^0$  – амплитуда), то напряженное состояние  $\sigma^{ij}(t)$  на основании формулы (3.42) запишем в виде:

$$\sigma_{ij}^{ij}(t) = \sigma_0^{ij} \left[ \sin \omega t - \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau \right], \quad (3.57)$$

где  $\sigma_0^{ij} = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}^0$  – амплитудное значение.

Исключая из уравнение (3.57) время  $t$ , вводя новую переменную  $z = t - \tau$ , получаем следующее выражение:

$$\sigma_{ij}^{ij}(t) = \sigma_0^{ij} [(1 - R_C) \sin \omega t - R_S \cos \omega t], \quad (3.58)$$

где  $R_C, R_S$  – косинус и синус преобразования ядра релаксации, которые определяются по формулам

$$R_C = \int_0^{\infty} R(z) \cos \omega z dz, \quad R_S = \int_0^{\infty} R(z) \sin \omega z dz. \quad (3.59)$$

В качестве ядер релаксации могут выступать ядро Ржаницына (3.44) или дробно-экспоненциальная функция Работнова (3.46).

В процессе циклического деформирования работа вычисляется за один цикл нагружения конструкции  $t = 2\pi/\omega$  по формуле

$$dW = \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dt = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.60)$$

Скорость деформации  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  принимаем по закону

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \omega \varepsilon_{ij}^0 \cos \omega t. \quad (3.61)$$

Подставив  $\sigma^{ij}(t)$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в выражение (3.60) и проинтегрировав, получим:

$$W = \omega \sigma_{ij}^0 (1 - R_c) \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt + \omega \sigma_0^{ij} \varepsilon_{ij}^0 R_S \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt \quad (3.62)$$

Первый интеграл в выражении (3.62) за цикл колебания равен нулю, а второй представляет собой необратимую работу.

Тогда за один период колебаний количество энергии, в единице объема составит

$$\Delta W = \pi \sigma_0^{ij} \varepsilon_{ij}^0 R_S. \quad (3.63)$$

Мощность внутренних источников теплообразования, если учесть, что большая доля поглощаемой энергии трансформируется в тепловую, можно принять равной среднему значению энергии, рассеянной за один цикл колебаний  $t = 2\pi/\omega$ ,

$$w_0 = \frac{\Delta W}{t} = \frac{1}{2} \omega R_S \sigma_0^{ij} \varepsilon_{ij}^0. \quad (3.64)$$

Таким образом, коэффициент поглощения равен  $\psi = \omega R_S$ .

Если учесть, что температура саморазогрева влияет на мощность внутренних источников, то выражение (3.64) можно записать в виде

$$w_0^{(T)} = \omega R_S \mu_0 \left( \varepsilon_{ij}^0 - \frac{1}{3} \theta_0 \delta_j^i \right) \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} \omega R_S B_0 (\theta_0 - 3\alpha_T T) \varepsilon_{ij}^0 \delta_j^i, \quad (3.65)$$

где  $\delta_j^i$  – символы Кронекера.

Если релаксирует один модуль сдвига  $\tilde{\mu}$ , то имеем

$$w_0^{(T)} = \omega R_S \mu_0 \left( \varepsilon_{ij}^{(T)} - \frac{1}{3} \theta_0 \delta_j^i \right) \varepsilon_{ij}^0. \quad (3.66)$$

**Задачи механики разрушения.** В механике разрушения предполагается, что конструкция изначально содержит какое-то распределение трещин. Это хорошо согласуется с экспериментальными данными: какой бы предварительной технологической обработке не подвергалась конструкция, в ней есть несовершенства (поры, трещины, включения и т.д.). Кроме того, в процессе эксплуатации под действием температурных, силовых и других воздействий имеющиеся в конструкции микродефекты объединяются, при этом образуется макродефект – трещина.

Рассмотрим, что представляет собой трещина (рис. 3.1). Основными элементами трещины являются вершина трещины, фронт трещины, берега трещины. Берега трещины – новые поверхности, образовавшиеся в результате деления конструкции. Вершина трещины – точка соединения берегов трещины. Фронт трещины – линия соединения берегов трещины.

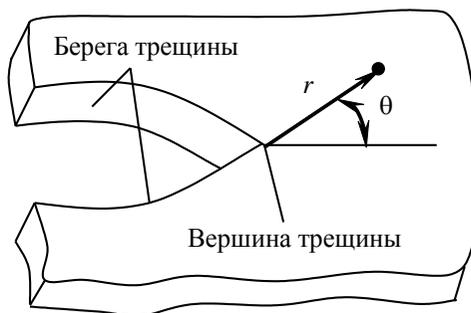


Рис. 3.1. Элементы трещины

Разрушением называется разделение конструкции на две и более части. Разрушение, как правило, происходит в результате критического развития трещины. Исследование распространения трещины в конструкции при заданных начальных и граничных условиях является основной задачей механики разрушения. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо найти параметры механики разрушения и сравнить их с критическими значениями. К наиболее широко распространенным параметрам механики разрушения относятся следующие:

величина раскрытия трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, величина  $J$ -интеграла.

Величина раскрытия трещины определяется непосредственно из напряженно-деформированного состояния конструкции. Критерий разрушения формулируется следующим образом: трещина начинает развиваться, когда величина раскрытия трещины превышает некоторое критическое значение, характерное для рассматриваемого материала.

Все многообразие деформированных состояний около вершины трещины может быть представлено тремя видами деформаций при разрушении (рис. 3.2).

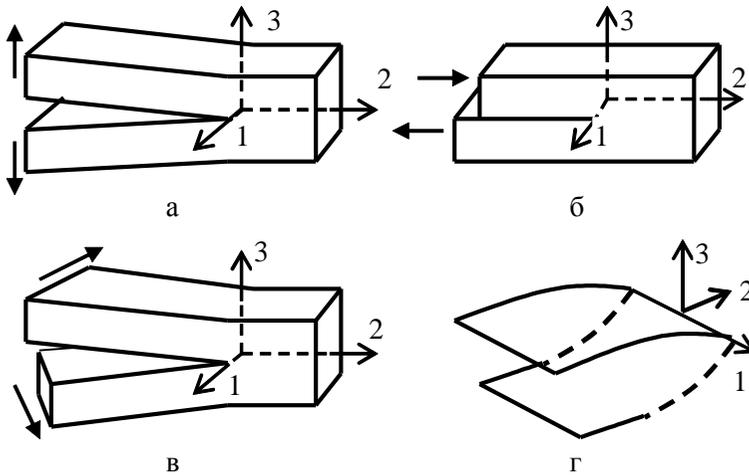


Рис. 3.2. Виды деформаций при разрушении:

а – нормальный отрыв;

б – поперечный сдвиг;

в – продольный сдвиг;

г – система координат трещины

В качестве параметра, контролирующего напряженно-деформированное состояние около вершины трещины, а также в каче-

стве критерия разрушения вводится коэффициент интенсивности напряжений (КИН):

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma \sqrt{r}, \quad (3.67)$$

где  $\sigma$  – напряжение, действующее в точке около вершины трещины;  $r$  – расстояние от этой точки до вершины трещины.

В соответствии с тремя типами напряженно-деформированного состояния около вершины трещины введены три коэффициента интенсивности напряжений:  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва,  $K_{II}$  – коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига,  $K_{III}$  – коэффициент интенсивности напряжений продольного сдвига. В случае общей пространственной задачи напряженно-деформированное состояние описывается при помощи коэффициентов интенсивности напряжений соотношениями [27, 35]:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases} = \frac{\sqrt{2r}}{\mu\sqrt{\pi}} \left[ \frac{K_I}{8} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ (7-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{8} \begin{bmatrix} (9-8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ (-3+8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \right], \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \begin{bmatrix} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + K_{II} \begin{bmatrix} -2\nu \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix} \right], \quad (3.69)$$

$$K_{III} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной фронту трещины (рис. 3.1).

Критерий разрушения запишется в виде неравенств:

$$K_I \geq K_{IC}, \quad (3.70)$$

$$K_{II} \geq K_{IIC}, \quad (3.71)$$

$$K_{III} \geq K_{IIIC}, \quad (3.72)$$

где  $K_{IC}$ ,  $K_{IIC}$ ,  $K_{IIIC}$  – критические коэффициенты интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига соответственно.

Таким образом, трещина начинает распространяться, когда хотя бы одно из неравенств (3.70)-(3.72) выполняется.

Наиболее вероятное направление распространения трещины определяется из условия, что она начинает развиваться в плоскости, перпендикулярной линии действия максимальных растягивающих напряжений в окрестности вершины трещины. Тогда в полярной системе координат в плоскости, перпендикулярной фронту трещины, угол развития трещины по сравнению с первоначальным направлением определяется соотношением:

$$\theta_0 = 2 \arctg \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}}. \quad (3.73)$$

$J$ -интеграл представляет собой меру изменения потенциальной энергии напряженно-деформированного тела при изменении длины трещины. Отсюда выражение для  $J$ -интеграла запишется в виде:

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial l}, \quad (3.74)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия,  $l$  – длина трещины.

На основе аналитических выводов применение  $J$ -интеграла ограничивается нелинейной упругостью и деформационной пластичностью вместо более общего пластического течения. Инвариантность  $J$ -интеграла относительно контура интегрирования позволяет принять его в качестве критерия разрушения. Критерий разрушения, основанный на концепции  $J$ -интеграла, запишется следующим образом:

$$J \geq J_C, \quad (3.75)$$

где  $J_C$  – критическое значение, при достижении которого трещина начинает расти.

**Резинокордные материалы.** В последнее время одним из наиболее бурно развивающихся направлений разработки новых материалов является создание композиционных материалов, которые позволяют сочетать отличительные черты структурных составляющих. Так, умелое использование отличительных свойств резины в резинокордном материале позволяет создавать уникальные материалы, без которых невозможно представить некоторые механизмы, машины, так и целые отрасли (например, шины).

Свойства резинокордных материалов формируются не только упругими свойствами арматуры, но и в большей степени ее укладкой. Варьируя угол укладки арматуры (слоя), можно получить заданную степень анизотропии свойств, а изменяя порядок укладки слоев и угол укладки их по толщине, можно эффективно управлять изгибной и крутильной жесткостью композиционного материала [36].

Однонаправленный композиционный материал (КМ) можно рассматривать как ортотропную среду (рис. 3.3).

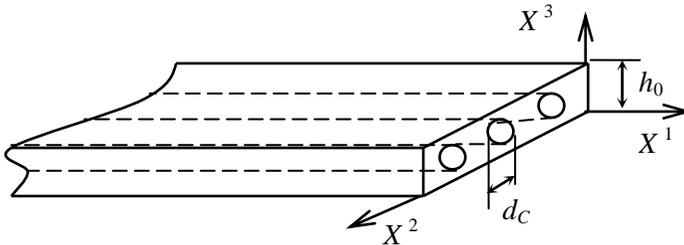


Рис. 3.3. Элементарный однонаправленно армированный слой

Для простейшей модели КМ – системы жестко связанных чередующихся изотропных стержней, обладающих характеристиками волокна, и матрицы – продольный модуль упругости  $E_1$  рассчитывается по уравнению аддитивности, или правилу смесей:

$$E_1 = E_C \Psi_C + E_R (1 - \Psi_C), \quad (3.76)$$

где  $E_C$  – модуль упругости материала волокна;  $E_R$  – модуль упругости материала матрицы;  $\Psi_C$  – коэффициент армирования, характеризующий объемное относительное содержание волокон [18]:

$$\Psi_C = \frac{\pi d_C^2}{4h_0} i_C. \quad (3.77)$$

Здесь  $d_C$  – диаметр волокон;  $h_0$  – толщина армированного слоя;  $i_C$  – частота армирования.

Для более сложной модели (цилиндрический стержень – волокно в коаксиальной оболочке – матрице) учитываются различия в коэффициентах Пуассона матрицы и волокон:

$$E_1 = E_C \Psi_C + E_R (1 - \Psi_C) + \frac{2(\nu_C - \nu_R)^2 E_C E_R \Psi_C (1 - \nu_C)}{E_R (1 - \nu_R) L_C + [L_R (1 - \Psi_C) + (1 - \nu_R)] E_C}, \quad (3.78)$$

где  $L_R = 1 - \nu_R - 2\nu_R^2$ ;  $L_C = 1 - \nu_C - 2\nu_C^2$ .

Для полиармированных КМ, содержащих  $n$  сортов сплошных волокон, у которых свойства каждого  $i$ -го сорта отличаются от свойств других сортов, продольный модуль упругости рассчитывается согласно выражению:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n E_i \Psi_i + E_R (1 - \Psi_C). \quad (3.79)$$

Поперечные модули упругости  $E_2$  и  $E_3$ , для наиболее простой модели КМ определяются выражением:

$$E_2 = E_3 = \frac{E_C E_R}{E_R \Psi_C + E_C (1 - \Psi_C)}. \quad (3.80)$$

При совпадении оси 1 с направлением укладки волокон модули сдвига  $G_{12}$  и  $G_{13}$  характеризуют упругие сдвиги материала в плоскостях 1-2 и 1-3 параллельных волокнам. Правило аддитивности для композиционного материала со сплошными волокнами следующее:

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_C G_R}{G_C (1 - \Psi_C) + G_R \Psi_C}, \quad (3.81)$$

где  $G_C$  и  $G_R$  – модули сдвига, соответственно, материалов волокон и матрицы.

Модуль сдвига  $G_{23}$ , характеризующий связь между касательными напряжениями и деформацией сдвига в плоскости 2-3, перпендикулярной оси волокон, определяется по формуле:

$$G_{23} = G_R \frac{K_R \Psi_C G_C + (1 - \Psi_C) G_R}{K_R \Psi_R G_C + (1 + K_R \Psi_C) G_R}, \quad (3.82)$$

где  $K_R = 3 - 4\nu_R$ ;  $\nu_R$  – коэффициент Пуассона для материала матрицы.

Коэффициент Пуассона для однонаправленного композиционно-го материала определяется по формуле [8]:

$$\nu_{12} = \nu_C \Psi_C + \nu_R (1 - \Psi_C). \quad (3.83)$$

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела имеет вид:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3.84)$$

Тело, обладающее тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии, называется ортотропным. Оно характеризуется девятью упругими постоянными [24], поскольку

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}. \quad (3.85)$$

Матрица упругих постоянных ортотропного тела (в системе армирования  $X'_m$  (рис. 3.4)) будет иметь следующий вид:

$$C^{ijkl} = \begin{bmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & 0 & C^{1122} & 0 & 0 & 0 & C^{1133} \\ 0 & C^{1212} & 0 & C^{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{1313} & 0 & 0 & 0 & C^{1331} & 0 & 0 \\ 0 & C^{2112} & 0 & C^{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{2211} & 0 & 0 & 0 & C^{2222} & 0 & 0 & 0 & C^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & C^{2332} & 0 \\ 0 & 0 & C^{3113} & 0 & 0 & 0 & C^{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3223} & 0 & C^{3232} & 0 \\ C^{3311} & 0 & 0 & 0 & C^{3322} & 0 & 0 & 0 & C^{3333} \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

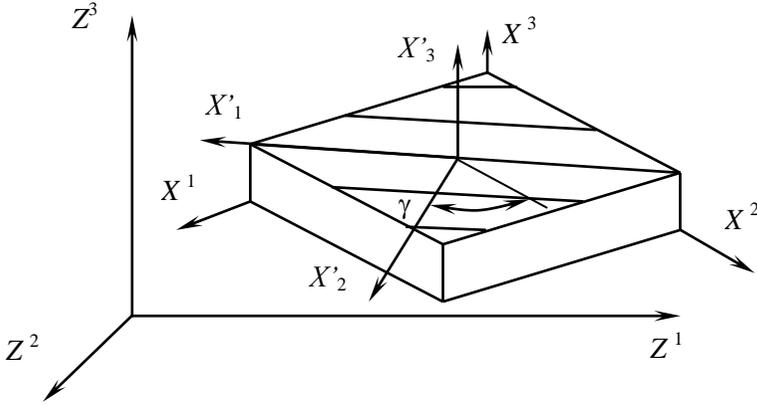


Рис. 3.4. Элемент ортотропного тела в базисной  $Z^i$ , местной  $X^i$  системе координат и системе армирования  $X'_m$

Компоненты тензора упругих постоянных  $C^{ijkl}$  (в системе армирования  $X'_m$ ), согласно [24] вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C^{1111} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (1 - \nu_{23}\nu_{32}); & C^{1122} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}); \\
 C^{1133} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}); & C^{2211} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}); \\
 C^{2222} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (1 - \nu_{13}\nu_{31}); & C^{2233} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}); \\
 C^{3311} &= \frac{E_1}{\Delta_*} (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}); & C^{3322} &= \frac{E_2}{\Delta_*} (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}); \\
 C^{3333} &= \frac{E_3}{\Delta_*} (1 - \nu_{21}\nu_{12}); \\
 C^{1212} &= \frac{G_{12}}{2}; & C^{1313} &= \frac{G_{13}}{2}; & C^{2323} &= \frac{G_{23}}{2},
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

где  $\Delta_* = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21})$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – модули упругости в соответствующих направлениях;  $G_{ij}$  – модули сдвига материала;  $\nu_{ij}$  – коэффициенты Пуассона; первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации.

Необходимо учитывать, что компоненты тензора упругих постоянных обладает свойством симметрии:

$$C^{ijkl} = C^{jikl}; C^{ijkl} = C^{ijlk}; C^{ijkl} = C^{klij}. \quad (3.88)$$

Компоненты тензора упругих постоянных  $C_*^{mnpq}$  задаются в системе армирования  $X'_m$ . Для перехода в местную систему координат  $X'$  преобразование тензора четвертого ранга осуществляется по формуле:

$$C^{ijkl} = C_*^{mnpq} a_m^i a_n^j a_p^k a_q^l, \quad (3.89)$$

где  $a_m^i$  – тензор поворота системы координат, который связан с тензором преобразования координат  $b_m^i = \frac{\partial X^i}{\partial X'_m}$  (рис. 3.4) следующим соотношением:

$$a_m^i = \frac{b_m^i}{\sqrt{g_{mm}}}.$$

Преобразование компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  к новым осям  $X'_1$ ,  $X'_2$ ,  $X'_3$  (системе армирования), в общем случае, осуществляется по формуле:

$$\varepsilon'_{i'j'} = \varepsilon_{ij} a_i^{i'} a_j^{j'}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.90)$$

При повороте осей (2,3) на угол армирования  $\gamma$  матрица преобразования  $[a]$  имеет следующий вид:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Напряжения в системе армирования вычисляются по известному соотношению (3.84).

Для определения напряжений в местной системе координат ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ) необходимо осуществить следующее преобразование:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{i'j'} b_i^{i'} b_j^{j'}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.92)$$

Матрица преобразования  $[b]$  является обратной по отношению к матрице преобразования  $[a]$ :

$$[b] = [a]^{-1}. \quad (3.93)$$

При этом, вычислив, согласно (3.87) и (3.88), коэффициенты упругости  $C^{ijkl}$  можно определить физические характеристики приведенного ортотропного композиционного материала в системе координат  $X^i$  конечного элемента ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) [24]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\Delta}{\Delta_{11}}; E_2 = \frac{\Delta}{\Delta_{22}}; E_3 = \frac{\Delta}{\Delta_{33}}; \\ \nu_{12} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}; \nu_{13} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{33}}; \nu_{23} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{33}}; \\ G_{12} &= 2 \left( C^{1212} - \frac{(C^{3312})^2}{C^{3333}} \right); G_{13} = 2 \left( C^{1313} - \frac{(C^{1323})^2}{C^{2323}} \right); \\ G_{23} &= 2 \left( C^{2323} - \frac{(C^{1323})^2}{C^{1313}} \right), \\ \text{где } \Delta &= \begin{vmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= C^{2222}C^{3333} - (C^{2233})^2; \Delta_{22} = C^{1111}C^{3333} - (C^{1133})^2; \\ \Delta_{33} &= C^{1111}C^{2222} - (C^{1122})^2; \Delta_{12} = C^{1122}C^{3333} - C^{1133}C^{2233}; \\ \Delta_{13} &= C^{1133}C^{2222} - C^{1122}C^{2233}; \Delta_{23} = C^{1111}C^{2233} - C^{1122}C^{1133}.\end{aligned}$$

**Температурное нагружение резинокордного материала.** При решении задачи термоупругости для резинокордных материалов воспользуемся соотношениями

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij} \Delta T, \quad (3.95)$$

$$\sigma_{(T)}^{kl} = C^{kl ij} \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (3.96)$$

где  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты температурного расширения;  $\Delta T$  – изменение температуры.

Коэффициенты температурного расширения  $\alpha_{ij}$  являются производными относительной температурной деформации материала  $\varepsilon_{ij}$  в ненагруженном состоянии по температуре  $T$ :  $\alpha_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dT$ . Коэффициенты температурного расширения анизотропных материалов образуют тензор второго ранга:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{11'} & \alpha_{12'} & \alpha_{13'} \\ \alpha_{21'} & \alpha_{22'} & \alpha_{23'} \\ \alpha_{31'} & \alpha_{32'} & \alpha_{33'} \end{array} \right\}. \quad (3.97)$$

В системе координат армирования (рис. 3.4) этот тензор определяется тремя главными коэффициентами температурного расширения  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$  и имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{array} \right\}. \quad (3.98)$$

Зависимость между компонентами тензоров (3.97) и (3.98) запишется следующим образом:

$$\alpha_{i'j'} = \alpha_{ij} b_{i'i} b_{j'j}, \quad (3.99)$$

где  $b_{ij}$  – компоненты матрицы преобразования систем координат.

Коэффициент температурного расширения  $\alpha_{11}$  однонаправленного композиционного материала вдоль оси волокон (продольный коэффициент температурного расширения) определяется по формуле [18]

$$\alpha_{11} = \alpha_R - (\alpha_R - \alpha_C) \left[ \frac{(1 - \nu_R) E_C \Psi_C - (1 - \nu_C) (E_1 - (1 - \Psi_C) E_R)}{(\nu_R - \nu_C) E_1} \right], \quad (3.100)$$

где  $\alpha_R$  – коэффициент температурного расширения материала матрицы;  $\alpha_C$  – коэффициент температурного расширения материала волокон;  $E_R$  – модуль упругости материала матрицы;  $E_C$  – модуль упругости материала волокон;  $\nu_R$  – коэффициент Пуассона материала матрицы;  $\nu_C$  – коэффициент Пуассона материала волокон;  $\Psi_C$  – объемная доля волокон;  $E_1$  – продольный модуль упругости, определяемый формулой (3.76).

Коэффициенты температурного расширения  $\alpha_{22}$  и  $\alpha_{33}$  однонаправленного композиционного материала перпендикулярно оси волокон определяются соотношением [18]

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_R + (\alpha_R - \alpha_{11}) \nu_{12} - (\alpha_R - \alpha_C) (1 + \nu_C) \times \frac{\nu_{12}}{(\nu_R - \nu_C)}, \quad (3.101)$$

здесь  $\nu_{12}$  – коэффициент Пуассона, определяемый формулой (3.83).

**Вязкоупругие свойства резинокордного материала.** Описание напряженно-деформированного состояния резинокордного материала вызывает определенные математические трудности. Наиболее часто используется подход, заключающийся в представлении композита как однородного анизотропного материала с упругими постоянными, определяемыми через упругие постоянные структурных компонентов составляющих в зависимости от объемной доли каждого компонента. Для описания вязкоупругих свойств каждого компонента композита воспользуемся наследственной теорией Больцмана–Вольтерра. Связь между напряжениями и деформациями для анизотропного материала запишем на основе закона Гука.

Тензор упругих постоянных, входящий в закон Гука для композиционного материала, определяется через упругие постоянные структурных составляющих композита. Заменим модуль упругости армирующих волокон  $E_C$  и модуль упругости матрицы  $E_R$  интегральным оператором Вольтерра:

$$\tilde{E}_C = E_{C0} - \int_0^t R_C(t-\tau)E_C(\tau)d\tau, \quad (3.102)$$

$$\tilde{E}_R = E_{R0} - \int_0^t R_R(t-\tau)E_R(\tau)d\tau, \quad (3.103)$$

где  $R_C(t-\tau)$  и  $R_R(t-\tau)$  – разностные ядра релаксации материала волокон и матрицы соответственно.

Тогда согласно правилу смесей продольный модуль упругости в системе координат армирования (рис. 3.4) рассчитывается по формуле

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_C\Psi_C + \tilde{E}_R(1 - \Psi_C), \quad (3.104)$$

где  $\Psi_C$  – коэффициент армирования, характеризующий относительное объемное содержание волокон, определяемое формулой (3.77).

Поперечные модули упругости  $\tilde{E}_2$  и  $\tilde{E}_3$  в случае простой релаксации определяются соотношениями

$$\tilde{E}_2 = \tilde{E}_3 = \frac{\tilde{E}_C\tilde{E}_R}{\Psi_C\tilde{E}_R + (1 - \Psi_C)\tilde{E}_C}. \quad (3.105)$$

В системе армирования модули сдвига  $\tilde{G}_{12}$  и  $\tilde{G}_{13}$  принимают вид

$$\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{13} = \frac{\tilde{G}_C\tilde{G}_R}{\Psi_C\tilde{G}_R + (1 - \Psi_C)\tilde{G}_C}; \quad (3.106)$$

здесь  $\tilde{G}_C$  и  $\tilde{G}_R$  – модули сдвига материала волокон и матрицы соответственно, определяемые по формулам

$$\tilde{G}_C = \frac{\tilde{E}_C}{2(1 + \nu_C)}, \quad (3.107)$$

$$\tilde{G}_R = \frac{\tilde{E}_R}{2(1 + \nu_R)}, \quad (3.108)$$

где  $\nu_C$  и  $\nu_R$  – коэффициенты Пуассона материала волокон и матрицы, соответственно.

Соотношение для модуля сдвига  $\tilde{G}_{23}$  с учетом (3.107) и (3.108) примет вид

$$\tilde{G}_{23} = \tilde{G}_R \frac{K_R + \Psi_C + (1 - \Psi_C) \frac{\tilde{G}_R}{\tilde{G}_C}}{(1 - \Psi_C)K_R + (1 + \Psi_C K_R) \frac{\tilde{G}_R}{\tilde{G}_C}}, \quad (3.109)$$

где  $K_R = 3 - 4\nu_R$ .

**Задачи динамики.** Резиновые элементы конструкций в реальных условиях нагружения испытывают, как правило, динамические нагрузки.

Уравнение движения в конечно-элементной формулировке имеет вид

$$M \ddot{u} + B \dot{u} + K u = q(x_i, t), \quad (3.110)$$

где  $M$  – матрица масс,  $B$  – матрица демпфирования,  $K$  – матрица жесткости,  $q$  – вектор сил,  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  – векторы перемещений, скоростей и ускорений.

При построении матрицы жесткости конечных элементов для слабосжимаемых материалов используется тройная аппроксимация полей перемещений, деформаций и функции изменения объема.

Матрица масс может быть построена с помощью тех же функций формы, используемых при аппроксимации перемещений:

$$M_{ij} = \int_V \{N_i^T\} \rho \{N_j\} dv, \quad (3.111)$$

где  $\{N\}$  – матрица функции формы,  $\rho$  – плотность. В зависимости от степени аппроксимации в этом случае вычисляются масса, статический момент и момент инерции. Однако этот подход иногда приводит к тому, что матрица масс не является положительно определенной.

Более простым, но увеличивающим погрешность решения, является метод непосредственного распределения всей массы в узлы конечных элементов. Но в этом случае не удастся получить точное представление моментов масс выше первого порядка.

Матрицу демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов, построить невозможно. Для некоторых задач матрицу демпфирования можно представить в виде линейной комбинации матриц масс и жесткости

$$B = \alpha M + \beta K. \quad (3.112)$$

Использование резиновых деталей в качестве демпфирующих элементов требует при проектировании учитывать собственные колебания таких устройств и подбирать геометрическую форму и размеры деталей таким образом, чтобы обеспечивалась требуемая жесткость и частота внешнего воздействия не оказалась резонансной.

## 3.2. Вывод уравнений МКЭ для эластомеров

Как упоминалось выше, при расчете резиновых конструкций методом конечных элементов возникает ряд сложностей связанных с отличительными свойствами резины как материала. Так расчет конструкций из слабосжимаемых резин невозможен традиционным методом конечных элементов, так как приводит к неопределенностям.

Предлагаемый вариант МКЭ, предложенный В.В. Киричевским [14] в 1986 г. для эластомеров (в том числе и для резин), позволяет получать матрицы жесткости КЭ, которые учитывают жесткие смещения, эффект ложного сдвига и слабую сжимаемость эластомеров. Этот вариант МКЭ относится к гибриднему методу, так как включает тройную аппроксимацию для компонент перемещений, деформаций и функции изменения объема. Порядок разложения деформаций и функции изменения объема находится в строгом соответствии с порядком аппроксимации функций перемещений и выбирается с таким расчетом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жесткие смещения и эффект ложного сдвига, и все компоненты функ-

ции изменения объема, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Процесс вычисления коэффициентов матрицы жесткости КЭ так организован, что все коэффициенты разложения деформаций и функций изменения объема легко выражаются через коэффициенты аппроксимации перемещений. Это позволяет получить уравнения, аналогичные уравнениям традиционного МКЭ, в форме метода перемещений, сохраняющие все его преимущества по сравнению со смешанными формулировками.

Процедуру вывода коэффициентов матрицы жесткости рассмотрим на примере произвольного криволинейного параллелепипеда. Будем полагать, что область, занимаемая элементом, отображена на куб с единичными ребрами (рис. 3.5). В центр «изопараметрического» КЭ поместим начало местной системы координат  $O^1 x^1 x^2 x^3$ , направляя оси вдоль ребер.

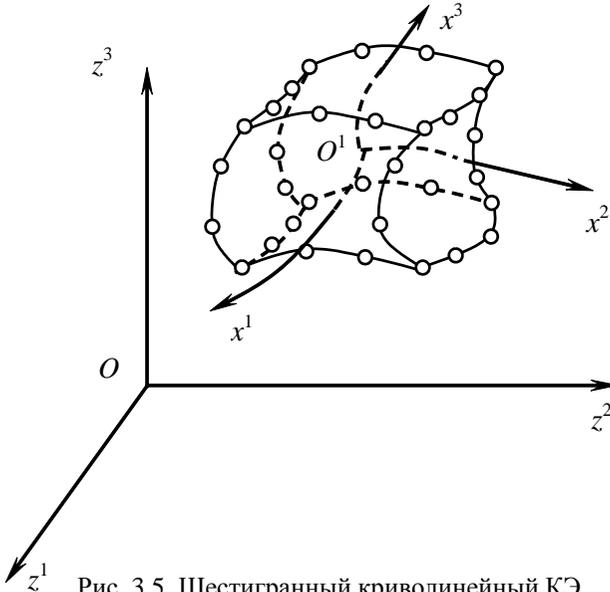


Рис. 3.5. Шестигранный криволинейный КЭ серендипова семейства

Нанесем на КЭ равномерную сеть. В качестве неизвестных примем узловые значения перемещений. Для вывода основных соотношений МКЭ воспользуемся принципом виртуальных перемещений, согласно которому для получения коэффициентов матрицы жесткости КЭ необходимо выражение для вариации упругой энергии деформации.

Выражение вариации упругой энергии деформации имеет вид

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.113)$$

Учитывая выражение (3.10), получаем

$$\delta W = \iiint_V \left( 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.114)$$

или

$$\delta W = \iiint_V \left( 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta \theta \right) dV.$$

Для построения МЖ КЭ эластомера производим внутри КЭ тройную аппроксимацию: полей перемещений  $u_i$ , компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и функции изменения объема  $\theta$ .

В общем случае аппроксимация полей перемещений относительно базисной системы координат записывается формулой

$$u_{k'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad (3.115)$$

где  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;  $\psi^{(pqr)}$  – набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \frac{(x^2)^q}{q!} \frac{(x^3)^r}{r!}; \quad (3.116)$$

$p = 0, 1, \dots, l$ ;  $q = 0, 1, \dots, m$ ;  $r = 0, 1, \dots, k$  – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим координатным направлениям;

$$\sum_{pqr}^{lmn} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^m \sum_{r=0}^n \quad (3.117)$$

есть знак суммирования.

Для координатных функций выполняется условие дифференцирования

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \Psi^{(pqr)} = \Psi^{(p-\alpha \ q-\beta \ r-\gamma)}. \quad (3.118)$$

Компоненты тензора деформаций аппроксимируем путем разложения компонент  $\varepsilon_{ij}$  в ряд Маклорена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{(ij)} e_{ij}^{(stg)} \Psi^{(stg)}, \quad (3.119)$$

где

$$\sum_{stg}^{(ij)} = \sum_{s=0}^{L_{ij}} \sum_{t=0}^{M_{ij}} \sum_{g=0}^{N_{ij}}; \quad (3.120)$$

$$L_{ij} = \begin{cases} l & \text{при } i, j \neq 1, \\ l-1; & \end{cases} \quad (3.121)$$

$$M_{ij} = \begin{cases} m & \text{при } i, j \neq 2, \\ m-1; & \end{cases} \quad (3.122)$$

$$N_{ij} = \begin{cases} n & \text{при } i, j \neq 3, \\ n-1, & \end{cases} \quad (3.123)$$

причем в разложении (3.119) остаются только те члены, которые не изменяются при увеличении порядка аппроксимации перемещений.

Коэффициенты разложения  $e_{ij}^{(stg)}$  вычисляются по формулам [22]

$$e_{11}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta)}^{k'};$$

$$e_{22}^{(pqr)} = \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta)}^{k'};$$

$$\begin{aligned}
e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu r+1-\eta)}^{k'}; \\
e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^{k'} \right); \\
e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right); \\
e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^{k'} \right),
\end{aligned} \tag{3.124}$$

где

$$b_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{\left( \partial x^1 \right)^\mu \left( \partial x^2 \right)^\nu \left( \partial x^3 \right)^\eta} \Bigg|_{x^1=x^2=x^3=0}. \tag{3.125}$$

Соотношения (3.119) и (3.124) представим в матричном виде:

$$\{ \varepsilon_{ij} \} = \{ e_{ij} \}^T \{ \Psi_{(ij)} \}, \tag{3.126}$$

$$\{ e_{ij} \} = [ F_{ij}^{k'} ] \{ \omega_{k'} \}; \tag{3.127}$$

здесь индексы  $i, j$  в векторе  $\{ \Psi_{ij} \}$  указывают на зависимость размерности вектора от индексов  $i, j$ , поскольку он содержит только те функции  $\Psi^{(pqr)}$ , которые входят в (3.119). Матрица  $[ F_{ij}^{k'} ]$  строится на основе (3.124).

Функцию изменения объема, ответственную за слабую сжимаемость эластомера, аппроксимируем следующим образом:

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{l-1} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \Psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{3.128}$$

где  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  – коэффициенты разложения, определяемые соотношением

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{\left(\partial x^1\right)^\alpha \left(\partial x^2\right)^\beta \left(\partial x^3\right)^\gamma} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}. \quad (3.129)$$

В матричном виде выражения (3.128) и (3.129) имеют вид

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (3.130)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (3.131)$$

Подставляя выражение (3.126) и (3.130) в (3.114), получаем

$$\begin{aligned} \partial W &= \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\} \{\psi_{kl}\} dV + \\ &+ \iiint_V \lambda \{\xi\}^T \{\psi_\theta\} \delta \{\xi\} \{\psi_\theta\} dV = \\ &= \{\delta e_{ij}\}^T \left( \iiint_V 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T dV \right) \{e_{kl}\} + \\ &+ \delta \{\xi\}^T \left( \iiint_V \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T dV \right) \{\xi\} = \\ &= \{\delta e_{ij}\}^T [H^{ijkl}] \{e_{kl}\} + \delta \{\xi\}^T [H^\theta] \{\xi\}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Здесь

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (3.133)$$

$$[H^\theta] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (3.134)$$

С учетом принятых обозначений (3.133), (3.134) и (3.127), (3.131) выражение (3.132) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_t\} + \\ &+ \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_\theta^{s'}]^T [H^\theta] [F_\theta^t] \{\omega_t\}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Для построения матрицы жесткости КЭ необходимо перейти в выражении (3.135) от коэффициентов разложения  $\{\omega_{k'}\}$  выражения (3.115) к коэффициентам разложения для перемещений через интерполяционные полиномы Лагранжа вида

$$u_i = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L u_i^{(pqr)} \varphi^{(pqr)} = u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}, \quad (3.136)$$

где  $N_{(pqr)}$  – функции формы;  $u_i^{(pqr)}$  – узловые значения перемещений КЭ;  $\varphi^{(pqr)}$  – аппроксимирующая функция, задаваемая посредством одномерных полиномов Лагранжа в виде

$$N_{(pqr)} = \varphi^{(pqr)} = R_{1(p)}^M R_{2(q)}^N R_{3(r)}^L, \quad (3.137)$$

$$R_{i(j)}^k = \frac{\prod_{m=1}^k (x^i - x_{(m)}^i)}{(x^i - x_{(m)}^i) \prod_{r=1}^k (x_{(j)}^i - x_{(m)}^i + \delta_{(m)}^{(j)})}; \quad (3.138)$$

$M, N, L$  – максимальные степени аппроксимирующих полиномов в (3.136) относительно осей координат  $x^1, x^2, x^3$  соответственно. Составляя (3.115) и (3.136), записанных в матричном виде

$$u_{k'} = \{\omega\}^T \{\Psi\},$$

$$u_i = \{\omega\}^T \{N\},$$

замечаем, что в этом случае связь между аппроксимирующими функциями Лагранжа (3.137) и степенными (3.116) имеет вид

$$\{\omega_{k'}\} = [A] \{u_{k'}\}, \quad (3.139)$$

либо

$$\{N\} = [A]^T \{\Psi\}, \quad (3.140)$$

где  $[A]$  – матрица преобразования, подлежащая определению для конкретного вида аппроксимирующих функций.

Подставляя (3.139) в (3.135), имеем

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} + \\ &+ \delta \{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \\ &= \delta \{u_{s'}\} [G^{s't'}] \{u_{t'}\} + \delta \{u_{s'}\} [G_{\theta}^{s't'}] \{u_{t'}\}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

где  $[G^{s't'}]$  и  $[G_{\theta}^{s't'}]$  – матрицы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} [G^{s't'}] &= [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A]; \\ [G_{\theta}^{s't'}] &= [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Матрица жесткости КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] + [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \quad (3.143)$$

Таким образом, для конкретных видов КЭ и аппроксимирующих полиномов для получения матрицы жесткости необходимо построение специальных матриц  $[F_{ij}^s]$ ,  $[F_{\theta}^s]$ ,  $[A]$ .

### 3.3. Сингулярный криволинейный трехмерный конечный элемент треугольной формы

При решении задач механики деформированного твердого тела и механики разрушения параллелепипедными КЭ не всегда можно описать все существующее многообразие форм границ. При дискретизации конструкций следует стремиться не только к наилучшей аппроксимации разрешающих функций внутри элемента, но и к наиболее естественному описанию границ конструкций. В общем случае это невозможно сделать при помощи совокупности невырожденных параллелепипедных КЭ.

Эта проблема решается с помощью использования треугольных призматических КЭ или КЭ в виде тетраэдров. В частности, при рассмотрении конструкций, у которых наиболее естественной является цилиндрическая система координат (круговые плиты, круговые ци-

линдры и др.), элементы, примыкающие к вертикальной оси, вырождаются в треугольные, поэтому в таких случаях наиболее целесообразно использовать треугольные призматические КЭ.

Так, при разбиении конструкций с трещинами на параллелепипедные КЭ у вершины трещины используют вместо параллелепипедного КЭ два треугольных призматических КЭ [25]. Это не приводит к увеличению количества разрешающих уравнений, но позволяет повысить точность вычислений.

Рассмотрим криволинейный трехмерный КЭ треугольной формы (рис. 3.6).

Помещаем начало базисной системы  $z^{s'}$  и произвольной местной системы  $x_1, x_2, x_3$  в центр тяжести треугольной призмы размером  $2 \times 1 \times 1$ . Оси базисной и местной системы координат параллельны ребрам треугольной призмы (рис. 3.6).

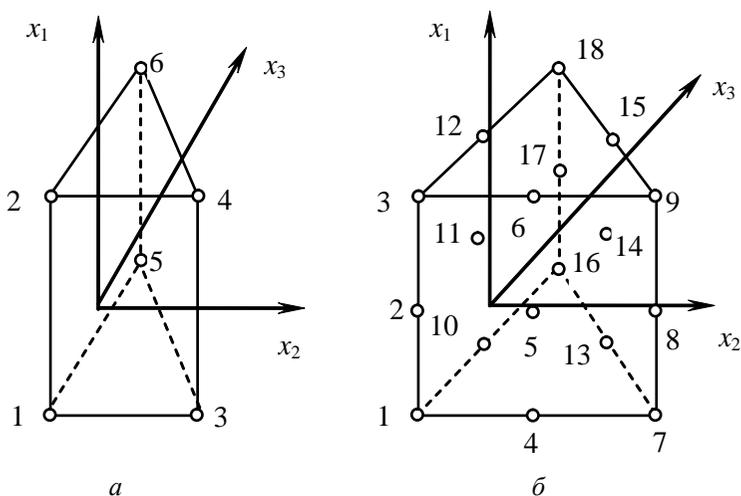


Рис. 3.6. Треугольный призматический конечный элемент:  
*a* – линейный; *б* – квадратичный

Аппроксимацию перемещений представим в виде:  
 для линейного треугольного призматического КЭ

$$u_{k'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi_{k'}^{(pqr)} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \\ + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)}; \quad (3.144)$$

для квадратичного треугольного призматического КЭ

$$u_{k'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi_{k'}^{(pqr)} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(200)} \psi^{(200)} + \\ + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(210)} \psi^{(210)} + \omega_{k'}^{(020)} \psi^{(020)} + \\ + \omega_{k'}^{(120)} \psi^{(120)} + \omega_{k'}^{(220)} \psi^{(220)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \\ + \omega_{k'}^{(201)} \psi^{(201)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)} + \omega_{k'}^{(211)} \psi^{(211)} + \\ + \omega_{k'}^{(002)} \psi^{(002)} + \omega_{k'}^{(102)} \psi^{(102)} + \omega_{k'}^{(202)} \psi^{(202)}, \quad (3.145)$$

где  $l, m, n$  – максимальные степени аппроксимирующих полиномов относительно осей координат  $x_1, x_2, x_3$  соответственно ( $p=0, l$ ;  $q=0, m$ ;  $r=0, n$ ; для линейного –  $q+r \leq 1$ , для специального и квадратичного –  $q+r \leq 2$ );  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;  $\psi^{(pqr)}$  – набор степенных координатных функций вида (3.116).

Запишем производные от функции перемещения внутри КЭ:

для линейного треугольного призматического КЭ

$$u_{s',1} = \omega_{s'}^{(100)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(101)} \psi^{(001)}, \\ u_{s',2} = \omega_{s'}^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(100)}, \quad (3.146) \\ u_{s',3} = \omega_{s'}^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)} \psi^{(100)};$$

для квадратичного треугольного призматического КЭ

$$u_{s',1} = \omega_{s'}^{(100)} + \omega_{s'}^{(200)} \psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(210)} \psi^{(110)} + \\ + \omega_{s'}^{(120)} \psi^{(020)} + \omega_{s'}^{(220)} \psi^{(120)} + \omega_{s'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(201)} \psi^{(101)} + \\ + \omega_{s'}^{(111)} \psi^{(011)} + \omega_{s'}^{(211)} \psi^{(111)} + \omega_{s'}^{(102)} \psi^{(002)} + \omega_{s'}^{(202)} \psi^{(102)}, \\ u_{s',2} = \omega_{s'}^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(210)} \psi^{(200)} + \omega_{s'}^{(020)} \psi^{(010)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega_{s'}^{(120)} \Psi^{(110)} + \omega_{s'}^{(220)} \Psi^{(210)} + \omega_{s'}^{(011)} \Psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(111)} \Psi^{(101)} + \\
 & + \omega_{s'}^{(211)} \Psi^{(201)}, \\
 u_{s',3} = & \omega_{s'}^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)} \Psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(201)} \Psi^{(200)} + \omega_{s'}^{(011)} \Psi^{(010)} + \\
 & + \omega_{s'}^{(111)} \Psi^{(110)} + \omega_{s'}^{(211)} \Psi^{(210)} + \omega_{s'}^{(002)} \Psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(102)} \Psi^{(101)} + \\
 & + \omega_{s'}^{(202)} \Psi^{(201)}. \tag{3.147}
 \end{aligned}$$

Функция изменения объема  $\theta$ , ответственная за слабую сжимаемость материала, принимается согласно выражению (3.128).

Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , которые в свою очередь могут быть представлены разложением в ряд Маклорена в окрестности начала координат, задаются следующей аппроксимацией:

для линейного треугольного КЭ

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} = & e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \Psi^{(010)} + e_{11}^{(001)} \Psi^{(001)}, \\
 \varepsilon_{22} = & e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \Psi^{(100)}, \\
 \varepsilon_{33} = & e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \Psi^{(100)}, \\
 \varepsilon_{12} = & e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{12}^{(010)} \Psi^{(010)} + e_{12}^{(001)} \Psi^{(001)}, \\
 \varepsilon_{13} = & e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{13}^{(010)} \Psi^{(010)} + e_{13}^{(001)} \Psi^{(001)}, \\
 \varepsilon_{23} = & e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \Psi^{(100)}; \tag{3.148}
 \end{aligned}$$

для квадратичного треугольного КЭ

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} = & e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{11}^{(010)} \Psi^{(010)} + e_{11}^{(110)} \Psi^{(110)} + \\
 & + e_{11}^{(020)} \Psi^{(020)} + e_{11}^{(120)} \Psi^{(120)} + e_{11}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{11}^{(101)} \Psi^{(101)} + \\
 & + e_{11}^{(011)} \Psi^{(011)} + e_{11}^{(111)} \Psi^{(111)} + e_{11}^{(002)} \Psi^{(002)} + e_{11}^{(102)} \Psi^{(102)}, \\
 \varepsilon_{22} = & e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{22}^{(200)} \Psi^{(200)} + e_{22}^{(010)} \Psi^{(010)} + \\
 & + e_{22}^{(110)} \Psi^{(110)} + e_{22}^{(210)} \Psi^{(210)} + e_{22}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \Psi^{(101)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e_{22}^{(201)} \Psi^{(201)}, \\
 \varepsilon_{33} = & e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{33}^{(200)} \Psi^{(200)} + e_{33}^{(010)} \Psi^{(010)} + \\
 & + e_{33}^{(110)} \Psi^{(110)} + e_{33}^{(210)} \Psi^{(210)} + e_{33}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{33}^{(101)} \Psi^{(101)} + \\
 & + e_{33}^{(201)} \Psi^{(201)}, \\
 \varepsilon_{12} = & e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{12}^{(200)} \Psi^{(200)} + e_{12}^{(010)} \Psi^{(010)} + \\
 & + e_{12}^{(110)} \Psi^{(110)} + e_{12}^{(210)} \Psi^{(210)} + e_{12}^{(020)} \Psi^{(020)} + e_{12}^{(120)} \Psi^{(120)} + \\
 & + e_{12}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{12}^{(101)} \Psi^{(101)} + e_{12}^{(201)} \Psi^{(201)} + e_{12}^{(011)} \Psi^{(011)} + \\
 & + e_{12}^{(111)} \Psi^{(111)} + e_{12}^{(002)} \Psi^{(002)} + e_{12}^{(102)} \Psi^{(102)}, \\
 \varepsilon_{13} = & e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{13}^{(200)} \Psi^{(200)} + e_{13}^{(010)} \Psi^{(010)} + \\
 & + e_{13}^{(110)} \Psi^{(110)} + e_{13}^{(210)} \Psi^{(210)} + e_{13}^{(020)} \Psi^{(020)} + e_{13}^{(120)} \Psi^{(120)} + \\
 & + e_{13}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{13}^{(101)} \Psi^{(101)} + e_{13}^{(201)} \Psi^{(201)} + e_{13}^{(011)} \Psi^{(011)} + \\
 & + e_{13}^{(111)} \Psi^{(111)} + e_{13}^{(002)} \Psi^{(002)} + e_{13}^{(102)} \Psi^{(102)}, \\
 \varepsilon_{23} = & e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \Psi^{(100)} + e_{23}^{(200)} \Psi^{(200)} + e_{23}^{(010)} \Psi^{(010)} + \\
 & + e_{23}^{(110)} \Psi^{(110)} + e_{23}^{(210)} \Psi^{(210)} + e_{23}^{(001)} \Psi^{(001)} + e_{23}^{(101)} \Psi^{(101)} + \\
 & + e_{23}^{(201)} \Psi^{(201)}, \tag{3.149}
 \end{aligned}$$

где  $e_{ij}^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения деформаций (3.124).

Расписав каждую из компонент  $e_{ij}^{(pqr)}$  (3.124), можно заметить, что не все коэффициенты  $\omega_s^{(pqr)}$  входят в разложение для аппроксимации перемещений (3.144), (3.145) и их производных (3.146), (3.147). Поэтому коэффициенты разложения  $e_{ij}^{(pqr)}$ , содержащие такие  $\omega_s^{(pqr)}$ ,

должны быть опущены из разложения (3.148), (3.149). В результате  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{23}$  будут вычисляться по формулам (3.148), (3.149), а остальные компоненты тензора деформаций примут вид:

для линейного треугольного призматического КЭ

$$\varepsilon_{12} = e_{12}^{(000)}, \quad \varepsilon_{13} = e_{13}^{(000)}; \quad (3.150)$$

для квадратичного треугольного призматического КЭ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{12}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{12}^{(110)}\psi^{(110)} + \\ & + e_{12}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{12}^{(101)}\psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{13} = & e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{13}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{13}^{(110)}\psi^{(110)} + \\ & + e_{13}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{13}^{(101)}\psi^{(101)}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Функцию перемещений трехмерного КЭ (3.144), (3.145), как и в предыдущих разделах, можно представить через функции формы  $N_i$ :

$$u_{s'} = \sum_{i=1}^k u_{s'i} N_i, \quad (3.152)$$

где  $k$  – количество узловых точек КЭ.

Учитывая изопараметричность КЭ, распределение координат  $Z^{s'}$  записываем с использованием тех же функций формы:

$$z^{s'} = \sum_{i=1}^k z_i^{s'} N_i. \quad (3.153)$$

Здесь функции формы  $N_i$  узлов для принятой местной системы координат будут иметь иной вид [26]:

для линейного треугольного призматического КЭ

$$\begin{aligned} N_1 = & (1 - x_1) \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \right), \\ N_2 = & (1 + x_1) \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_3 &= (1 - x_1) \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} x_2 \right), \\
 N_4 &= (1 + x_1) \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} x_2 \right), \\
 N_5 &= (1 - x_1) \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} x_3 \right), \\
 N_6 &= (1 + x_1) \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} x_3 \right); \tag{3.154}
 \end{aligned}$$

для сингулярного и квадратичного треугольного призматического КЭ

$$\begin{aligned}
 N_1 &= x_1 (1 - x_1) \left( \frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_2 &= -2(1 + x_1)(1 - x_1) \left( \frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_3 &= -x_1(1 + x_1) \left( \frac{1}{6} + x_2 + x_3 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_4 &= -2x_1(1 - x_1) \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_5 &= 4(1 + x_1)(1 - x_1) \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_6 &= 2x_1(1 + x_1) \left( \frac{1}{3} + x_3 \right) \left( \frac{1}{3} - x_2 - x_3 \right), \\
 N_7 &= x_1(1 - x_1) \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( \frac{1}{6} - x_2 \right), \\
 N_8 &= -2(1 + x_1)(1 - x_1) \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( \frac{1}{6} - x_2 \right), \\
 N_9 &= -x_1(1 + x_1) \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( \frac{1}{6} - x_2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{10} &= -2x_1(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{3}-x_2-x_3\right), \\
N_{11} &= 4(1+x_1)(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{3}-x_2-x_3\right), \\
N_{12} &= 2x_1(1+x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{3}-x_2-x_3\right), \\
N_{13} &= -2x_1(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_2\right)\left(\frac{1}{3}+x_3\right), \\
N_{14} &= 4(1+x_1)(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_2\right)\left(\frac{1}{3}+x_3\right), \\
N_{15} &= 2x_1(1+x_1)\left(\frac{1}{3}+x_2\right)\left(\frac{1}{3}+x_3\right), \\
N_{16} &= x_1(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{6}-x_3\right), \\
N_{17} &= -2(1+x_1)(1-x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{6}-x_3\right), \\
N_{18} &= -x_1(1+x_1)\left(\frac{1}{3}+x_3\right)\left(\frac{1}{6}-x_3\right). \tag{3.155}
\end{aligned}$$

Из аналитических решений задач механики разрушения, как уже упоминалось, известно, что напряжения и деформации около вершины трещины пропорциональны  $1/\sqrt{r}$ , где  $r$  – расстояние от точки конструкции до вершины трещины. Для того чтобы смоделировать наиболее точно эту особенность, используется два способа: сгущение сетки разбиения у вершины трещины [4] или применение сингулярных конечных элементов около фронта трещины [7, 11, 25].

Первый способ приводит к необходимости решения громоздких систем линейных уравнений и, как следствие, к увеличению времени счета.

Использование сингулярных конечных элементов позволяет избежать этих трудностей. При вычислении матрицы жесткости сингу-

лярных конечных элементов в матрицу вводится функция перемещений, которая содержит член, пропорциональный  $\sqrt{r}$ . Этого можно достигнуть смещением промежуточных узлов изопараметрического квадратичного элемента на  $1/4$  длины стороны КЭ в местной системе координат [11], что приводит к изменению функций формы. Тот же результат достигается смещением промежуточных узлов на  $1/4$  длины стороны КЭ в направлении к вершине трещины в базисной (декартовой) системе координат (рис. 3.7).

Второй способ гораздо проще в реализации на ЭВМ. Поступим так же и для треугольных КЭ, как показано для сингулярного треугольного квадратичного элемента (рис. 3.7). В этом случае в выражении (3.153)  $z_i^{s'}$  для смещенных узлов запишется в виде

$$\begin{aligned} z_4^{s'} &= (3z_1^{s'} + z_7^{s'})/4, & z_{10}^{s'} &= (3z_1^{s'} + z_{16}^{s'})/4, \\ z_5^{s'} &= (3z_2^{s'} + z_8^{s'})/4, & z_{11}^{s'} &= (3z_2^{s'} + z_{17}^{s'})/4, \\ & & z_6^{s'} &= (3z_3^{s'} + z_9^{s'})/4, \\ & & z_{12}^{s'} &= (3z_3^{s'} + z_{18}^{s'})/4. \end{aligned} \tag{3.156}$$

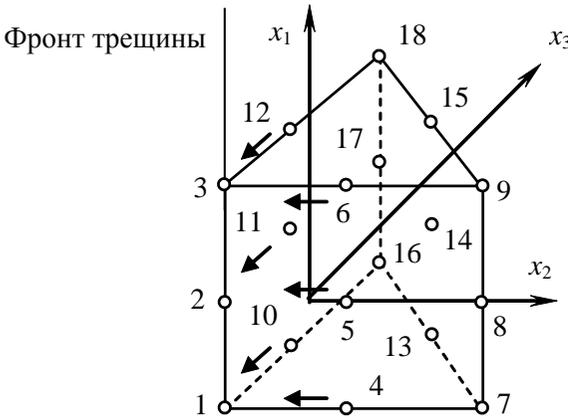


Рис. 3.7. Сингулярный треугольный квадратичный конечный элемент

Тогда коэффициенты  $b_{(\mu\nu\lambda)}$  (3.125) примут вид

$$\begin{aligned}
 b_{(100)} = \frac{\partial z^{s'}}{\partial x_1} = & \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 \right) \left( (1 - 2x_1)z_1^{s'} + \right. \\
 & + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'} \left. \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{3}x_3 - x_2^2 - x_2x_3 \right) \left( (4x_1 - 2)(z_4^{s'} + \right. \\
 & + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) - 8x_1(z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + (4x_1 + 2)(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - \\
 & - z_9^{s'})) \left. \right) + \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{6}x_2 - x_2^2 \right) \left( (1 - 2x_1)z_7^{s'} + 4x_1z_8^{s'} - (1 + 2x_1)z_9^{s'} \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{3}x_2 - x_2x_3 - x_3^2 \right) \left( (4x_1 - 2)(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) - 8x_1(z_{11}^{s'} + \right. \\
 & + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - (4x_1 + 2)(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'})) \left. \right) + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \right. \\
 & + x_2x_3 \left. \right) \left( (4x_1 - 2)z_{13}^{s'} - 8x_1z_{14}^{s'} + (4x_1 + 2)z_{15}^{s'} \right) + \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{6}x_3 - x_3^2 \right) \times \\
 & \times \left( (1 - 2x_1)z_{16}^{s'} + 4x_1z_{17}^{s'} - (1 + 2x_1)z_{18}^{s'} \right), \\
 b_{(010)} = \frac{\partial z^{s'}}{\partial x_2} = & \left( \frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3 \right) \left( (x_1 - x_1^2)z_1^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_2^{s'} - (x_1 + \right. \\
 & + x_1^2)z_3^{s'} \left. \right) - (2x_2 + x_3) \left( (2x_1^2 - 2x_1)(z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) + 4(1 - \right. \\
 & - x_1^2)(z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + 2(x_1 + x_1^2)(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'})) \left. \right) - \\
 & - \left( \frac{1}{6} + 2x_2 \right) \left( (x_1 - x_1^2)z_7^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_8^{s'} - (x_1 + x_1^2)z_9^{s'} \right) - \left( \frac{1}{3} + x_3 \right) \times \\
 & \times \left( 2(x_1^2 - x_1)(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) + 4(1 - x_1^2)(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - \right. \\
 & - 2(x_1 + x_1^2)(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'})) \left. \right) + \left( \frac{1}{3} + x_3 \right) \left( 2(x_1^2 - x_1)z_{13}^{s'} + 4(1 - \right. \\
 & - x_1^2)z_{14}^{s'} + 2(x_1 + x_1^2)z_{15}^{s'} \left. \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{(001)} &= \frac{\partial z^{s'}}{\partial x_3} = \left( \frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3 \right) \left( (x_1 - x_1^2) z_1^{s'} + 2(x_1^2 - 1) z_2^{s'} - \right. \\
 &\quad \left. - (x_1 + x_1^2) z_3^{s'} \right) - \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( (2x_1^2 - 2x_1) (z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) + \right. \\
 &\quad \left. + 4(1 - x_1^2) (z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + 2(x_1 + x_1^2) (z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'})) \right) - \\
 &\quad - (x_2 + 2x_3) \left( 2(x_1^2 - x_1) (z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) + 4(1 - x_1^2) (z_{11}^{s'} + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - 2(x_1 + x_1^2) (z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'})) \right) + \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \times \\
 &\quad \times \left( 2(x_1^2 - x_1) z_{13}^{s'} + 4(1 - x_1^2) z_{14}^{s'} + 2(x_1 + x_1^2) z_{15}^{s'} \right) - \left( \frac{1}{6} + 2x_3 \right) \times \\
 &\quad \left( (x_1 - x_1^2) z_{16}^{s'} + 2(x_1^2 - 1) z_{17}^{s'} - (x_1 + x_1^2) z_{18}^{s'} \right), \\
 \\
 b_{(200)} &= \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_1^2} = \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{6} x_3 - x_2^2 - 2x_2 x_3 - x_3^2 \right) \left( -2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - \right. \\
 &\quad \left. - 2z_3^{s'} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{3} x_3 - x_2^2 - x_2 x_3 \right) \left( 4(z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) - 8(z_5^{s'} + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + 4(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'})) \right) + \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{6} x_2 - x_2^2 \right) \left( -2z_7^{s'} + \right. \\
 &\quad \left. + 4z_8^{s'} - 2z_9^{s'} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{3} x_2 - x_2 x_3 - x_3^2 \right) \left( 4(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) - \right. \\
 &\quad \left. - 8(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - 4(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'})) \right) + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 + \right. \\
 &\quad \left. + x_2 x_3 \right) \left( 4z_{13}^{s'} - 8z_{14}^{s'} + 4z_{15}^{s'} \right) + \left( \frac{1}{18} - \frac{1}{6} x_3 - x_3^2 \right) \left( -2z_{16}^{s'} + 4z_{17}^{s'} - 2z_{18}^{s'} \right), \\
 \\
 b_{(020)} &= \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_2^2} = -2 \left( (x_1 - x_1^2) z_1^{s'} + 2(x_1^2 - 1) z_2^{s'} - (x_1 + x_1^2) z_3^{s'} \right) - 2 \left( (2x_1^2 - \right.
 \end{aligned}$$

$$-2x_1)(z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) + 4(1 - x_1^2)(z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + 2(x_1 + x_1^2)(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'})) - 2((x_1 - x_1^2)z_7^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_8^{s'} - (x_1 + x_1^2)z_9^{s'}),$$

$$b_{(002)} = \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_3^2} = -2((x_1 - x_1^2)z_1^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_2^{s'} - (x_1 + x_1^2)z_3^{s'}) - 2(2(x_1^2 - x_1)(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) + 4(1 - x_1^2)(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - 2(x_1 + x_1^2)(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}))) - 2((x_1 - x_1^2)z_{16}^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_{17}^{s'} - (x_1 + x_1^2)z_{18}^{s'}),$$

$$b_{(110)} = \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3\right) \left((1 - 2x_1)z_1^{s'} + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'}\right) - (2x_2 + x_3) \left((4x_1 - 2)(z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) - 8x_1(z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + (4x_1 + 2)(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'}))\right) - \left(\frac{1}{6} + 2x_2\right) \left((1 - 2x_1)z_7^{s'} + 4x_1z_8^{s'} - (1 + 2x_1)z_9^{s'}\right) - \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left((4x_1 - 2)(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) - 8x_1(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - (4x_1 + 2)(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}))\right) + \left(\frac{1}{3} + x_3\right) \left((4x_1 - 2)z_{13}^{s'} - 8x_1z_{14}^{s'} + (4x_1 + 2)z_{15}^{s'}\right),$$

$$b_{(101)} = \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_1 \partial x_3} = \left(\frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3\right) \left((1 - 2x_1)z_1^{s'} + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'}\right) - \left(\frac{1}{3} + x_2\right) \left((4x_1 - 2)(z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'})) - 8x_1(z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'})) + (4x_1 + 2)(z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'}))\right) - (x_2 + 2x_3) \left((4x_1 - 2)(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) - 8x_1(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'})) - (4x_1 + 2)(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}))\right) +$$

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( (4x_1 - 2)z_{13}^{s'} - 8x_1z_{14}^{s'} + (4x_1 + 2)z_{15}^{s'} \right) - \left( \frac{1}{6} + 2x_3 \right) \times \\ & \quad \times \left( (1 - 2x_1)z_{16}^{s'} + 4x_1z_{17}^{s'} - (1 + 2x_1)z_{18}^{s'} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(011)} = \frac{\partial^2 z^{s'}}{\partial x_2 \partial x_3} = & -2 \left( (x_1 - x_1^2)z_1^{s'} + 2(x_1^2 - 1)z_2^{s'} - (x_1 + x_1^2)z_3^{s'} \right) - \\ & - \left( (2x_1^2 - 2x_1) \left( z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'}) \right) + 4(1 - x_1^2) \left( z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'}) \right) + \right. \\ & + 2(x_1 + x_1^2) \left( z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'}) \right) \left. \right) - \left( 2(x_1^2 - x_1) \left( z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'}) \right) + \right. \\ & + 4(1 - x_1^2) \left( z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'}) \right) - 2(x_1 + x_1^2) \left( z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}) \right) \left. \right) + \\ & + \left( 2(x_1^2 - x_1)z_{13}^{s'} + 4(1 - x_1^2)z_{14}^{s'} + 2(x_1 + x_1^2)z_{15}^{s'} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(111)} = \frac{\partial^3 z^{s'}}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = & -2 \left( (1 - 2x_1)z_1^{s'} + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'} \right) - \left( (4x_1 - 2) \times \right. \\ & \times \left( z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'}) \right) - 8x_1 \left( z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'}) \right) + (4x_1 + 2) \left( z_6^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - \right. \\ & \left. - z_9^{s'}) \right) \left. \right) - \left( (4x_1 - 2) \left( z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'}) \right) - 8x_1 \left( z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'}) \right) - \right. \\ & - (4x_1 + 2) \left( z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}) \right) \left. \right) + \left( (4x_1 - 2)z_{13}^{s'} - 8x_1z_{14}^{s'} + (4x_1 + 2)z_{15}^{s'} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(120)} = \frac{\partial^3 z^{s'}}{\partial x_1 \partial x_2^2} = & -2 \left( (1 - 2x_1)z_1^{s'} + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'} \right) - 2 \left( (4x_1 - \right. \\ & - 2) \left( z_4^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_7^{s'}) \right) - 8x_1 \left( z_5^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_8^{s'}) \right) + (4x_1 + 2) \left( z_6^{s'} + \right. \\ & \left. + \alpha(z_3^{s'} - z_9^{s'}) \right) \left. \right) - 2 \left( (1 - 2x_1)z_7^{s'} + 4x_1z_8^{s'} - (1 + 2x_1)z_9^{s'} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(102)} = \frac{\partial^3 z^{s'}}{\partial x_1 \partial x_3^2} = & -2 \left( (1 - 2x_1)z_1^{s'} + 4x_1z_2^{s'} - (1 + 2x_1)z_3^{s'} \right) - 2 \left( (4x_1 - \right. \\ & - 2) \left( z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'}) \right) - 8x_1 \left( z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'}) \right) - (4x_1 + 2) \left( z_{12}^{s'} + \right. \\ & \left. + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'}) \right) \left. \right) - 2 \left( (1 - 2x_1)z_{16}^{s'} + 4x_1z_{17}^{s'} - (1 + 2x_1)z_{18}^{s'} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{(210)} = \frac{\partial^3 z^{s'}}{\partial x_1^2 \partial x_2} = & \left( \frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3 \right) \left( -2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - 2z_3^{s'} \right) - (2x_2 + \\
 & + x_3) \left( 4 \left( z_4^{s'} + \alpha \left( z_1^{s'} - z_7^{s'} \right) \right) - 8 \left( z_5^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_8^{s'} \right) \right) + 4 \left( z_6^{s'} + \right. \\
 & \left. + \alpha \left( z_3^{s'} - z_9^{s'} \right) \right) - \left( \frac{1}{6} + 2x_2 \right) \left( -2z_7^{s'} + 4z_8^{s'} - 2z_9^{s'} \right) - \left( \frac{1}{3} + x_3 \right) \left( 4 \left( z_{10}^{s'} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha \left( z_1^{s'} - z_{16}^{s'} \right) \right) - 8 \left( z_{11}^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_{17}^{s'} \right) \right) - 4 \left( z_{12}^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - z_{18}^{s'} \right) \right) \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{3} + x_3 \right) \left( 4z_{13}^{s'} - 8z_{14}^{s'} + 4z_{15}^{s'} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{(201)} = \frac{\partial^3 z^{s'}}{\partial x_1^2 \partial x_3} = & \left( \frac{1}{6} - 2x_2 - 2x_3 \right) \left( -2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - 2z_3^{s'} \right) - \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( 4 \left( z_4^{s'} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha \left( z_1^{s'} - z_7^{s'} \right) \right) - 8 \left( z_5^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_8^{s'} \right) \right) + 4 \left( z_6^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - z_9^{s'} \right) \right) \right) - (x_2 + \\
 & + 2x_3) \left( 4 \left( z_{10}^{s'} + \alpha \left( z_1^{s'} - z_{16}^{s'} \right) \right) - 8 \left( z_{11}^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_{17}^{s'} \right) \right) - 4 \left( z_{12}^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - z_{18}^{s'} \right) \right) \right) + \left( \frac{1}{3} + x_2 \right) \left( 4z_{13}^{s'} - 8z_{14}^{s'} + 4z_{15}^{s'} \right) - \left( \frac{1}{6} + 2x_3 \right) \left( -2z_{16}^{s'} + 4z_{17}^{s'} - 2z_{18}^{s'} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{(211)} = \frac{\partial^4 z^{s'}}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} = & -2 \left( -2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - 2z_3^{s'} \right) - 4 \left( z_4^{s'} + \alpha \left( z_1^{s'} - z_7^{s'} \right) \right) - \\
 & - 8 \left( z_5^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_8^{s'} \right) \right) + 4 \left( z_6^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - z_9^{s'} \right) \right) - 4 \left( z_{10}^{s'} + \alpha \left( z_1^{s'} - z_{16}^{s'} \right) \right) - \\
 & - 8 \left( z_{11}^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_{17}^{s'} \right) \right) - 4 \left( z_{12}^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - z_{18}^{s'} \right) \right) + \left( 4z_{13}^{s'} - 8z_{14}^{s'} + 4z_{15}^{s'} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{(220)} = \frac{\partial^4 z^{s'}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = & -2 \left( -2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - 2z_3^{s'} \right) - 2 \left( 4 \left( z_4^{s'} + \alpha \left( z_1^{s'} - z_7^{s'} \right) \right) - \right. \\
 & \left. - 8 \left( z_5^{s'} + \alpha \left( z_2^{s'} - z_8^{s'} \right) \right) + 4 \left( z_6^{s'} + \alpha \left( z_3^{s'} - z_9^{s'} \right) \right) \right) - 2 \left( -2z_7^{s'} + 4z_8^{s'} - 2z_9^{s'} \right),
 \end{aligned}$$

$$b_{(202)} = \frac{\partial^4 z^{s'}}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} = -2(-2z_1^{s'} + 4z_2^{s'} - 2z_3^{s'}) - 2(4(z_{10}^{s'} + \alpha(z_1^{s'} - z_{16}^{s'})) - 8(z_{11}^{s'} + \alpha(z_2^{s'} - z_{17}^{s'}))) - 4(z_{12}^{s'} + \alpha(z_3^{s'} - z_{18}^{s'})) - 2(-2z_{16}^{s'} + 4z_{17}^{s'} - 2z_{18}^{s'}), \quad (3.157)$$

где  $\alpha = 0$  для квадратичного треугольного элемента, и  $\alpha = 1/2$  для сингулярного квадратичного треугольного элемента.

Как и ранее, матрица  $[F_{ij}^{s'}]$  представляет собой матрицу связи коэффициентов разложения  $\{e_{ij}\}$  компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  с коэффициентом разложения  $\{\omega_{s'}\}$  полей перемещений  $u_{s'}$  и определяется из матричного уравнения (3.127). Для нахождения коэффициентов матриц  $[F_{ij}^{s'}]$  треугольного призматического КЭ воспользуемся формулами (3.148), (3.150) для линейного или (3.149) и (3.151) для квадратичного КЭ и сингулярного квадратичного КЭ.

Для построения матрицы  $[F_0^{s'}]$ , показывающей связь коэффициентов разложения  $\{\phi\}$  функции изменения объема  $\theta$  и коэффициентов разложения  $\{\omega_{s'}\}$  полей перемещений  $u_{s'}$ , воспользуемся уравнением (3.131).

Поступая аналогичным образом, получаем выражение для функции изменения объема в случае квадратичного закона аппроксимации перемещения для треугольного КЭ в виде

$$\begin{aligned} \theta = & (e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{11}^{(110)}\psi^{(110)} + \\ & + e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(101)}\psi^{(101)})g^{11} + (e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ & + e_{22}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{22}^{(110)}\psi^{(110)} + e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)})g^{22} + \\ & + (e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ & + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)})g^{33}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Матрица  $[A]$  – матрица перехода от одной системы координатных функций  $\{N\}$  к другой  $\{\psi\}$  – строится на основе (3.140) для

линейного, квадратичного и сингулярного квадратичного КЭ и приведена в работе [10].

С учетом полученных теперь матриц  $[F_{ij}^{s'}]$ ,  $[F_0^{s'}]$ ,  $[A]$  по формуле (3.143) строятся матрицы жесткости линейного треугольного призматического КЭ –  $18 \times 18$ , квадратичного и сингулярного квадратичного –  $54 \times 54$ .

Таким образом, получены соотношения для матриц жесткости линейного, квадратичного и сингулярного квадратичного треугольного конечного элемента для исследования напряженно-деформированного состояния и параметров механики разрушения элементов конструкций из слабосжимаемых материалов.

### 3.4. Примеры расчета МКЭ на основе моментной схемы

Рассмотрим применение изложенной методики и ее программной реализации [21, 23] к решению ряда задач.

**Задача 1.** *Исследование изгиба консольной балки силой, приложенной на конце.*

Размеры консольной балки: длина  $l = 8$  см, ширина  $b = 1$  см, высота  $a = 1$  см, сила, приложенная на конце балки, равна  $0,0008$  МПа, модуль упругости материала балки  $E = 2$  МПа. Расчетная схема конструкции представлена на рис.3.8.

Прогиб срединной линии на конце балки при аналитическом решении данной задачи [33] не зависит от коэффициента Пуассона и составляет  $w = 0,8192$  м.

Результаты численного исследования приведены в табл. 3.1.

Из приведенных данных видно, что квадратичный КЭ на основе моментной схемы дает наилучший результат.

**Задача 2.** *Расчет круглой плиты, защемленной по контуру, под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки.*

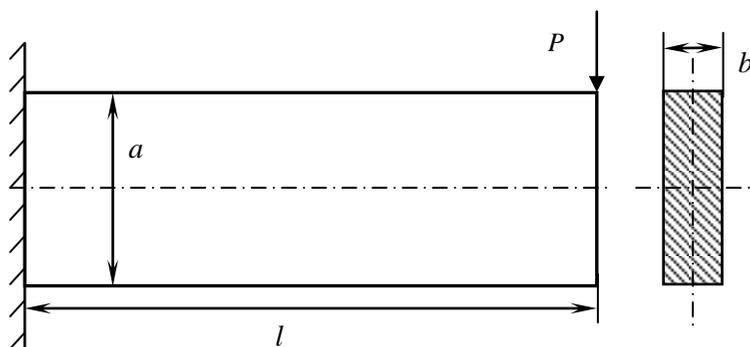


Рис. 3.8. Расчетная схема изгиба консольной балки силой, приложенной на конце

Таблица 3.1. –

Результаты расчета консольной балки

Коэффициент Пуассона $\nu$	Сетка разбиения	Линейный треугольный КЭ $w$ , см		Квадратичный треугольный КЭ $w$ , см	
		МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
0,3	5×5×3	0,308	0,615	0,712	0,638
	5×7×3	0,454	0,693	0,734	0,679
	5×9×3	0,546	0,723	0,741	0,706
	5×11×3	0,603	0,738	0,744	0,723
	7×13×3	0,639	0,745	0,746	0,734
	7×21×3	0,699	0,756	0,749	0,752
0,49	5×5×3	0,204	0,416	0,501	0,568
	5×7×3	0,312	0,560	0,629	0,665
	5×9×3	0,393	0,641	0,689	0,717
	5×11×3	0,451	0,689	0,722	0,746
	7×13×3	0,493	0,718	0,742	0,765
	7×21×3	0,581	0,768	0,776	0,796
0,499	5×5×3	0,093	0,309	0,418	0,561
	5×7×3	0,168	0,493	0,581	0,661
	5×9×3	0,236	0,597	0,657	0,714
	5×11×3	0,292	0,658	0,698	0,745
	7×13×3	0,337	0,695	0,723	0,763
	7×21×3	0,400	0,756	0,767	0,795

Размеры плиты: радиус  $R=0,3$  м, толщина  $t=0,01$  м, поверхностная нагрузка  $q=0,0002$  МПа, модуль упругости материала балки  $E=2$  МПа. Расчетная схема показана на рис. 3.9.

На рис. 3.10 показана зависимость между максимальным прогибом плиты и коэффициентом Пуассона  $\nu$  при расчете линейными КЭ треугольной формы.

Аналитическое решение: максимальный прогиб в центре плиты [33] при  $\nu=0,3$   $w=0,1382$  м, при  $\nu=0,49$   $w=0,1156$  м, при  $\nu=0,499$   $w=0,1141$  м. Результаты численного исследования приведены в табл. 3.2. Рассчитывалась четвертая часть конструкции.

Результаты расчета показывают, что наилучший результат дает применение квадратичных КЭ на основе моментной схемы.

**Задача 3.** Расчет квадратной плиты, защемленной по контуру, под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки.

Таблица 3.2. –

Результаты расчета круглой плиты, защемленной по контуру

Коэффициент Пуассона $\nu$	Сетка разбиения	Линейный треугольный КЭ $w$ , см		Квадратичный треугольный КЭ $w$ , см	
		МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
0,3	3×5×5	0,0095	0,156	0,091	0,0970
	3×7×7	0,0196	0,162	0,120	0,0976
	5×9×9	0,0316	0,152	0,130	0,0982
	5×11×11	0,0433	0,141	0,134	0,103
	5×15×15	0,0649	0,135	0,137	0,121
0,49	3×5×5	0,0076	0,058	0,043	0,0573
	3×7×7	0,0123	0,063	0,064	0,0688
	5×9×9	0,0228	0,073	0,080	0,0731
	5×11×11	0,0290	0,079	0,087	0,0814
	5×15×15	0,039	0,091	0,098	0,107
0,499	3×5×5	0,0025	0,018	0,017	0,0486
	3×7×7	0,0030	0,027	0,041	0,0602
	5×9×9	0,0069	0,042	0,064	0,0676
	5×11×11	0,0080	0,054	0,077	0,0770
	5×15×15	0,0096	0,076	0,091	0,098

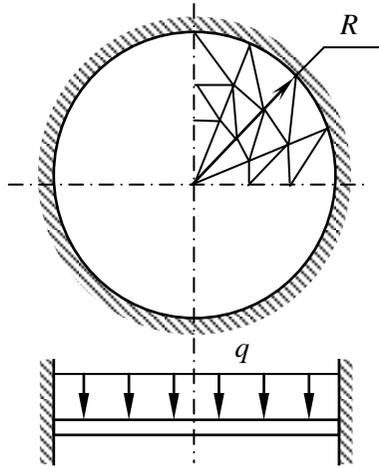


Рис. 3.9. Расчетная схема круглой плиты, защемленной по контуру, под действием равномерно распределенной загрузки

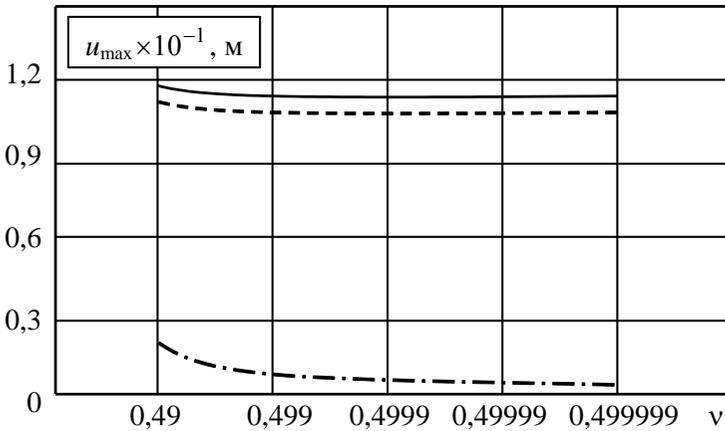


Рис. 3.10. Зависимость прогиба круглой плиты, защемленной по контуру, от  $\nu$ : — — аналитическое решение; - - - - МКЭ; - · - · - МКЭ

Размеры плиты: сторона плиты  $a = 0,2$  м, толщина  $t = 0,01$  м, поверхностная нагрузка  $q = 0,002$  МПа, модуль упругости материала балки  $E = 2$  МПа. Расчетная схема показана на рис. 3.11.

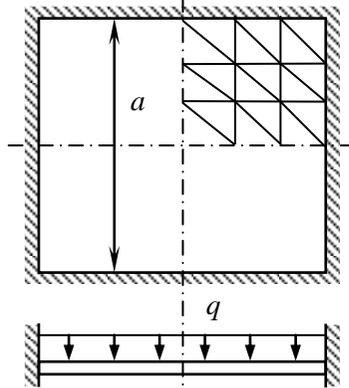


Рис. 3.11. Расчетная схема квадратной плиты, защемленной по контуру, под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки

Аналитическое решение: максимальный прогиб в центре плиты [33] при  $\nu = 0,3$   $w = 0,0224$  м, при  $\nu = 0,49$   $w = 0,0187$  м, при  $\nu = 0,499$   $w = 0,0185$  м. Результаты численного исследования приведены в табл. 3.3. Рассчитывалась четвертая часть конструкции.

Наилучший результат при расчете плиты из слабосжимаемых материалов дает квадратичный конечный элемент на основе моментной схемы, а при расчете плиты из сжимаемых материалов – стандартный конечный элемент.

**Задача 4.** Исследование вязкоупругого поведения полого цилиндра, защемленного по внешнему контуру, под внутренним давлением.

Размеры цилиндра: внутренний радиус  $R_b = 0,025$  м, внешний радиус  $R_n = 0,1$  м, длина  $l = 0,01$  м, модуль упругости материала цилиндра  $E = 2,6$  МПа, внутреннее давление  $p = 1$  МПа. Расчетная схема приведена на рис. 3.12.

Таблица 3.3. –

Результаты расчета прямоугольной плиты, заземленной по контуру

Коэффициент Пуассона $\nu$	Сетка разбиения	Линейный треугольный КЭ $w, \text{ см}$		Квадратичный треугольный КЭ $w, \text{ см}$	
		МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
0,3	3×5×5	0,0063	0,0109	0,0155	0,0270
	3×7×7	0,0102	0,0152	0,0201	0,0267
	3×9×9	0,0130	0,0180	0,0216	0,0264
	3×11×11	0,0152	0,0198	0,0221	0,0258
	5×15×15	0,0189	0,0219	0,0224	0,0255
0,49	3×5×5	0,0031	0,0087	0,0095	0,0119
	3×7×7	0,0039	0,0125	0,0128	0,0141
	3×9×9	0,0044	0,0149	0,0146	0,015
	3×11×11	0,0047	0,0166	0,0157	0,016
	5×15×15	0,0050	0,0186	0,0171	0,0177
0,499	3×5×5	0,0012	0,0053	0,0062	0,0053
	3×7×7	0,0013	0,0085	0,0102	0,0090
	3×9×9	0,0014	0,0109	0,0129	0,0121
	3×11×11	0,0014	0,0127	0,0144	0,0140
	5×15×15	0,0025	0,0151	0,0161	0,0161

Аналитическое решение [19]: при  $\nu = 0,3$   $u = 0,01035$  м, при  $\nu = 0,49$   $u = 0,00326$  м. В качестве ядра релаксации используем ядро релаксации Ржаницина А.Р. с реологическими параметрами:  $\alpha = 0,3$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\chi = 0,0765$ .

Результаты расчетов представлены для  $\nu = 0,3$  на рис. 3.13, 3.15, 3.17, а для  $\nu = 0,49$  на рис. 3.14, 3.16, 3.18, 3.19. Задача решалась в предположении отсутствия релаксации объемного модуля.

Из приведенных решений видно, что при исследовании вязкоупругого поведения моментная схема дает предпочтительные результаты по сравнению с методом стандартных конечных элементов.

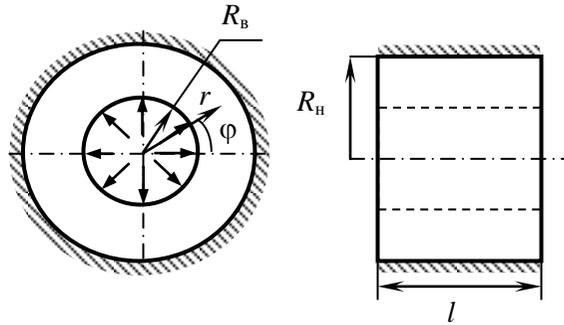


Рис. 3.12. Расчетная схема полого цилиндра, заземленного по внешнему контуру, под внутренним давлением

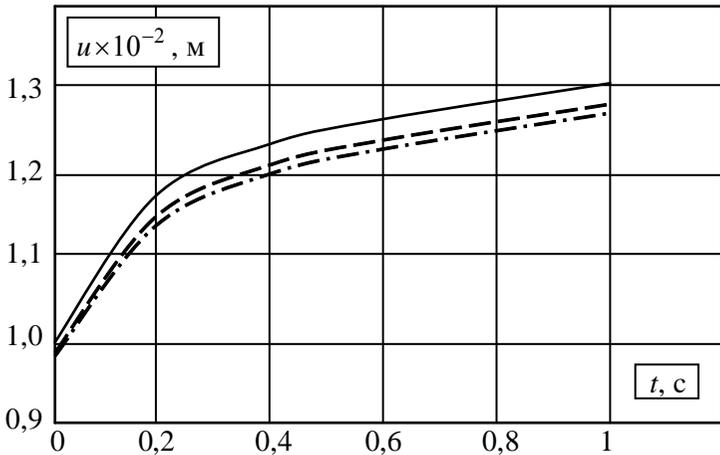


Рис. 3.13. Зависимость перемещений внутренней поверхности цилиндра от времени при  $\nu=0,3$ : — — аналитическое решение [19];  
 - - - - МСКЭ; - · - · МКЭ

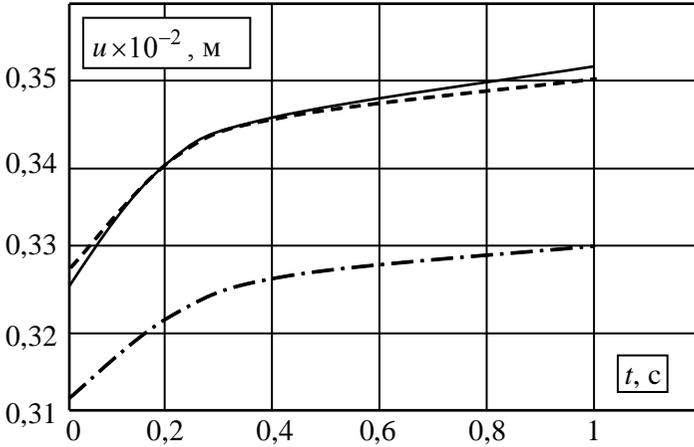


Рис. 3.14. Зависимость перемещений внутренней поверхности цилиндра от времени при  $\nu=0,49$ : — — аналитическое решение [19];  
 - - - - МКЭ; - · - · - МСКЭ

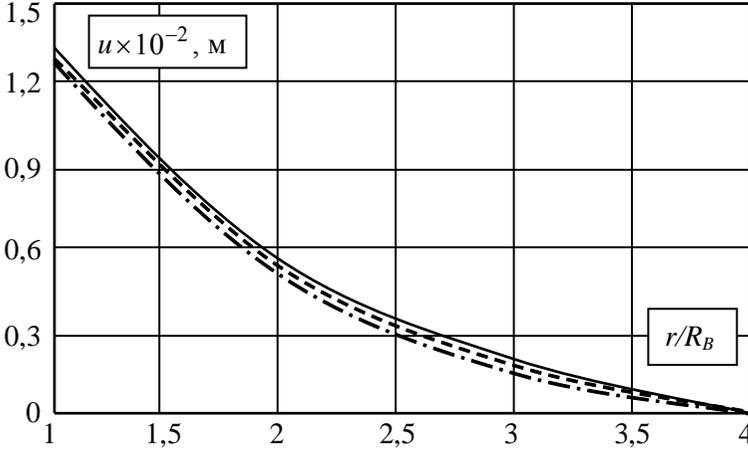


Рис. 3.15. Распределение перемещений по толщине цилиндра при  $\nu=0,3$  для  $t=1$  с: — — аналитическое решение [19];  
 - - - - МКЭ; - · - · - МСКЭ

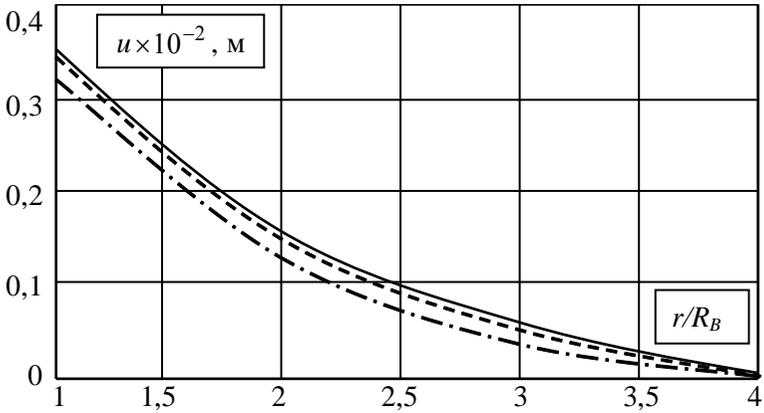


Рис. 3.16. Распределение перемещений по толщине цилиндра при  $\nu=0,49$  для  $t=1$  с: — — аналитическое решение [19]; - - - МСКЭ; - · - · - МКЭ

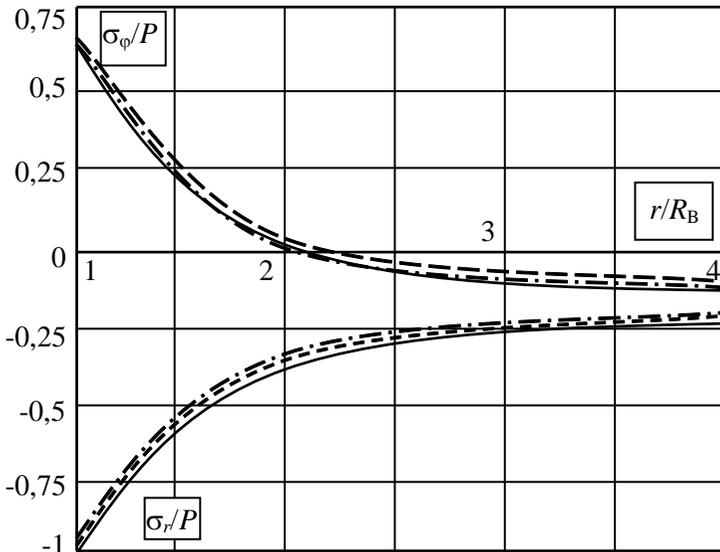


Рис. 3.17. Распределение напряжений по толщине цилиндра при  $\nu=0,3$  для  $t=1$  с: — — аналитическое решение [19]; - - - МСКЭ; - · - · - МКЭ

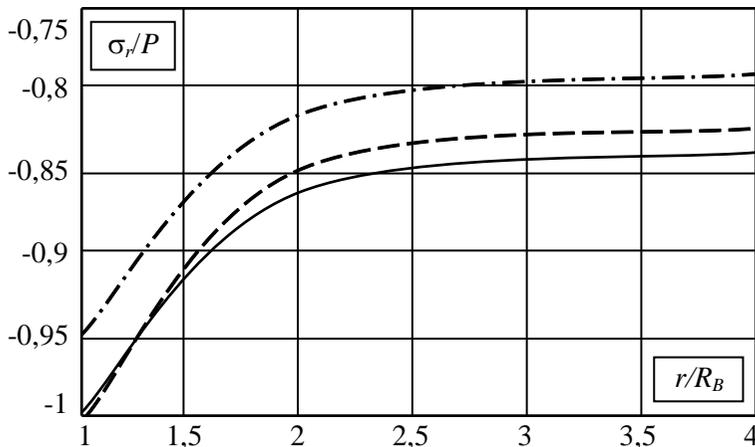


Рис. 3.18. Распределение радиальных напряжений по толщине цилиндра при  $\nu=0,49$  для  $t=1$  с: — — аналитическое решение [19]; - - - - МКЭ; - · - · - МКЭЭ

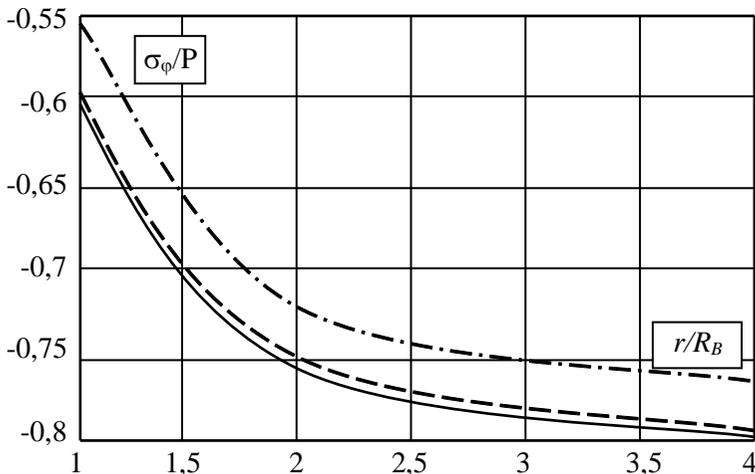


Рис. 3.19. Распределение тангенциальных напряжений по толщине цилиндра при  $\nu=0,49$  для  $t=1$  с: — — аналитическое решение [19]; - - - - МКЭ; - · - · - МКЭЭ

Использование МСКЭ для расчета конструкций, подверженных воздействию изгибающих моментов, значительно улучшает результаты численного расчета, приближая их к аналитическим.

Расчет конструкций из материала с коэффициентом Пуассона более 0,49 традиционным МКЭ дает заведомо неверный результат. Использование МСКЭ с тройной аппроксимацией перемещений, деформаций и функции изменения объема позволяет получать приемлемые результаты при расчете слабосжимаемых конструкций.

Во всех приведенных выше задачах треугольные призматические КЭ располагались так, чтобы направление прикладываемых нагрузок совпадало с направлением высоты призмы, т.е. по направлению оси  $x_1$ . При расчете тех же конструкций, но с другим расположением треугольных призматических КЭ (т.е. когда направление нагрузки совпадает с направлением оси  $x_2$  или  $x_3$ ), результаты занижаются.

Кроме того, при решении осесимметричных задач с применением треугольных призматических КЭ, произвольно ориентированных, не наблюдается четкой симметрии в результатах расчета, хотя этот результат и близок к аналитическому. Поэтому при разбиении симметричных конструкций на треугольные КЭ необходимо стремиться к симметрии и в дискретизации.

Приведенные выше недостатки проявляются в большей степени при использовании линейного треугольного призматического КЭ. При использовании же квадратичного КЭ эти недостатки не столь существенны. Кроме того, скорость сходимости решений для квадратичного КЭ значительно выше в сравнении с линейным КЭ. Приведенные недостатки являются следствием использования полиномов с низкой степенью аппроксимации. Это не позволяет получить наилучшую аппроксимацию разрешающих функций внутри КЭ и приводит к упомянутым недостаткам.

При дискретизации конструкции на параллелепипедные конечные элементы около вершины трещины используем вместо одного параллелепипедного конечного элемента два треугольных призматических [25]. Это не приводит к увеличению количества разрешающих уравнений, но позволяет повысить точность вычислений и получить

достоверную картину напряженно-деформированного состояния около вершины трещины. Исследуем сходимость решений при различной ориентации треугольных элементов относительно фронта трещины (рис.3.20).

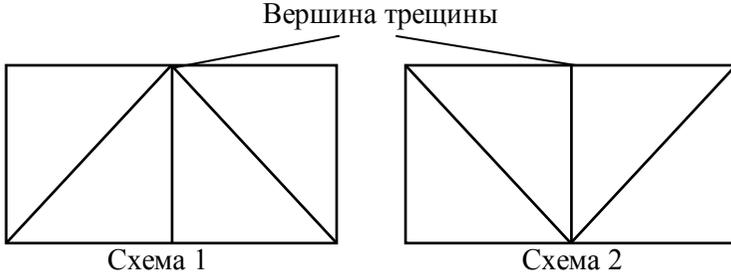


Рис. 3.20. Расположение треугольных элементов около вершины трещины

**Задача 5.** Растяжение прямоугольной плиты с краевой трещиной.

Размеры плиты: ширина  $a = 2$  м, длина  $b = 12$  м, толщина  $h = 0,02$  м, длина трещины  $l = 0,4$  м. Расчетная схема показана на рис. 3.21.

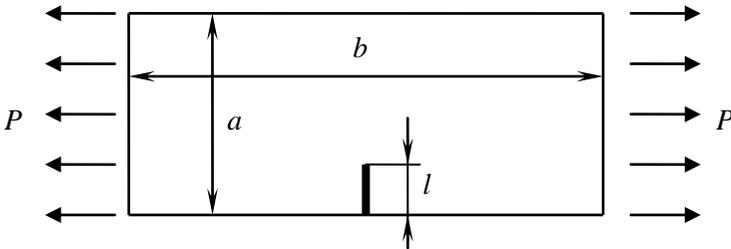


Рис. 3.21. Растяжение прямоугольной плиты с краевой трещиной

Конструкция рассчитывалась в условиях плоской деформации. Физические постоянные материала конструкции: модуль упругости  $E = 2,1$  МПа,  $\nu = 0,49$ . Приложенное нагружение  $p = 0,01$  МПа. Параметры механики разрушения рассчитывались прямыми методами. Результаты численных расчетов с использованием различных видов конечных элементов около вершины трещины приведены в табл. 3.4. Параметрами механики разрушения, полученными приближенным аналитическим методом [35]  $K_I = 5,446 \cdot 10^{-3}$  МПа $\cdot$ м $^{1/2}$ , раскрытие трещины  $\delta/2 = 5,208 \cdot 10^{-3}$  м.

**Задача 6.** Расчет изгиба балки с краевой трещиной.

Размеры балки: длина  $a = 8$  м, высота  $b = 1$  м, толщина  $t = 0,1$  м, длина трещины  $l = 0,2$  м, приложенная нагрузка  $P = 400$  Н, модуль упругости материала балки  $E = 1$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$ . Расчетная схема приведена на рис. 3.22. Параметры механики разрушения, полученные приближенным аналитическим методом [35]:  $K_I = 3,45 \cdot 10^3$  Па $\cdot$ м $^{1/2}$ , раскрытие трещины для  $\nu = 0,49$   $\delta/2 = 2,15 \cdot 10^{-3}$  м. Результаты численных расчетов с использованием различных видов конечных элементов около фронта трещины при сетке разбиения  $3 \times 13 \times 13$  приведены в табл. 3.5.

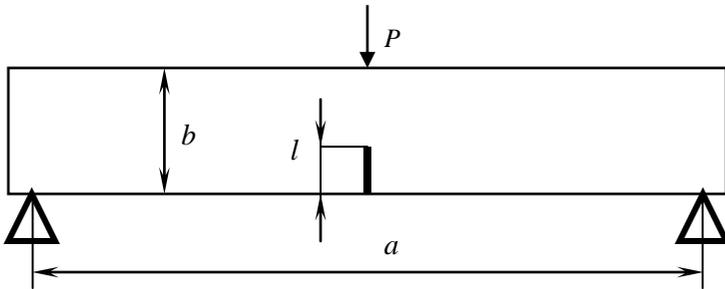


Рис. 3.22. Изгиб балки с краевой трещиной

Таблица 3.4. –

Параметры разрушения плиты с краевой трещиной

Вид конечного элемента	Сетка разбиения	Параметры механики разрушения	
		КИН, $10^{-3}$ МПа·м <sup>1/2</sup>	Раскрытие трещины, $\delta/2 \cdot 10^{-3}$ , м
Квадратичный параллелепипедный	3×11×7	7,81	3,41
	3×15×9	7,14	3,71
	3×17×9	6,91	3,83
	3×19×11	6,72	3,97
Специальный параллелепипедный	3×11×7	7,54	3,21
	3×15×9	6,93	3,56
	3×17×9	6,72	3,71
	3×19×11	6,54	3,88
Линейный треугольный, МКЭ	3×11×7	7,11	2,32
	3×15×9	6,53	2,66
	3×17×9	6,32	2,83
	3×19×11	6,15	3,02
Линейный треугольный, МСКЭ	3×11×7	7,70	4,32
	3×15×9	7,03	4,49
	3×17×9	6,87	4,53
	3×19×11	6,59	4,57
Треугольный квадратичный (схема 1)	3×11×7	7,77	3,30
	3×15×9	7,11	3,71
	3×17×9	6,90	3,85
	3×19×11	6,71	3,96
Треугольный специальный (схема 1)	3×11×7	8,23	3,57
	3×15×9	7,66	3,83
	3×17×9	7,42	3,96
	3×19×11	7,29	4,05
Треугольный квадратичный (схема 2)	3×11×7	7,72	3,22
	3×15×9	7,04	3,51
	3×17×9	6,75	3,67
	3×19×11	6,59	3,75
Треугольный специальный (схема 2)	3×11×7	7,93	3,45
	3×15×9	7,32	3,68
	3×17×9	7,11	3,79
	3×19×11	6,93	3,88

Параметры механики разрушения, полученные приближенным аналитическим методом [35] для  $\nu=0,4999$ :  $K_I = 3,45 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ , раскрытие трещины  $\delta/2 = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . При решении данной задачи в вязкоупругой постановке воспользуемся соотношениями наследственной теории Больцмана–Вольтерра. В качестве ядра релаксации воспользуемся ядром Ржаницина с реологическими параметрами:  $A = 0,0765$ ;  $\alpha = 0,3$ ;  $\beta = 0,05$ . Зависимость раскрытия трещины от времени показана на рис. 3.23, а зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени – на рис. 3.24.

Решение вязкоупругой задачи хорошо согласуется с исследованиями работы [9], где замечено, что при решении задачи в плоской постановке, деформированное состояние зависит от реологических характеристик материала, а напряженное состояние не зависит. Коэффициент интенсивности напряжений прямо пропорционален напряжениям, и, следовательно, также не зависит от реологических характеристик.

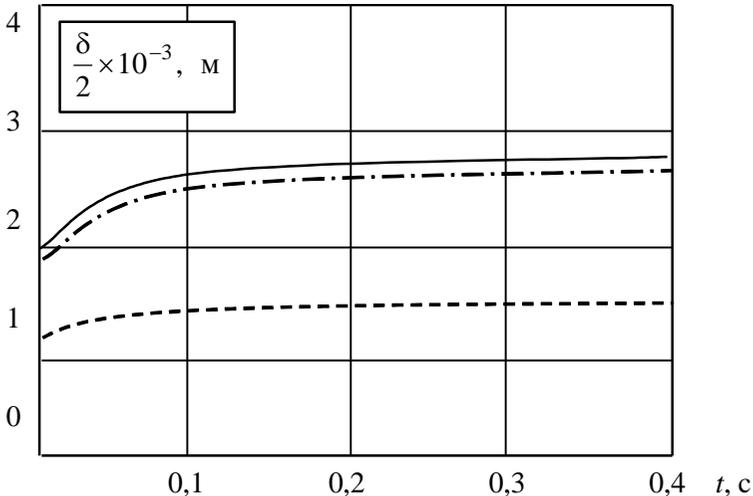


Рис. 3.23. Зависимость раскрытия трещины от времени: при  $\nu=0,49$ :  
 ---- МКЭ, - · - · - МКЭ; при  $\nu=0,4999$ : —

Таблица 3.5. –

Параметры разрушения балки с краевой трещиной

Вид конечного элемента	Параметры механики разрушения	
	КИН, $K_I \cdot 10^3$ , Па·м <sup>1/2</sup>	Раскрытие трещины, $\delta/2 \cdot 10^{-3}$ , м
Квадратичный параллелепипедный	3,14	1,63
Специальный параллелепипедный	2,70	1,77
Треугольный квадратичный	3,12	1,61
Треугольный специальный (схема 2)	3,22	1,88
Треугольный специальный (схема 1)	3,49	1,91

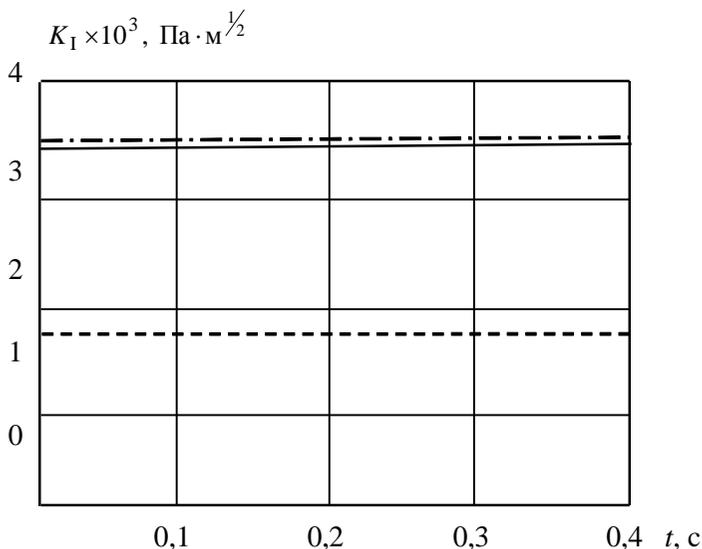


Рис. 3.24. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени: — — при  $\nu=0,4999$ ; при  $\nu=0,49$ : - - - - МКЭ, - · - · - МСКЭ

Как видно из последних рассмотренных задач, использование около вершины трещины вместо одного специального параллелепipedного КЭ двух специальных треугольных призматических КЭ по схеме 1 позволяет при неизменной сетке разбиения повысить точность вычислений.

### 3.5. Энергетические методы определения параметров механики разрушения

Конструкции изначально обладают некоторыми несовершенствами – у них появляются поры, трещины и т.д. Трещины, в частности, возникают в процессе изготовления конструкций из-за недостатков технологии. При эксплуатации начальные трещины начинают распространяться, что приводит к разрушению конструкции. Под действием температурных и силовых воздействий в процессе работы могут появляться новые трещины. В области вершины трещины эластомер испытывает большие деформации, а напряженно-деформированное состояние близко к плоской деформации [11]. Поэтому вопрос о том, будет ли разрушаться конструкция при наличии в ней трещиноподобного дефекта, является очень существенным.

Для того чтобы определить, будет распространяться трещина в конструкции или нет, необходимо найти один из параметров механики разрушения: коэффициент интенсивности напряжений, раскрытие трещины или величину  $J$ -интеграла и сравнить найденное значение с критическим.

В нелинейной механике разрушения определение коэффициентов интенсивности напряжений прямыми методами по формулам (3.68), (3.69) является некорректным ввиду того, что в данных соотношениях коэффициент интенсивности напряжений является функцией координат, а в процессе решения они изменяются. Воспользуемся одним из энергетических методов определения параметров нелинейной механики разрушения – методом  $J$ -интеграла.

Впервые на применимость  $J$ -интеграла в нелинейных эластомерах было обращено внимание в работах [11, 12].

В общем случае фронт трещины представляет собой пространственную кривую. Значения компонент  $J$ -интеграла вычисляется на поверхности малой трубки, охватывающей фронт трещины. При решении задачи методом конечных элементов фронт трещины представляется в виде ломаной линии. Компоненты  $J$ -интеграла вычисляются по формуле

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \lim_{e \rightarrow 0} \int_{A_e} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dA \quad (k=1,2), \quad (3.159)$$

где  $\Delta$  – длина участка фронта трещины;  $u_i, \sigma_{ij}$  – компоненты перемещений и напряжений в системе координат трещины;  $n_j$  – компоненты нормали к элементу контура  $dA$ ;  $W$  – плотность энергии деформации;  $A_e$  – поверхность трубки, окружающей отрезок фронта трещины.

Для определения компонент  $J$ -интеграла воспользуемся методом эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ) [6, 11]. Введем в рассмотрение безразмерную  $s$ -функцию (рис. 3.25).

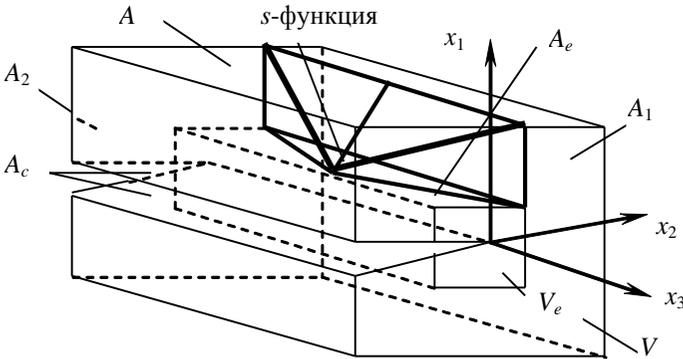


Рис. 3.25.  $s$ -функция

В случае отсутствия объемных сил и пластических деформаций выражение для определения компонент  $J$ -интеграла для вязкоупругого материала методом ЭОИ имеет вид

$$\tilde{J}_K = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \tilde{W} \frac{\partial s}{\partial x_k} - \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV + \frac{1}{f} \delta_{k2} \int_{A_c} \tilde{W} n_2 s dA, \quad (3.160)$$

где  $f = \int_0^\Lambda s dx_3$  – площадь  $s$ -функции на поверхности малой трубки.

Плотность энергии деформации для вязкоупругого материала  $\tilde{W}$  вычисляется по формуле

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} (2 - \delta_{ij}) \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.161)$$

где  $\tilde{\sigma}_{ij}$  определяется по соотношению (3.47).

Интенсивность высвобождения энергии поперечного сдвига для вязкоупругого материала находится в виде

$$\tilde{G}_{III} = \frac{1}{\Delta} \lim_{e \rightarrow 0} \int_{A_e} \left( \tilde{W}_{III} n_1 - \tilde{\sigma}_{3j} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} n_j \right) dA. \quad (3.162)$$

Плотность энергии деформации поперечного сдвига для вязкоупругого материала  $\tilde{W}_{III}$  определяется по формуле

$$\tilde{W}_{III} = \frac{1}{2} (2\delta_{i3} - \delta_{i3}\delta_{3j}) \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (3.163)$$

Для определения интенсивности высвобождения энергии поперечного сдвига воспользуемся методом ЭОИ, тогда выражение для  $\tilde{G}_{III}$  в случае отсутствия объемных сил и пластических деформаций представляется в виде

$$\tilde{G}_{III} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \tilde{W}_{III} \frac{\partial s}{\partial x_1} - \tilde{\sigma}_{3j} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV. \quad (3.164)$$

Тогда коэффициенты интенсивности напряжений для вязкоупругого материала находятся с помощью соотношения

$$\tilde{K}_{I,II} = \frac{1}{2} \sqrt{H} \left( \sqrt{\tilde{J}_1 - \tilde{J}_2 - \tilde{G}_{III}} \pm \sqrt{\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 - \tilde{G}_{III}} \right), \quad (3.165)$$

$$\tilde{K}_{III} = \sqrt{2\mu \tilde{G}_{III}}, \quad (3.166)$$

где  $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{G}_{III}$  – определяются по формулам (3.160) и (3.162).

### 3.6. Определение вектора дополнительной нагрузки

Ввиду того что вязкая составляющая энергии деформации является функцией времени и перемещений, задача вязкоупругости становится нелинейной. Для определения дополнительной нагрузки воспользуемся традиционным подходом построения разрешающих уравнений МКЭ на основе вариации полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = \delta\tilde{W} - \delta A. \quad (3.167)$$

Здесь  $\delta A$  – вариация работы распределенных объемных  $P^i$  и поверхностных  $F^i$  сил:

$$\delta A = \iiint_V P^i \delta u_i dv + \iint_S F^i \delta u_i ds; \quad (3.168)$$

$\delta\tilde{W}$  – вариация внутренней энергии вязкоупругой деформации:

$$\delta\tilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (3.169)$$

При решении задач механики деформированного тела и задач механики разрушения в геометрически нелинейной постановке принимается тензор конечных деформаций в виде (3.3).

Тогда тензор напряжений можно представить в виде двух составляющих – линейной и нелинейной:

$$\sigma_{(n)}^{ij} = 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + B J_1^{(n)} g^{ij}, \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(H)}^{ij} = & 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)} - \frac{1}{3} J_1^{(H)} g^{ij} \right) + B \left( J_1^{(H)} + 2J_2 + 4J_3 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right) g^{ij}, \end{aligned} \quad (3.171)$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – первый, второй и третий инварианты тензора деформаций.

В предположении о релаксации сдвигового модуля  $\mu$  и отсутствии релаксации объемного  $B$  выражение для тензора напряжения с учетом (3.170) и (3.171) вязкоупругого материала запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & 2\tilde{\mu} \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + B J_1^{(n)} g^{ij} + 2\tilde{\mu} \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} J_1^{(H)} g^{ij} \right) + B \left( J_1^{(H)} + 2J_2 + 4J_3 - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - \right. \\ & \left. - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right) g^{ij}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Подставляя в соотношение (3.172) выражение (3.48), получаем

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(t) = & 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t) - \frac{1}{3} J_1^{(n)}(t) g^{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)}(\tau) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} J_1^{(n)}(\tau) g^{ij} \right) d\tau \right) + B J_1^{(n)}(t) g^{ij} + 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)}(t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} J_1^{(H)}(t) g^{ij} - \int_0^t R(t-\tau) \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)}(\tau) - \frac{1}{3} J_1^{(H)}(\tau) g^{ij} \right) d\tau \right) + \\ & + B g^{ij} \left( J_1^{(H)}(t) + 2J_2(t) + 4J_3(t) - \frac{1}{2} J_1^2(t) - 2J_2^2(t) - 8J_3^2(t) - \right. \\ & \left. - 2J_1(t)J_2(t) - 4J_1(t)J_3(t) - 8J_2(t)J_3(t) \right). \end{aligned} \quad (3.173)$$

Для реализации решения методом конечных элементов, полагая, что перемещения  $u(t)$  и деформации  $\varepsilon(t)$  изменяются линейно внутри каждого интервала времени, представим соотношение (3.173) в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(t_n) = & 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t_n) - \frac{1}{3} J_1^{(n)}(t_n) g^{ij} + g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)}(t_n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} J_1^{(H)}(t_n) g^{ij} \right) + B J_1^{(n)}(t_n) g^{ij} - 2\mu \sum_{m=0}^{n-1} \left( \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t_m) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} J_1^{(n)}(t_m) g^{ij} + g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)}(t_m) - \frac{1}{3} J_1^{(H)}(t_m) g^{ij} \right) \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau \right) + \\ & + B g^{ij} \left( J_1^{(H)}(t_n) + 2J_2(t_n) + 4J_3(t_n) - \frac{1}{2} J_1^2(t_n) - 2J_2^2(t_n) - \right. \\ & \left. - 8J_3^2(t_n) - 2J_1(t_n)J_2(t_n) - 4J_1(t_n)J_3(t_n) - 8J_2(t_n)J_3(t_n) \right). \end{aligned} \quad (3.174)$$

Учитывая, что линейная составляющая шаровой части тензора напряжений

$$\sigma_{S(n)}^{ij}(t) = B J_1^{(n)}(t) g^{ij}, \quad (3.175)$$

нелинейная составляющая шаровой части тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{S(H)}^{ij}(t) = & B g^{ij} \left( J_1^{(H)}(t) + 2J_2(t) + 4J_3(t) - \frac{1}{2} J_1^2(t) - 2J_2^2(t) - \right. \\ & \left. - 8J_3^2(t) - 2J_1(t)J_2(t) - 4J_1(t)J_3(t) - 8J_2(t)J_3(t) \right), \end{aligned} \quad (3.176)$$

линейная составляющая девиаторной части тензора напряжений

$$\sigma_{D(n)}^{ij}(t) = 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t) - \frac{1}{3} J_1^{(n)}(t) g^{ij} \right), \quad (3.177)$$

нелинейная составляющая девиаторной части тензора напряжений

$$\sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t) = 2\mu \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(H)}(t) - \frac{1}{3} J_1^{(H)}(t) g^{ij} \right), \quad (3.178)$$

выражение (3.174) запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}(t_n) = & \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{S_{(H)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_n) - \\ & - \sum_{m=0}^{n-1} \left( \left( \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_m) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_m) \right) \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.179)$$

Подставим компоненты тензора напряжений (3.179) в вариацию энергии деформации (3.169). В этом случае вариация полной потенциальной энергии деформирования представится в виде

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iiint_V \left( \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{S_{(H)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_n) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{n-1} \left( \left( \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_m) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_m) \right) R_m^* \right) \delta \left( \varepsilon_{ij}^{(Л)} + \varepsilon_{ij}^{(H)} \right) \right) dV - \delta A. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Здесь  $R_m^* = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau$ .

Анализируя выражение (3.180), выделим линейные составляющие вариации энергии упругой деформации, которые зависят от истории нагружения, но не зависят от закона изменения деформации во времени. Эти составляющие служат основой формирования матрицы жесткости конечного элемента для фиксированного момента времени  $t$ . Из выражения (3.180) можно записать

$$\iiint_V \left( \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(Л)}}^{ij}(t_n) \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(Л)} = K^{ph}(t_n) u_p(t_n) \delta u_h. \quad (3.181)$$

Нелинейную часть в выражении (3.180) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \sigma_{S_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(Л)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{S_{(H)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_n) \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(H)} dV + \\ & + \iiint_V \left( \sigma_{S_{(H)}}^{ij}(t_n) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_n) \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(Л)} dV = N^{ph}(t_n) u_p(t_n) \delta u_h. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Наследственная часть матрицы жесткости запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* \iiint_V \left( \left( \sigma_{D_{(n)}}^{ij}(t_m) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_m) \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(H)} + \right. \\ & \left. + \left( \sigma_{S_{(H)}}^{ij}(t_m) + \sigma_{D_{(H)}}^{ij}(t_m) \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \right) dV = \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* S^{ph}(t_m) u_p(t_m) \delta u_h. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Предполагая, что на тело действуют только распределенные поверхностные нагрузки, которые можно свести к сосредоточенным узловым силам, и принимая во внимание соотношения (3.181), (3.182) и (3.183), вариацию потенциальной энергии представляем выражением

$$\begin{aligned} & \left[ K^{ph}(t_n) u_p(t_n) + N^{ph}(t_n) u_p(t_n) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* S^{ph}(t_m) u_p(t_m) - F^h(t_n) \right] \delta u_h = 0. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Поскольку вариация перемещений не равна нулю, то нулю должно быть равно выражение в квадратных скобках, представляющее собой систему разрешающих линеаризованных уравнений наследственной вязкоупругости:

$$K_{(n)} \bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{Q}_{(m)} + \bar{P}_{(n)} - \bar{N}_{(n)}, \quad (3.185)$$

где  $K_{(n)} = K^{ph}(t_n)$ ;  $\bar{u}^{(n)} = u_p(t_n)$ ;  $\bar{P}_{(n)} = F^h(t_n)$  – вектор распределенных поверхностных нагрузок, действующих на момент времени  $t_n$ ;

$\bar{Q}_{(m)} = R_m^* K^{ph}(t_m) u_p(t_m)$  – вектор дополнительной нагрузки;

$\bar{N}_{(n)} = N^{ph}(t_n) u_p(t_n)$  – вектор нелинейных добавок.

### 3.7. Алгоритм определения параметров механики разрушения в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования

Нелинейные задачи вязкоупругости обычно сводятся к последовательности линейных задач при помощи так называемых шаговых итерационных алгоритмов. Воспользуемся одним из таких методов – модифицированным методом Ньютона–Канторовича. При решении геометрически и физически нелинейных задач в сочетании с модифицированным методом Ньютона–Канторовича используют метод интегрирования по параметру нагрузки либо параметру перемещения характерных точек конструкции с проверкой уравнений равновесия.

Рассмотрим работу шагового алгоритма решения задач вязкоупругости, если параметром спуска является значение нагрузки  $P$  [15].

1. На  $n$ -м шаге нагружения по известным значениям вектора перемещений  $\{u_i^{(n-1)}\}$ , компонент тензора напряжений  $\{\sigma_{ij}^{(n-1)}\}$ , координат узлов сеточной области  $\{x_i^{(n-1)}\}$  конструкции вычисляем матрицу жесткости линейризованной системы уравнений  $[F_{(n)}^*]$ .

2. Определяем текущее значение нагрузки по формуле

$$P_{(n)} = P_{(n-1)} + \Delta P_{(n)}. \quad (3.186)$$

На первом шаге, при  $n = 1$ , алгоритм продолжает работу с пункта 4.3, где в качестве вектора узловых невязок  $\{R_{(n)}^{(k)}\}$  принимают вектор узловых нагрузок  $\{P_{(n)}^{(k)}\}$ .

3. Находим начальное приближение искомого решения  $\{\Delta u_{(n)}^{(1)}\}$ , используя различные экстраполяционные формулы. Наиболее приемлемой экстраполяционной формулой является формула вида

$$\{u_{(n)}^{(1)}\} = \{u_{(n-1)}\} \frac{\Delta P_{(n)}}{\Delta P_{(n-1)}}. \quad (3.187)$$

4. Производим реализацию итерационного алгоритма решения задачи упругости.

4.1. Приближенное значение перемещений  $\{u_{(n)}^{(k)}\}$  подставляем в уравнение (3.172) и определяем вектор узловых невязок  $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ , численной характеристикой которого является сумма квадратов компонент узловых невязок  $\left\{R_{(n)}^{(k)*}\right\}$ , позволяющая судить о сходимости получаемых решений.

4.2. Анализируем значения вектора узловых невязок  $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ . При резком увеличении вектора невязок  $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ , когда величина  $\left\{R_{(n)}^{(k)*}\right\}$ , превышает сумму квадратов компонент узловых нагрузок на  $N$  порядков, то итерационный процесс прерывается. В этом случае происходит уменьшение шага параметра спуска, т.е. шага по нагрузке, и алгоритм начинает работать с пункта 2. Аналогичные действия выполняем, если сходимость итерационного процесса сильно замедляется, а критерием этого служит превышение количеством итераций  $k$  на данном шаге некоторого максимального значения.

Условие, при котором считается, что вектор перемещений  $\{u_{(n)}^{(k)}\}$  удовлетворяет исходным уравнениям с заданной степенью точности  $\varepsilon$ , имеет вид

$$\left\{R_{(n)}^{(k)*}\right\} < \left\{P_{(n)}^{*}\right\} \varepsilon. \quad (3.188)$$

Если условие (3.188) выполняется, то алгоритм продолжает свою работу с пункта 5. Если это условие не выполняется, то алгоритм переходит к выполнению следующего пункта 4.3.

4.3. Вектор невязок  $\{R_{(n)}^{(k)}\}$  принимаем за дополнительную нагрузку, и подставляем в правую часть линеаризованной системы уравнений.

4.4. Решаем систему линеаризованных уравнений и находим вектор перемещений  $\{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}$ , который затем суммируем с вектором  $\{u_{(n)}^{(k)}\}$ :

$$\{u_{(n)}^{(k+1)}\} = \{u_{(n)}^{(k)}\} + \{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}. \quad (3.189)$$

4.5. Номеру итерации присваиваем значение  $k = k + 1$ , и алгоритм повторяет операции, начиная с пункта 4.1.

5. Пересчитываем напряженное и деформированное состояние, а также координаты узлов сеточной области конструкции по формулам

$$\{\varepsilon_{ij}^{(n)}\} = \{\varepsilon_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta \varepsilon_{ij}^{(n)}\}; \quad (3.190)$$

$$\{\sigma_{ij}^{(n)}\} = \{\sigma_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta \sigma_{ij}^{(n)}\}; \quad (3.191)$$

$$\{z_i^{(n)}\} = \{z_i^{(n-1)}\} + \{u_i^{(n)}\}. \quad (3.192)$$

Проводим суммирование параметров механики разрушения – компонент  $J$ -интеграла и интенсивности освобождения энергии:

$$\{J_m^{(n)}\} = \{J_m^{(n-1)}\} + \{\Delta J_m^{(n)}\}, (m = 1, 2); \quad (3.193)$$

$$\{G_{III}^{(n)}\} = \{G_{III}^{(n-1)}\} + \{\Delta G_{III}^{(n)}\}. \quad (3.194)$$

Проверяем критерий разрушения, и если он не выполняется, то длина трещины увеличивается на величину  $\Delta l$  и алгоритм начинает свою работу сначала – с пункта 1.

6. Проверяем, достиг ли параметр спуска максимального (задаваемого) значения:

$$P_{(n)} = P_{\max}. \quad (3.195)$$

Если условие (3.195) выполняется, то в случае решения упругой задачи алгоритм завершает свою работу. При решении задачи вязкоупругости в геометрически линейной постановке алгоритм продолжает свою работу с пункта 9, при решении задачи в геометрически нели-

нейной постановке – с пункта 8. Если же условие (3.195) не выполняется, то алгоритм переходит к выполнению следующей операции.

7. Номеру шага присваиваем значение  $n = n + 1$ . Алгоритм начинает выполнение операций с пункта 1 при решении задачи в геометрически нелинейной постановке, и с пункта 2 при решении задачи в геометрически линейной постановке.

8. На  $m$ -м шаге по времени по известным значениям вектора перемещений  $\{u_i^{(m-1)}\}$ , компонент тензора напряжений  $\{\sigma_{ij}^{(m-1)}\}$ , координат узлов сеточной области  $\{x_i^{(m-1)}\}$  конструкции вычисляют матрицу жесткости линейризованной системы уравнений  $[F_{(m)}^*]$ .

9. Производим реализацию итерационного алгоритма решения задачи вязкоупругости.

9.1. Для момента времени  $t_{(m)} = t_{(m-1)} + \Delta t_{(m)}$  вычисляем вектор дополнительной нагрузки  $\{Q_{(m)}^{(l)}\}$  как функцию  $\{u_{(m)}^{(l-1)}\}$  и  $t_{(m)}$  по формуле (3.183). При  $l = 1$  в качестве  $\{u_{(m)}^{(0)}\}$  берем распределение перемещений, полученное на предыдущей  $(m-1)$ -й итерации. На первой итерации по времени, когда  $m = 1$ , в качестве  $\{u_{(m)}^{(0)}\}$  берем упругое решение, которому соответствует  $t_{(0)} = 0$  и  $\{Q_{(0)}^{(0)}\} = 0$ .

9.2. Анализируем значения вектора дополнительной нагрузки  $\{Q_{(m)}^{(l)}\}$ . Условие, при котором считается, что вектор перемещений  $\{u_{(m)}^{(l-1)}\}$  удовлетворяет исходным уравнениям с заданной степенью точности  $\varepsilon$ , имеет вид

$$\left\{ Q_{(m)}^{(l)*} \right\} < \left\{ P_{(n)}^* \right\} \varepsilon, \quad (3.196)$$

где  $\left\{ Q_{(m)}^{* (l)} \right\}$  – сумма квадратов компонент вектора дополнительной нагрузки. Если условие (3.196) выполняется, то алгоритм продолжает свою работу с пункта 10. Если это условие не выполняется, то алгоритм переходит к выполнению следующего пункта 9.3.

9.3. Вектор дополнительной нагрузки  $\left\{ Q_{(m)}^{(l)} \right\}$  подставляем в правую часть линеаризованной системы уравнений (3.185).

9.4. Решаем систему линеаризованных уравнений и находим вектор перемещений  $\left\{ \Delta u_{(m)}^{(l)} \right\}$ . Затем этот вектор суммируем

$$\left\{ u_{(m)}^{(l)} \right\} = \left\{ u_{(m)}^{(l-1)} \right\} + \left\{ \Delta u_{(m)}^{(l)} \right\}. \quad (3.197)$$

9.5. Номеру итерации присваиваем значение  $l = l + 1$ , и алгоритм повторяет операции, начиная с пункта 9.1.

10. На каждом шаге происходит запоминание и суммирование наследственных составляющих напряжений в предположении релаксации только сдвигового модуля:

$$\Delta \sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu(\varepsilon_{ij}^{(m)} - \frac{1}{3}\theta^{(m)}) R_m^*, \quad (3.198)$$

$$\sigma_{ij}^{(R)} = \sum_{m=1}^M \Delta \sigma_{ij}^{(m)}. \quad (3.199)$$

Производим суммирование параметров механики разрушения – компонент  $J$ -интеграла и интенсивности освобождения энергии по формулам (3.193) и (3.194). Проверяем критерий разрушения, и если он не выполняется, то длина трещины увеличивается на величину  $\Delta l$  и алгоритм начинает свою работу сначала – с п. 1.

11. Проверяем, достигло ли текущее значение времени максимального (задаваемого) значения:

$$t_{(m)} = t_{\max}. \quad (3.200)$$

Если условие (3.200) выполняется, то алгоритм завершает свою работу. Если же условие (3.200) не выполняется, то алгоритм переходит к выполнению следующей операции.

12. Номеру шага по времени присваиваем значение  $m = m + 1$ . Алгоритм начинает выполнение операций с пункта 8 при решении задачи в геометрически нелинейной постановке, и с пункта 9 при решении задачи в геометрически линейной постановке.

При решении задачи вязкоупругости в случае, когда параметром спуска являются перемещения, алгоритм решения аналогичен представленному за исключением некоторых пунктов.

Приращение параметра нагрузки  $\Delta P_{(n)}$  (пункт 2) вычисляем по заданным перемещениям характерных узлов из условия их равновесия, а текущее значение прикладываемой нагрузки – по формуле (3.186).

Перемещения остальных узлов конструкции в начальном приближении (п. 3) находим по формуле

$$\{\Delta u_{(n)}^{(1)}\} = u_k^i \{u_{u_k=1}\} + \Delta P_{(n)} \{u_{P=1}\}, \quad (3.201)$$

где  $\{u_{u_k=1}\}$ ,  $\{u_{P=1}\}$  – векторы узловых перемещений конструкции при вынужденном единичном смещении и единичной нагрузке соответственно.

Пункт 6 предложенного алгоритма для характерных узлов конструкции представится в виде

$$\{u_k^i\}_{(n)} = \{u_k^i\}_{\max}. \quad (3.202)$$

Остальные пункты алгоритма аналогичны описанным выше.

### 3.8. Алгоритм определения параметров разрушения в условиях нелинейного деформирования на основе J-интеграла

Решение нелинейной задачи на  $n$ -м шаге получается суммированием деформаций и напряжений на всех предыдущих итерациях по формулам (3.190) и (3.191) соответственно. Перемещения на  $n$ -м шаге также можно записать как сумму на всех предыдущих шагах:

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \Delta u_i^{(n)}. \quad (3.203)$$

Параметры разрушения вычисляются по формулам (3.193) и (3.194). Чтобы найти на каждом  $n$ -м шаге добавки  $\Delta J_k^{(n)}$  и  $\Delta G_{III}^{(n)}$ , входящие в выражения (3.193) и (3.194), рассмотрим определение компонент  $J$ -интеграла и величины интенсивности высвобождения энергии методом эквивалентного объемного интегрирования.

Подставляя соотношения (3.190) и (3.191) в зависимость (3.161), вычисляем плотность энергии деформаций на  $n$ -й итерации:

$$W^{(n)} = \frac{1}{2} (2 - \delta_{ij}) \left( \sigma_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \right) \delta \left( \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \right) = \frac{1}{2} (2 - \delta_{ij}) \times \left( \sigma_{ij}^{(n-1)} \delta \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \delta \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \sigma_{ij}^{(n-1)} \delta \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \delta \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \right). \quad (3.204)$$

Интеграл первого слагаемого в выражении (3.204) равен плотности энергии деформаций на  $(n-1)$ -й итерации, а интеграл суммы второго, третьего и четвертого слагаемых представляет собой добавку к энергии на  $n$ -й итерации. Тогда выражение (3.204) запишется в виде

$$W^{(n)} = W^{(n-1)} + \Delta W^{(n)}. \quad (3.205)$$

Аналогично распишем соотношение (3.163) для плотности энергии поперечного сдвига  $W_{III}$ :

$$W_{III}^{(n)} = \frac{1}{2} (2\delta_{i3} - \delta_{i3}\delta_{3j}) \left( \sigma_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \right) \delta \left( \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \right) = \frac{1}{2} (2\delta_{i3} - \delta_{i3}\delta_{3j}) \times \left( \sigma_{ij}^{(n-1)} \delta \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \delta \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \sigma_{ij}^{(n-1)} \delta \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \delta \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)} \right). \quad (3.206)$$

Учитывая, что сумма в первой скобке выражения (3.206) представляет собой плотность энергии поперечного сдвига на  $(n-1)$ -й итерации и, значит, сумма во второй скобке является добавкой к энергии поперечного сдвига на  $n$ -й итерации выражение (3.206) записываем в виде

$$W_{III}^{(n)} = W_{III}^{(n-1)} + \Delta W_{III}^{(n)}. \quad (3.207)$$

Подставляя соотношения (3.191), (3.203) и (3.205) в выражение (3.160), получаем

$$J_k^{(n)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \left( W^{(n-1)} + \Delta W^{(n)} \right) \frac{\partial s}{\partial x_k} - \left( \sigma_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial (u_i^{(n-1)} + \Delta u_i^{(n)})}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV + \frac{1}{f} \delta_{k2} \int_{A_e} \left( W^{(n-1)} + \Delta W^{(n)} \right) n_2 s dA. \quad (3.208)$$

Расписав (3.208), получим выражения для  $J_k^{(n-1)}$  и  $\Delta J_k^{(n)}$ :

$$J_k^{(n-1)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( W^{(n-1)} \frac{\partial s}{\partial x_k} - \sigma_{ij}^{(n-1)} \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV + \\ + \frac{1}{f} \delta_{k2} \int_{A_e} W^{(n-1)} n_2 s dA, \quad (3.209)$$

$$\Delta J_k^{(n)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \Delta W^{(n)} \frac{\partial s}{\partial x_k} - \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \frac{\partial u_i^{(n-1)}}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(n-1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \Delta u_i^{(n)}}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \Delta \sigma_{ij}^{(n)} \frac{\partial \Delta u_i^{(n)}}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV + \frac{1}{f} \delta_{k2} \int_{A_e} \Delta W^{(n)} n_2 s dA. \quad (3.210)$$

Подставляя соотношения (3.191), (3.203) и (3.207) в выражение (3.162), получаем

$$G_{III}^{(n)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \left( W_{III}^{(n-1)} + \Delta W_{III}^{(n)} \right) \frac{\partial s}{\partial x_1} - \right. \\ \left. - \left( \sigma_{3j}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{3j}^{(n)} \right) \frac{\partial (u_3^{(n-1)} + \Delta u_3^{(n)})}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV. \quad (3.211)$$

Расписав выражение (3.211), получаем выражение для  $G_{III}^{(n-1)}$ :

$$G_{III}^{(n-1)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( W_{III}^{(n-1)} \frac{\partial s}{\partial x_1} - \sigma_{3j}^{(n-1)} \frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV \quad (3.212)$$

и для  $\Delta G_{\text{III}}^{(n)}$ :

$$\Delta G_{\text{III}}^{(n)} = -\frac{1}{f} \int_{V-V_e} \left( \Delta W_{\text{III}}^{(n)} \frac{\partial s}{\partial x_1} - \Delta \sigma_{3j}^{(n)} \frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \sigma_{3j}^{(n-1)} \frac{\partial \Delta u_3^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \Delta \sigma_{3j}^{(n)} \frac{\partial \Delta u_3^{(n)}}{\partial x_1} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dV. \quad (3.213)$$

Как упоминалось ранее, для линейной задачи коэффициенты интенсивности напряжений вычислялись из формул (3.68), (3.69). Однако в случае нелинейных задач определение КИН прямыми методами с помощью (3.68), (3.69) некорректно [6, 27]. Поэтому, согласно работе С. Атлури [6] при решении нелинейных задач с помощью метода  $J$ -интеграла по формулам (3.165) и (3.166) определялись условные коэффициенты интенсивности напряжений.

### 3.9. Автоматизация анализа результатов численного расчета

Анализ полученного численного решения, сопряжен с двумя основными проблемами:

- наличием большого массива численной информации, который необходимо исследовать на достоверность, точность и адекватность смыслу задачи;
- необходимостью синтеза дополнительной информации (например, по полученным узловым перемещениям, как правило, необходимо получить узловые значения компонент тензоров деформации и напряжения).

Опыт применения МКЭ для решения инженерных и научных задач показывает, что фаза анализа численных результатов расчета по трудоемкости и длительности зачастую существенно превосходит первые два этапа решения задачи – подготовку исходных данных и расчет задачи на ЭВМ. Все современные программные системы решения задач механики МКЭ содержат специальные модули, автоматизи-

рующие процесс анализа результатов. Наиболее эффективным способом такого анализа является визуализация полученных числовых значений – т.е. их некоторое графическое представление, удобное для последующего восприятия и исследования.

Существует достаточно большое количество различных способов визуализации результатов расчета. Среди наиболее распространенных – построение различных двумерных и трехмерных графиков, а также линий уровня. Однако, одним из наиболее эффективных методов визуального представления и восприятия распределения числовой величины по некоторой двух- или трехмерной расчетной области является изображение полутоновой или цветной картины, где каждому оттенку или цвету соответствует известный диапазон числовых значений.

### **3.9.1. Методы визуализации пространственных объектов**

В большинстве случаев, видимая поверхность геометрической области, исследуемой методом конечных элементов, представляет собой конечную совокупность плоских непересекающихся геометрических фигур простой формы (чаще всего треугольников или четырехугольников) (рис. 3.26). Поэтому, изображение конечно-элементного объекта обычно сводится к визуализации в пространстве некоторого количества плоских геометрических фигур – граней КЭ.

В общем случае проблема визуализации результатов численных расчетов задач механики методом конечных элементов сводится к решению двух следующих задач:

а) построение математического аппарата проецирования трехмерной геометрической области на экранную плоскость с реализацией возможности удаления невидимых линий и граней;

б) закрашивание получившейся проекции цветами или оттенками, соответствующими распределению по исходной геометрической области визуализируемого фазового параметра.

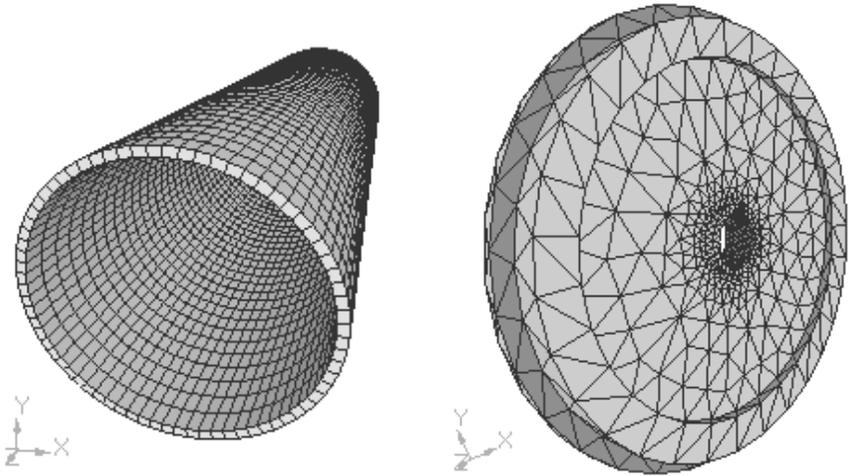


Рис. 3.26. Поверхность объекта как совокупность непересекающихся треугольников или четырехугольников в трехмерном пространстве

### 3.9.2. Системы координат в компьютерной графике

В компьютерной графике для задания места расположения 3D-объекта используется трехмерная ортогональная декартова система координат. При этом ось  $X$  направлена слева на право, ось  $Y$  направлена снизу вверх, а ось  $Z$  направлена в сторону наблюдателя. Такая система координат называется правосторонней (рис. 3.27). Если ось  $Z$  направлена в сторону от наблюдателя, то такая система координат называется левосторонней.

Наиболее распространенные современные графические стандарты программирования трехмерной графики, например, такие как OpenGL и DirectX, оперируют тремя видами систем координат: мировой, световой и экранной.

Мировая система координат – это правосторонняя декартова система координат, центр которой  $W$  совпадает с положением наблюдателя сцены. Видовая система координат – это аналогичная левосторонняя система координат, центр которой  $E$  совпадает с геометриче-

ским центром визуализируемого объекта. Эcranная система координат – это плоская декартова система координат, центр которой  $S$  совпадает с левым нижним углом экрана, а оси направлены естественным образом (рис. 3.28).

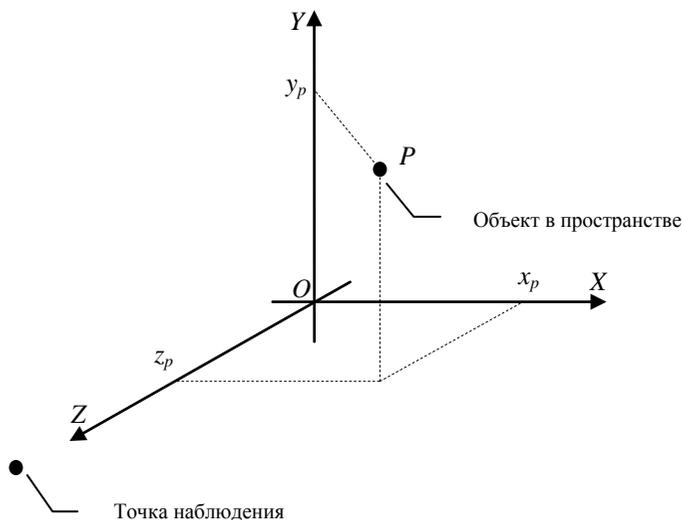


Рис. 3.27. Правосторонняя система координат

Главная проблема заключается в том, чтобы построить математический аппарат преобразования мировых координат в экранные таким образом, чтобы добиться построения на экране монитора реалистичного образа. Исследованию данной проблемы посвящено большое количество работ, наиболее известными среди которых являются работы Л. Аммерала [1-3], Д. Роджерса [31, 32] и других [38, 39].

### 3.9.3. Преобразования координат

Базовыми манипуляциями над изображаемыми объектами в компьютерной графике являются преобразования сдвига, масштабирования и поворота. С целью унификации математических соотношений,

реализующих преобразования координат, и удобства их использования в компьютерной графике используют однородные координаты, имеющие в общем случае вид  $(x_w, y_w, z_w, W)$ , где  $W$  – некоторый произвольный отличный от нуля множитель. Переход от однородных координат к декартовым осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x_w / W, \\ y &= y_w / W, \\ z &= z_w / W. \end{aligned} \quad (3.214)$$

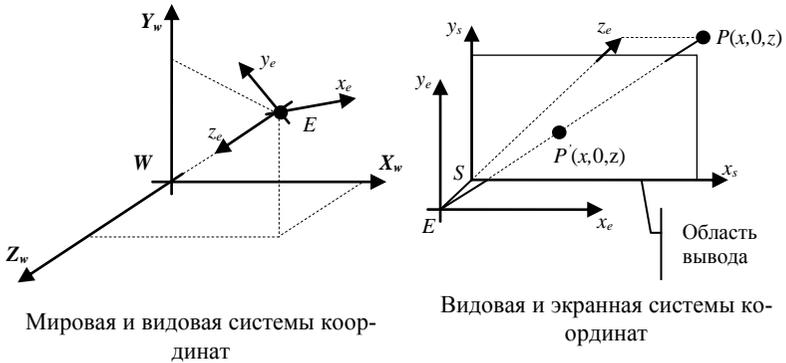


Рис. 3.28. Мировая, видовая и экранная системы координат

В трехмерном случае преобразование сдвига можно описать следующим соотношением:

$$\begin{aligned} x_n &= x + T_x, \\ y_n &= y + T_y, \\ z_n &= z + T_z. \end{aligned} \quad (3.215)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{T}, \quad (3.216)$$

где  $(x, y, z)$  – текущие координаты вершины в пространстве,  $T_x, T_y, T_z$  – величины сдвига соответственно по осям  $X, Y$  и  $Z$ ,  $\mathbf{P} = \{x \ y \ z \ w\}$  –

вектор-строка исходных координат,  $w$  – обобщенная координата (как правило, принимается равной 1),  $\mathbf{P}_n = \{x_n \ y_n \ z_n \ w_n\}$  – вектор-строка

преобразованных координат,  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$  – матрица сдвига.

Преобразование масштабирования определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} x_n &= x \cdot S_x, \\ y_n &= y \cdot S_y, \\ z_n &= z \cdot S_z, \end{aligned} \quad (3.217)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.218)$$

где  $S_x$ ,  $S_y$  и  $S_z$  – коэффициенты масштабирования, а

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ – матрица масштабирования.}$$

Преобразование поворота на углы  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  относительно осей  $X, Y$  и  $Z$  соответственно, имеет вид:

$$\begin{aligned} x_n &= x \cdot (1 + \cos \phi_x + \cos \phi_z) + y \cdot \sin \phi_x + z \cdot \sin \phi_y, \\ y_n &= x \cdot \sin \phi_z + y \cdot (1 + \cos \phi_x + \cos \phi_z) - z \cdot \sin \phi_x, \\ z_n &= -x \cdot \sin \phi_y + y \cdot \sin \phi_x + z \cdot (1 + \cos \phi_x + \cos \phi_y), \end{aligned} \quad (3.219)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}, \quad (3.220)$$

$$\text{где } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 + \cos\phi_x + \cos\phi_z & \sin\phi_z & -\sin\phi_y & 0 \\ -\sin\phi_z & 1 + \cos\phi_x + \cos\phi_z & \sin\phi_x & 0 \\ \sin\phi_y & -\sin\phi_x & 1 + \cos\phi_x + \cos\phi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– матрица поворота.

### 3.9.4. Методы проецирования трехмерных образов на плоский экран

При программировании визуализации трехмерных компьютерных образов в общем виде необходимо задать объем видимости в трехмерном пространстве, вид проецирования на экранную плоскость и объем вывода на экран. При этом трехмерные объекты отсекаются по границе объема видимости и после этого проецируются на экран.

В процессе преобразования координат при преобразовании из мировых в экранные координаты три измерения отображаются в два, что неизменно приводит к появлению искажений. От выбора типа проецирования зависит не только достоверность изображенного образа, но и адекватность его восприятия.

Проецирование выполняется с помощью проецирующих лучей, называемых проекторами, которые идут из центра проекции через все точки визуализируемого объекта до экранной плоскости. По расположению центра проекции относительно экранной плоскости различают центральную и параллельную проекции.

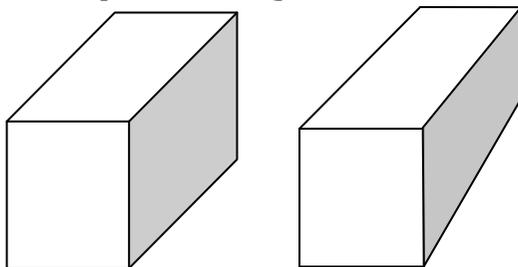
В случае параллельной проекции ее центр располагается на бесконечном расстоянии от экранной плоскости. Таким образом, проекторы представляют собой параллельные пучки прямых. Вид данной проекции зависит от взаимного расположения осей координат, экранной плоскости и проекторов. В компьютерной графике чаще всего применяются ортогональная и аксонометрическая проекции.

При ортогональном проецировании проекторы параллельны главной оси наблюдения и ортогональны экранной плоскости.

При аксонометрическом проецировании возможны два варианта: проекторы перпендикулярны экранной плоскости, которая в свою очередь расположена под некоторым углом к главной оси. Такой тип проецирования называется прямоугольной аксонометрической проекцией. Если же, наоборот, проекторы не ортогональны экранной плоскости, а главная ось – ортогональна, то такой тип проецирования называется косоугольной аксонометрической проекцией.

Изображение, полученное при использовании таких видов проецирования, позволяет за счет отсутствия перспективы точно отобразить форму и размер трехмерного объекта, однако, оно не достаточно реалистично.

При центральном проецировании расстояние до центра проекции конечно, поэтому проекторы – это пучок прямых, исходящих из центра. Для задания такого вида проецирования необходимо определить местоположение центра проекции и картинной плоскости. Центральное проецирование за счет появления перспективы приводит к искажениям в форме и размерах объекта, однако, такой объект на экране выглядит более реалистично (рис. 3.29).



Параллельное проецирование

Центральное проецирование

Рис. 3.29. Параллельное и центральное проецирование

Параллельное проецирование можно описать следующим матричным соотношением:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_p, \quad (3.221)$$

где  $\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 & 1 \end{bmatrix}$  – матрица параллельного проецирования, а

$z = z_0$  – уравнение, задающее плоскость проецирования.

Косоугольное проецирование в плоскость  $z = 0$  можно описать следующим матричным соотношением:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_a, \quad (3.222)$$

где  $\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  – матрица косоугольного проецирования.

ния.

Уравнение для центральной проекции с центром в начале координат можно описать следующим соотношением:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_c, \quad (3.223)$$

где  $\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  – матрица косоугольного проецирования,  $d$  –

расстояние от начала координат до экранной плоскости, ортогональной оси  $Z$ .

### 3.9.5. Методы удаления невидимых линий

Существенной трудностью, возникающей при программировании трехмерной графики, является так называемая проблема удаления невидимых линий. Суть ее заключается в необходимости определения и исключения из списка изображаемых тех элементов геометрии обла-

сти, которые в текущий момент времени экранируются другими частями объекта и не видны наблюдателю.

Алгоритмы удаления невидимых частей визуализируемой сцены принято классифицировать следующим образом:

- по выбору удаляемых частей (точек, линий, ребер, поверхностей, объемов);
- по порядку обработки элементов сцены (удаление в заданном или произвольном порядке);
- по системе координат (сравнение каждого элемента объекта, например, грани или пикселя с другими).

Наиболее распространенными методами удаления невидимых линий и поверхностей являются:

- алгоритм Робертса;
- алгоритм Z-буфера;
- построчный алгоритм Z-буфера;
- алгоритм разбиения области Варнока;
- построчный алгоритм Уоткинса;
- алгоритм трассировки лучей.

Подробные обзоры существующих алгоритмов удаления невидимых линий и поверхностей приведены в работах [1, 3, 31, 32]. Большинство из вышеприведенных алгоритмов ориентированы на применение для различных частных случаев. Наиболее эффективным, простым и часто используемым универсальным методом удаления невидимых линий является алгоритм Z-буфера.

Идея данного алгоритма заключается в том, что в отличие от обычного буфера кадра изображения, хранящего цвета всех образующих сцену пикселей, используется дополнительный буфер, содержащий Z-координату каждой точки образа (отсюда и название алгоритма). Данная координата фактически является глубиной точки. При занесении цвета очередного пикселя в буфер кадра значение его Z-координаты сравнивается с Z-координатой пикселя, который уже находится в буфере. Если Z-координата нового пикселя больше, чем координата старого, т.е. он ближе к наблюдателю, то атрибуты нового пикселя и его Z-координата заносятся в буфер, если нет, то ничего не делается.

Данный алгоритм является достаточно простым в реализации и не зависит от порядка рисования сцены. Главным недостатком алгоритма Z-буфера является необходимость использования значительных объемов оперативной памяти компьютера, что особенно заметно при визуализации быстроменяющихся динамических сцен. Также к недостаткам данного алгоритма можно отнести появление так называемого лестничного эффекта и трудности с рисованием линий на поверхности объектов.

Как уже отмечалось выше, изображение конечно-элементного трехмерного тела сводится к изображению некоторой конечной совокупности непересекающихся плоских полигональных областей простой формы, являющихся поверхностными гранями конечных элементов, образующих тело. При этом форма полигонов зависит от типа используемого элемента, например, в случае тетраэдра – треугольник, призмы – четырехугольник. Этот факт, позволяет модифицировать алгоритм Z-буфера таким образом, чтобы существенно снизить объем требуемой памяти, повысить скорость его работы, а, главное, значительно упростить саму процедуру алгоритма.

Суть такой модификации алгоритма Z-буфера состоит в том, что при изображении совокупности конечных элементов по глубине тестируется не каждая точка грани очередного КЭ (как это делается в базовом алгоритме), а только одна точка, принадлежащая, грани, например, ее геометрический центр. Здесь важно, чтобы тестируемая точка на грани не совпадала с одной из ее вершин, иначе возможна ситуация, когда граничащая с тестируемой невидимая грань также будет считаться видимой (рис. 3.30).

Так как грани не пересекаются, оптимальной точкой для тестирования ее глубины является геометрический центр грани. Его можно вычислить по формуле:

$$x_c = \frac{\sum_i^n x_i}{n}, y_c = \frac{\sum_i^n y_i}{n}, z_c = \frac{\sum_i^n z_i}{n}, \quad (3.224)$$

где  $n$  – количество вершин грани.

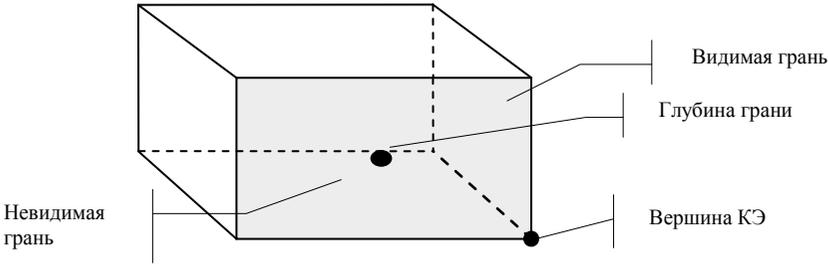


Рис. 3.30. Выбор точки на грани для теста по глубине

Блок-схема модифицированного алгоритма Z-буфера для изображения трехмерных конечно-элементных тел приведена на рис. 3.31. Главным преимуществом данного алгоритма по сравнению со стандартным Z-буфером является его минимальные требования к объему необходимой оперативной памяти, и скорости выполнения рендеринга. Причем, алгоритм будет весьма эффективным, если изображать даже все грани КЭ, составляющих тело. Однако, оптимальным все же будет визуализация только поверхности тела.



Рис. 3.31. Блок-схема модифицированного алгоритма Z-буфера

На рис. 3.32 приведен пример работы вышеописанной модификации алгоритма Z-буфера.

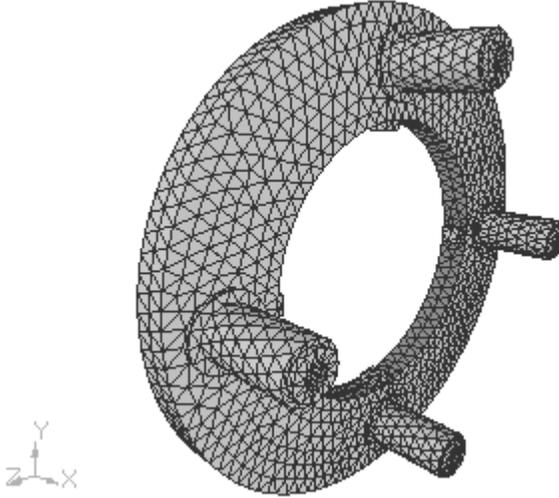


Рис. 3.32. Пример работы модифицированного алгоритма Z-буфера

## 3.10. Алгоритмы визуализации численных результатов расчета

### 3.10.1. Построение полутоновых изображений

Одним из возможных алгоритмов построения полутоновой картины распределения некоторой функции  $U$  по треугольной области является следующий подход. Пусть визуализируемый диапазон числовых значений функции  $U$  располагается на интервале от  $U_{\min}$  до  $U_{\max}$  и количество градаций цветов (полутонов), требуемых для визуализации треугольной области, равно  $n$ . Тогда диапазон значений  $U$ , закра-

шиваемых на рисунке одним цветом, будет иметь вид  $[U_i, U_{i+1}]$ , где

$$U_i = U_{\min} + ih, \quad h = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{n - 1}.$$

Тогда, номер цвета, соответствующий некоторому значению  $U^*$ , можно определить по формуле:

$$j = \frac{U^* - U_{\min}}{h}. \quad (3.225)$$

Пусть необходимо построить полутонное изображение для треугольника  $P_1P_2P_3$  с узловыми значениями  $U^{P_1}, U^{P_2}, U^{P_3}$ . И при этом  $U^{P_1}$  – максимальное узловое значение на треугольнике, а  $U^{P_2}$  – минимальное. Очевидно, что  $m_{12}$  – количество цветовых градаций на стороне  $P_1P_2$  будет максимальным, при этом  $m_{12} = m_{13} + m_{32}$ , где

$$\begin{aligned} m_{12} &= \text{int} \frac{U^{P_1} - U_{\min}}{h} - \text{int} \frac{U^{P_2} - U_{\min}}{h}, \\ m_{13} &= \text{int} \frac{U^{P_1} - U_{\min}}{h} - \text{int} \frac{U^{P_3} - U_{\min}}{h}, \\ m_{32} &= \text{int} \frac{U^{P_3} - U_{\min}}{h} - \text{int} \frac{U^{P_2} - U_{\min}}{h}. \end{aligned} \quad (3.226)$$

В этом случае визуализация треугольника сводится к изображению совокупности из  $m_{12}$  четырехугольников и треугольников, цвет каждого из которых соответствует его номеру в заданной цветовой шкале.

На рис. 3.33 приведен пример такого разбиения треугольника на цветовые зоны при  $m_{12} = 4$ ,  $m_{13} = 3$  и  $m_{32} = 1$ . Легко видеть, что набор цветовых полигонов представляет собой два треугольника и  $m_{12} - 2$  четырехугольника, при этом цвет каждой такой зоны соответствует номеру его индекса.

Пример работы вышеописанного алгоритма для плоской треугольной области изображен на рис. 3.34. На рис. 3.35 приведен при-

мер визуализации распределения некоторого фазового параметра по пространственной области.

Другим подходом к построению полутоновых изображений может служить построение и визуализация полутоновой картины, соответствующей распределению градиента на исследуемой поверхности объекта [37].

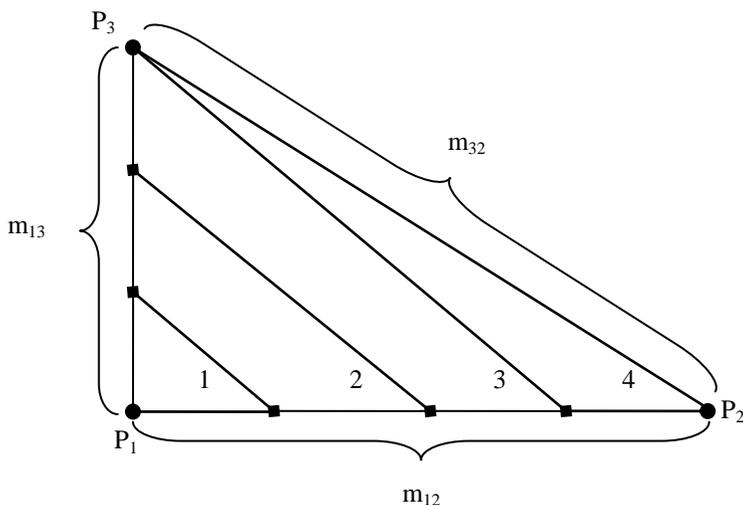


Рис. 3.33. Пример разбиения треугольника на цветовые зоны

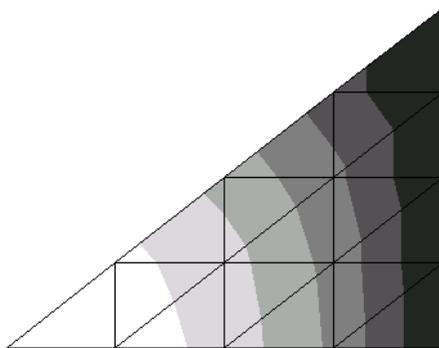


Рис. 3.34. Пример работы полутонового алгоритма для плоской области

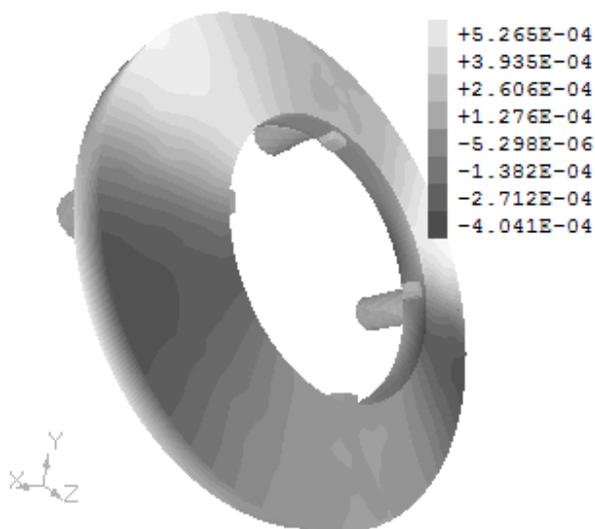


Рис. 3.35. Распределение перемещений по оболочечной конструкции (визуализация объекта вместе с цветовой шкалой)

### 3.10.2. Деформация поверхности объекта

Альтернативным подходом к полутоновой визуализации результатов расчета является изменение геометрии расчетной области в соответствии с распределением по ней фазового параметра с последующим использованием эффектов освещения пространственных объектов. Это дает возможность увидеть особенности формы поверхности объекта, что позволяет получить дополнительную информацию о распределении анализируемой величины.

Для изображения освещенной сцены в компьютерной графике чаще всего применяется модели диффузного и зеркального отражения объектом света от заданного одного или нескольких точечных источников освещения [31, 32].

Диффузное отражение света точечного источника от идеального рассеивателя определяется законом Ламберта, согласно которому падающий свет рассеивается во все стороны с одинаковой интенсивно-

стью. В этом случае освещенность точки пропорциональна доле ее площади, видимой от источника и описывается следующим соотношением:

$$I_r = I_p \cdot P_d \cdot \cos\varphi, \quad (3.227)$$

где  $I_r$  – интенсивность отраженного света;  $I_p$  – интенсивность точечного источника;  $P_d \in [0, 1]$  – коэффициент диффузного отражения, зависящий от свойств материала отражающего объекта и цвета источника освещения;  $\varphi \in [0, \pi/2]$  – угол, образованный направлением света и нормалью поверхности.

Для повышения реалистичности восприятия рисунка в компьютерной графике также учитывается и наличие рассеянного света, который описывается при помощи коэффициента рассеяния:

$$I = I_r \cdot P_r + I_p \cdot P_d \cdot \cos\varphi, \quad (3.228)$$

где  $I_r$  – интенсивность рассеянного света;  $P_r \in [0, 1]$  – коэффициент диффузного отражения рассеянного света.

Моделирование затухания света с расстоянием от источника описывается следующим соотношением:

$$I = I_r \cdot P_r + \frac{I_p \cdot P_d \cdot \cos\varphi}{d + K}, \quad (3.229)$$

где  $d$  – расстояние от центра проекции до объекта;  $K$  – произвольная константа, задающая степень затухания света.

При использовании параллельного проецирования, учет расстояния обеспечивается тем, что ближайший к наблюдателю объект освещается с максимальной интенсивностью, а все расположенные далее – с меньшей. При этом в качестве расстояния  $d$  используется расстояние до ближайшего к точке наблюдения объекта.

Отраженный от идеального зеркала свет виден только в том случае, если угол, образованный направлениями наблюдения и отражения, равен нулю. Для неидеальных отражающих поверхностей используется модель Фонга [40]:

$$I_s = I_p \cdot W(\lambda, \varphi) \cdot \cos^n \alpha, \quad (3.230)$$

где  $W(\lambda, \varphi)$  – кривая отражения, зависящая от длины волны  $\lambda$  света источника и угла падения  $\varphi$ ;  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  – угол между направлениями наблюдения и отражения;  $n \in [1, 200]$  – показатель степени, задающий убывание интенсивности при изменении угла.

Для простоты на практике обычно  $W(\lambda, \varphi)$  заменяют некоторой константой  $K_s$ , подобранной таким образом, чтобы построенная картина субъективно воспринималась реалистично.

Таким образом, используемая в компьютерной графике суммарная модель освещения имеет вид:

$$I = I_r \cdot P_r + \frac{I_p}{d + K} \cdot (P_d \cdot \cos \varphi + W(\lambda, \varphi) \cdot \cos^n \alpha), \quad (3.231)$$

или

$$I = I_r \cdot P_r + \frac{I_p}{d + K} \cdot (P_d \cdot \cos \varphi + K_s \cdot \cos^n \alpha), \quad (3.232)$$

При использовании нормированных векторов направления падения  $\mathbf{L}$ , нормали  $\mathbf{N}$ , отражения  $\mathbf{R}$  и наблюдения  $\mathbf{V}$ , модель освещения для одного источника описывается следующим образом:

$$I = I_r \cdot P_r + \frac{I_p}{d + K} \cdot (P_d \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} + K_s \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})^n), \quad (3.233)$$

При визуализации плоской полигональной фигуры (например, грани конечного элемента), если источник света находится на бесконечности, то  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}$  равно константе, а  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{V}$  меняется в пределах этой фигуры. Таким образом, визуализация освещенного конечно-элементного объекта требует поточечного построения образа, что приводит к необходимости использования оригинального алгоритма Z-буфера. Однако, возможности современным компьютеров с использованием современных графических стандартов OpenGL или DirectX позволяют эффективно визуализировать освещенные объекты. Например, на рис. 3.36 изображен освещенный боковым источником света объект, ранее приведенный на рис. 3.32. Реализация графического вывода была сделана с помощью библиотеки OpenGL.

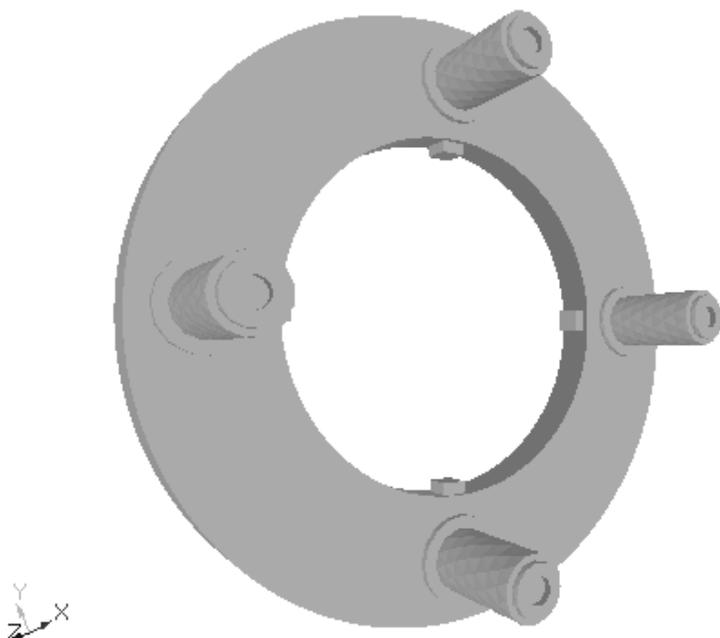


Рис. 3.36. Визуализация конечно-элементного объекта с использованием режима освещения (без изображения границ КЭ)

Для задания формы поверхности в современных графических библиотеках нужно определять вектора нормалей. Если каждый узел конечно-элементного объекта сместить вдоль его нормали на соответствующим образом нормированное значение исследуемой функции (например, перемещений или напряжений) и изобразить полученную деформированную поверхность объекта освещенной боковым источником света, то полученная наглядная картина также позволит судить о распределении исследуемой числовой величины по области.

Для практической реализации освещения поверхности конечно-элементного объекта необходимо построить нормали ко всем граням,

образующим внешнюю границу геометрической области. Алгоритм их построения, на примере треугольной грани можно описать следующим образом. Зная координаты  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  и  $(x_3, y_3, z_3)$  вершин треугольной грани, координаты вектора нормали к ней можно вычислить так:

а) построить уравнение плоскости  $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$ , содер-

жащей грань, решив уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

б) вычислить координаты вектора нормали  $(A, B, C)$ .

С точки зрения удобства хранения информации о нормалях к граням, образующим поверхность области, удобно хранить координаты векторов нормали отдельно для каждого узла, и затем, непосредственно при визуализации грани, вычислять общий вектор нормали для грани. Получить нормаль для каждого узла объекта можно так, как это изображено на рис. 3.37.

Поскольку по абсолютной величине фазовые параметры расчета, как правило, не сопоставимы с габаритами объекта, для реализации данного алгоритма освещения объекта их нужно предварительно нормировать. Это можно сделать с помощью следующего соотношения:

$$U_n = \frac{L_{mid} \cdot U}{K \cdot U_{max}}, \quad (3.234)$$

здесь  $U$  – визуализируемый фазовый параметр;  $L_{mid}$  – средняя длина ребра по всем конечным элементам дискретной модели области;  $K$  – отличный от нуля коэффициент масштабирования, позволяющий менять степень шероховатости поверхности визуализируемого объекта.

На рис. 3.38 приведен пример визуализации одной их компонент вектора перемещений по конструкции с использованием вышеописанного поверхностного подхода. Соответствующая полутоновая визуализация приведена на рис. 3.35.

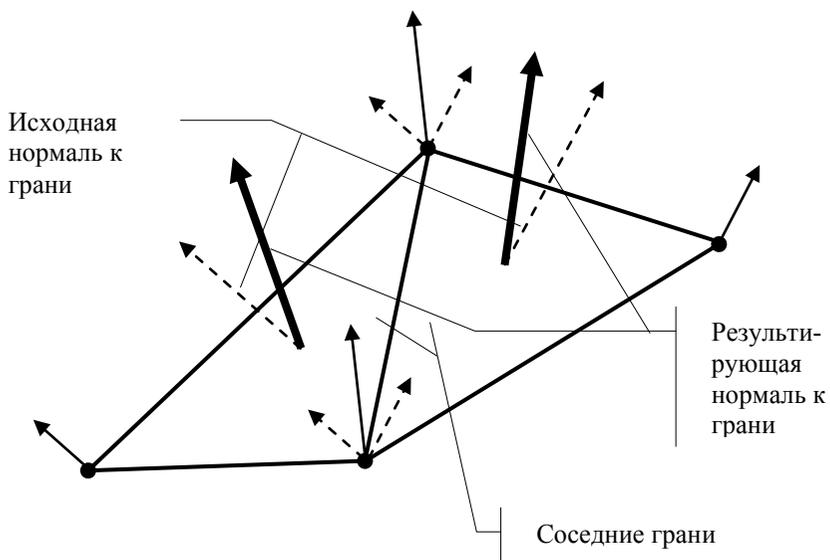


Рис. 3.37. Построение нормалей к граням конечно-элементного объекта

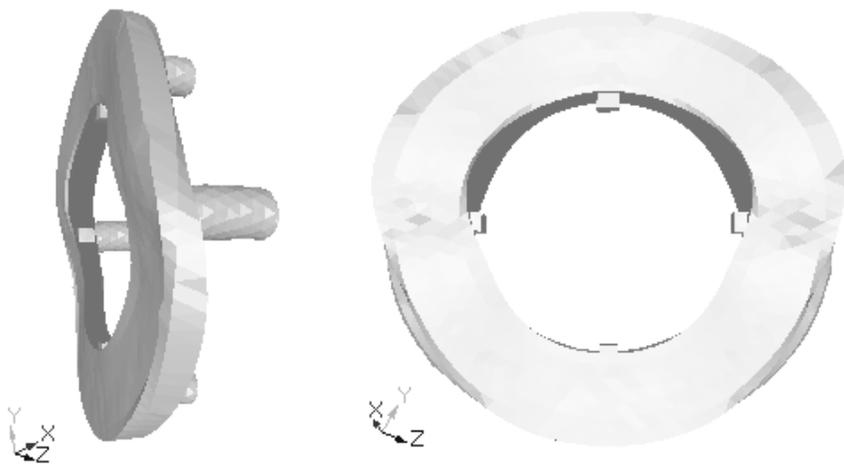


Рис. 3.38. Пример визуализации с помощью поверхностного подхода

Поверхностный подход дает возможность инженеру-проектировщику наглядно увидеть не только распределение фазового параметра по поверхности исследуемой конструкции, но и его форму. Например, на рис. 3.39, 3.40 приведена визуализация распределения одной из компонент тензора напряжений по конструкции с использованием полутонового и поверхностного подходов.

В данном случае легко заметить не только зоны максимальных напряжений, но и их вид (растягивающие, сжимающие и т.п.).

Аналогичным образом вышеописанный подход можно применять и для визуализации плоских областей. Например, на рис. 3.41,а приведено полутоновое распределение некоторого фазового параметра по квадратной плоской области с разрезом, а на рис. 3.41,б – соответствующее ему изображение, полученное с помощью поверхностного подхода.

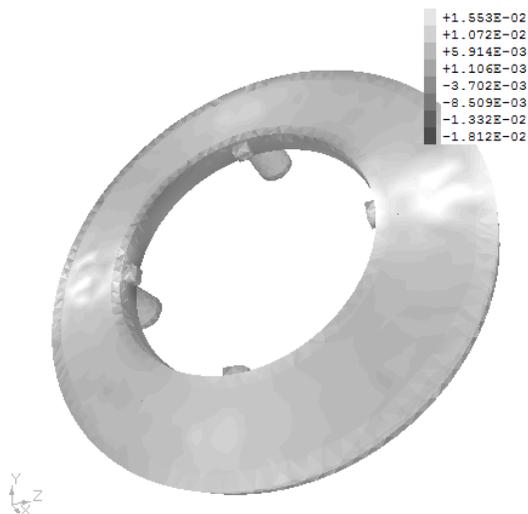
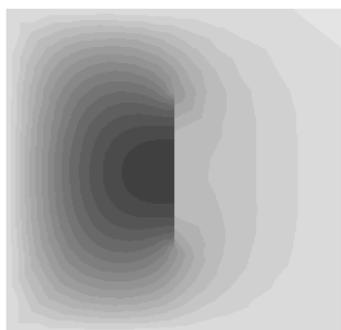


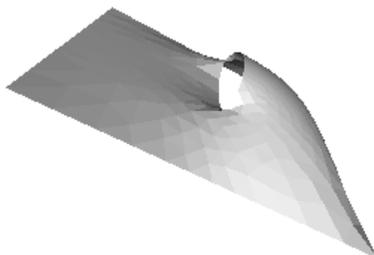
Рис. 3.39. Визуализация распределения напряжений с помощью полутонового подхода



Рис. 3.40. Визуализация распределения напряжений с помощью поверхностного подхода



а)



б)

Рис. 3.41. Распределение функции по расчетной области:  
а) полутоновой и б) поверхностный подход

Таким образом, очевидно, что данный подход к визуальному представлению численных результатов расчета позволяет повысить

наглядность их восприятия и, в конечном итоге, упростить процесс их анализа.

### *Литература к главе 3*

1. Аммерал Л. Интерактивная трехмерная машинная графика. – М.: Изд-во «Сол Систем». – 1992. – 313 с.
2. Аммерал Л. Машинная графика на персональных компьютерах. – М.: Из-во «Сол Систем». – 1992. – 226 с.
3. Аммерал Л. Принципы программирования в машинной графике. – М.: Изд-во «Сол Систем». – 1992. – 248 с.
4. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформированных тел. – К.: НДІБМ, 1993. – 376 с.
5. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964. – 483 с.
6. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
7. Гребенюк С.Н., Киричевский Вал.В. Сингулярный конечный элемент серендипова семейства для композита с трещиной / Радиоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – №1. – С. 48-57.
8. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
9. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Механика разрушения полимеров. – К.: Наукова думка, 1988. – 221 с.
10. Киричевський В.В., Дохняк Б.М., Гребенюк С.М. Трикутні скінченні елементи у механіці руйнування еластомерів // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 67. – С. 72–83.
11. Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. Метод конечных элементов в механике разрушения эластомеров. – К.: Наукова думка, 1998. – 200 с.
12. Киричевский В.В., Козуб Ю.Г., Гребенюк С.Н. Энергетические методы определения параметров разрушения эластомерных конструкций при конечных деформациях // Труды восьмого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. Дорога, шина, автомобиль». – М.: НИИШП, 1997. – Т.1. – С.242–246.
13. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наукова думка, 2002. – 655 с.

14. Киричевский В.В. Обобщение моментной схемы конечных элементов для исследования конструкций из слабосжимаемых эластомеров // Проблемы прочности. – 1986. – № 11. – С. 105–110.
15. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
16. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наукова думка, 1970. – 307 с.
17. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. школа, 1976. – 279 с.
18. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Карпиноса Д.М. – К.: Наукова думка, 1985. – 592 с.
19. Кузнецов Г.Б., Шардаков И.Н. Об одном подходе к реализации метода аппроксимации с помощью конечного элемента // Методы решения задач теории упругости и вязкоупругости. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. – С. 85–89.
20. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
21. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МРЕЛА+» / В.В. Киричевский., Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. – К.: Наукова думка, 2005. – 416 с.
22. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский и др. / Под ред. А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. – К.: Выща школа, 1982. – 480 с.
23. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, Д.П. Бувайло. – К.: Наукова думка, 2003. – 316 с.
24. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. Механика материалов / А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др. – К.: Наукова думка, 1982. – 368 с.
25. Морозов А.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
26. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – К.: Будівельник, 1980. – 248 с.
27. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наукова думка, 1968. – 246 с.
28. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – К.: Наукова думка, 1980. – 260 с.

29. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 572 с.
30. Ржаницин А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.
31. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / Пер. со второго англ. изд. П.А. Монахова, Г.В. Олохтоновой / Под ред. Ю.М. Баяковского и др. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
32. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
33. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
34. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
35. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика рушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
36. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
37. Толлок А.В., Гоменюк С.И. Моделирование образной оценки градиента на рельефе поверхности // Искусственный интеллект. Донецк: ИПШ. – 2004. – № 1. – С. 113-119.
38. Фоли Дж., ван Дэм А. Основы интерактивной машинной графики. – М.: Мир, 1985. – 1053 с.
39. Хирн Д., Бейкер М. Микрокомпьютерная графика. – М.: Мир, 1987. – 352 с.
40. Bui-Tuong Phong. Illumination for Computer-Generated Pictures. Communication of the ASM, 18(6), June 1975. – P. 311-317.

## ГЛАВА 4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕЗИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

### 4.1. Тороидальная оболочка

Конструкции в виде тороидальных оболочек находят широкое применение в различных областях промышленности. В частности, подавляющее число шин и составляющих их компонентов представляют собой торообразные оболочки. Так, в виде резинокордных торообразных оболочек выполнены каркас и брекер покрышки.

Между некоторыми слоями каркаса размещают эластомерные прокладки торообразной формы для увеличения эластичности покрышки. Боковина с протектором также представляют собой эластомерный элемент конструкции по форме, близко к тороидальной оболочке.

Рассмотрим эластомерную тороидальную оболочку (рис. 4.1) под внутренним давлением [7].

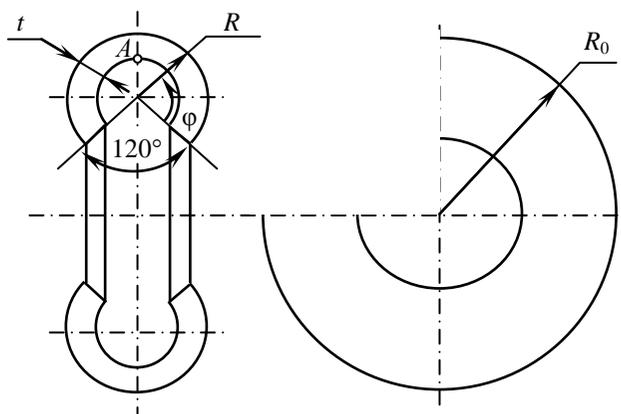


Рис. 4.1. Тороидальная оболочка

Характеристики материала примем близкими к используемым в шинной промышленности при производстве шин:  $E = 6$  МПа.

Внутреннее давление, действующее на тороидальную оболочку, принимаем равным  $p = 0,5$  МПа. Реологические параметры ядра релаксации Ю.Н. Работнова:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,06$ ;  $\chi = 0,58$ . Конструкция рассчитывалась при различных значениях коэффициента Пуассона:  $\nu = 0,49$  и  $\nu = 0,499$ . При решении задачи вязкоупругости время  $t = 2$  с.

Результаты расчета [12] представлены на рис. 4.2-4.4.

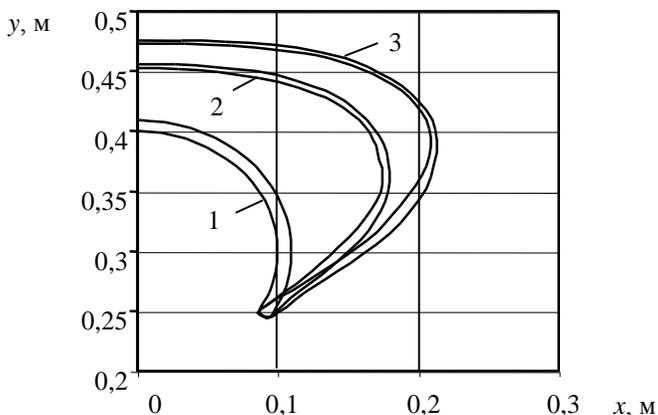


Рис. 4.2. Профиль тороидальной оболочки: 1 – в начальном состоянии; 2 – упругое решение; 3 – вязкоупругое решение

Из приведенных графиков (рис. 4.2, 4.3) можно заметить, что при учете реологических характеристик материала за счет ползучести тороидальная оболочка деформируется сильнее в сравнении с упругим решением. Сжимаемость материала также оказывает значительное влияние на деформированное состояние оболочки. При коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,499$  наследственные свойства проявляются сильнее по сравнению с  $\nu = 0,49$  (рис. 4.3). В то же время вязкоупругие свойства материала оказывают незначительное влияние на напряженное состо-

яние оболочки (рис. 4.4), и распределение напряжений при упругом и вязкоупругом решении различается незначительно.

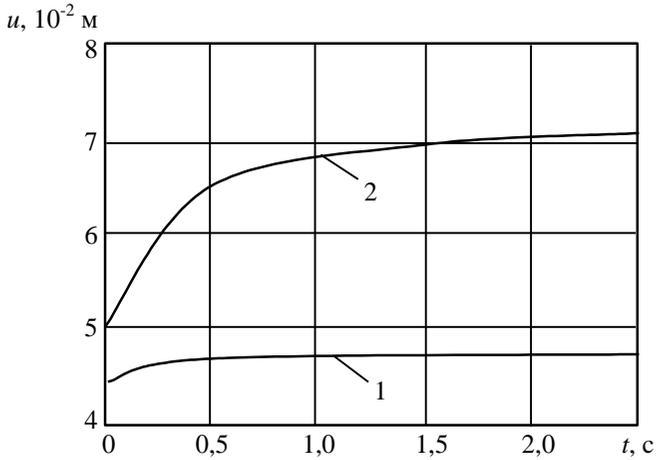


Рис. 4.3. Перемещение точки  $A$  в зависимости от времени:  
1 – при  $\nu = 0,49$ ; 2 – при  $\nu = 0,499$

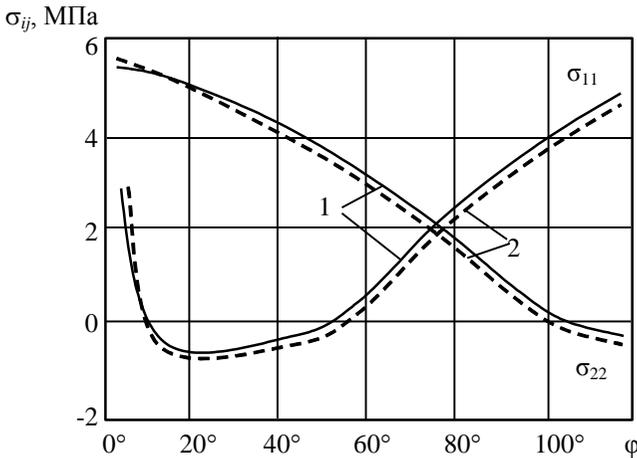


Рис. 4.4. Распределение напряжений по радиусу оболочки:  
1 – при  $t = 0$  с; 2 – при  $t = 2$  с

Для того чтобы правильно провести расчет резиновых деталей, надо тем или иным образом учитывать нелинейность деформирования. Это можно сделать несколькими способами. При решении задачи упругости можно использовать тензор нелинейных деформаций, который учитывает нелинейность, если конструкция подвергается значительным деформациям. При расчете таких конструкций связь между тензором напряжений и деформаций также можно выбрать отличной от закона Гука. Более всего нашли распространение следующие законы состояния: Синьорини, Сетха, Мурнагана, а при расчете слабосжимаемых конструкций применяются законы Пенга–Ландела и Линдли. При решении задачи упругости подразумевается, что нагрузка и деформирование тела происходит мгновенно и с течением времени не изменяется. Но значительному количеству материалов присущие ярко выраженные наследственные качества, которые описываются основными соотношениями теории вязкоупругости. Наиболее общая связь между напряжениями и деформациями, которые зависят от времени, определяется на основе интегральных соотношений наследственной теории Больцмана-Вольтерра.

Получить решение на основе упомянутых выше законов аналитическими методами можно только для ограниченного количества наиболее простых конструкций. Для расчета сложных пространственных конструкций применяются численные методы, в том числе метод конечных элементов.

Характеристики материала примем следующие:  $E = 6$  МПа,  $\nu = 0,495$ . Внутреннее давление  $p$ , действующее на тороидальную оболочку, принимаем равным  $0,2$  МПа. Реологические параметры ядра релаксации такие:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,06$ ;  $\chi = 0,58$ . При решении задачи вязкоупругости время  $t$  принималось равным  $2$  с. Результаты расчета представлены на рис. 4.5, 4.6 [7].

Из приведенных графиков (рис.4.5) можно заметить, что при расчете тороидальной оболочки перемещения характерных точек конструкции, полученные в геометрически нелинейной постановке, превышают линейные при заданной величине нагрузки на 15-25%. Учет реологических характеристик материала тоже увеличивает перемеще-

ние характерных точек конструкции на 30-35% в сравнении с нелинейным упругим расчетом (рис. 4.6).

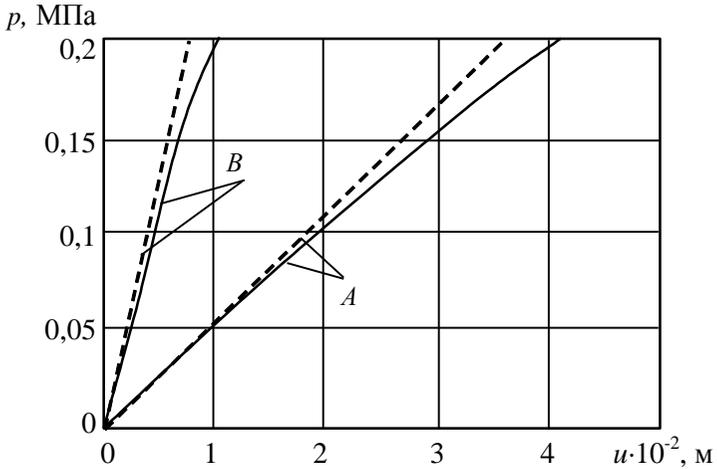


Рис.4.5. Перемещения точек  $A$  и  $B$  в зависимости от нагружения: --- линейное решение; — — нелинейное решение

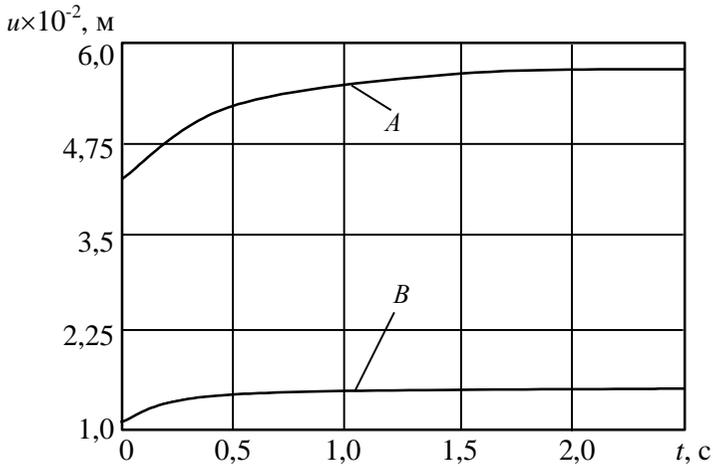


Рис.4.6. Перемещения точки  $A$  и  $B$  в зависимости от времени

## 4.2. Резиновый виброизолятор ВН-101

Необходимость создания виброизоляторов повышенной устойчивости привела к созданию виброизолятора типа ВН-101 с формой, близкой к форме усеченной сферы [4]. При эксплуатации такие виброизоляторы могут работать в двух режимах нагружения (рис. 4.7). При нагружении по схеме 1 сила прикладывается лишь в центре верхней части полусферы, а при нагружения виброизолятора по схеме 2 – к выступающей поверхности верхней части амортизатора.

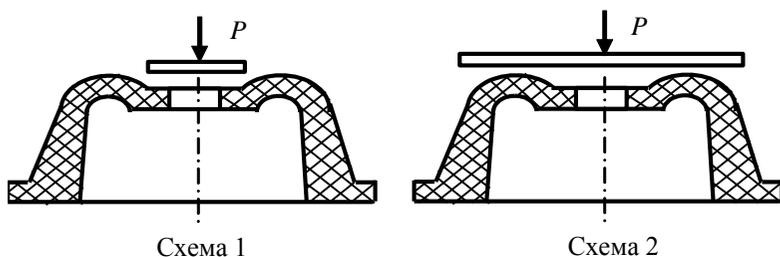


Рис. 4.7. Схема нагружения виброизолятора

Размеры виброизолятора ВН-101: высота – 46 мм, наибольший диаметр – 145 мм, толщина стенки – 10 мм; марка резины – 2959; модуль сдвига –  $G = 1,76$  МПа, коэффициент Пуассона –  $\nu = 0,499$ . Реологические параметры ядра релаксации Ю.Н. Работнова для данной марки резины:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,06$ ;  $\chi = 0,58$  [8].

При нагружении по схеме 1 значительные деформации испытывает лишь верхняя часть виброизолятора, а остальной массив деформируется незначительно. При нагружении по схеме 2 деформируется как верхняя, так и нижняя часть виброизолятора. В первом случае осевая жесткость значительно меньше, чем во втором. Это связано с тем, что во втором случае значительную часть действующей нагрузки воспринимают боковые стенки виброизолятора.

По результатам расчета (рис. 4.8, а, б) видно, что расчет задачи в упругой постановке дает заниженный, а в вязкоупругой – завышенный результат по сравнению с экспериментальными данными.

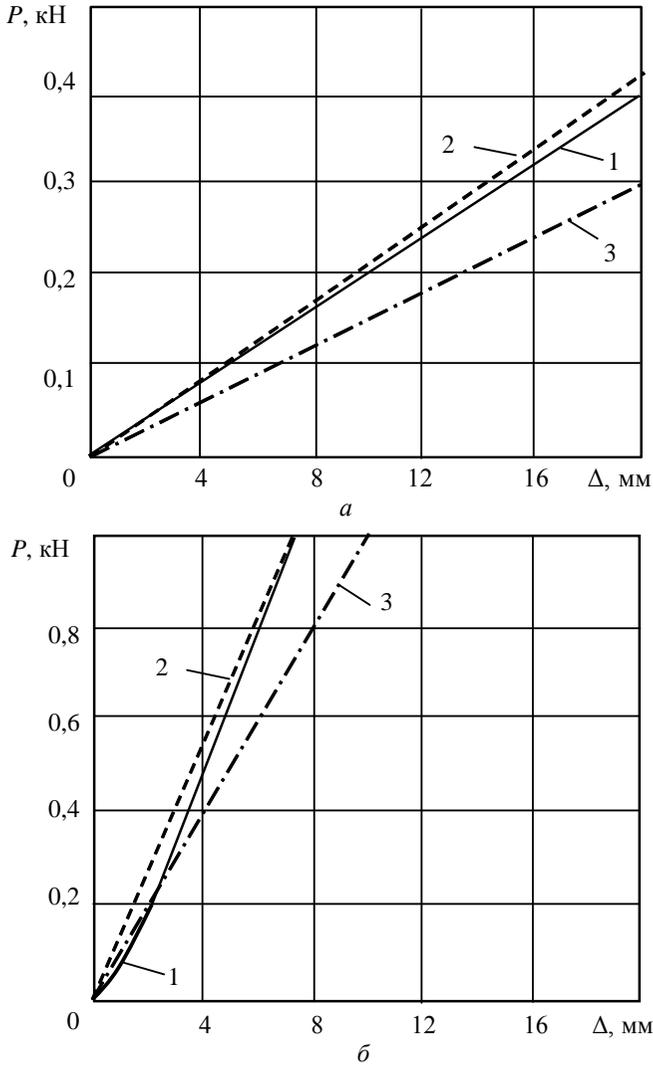


Рис. 4.8. Зависимость между максимальным прогибом конструкции и прикладываемой нагрузкой (а – первая схема нагружения, б – вторая схема нагружения): 1 – экспериментальное значение [11]; 2 – линейное упругое решение; 3 – линейное вязкоупругое решение

### 4.3. Разрушение эластомерных элементов сит грохотов

Создание износостойких и высокоэффективных просеивающих поверхностей из эластомеров является основным направлением их совершенствования в современной технике грохочения. Широкое распространение к настоящему времени они получили на предприятиях цветной и черной металлургии, в угольной промышленности и промышленности строительных материалов. При использовании резиновых сит в сравнении, например, с проволочной сеткой наблюдается снижение эффективности грохочения, обусловленной большей частью более низким их живым сечением, что определяется как широкими перемычками между ячейками, так и сравнительно большой потерей рабочей площади за счет деталей крепления, а также ухудшение качества просеивания за счет толщины резиновых сит [1].

Поэтому наряду с традиционными конструкциями резиновых сит (с квадратными ячейками без армирования, армированных стальным листом, армированных стальной проволочной сеткой), становится целесообразным применение резонирующих ленточно-струнных сит (РЛСС), которые лишены недостатков, присущих традиционным резиновым ситам. Применение РЛСС позволяет повысить производительность и эффективность грохочения наряду с традиционными, а в некоторых случаях и превзойти получаемые результаты при использовании эквивалентных проволочных сит.

Следует также отметить, что эти сита имеют перспективу для использования при грохочении влажных материалов, оловосодержащих рудных пульп, при производстве гранитного щебня, а также в алмазодобывающей отрасли [13]. Срок службы резонирующих ленточно-струнных сит увеличился по сравнению с традиционными типами (до 2000 ч) и составляет не менее 4000 ч, а в отдельных случаях без ухудшения технологических показателей достигает 7000–8000 ч.

Резонирующее ленточно-струнное сито представляет собой просеивающую поверхность, состоящую из отдельных элементов – лент-струн с периодическими выступами-зубцами с одной стороны ленты (рис. 4.9). Ленты-струны устанавливаются с относительным натяжением (порядка 20%) в специальных опорах подситника грохота. Кон-

структивные параметры и натяжения лент-струн выбираются такими, чтобы обеспечивалась близость частоты основного тона свободных колебаний струн к частоте колебаний грохота. Режимные параметры таких сит не выходят за пределы параметров режимов современных серийных вибрационных грохотов и обеспечивают получение высоких технологических показателей в области их паспортных характеристик.

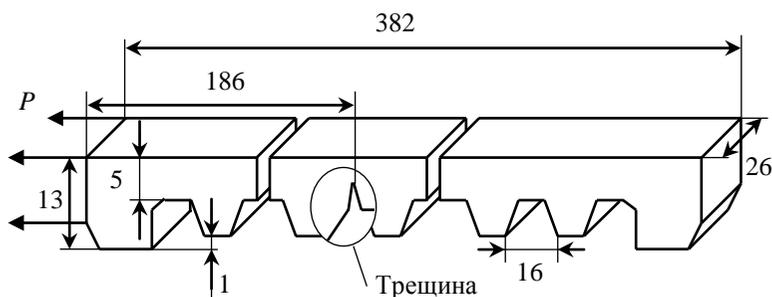


Рис. 4.9. Лента-струна с трещиной

В процессе эксплуатации под действием температурных и силовых нагрузок в эластомерных элементах сит образуются трещиноподобные дефекты. При наличии трещин некоторые эластомерные конструкции продолжают выполнять возложенные на них функциональные обязанности.

Размеры ленты-струны показаны на рис. 4.9. Марка резины – 2959. Реологические параметры ядра Ю.Н. Работнова для данной марки резины:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,062$ ;  $\gamma = 0,64$ ; модуль сдвига  $G_0 = 1,76$  МПа,  $\nu = 0,49$  [2].

Из анализа напряженно-деформированного состояния трещина моделировалась в месте действия наибольших растягивающих напряжений. Из условий работы эластомерных элементов сит сначала моделируем монтажное растяжение эластомерной струны на 20% в режиме релаксации напряжений, затем прикладываем эксплуатационную поверхностную нагрузку.

Параметры механики разрушения: раскрытие трещины (рис. 4.10, рис. 4.11), КИН (рис. 4.12) и величина  $J$ -интеграла (рис. 4.13) по-

лучены в квазистатической постановки при максимальном прогибе ленты-струны: порядка 10% от всей высоты конструкции.

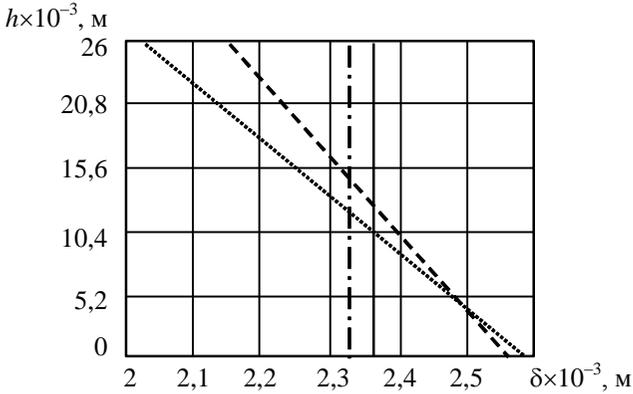


Рис. 4.10. Раскрытие трещины (линейное решение): — — упругое монтажное растяжение; - · - · - · вязкоупругое монтажное растяжение ; - - - - упругое решение; · · · · · вязкоупругое решение

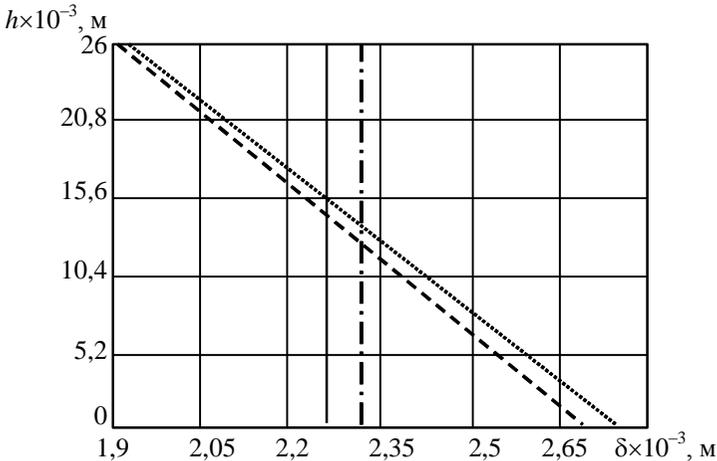


Рис. 4.11. Раскрытие трещины (нелинейное решение). — — упругое монтажное растяжение; - · - · - · вязкоупругое монтажное растяжение; - - - - упругое решение; · · · · · вязкоупругое решение

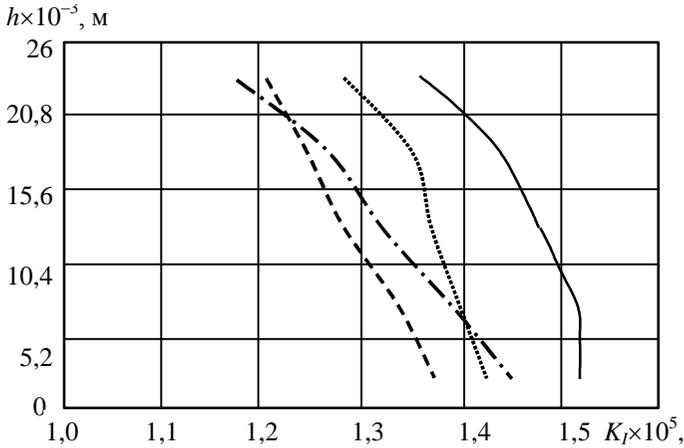


Рис. 4.12. Распределение коэффициента интенсивности напряжений (для нелинейной задачи – условного) по высоте ленты-струны: — — упругое линейное решение; - - - - вязкоупругое линейное решение; - · - · - упругое нелинейное решение; · · · · - вязкоупругое нелинейное решение

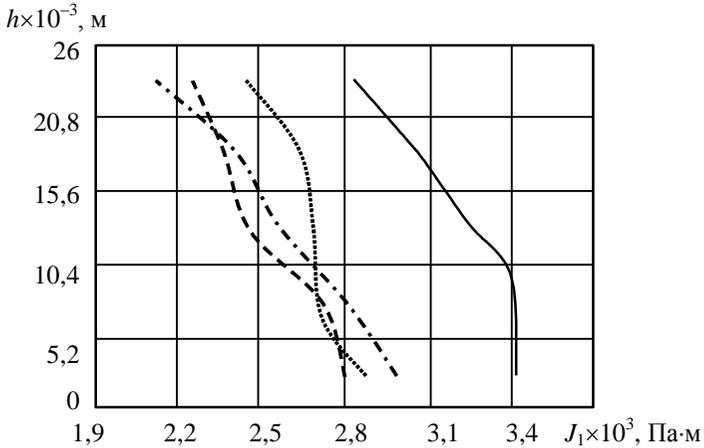


Рис. 4.13. Распределение величины  $J$ -интеграла по высоте ленты-струны: — — упругое линейное решение; - - - - вязкоупругое линейное решение; - · - · - упругое нелинейное решение; · · · · - вязкоупругое нелинейное решение

Расчет параметров механики разрушения в линейной постановке дает завышенный результат по сравнению с вязкоупругим линейным и нелинейным решениями. Нелинейное вязкоупругое решение и нелинейное упругое решение различаются незначительно по величине, хотя характер распределения несколько изменяется.

#### 4.4. Полый цилиндр с поверхностной трещиной

В современных машинах и агрегатах достаточно широко используются резиновые соединительные шланги и трубки в виде полых цилиндров. Данные элементы конструкций находятся, как правило, под внутренним давлением. В процессе эксплуатации на поверхности таких трубок могут появляться трещины.

Рассмотрим полый цилиндр с продольной полуэллиптической трещиной на внешней поверхности, находящийся под внутренним давлением (рис. 4.14) [5]. Размеры цилиндра: внутренний радиус 0,05 м, наружный радиус 0,1 м, высота 0,6 м. Размеры трещины:  $a = 0,05$  м,  $b = 0,025$  м; реологические параметры ядра Ю.Н. Работнова:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,062$ ;  $\gamma = 0,64$ ; модуль упругости  $E = 2,1$  МПа,  $\nu = 0,4999$ ; внутреннее давление  $p = 0,2$  МПа.

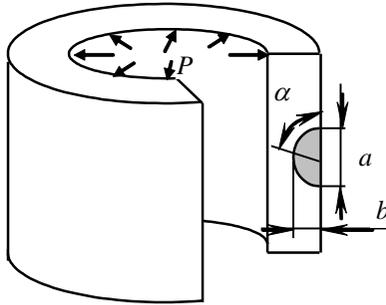


Рис. 4.14. Полый цилиндр с полуэллиптической трещиной

Параметры механики разрушения представлены на рис. 4.15, 4.16 и 4.17.

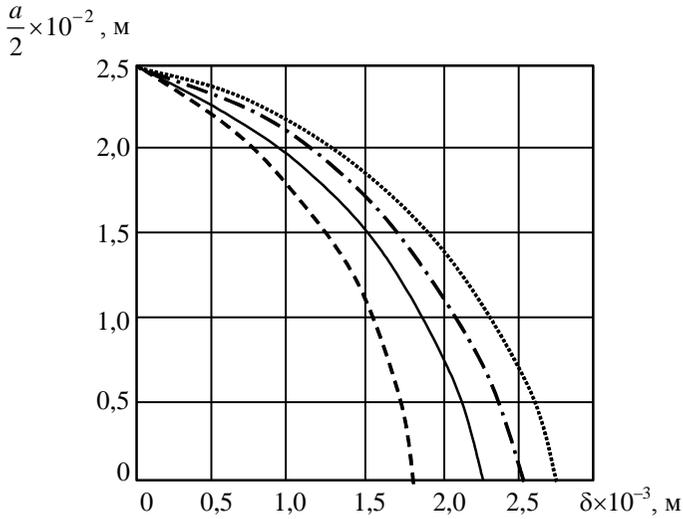


Рис. 4.15. Раскрытие трещины: — — упругое линейное решение;  $\cdot \cdot \cdot \cdot$  — вязкоупругое линейное решение; - - - - упругое нелинейное решение; - · - · - вязкоупругое нелинейное решение

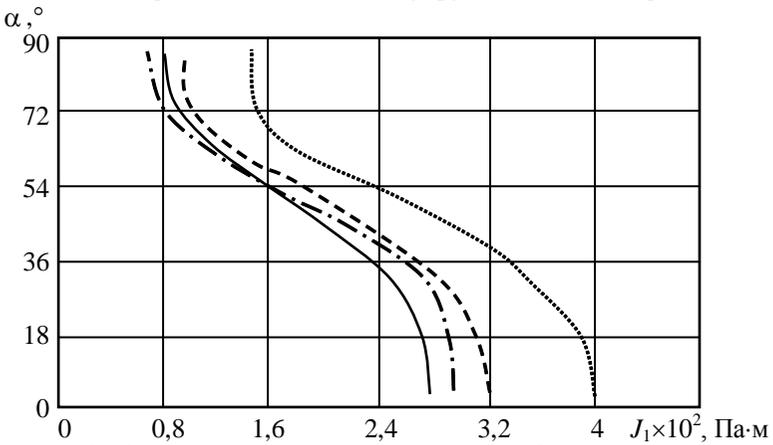


Рис. 4.16. Распределение  $J$ -интеграла вдоль фронта трещины: — — упругое линейное решение;  $\cdot \cdot \cdot \cdot$  — вязкоупругое линейное решение; - - - - упругое нелинейное решение; - · - · - вязкоупругое нелинейное решение

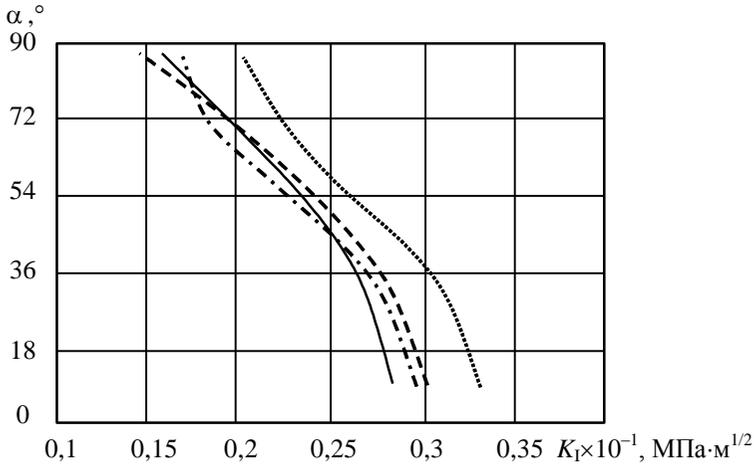


Рис. 4.17. Распределение коэффициента интенсивности напряжений (для нелинейной задачи – условного) вдоль фронта трещины:  
 — — упругое линейное решение; — — — — вязкоупругое линейное решение; - · - · - упругое нелинейное решение;  
 - - - - - вязкоупругое нелинейное решение

За счет ползучести материала параметры механики разрушения, полученные в вязкоупругой постановке, на 5–20% превышают параметры механики разрушения, полученные в упругой постановке. Линейное решение дает несколько заниженный результат по сравнению с нелинейным.

#### 4.5. Трапециевидный амортизатор

Рассмотрим трапециевидный амортизатор с квадратным отверстием (рис. 4.18). Такого типа амортизаторы применяются при изготовлении грузовых автомобилей. Размеры амортизатора представлены на рис. 4.19 [6].

Трещина моделировалась в месте действия наибольших растягивающих напряжений при заданной схеме нагружения (рис. 4.20). К резиновому амортизатору сверху привулканизирована металлическая

пластина. Внизу амортизатор опирается на абсолютно жесткое основание, при расчете трение между основанием и нижней плоскостью амортизатора не учитывалось.

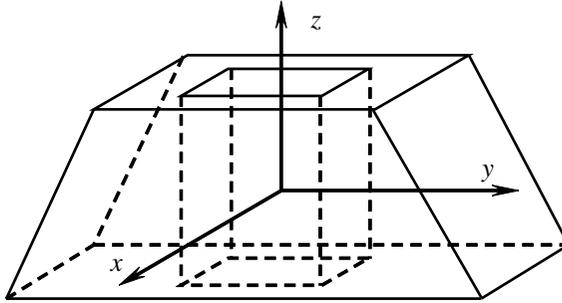


Рис. 4.18. Общий вид трапецевидного амортизатора

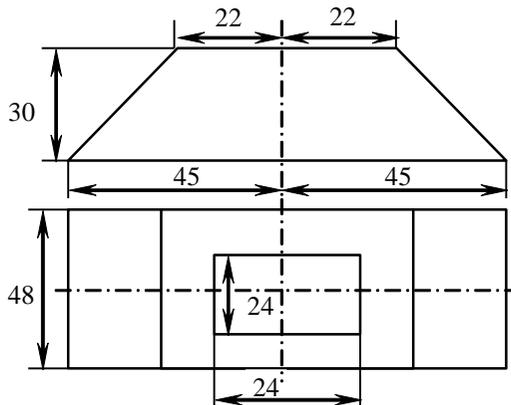


Рис. 4.19. Трапецевидный амортизатор с квадратным отверстием

Марка резины – 2959; упругие постоянные материалов: модуль сдвига резины  $G_r = 1,76$  МПа, коэффициент Пуассона резины  $\nu_r = 0,495$ , модуль упругости металла  $E_M = 2,0 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона металла  $\nu_M = 0,3$ . В качестве ядра релаксации воспользуемся ядром Ю.Н. Работнова. Реологические характеристики ядра для данной марки резины:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 1,06$ ;  $\chi = 0,64$ ; нагрузка  $P = 1$  МПа.

Из приведенных решений (рис. 4.21-4.24) видно, что учет реологических характеристик материала снижает величину параметров механики разрушения.

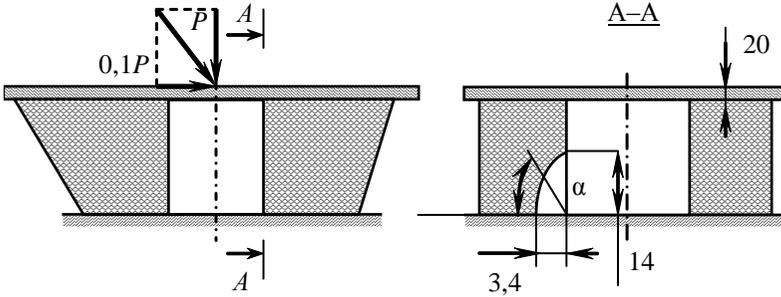


Рис. 4.20. Расчетная схема трапециевидного амортизатора с трещиной

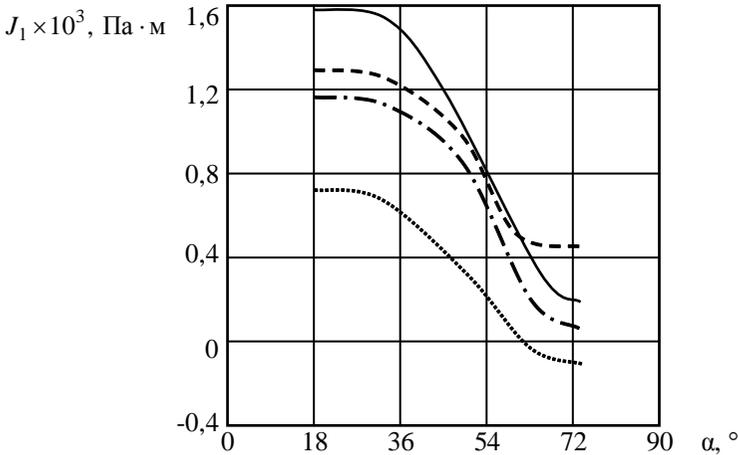


Рис. 4.21. Распределение компоненты  $J_1$  вдоль фронта трещины: — — линейное упругое решение; --- — линейное вязкоупругое решение; - · - · - — нелинейное упругое решение; ····· — нелинейное вязкоупругое решение

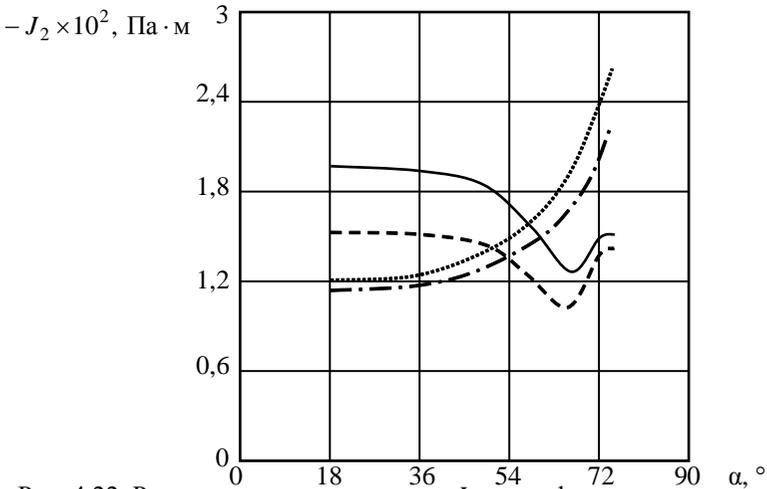


Рис. 4.22. Распределение компоненты  $J_2$  вдоль фронта трещины:  
 — — линейное упругое решение; - - - - линейное вязкоупругое решение; - · - · - нелинейное упругое решение; · · · · - нелинейное вязкоупругое решение

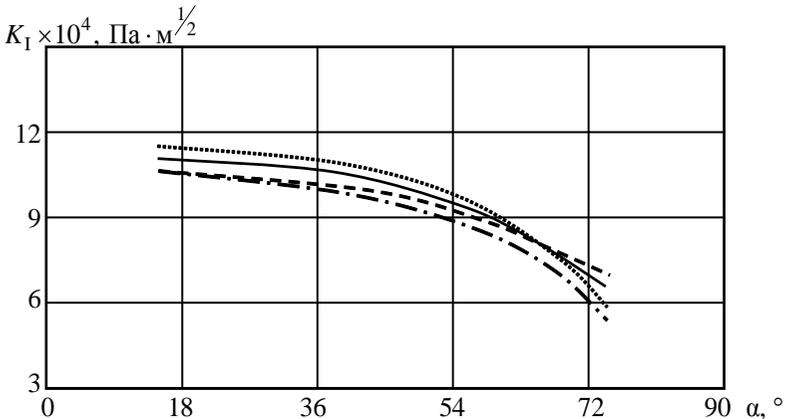


Рис. 4.23. Распределение коэффициента интенсивности напряжений (для нелинейного решения – условного)  $K_1$  вдоль фронта трещины:  
 — — линейное упругое решение; - - - - линейное вязкоупругое решение; - · - · - нелинейное упругое решение; · · · · - нелинейное вязкоупругое решение

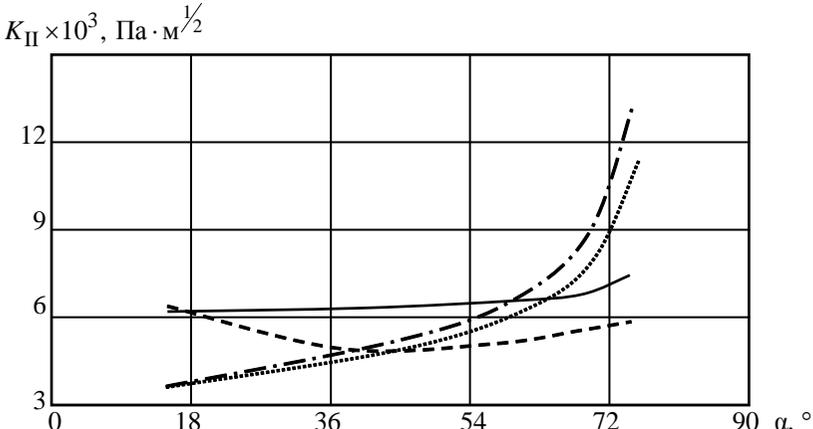


Рис. 4.24. Распределение коэффициента интенсивности напряжений (для нелинейного решения – условного)  $K_{II}$  вдоль фронта трещины: — — линейное упругое решение; --- — линейное вязкоупругое решение; - · - · - — нелинейное упругое решение; · · · · · — нелинейное вязкоупругое решение

Значение  $J_1$ , полученное в нелинейной постановке, меньше значения  $J_1$ , полученного в линейной постановке. Из графиков можно заметить, что нелинейность практически не влияет на распределение  $K_I$ , а характер распределения  $J_2$  и  $K_{II}$  при решении задачи в нелинейной постановке значительно изменяется в сравнении с линейным решением.

Рассмотрим динамическую задачу о нахождении параметров напряженно-деформированного состояния эластомерного трапециевидного амортизатора, содержащего продольную трещину (рис. 4.25).

Была построена дискретная модель амортизатора, состоящая из 611 узлов и 2006 конечных элементов в форме линейного тетраэдра (рис. 4.30). Задача решалась при следующих безразмерных параметрах:  $L_1=4, L_2=2, L_3=1, L_4=0,5, L_5=1, L_6=1, H_1=2, H_2=2$ . Нижняя грань амортизатора жестко закреплена (вулканизирована с пластиной из абсолютно жесткого по сравнению с эластомером материала). По верхней грани равномерно распределена переменная по времени нагрузка

$P = N \cos(t)$ . Упругие постоянные эластомера –  $G=1,76$  МПа,  $\nu=0,495$ . Расчет выполнялся на временном интервале  $[0; 6,28]$ .

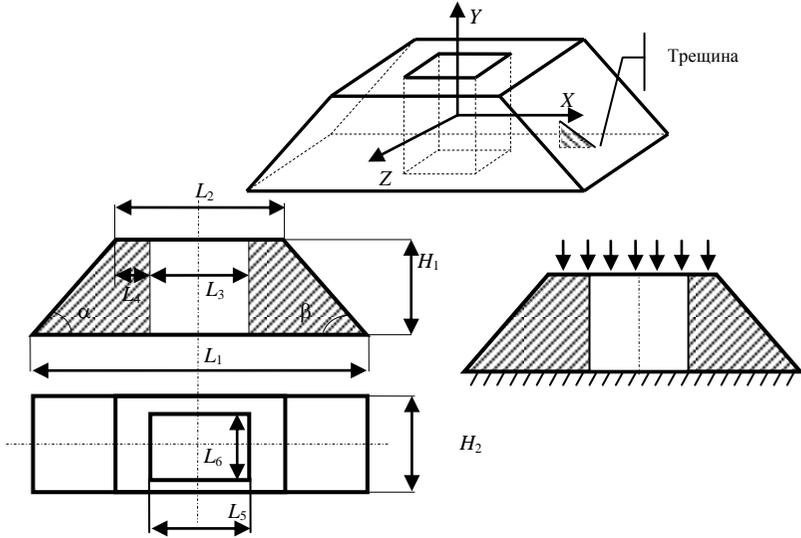


Рис. 4.25. Постановка задачи о вынужденных колебаниях трапецевидного амортизатора

На рис 4.27-4.46 приведено распределение перемещений  $v$  (в направлении оси  $Y$ ) по времени с шагом  $t_h=0,314$  с.

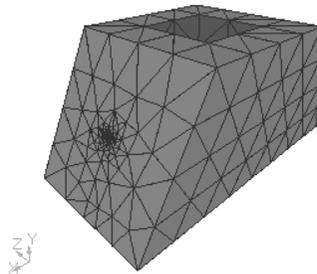
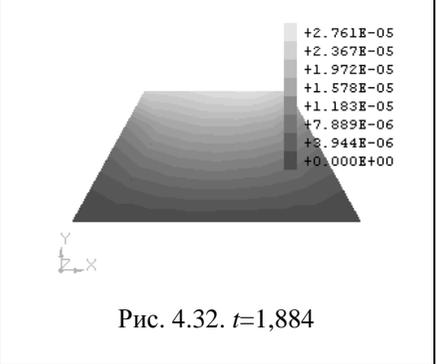
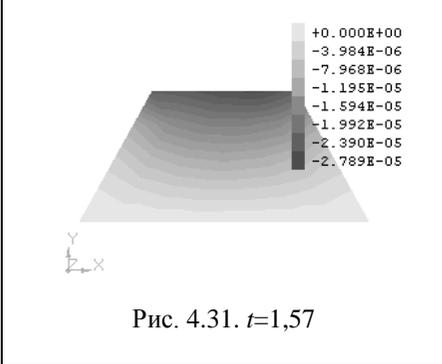
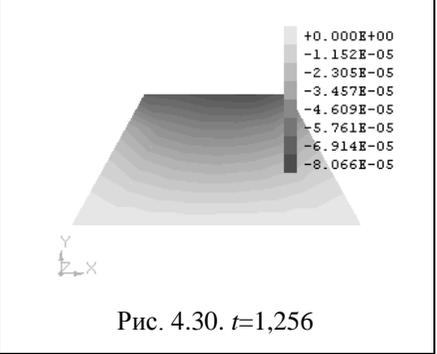
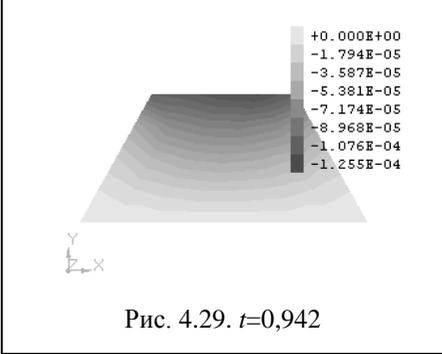
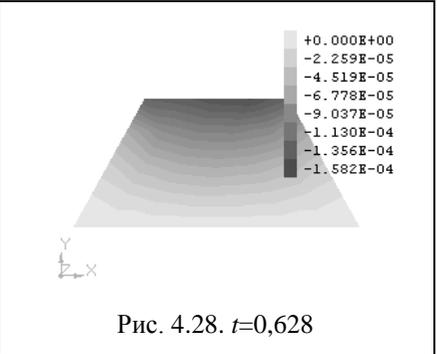
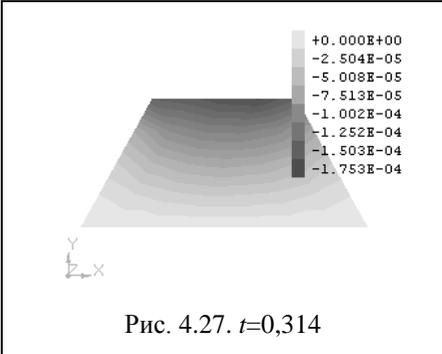
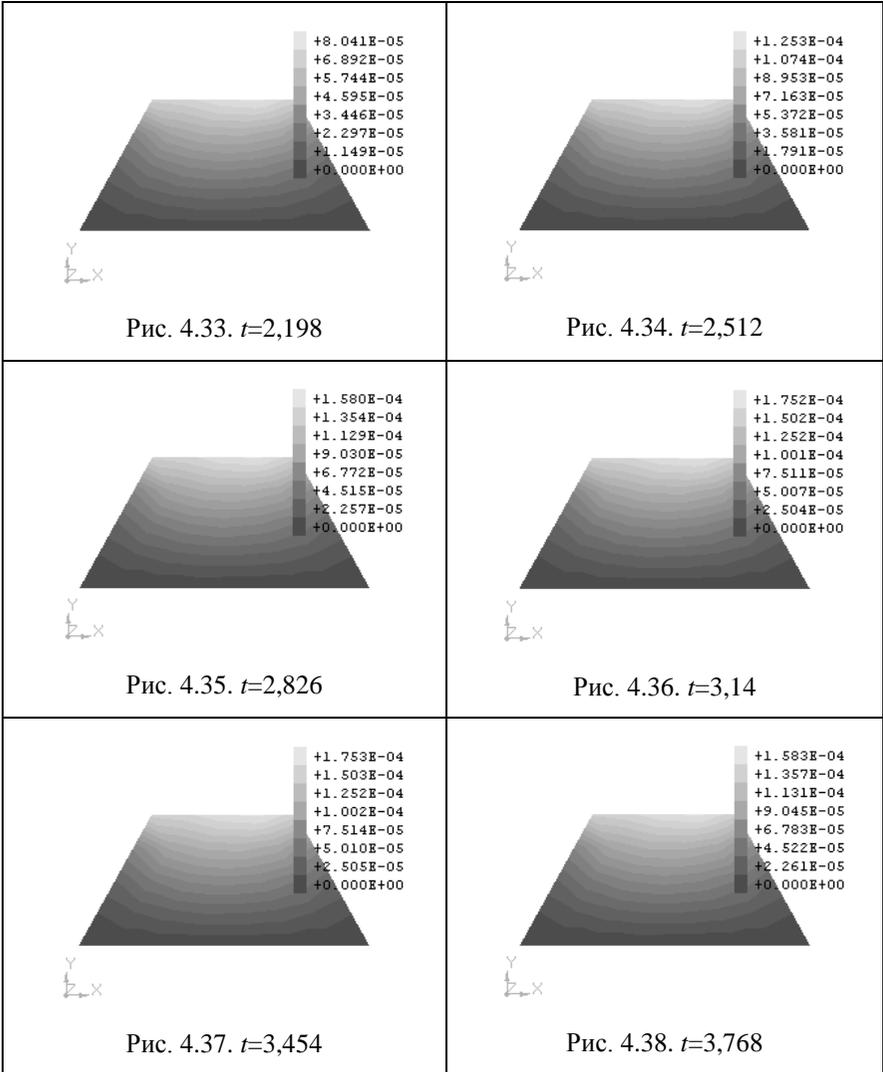
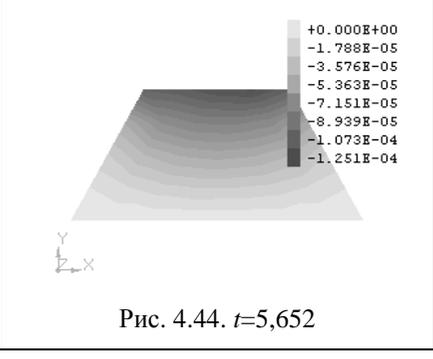
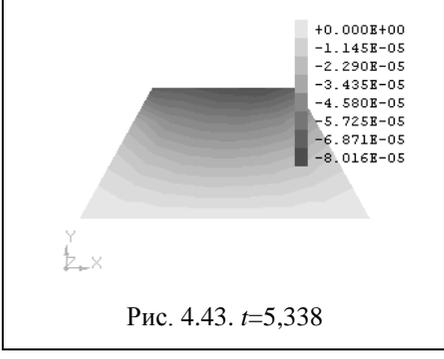
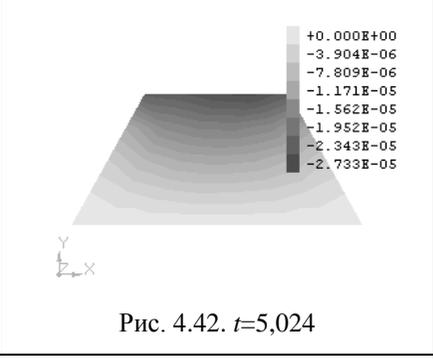
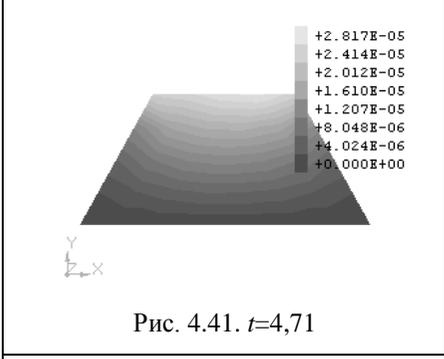
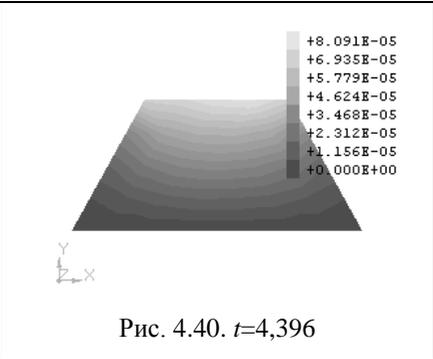
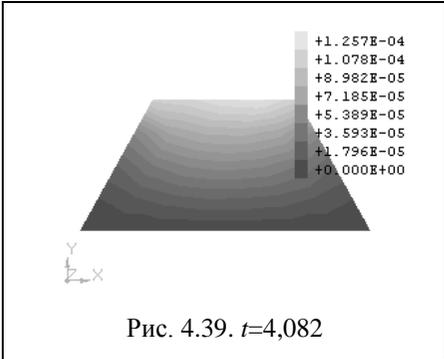
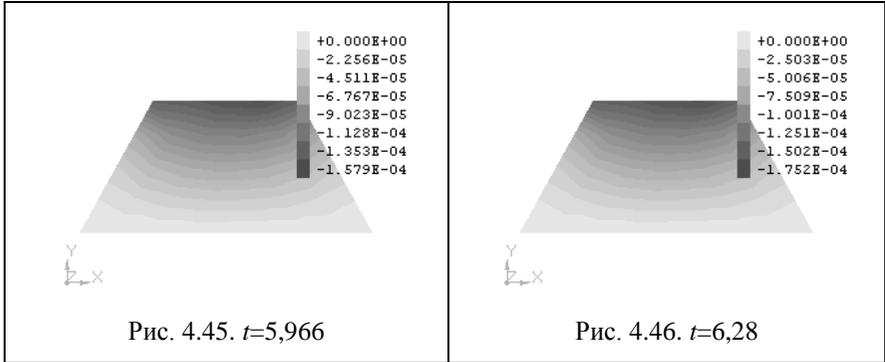


Рис. 4.26. Дискретная модель амортизатора









Полученное под действием нагрузки раскрытие трещины при  $t=6,28$  изображено на рис. 4.47.

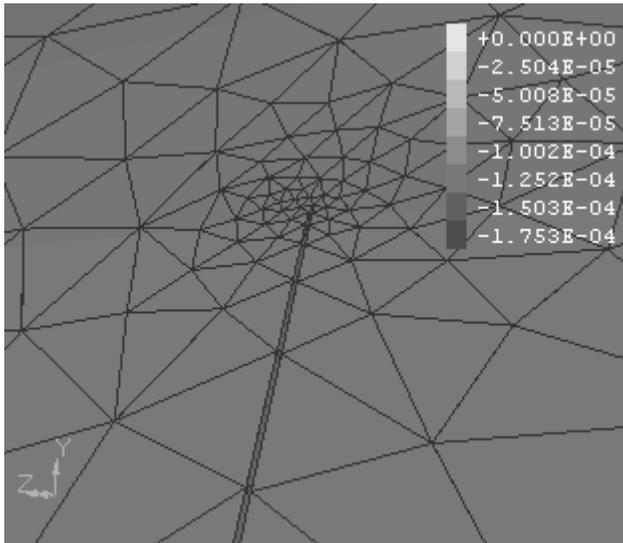


Рис. 4.47. Раскрытие трещины

На рис. 4.48 приведен график изменения максимального прогиба (компонента перемещения  $v$ ) по времени.

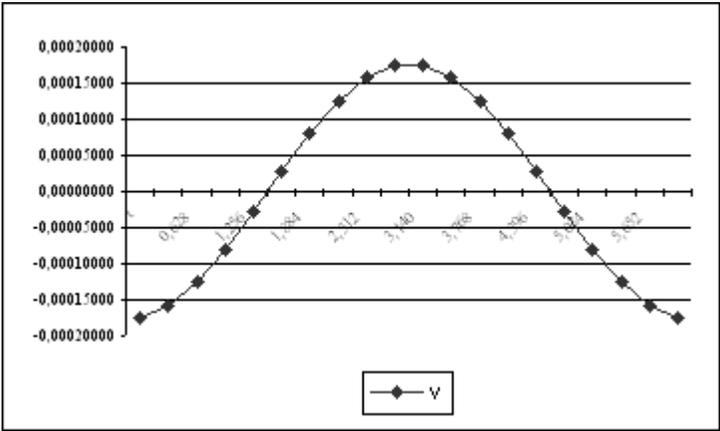


Рис. 4.48. Изменение максимальных прогибов по времени

### 4.6. Цилиндрический амортизатор

Существует целый ряд конструкций, расчет напряженно-деформированного состояния которых некорректно выполнять в линейной постановке. К числу таких относятся конструкции, в процессе эксплуатации которых нарушается линейный характер зависимости между прикладываемыми нагрузками и перемещениями в силу значительных деформаций материала и, как следствие, ввиду изменения первоначальной формы конструкции. Расчет в нелинейной постановке требуется также для элементов конструкций, при деформировании которых происходит изменение граничных условий. Это в свою очередь приводит к изменению свойств матрицы жесткости. При нелинейном расчете происходит уточнение граничных условий и перерасчет матрицы жесткости на каждом шаге по нагрузке, что позволяет более точно определять напряженно-деформированное состояние.

Определим параметры механики разрушения резинового цилиндрического амортизатора, устанавливаемого на грохотах [9]. Рабочее положение амортизатора показано на рис. 4.49.

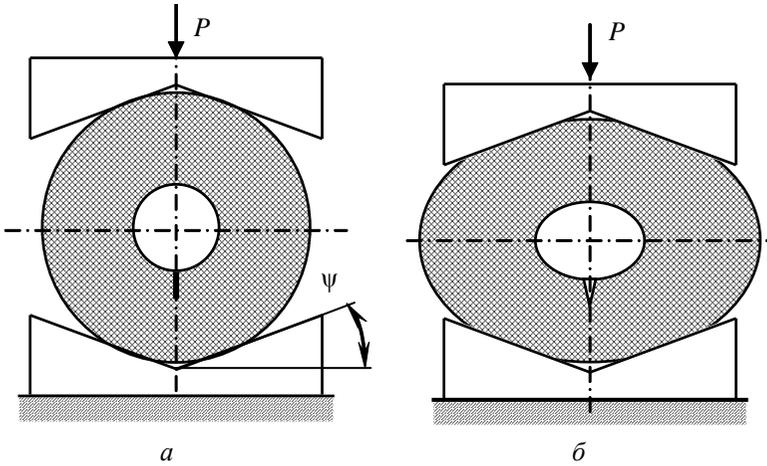


Рис. 4.49. Расчетная схема цилиндрического амортизатора с трещиной: *a* – исходное положение; *b* – деформированное положение

В процессе деформирования данного амортизатора изменяется зона контакта цилиндра с плоскостью нижнего ложемента, а также увеличивается площадь поверхности, к которой прикладывается поверхностная нагрузка. Поэтому расчет данной конструкции необходимо проводить в нелинейной постановке. На каждом шаге по нагрузке нужно пересчитывать узловые нагрузки и корректировать граничные условия, принимая во внимание изменение зоны контакта резинового амортизатора и нижнего металлического ложемента.

Размеры цилиндрического амортизатора (рис. 4.50): длина  $H = 0,175$  м, наружный радиус  $R_H = 0,1$  м, внутренний радиус  $R_B = 0,035$  м. Размеры трещины:  $a = (R_H - R_B)/2$ ,  $b = (R_H - R_B)/4$ .

Марка резины – 1224. Реологические параметры ядра Ю.Н. Работнова для данной марки резины:  $\alpha = -0,6$ ;  $\beta = 0,69$ ;  $\gamma = 0,28$ ; модуль сдвига  $G_0 = 1,3$  МПа,  $\nu = 0,499$ ; угол наклона плоскостей металлического ложемента  $\psi = 10^\circ$ ; прикладываемая нагрузка  $P = 6,5$  кН. Параметры механики разрушения (рис. 4.51, 4.52) получены в квазистатической постановке.

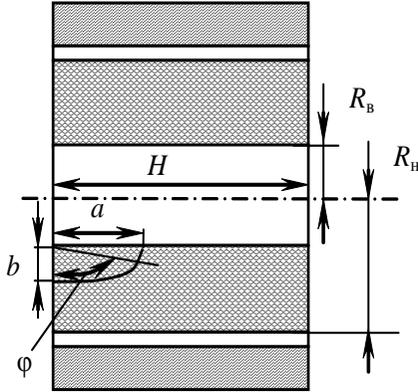


Рис. 4.50. Цилиндрический амортизатор с трещиной

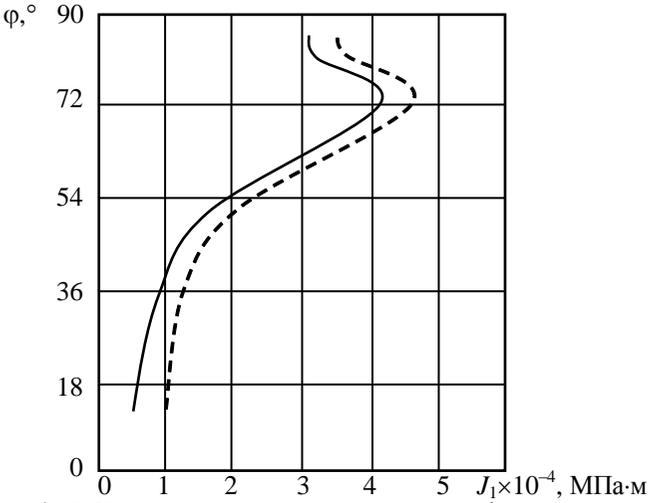


Рис. 4.51. Распределение  $J$ -интеграла вдоль фронта трещины:

— — нелинейное упругое решение; - - - - нелинейное вязкоупругое решение

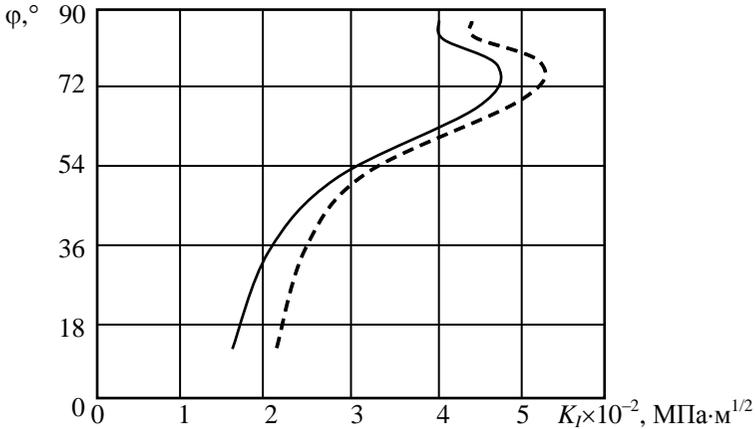


Рис. 4.52. Распределение условного коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта трещины: — — нелинейное упругое решение; - - - - нелинейное вязкоупругое решение

Таким образом, учет вязкоупругих свойств материала приводит к увеличению параметров механики разрушения на 10–15% по сравнению с упругим решением. Для данного цилиндрического амортизатора с трещиной максимальные значения параметров механики разрушения достигаются при  $\varphi = 74^\circ$ .

#### 4.7. Вязкоупругое деформирование конструкций из резинокордного материала

В отечественной промышленности достаточно широко используются композиционные материалы для производства различных машин, механизмов, транспортирующих устройств и т.д. Расчет на прочность является одним из наиболее важных этапов при проектировании конструкций. Необходимо знать напряженно-деформированное состояние конструкции, чтобы в дальнейшем судить о ее работоспособности в условиях эксплуатации.

Определение напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов представляет определенные трудности математического характера. Это связано с анизотропными свойствами материала. Кроме того, при изготовлении большого количества изделий из композиционных материалов, таких как шины, транспортные ленты и т.д. в качестве матрицы используются эластомерные материалы. Большинство эластомеров представляют собой материалы с ярко выраженными вязкоупругими свойствами. Необходимость моделирования вязкоупругих свойств при определении напряженно-деформированного состояния конструкции значительно усложняет расчет. Поэтому для расчета используются, как правило, численные методы, а аналитические решения получены лишь для ограниченного количества наиболее простых задач.

Определено напряженно-деформированное состояние конструкций в условиях вязкоупругого деформирования в трехмерной постановке.

Рассмотрим пластину с квадратным отверстием из резинокордного материала (рис. 4.53). Размеры пластины:  $a=0,1$  м,  $b=0,1$  м,  $c=a/3$ , толщина –  $t=0,016$  м. Интенсивность нагрузки  $\sigma=0,15$  МПа.

Физические постоянные металлических волокон  $E_C = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_C = 0,3$  и резиновой матрицы  $E_R = 5,28$  МПа,  $\nu_R = 0,49$ . Диаметр волокон  $d_C = 7 \cdot 10^{-4}$  м, частота армирования  $i_C = 2900$  волокон/м.

Так как резина относится к материалам с наследственными свойствами, а для металлов, в сравнении с резиной, наследственные свойства не столь ярко выражены, то расчет будем проводить в предположении отсутствия вязкоупругих свойств металла. В качестве ядра релаксации резины используем ядро Ю.Н. Работнова с реологическими характеристиками  $\alpha = -0,6$ ,  $\beta = 1,06$ ,  $\gamma = 0,58$ . Будем предполагать, что резина находится в условиях простой релаксации напряжений. Время принималось равным 0,8 с. Расчет проводился при различных углах армирования  $\varphi$ .

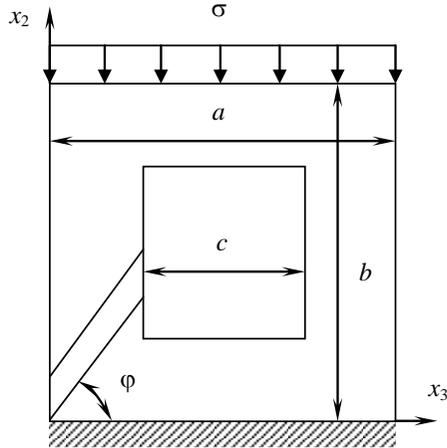


Рис. 4.53. Расчетная схема композиционной пластины с квадратным отверстием

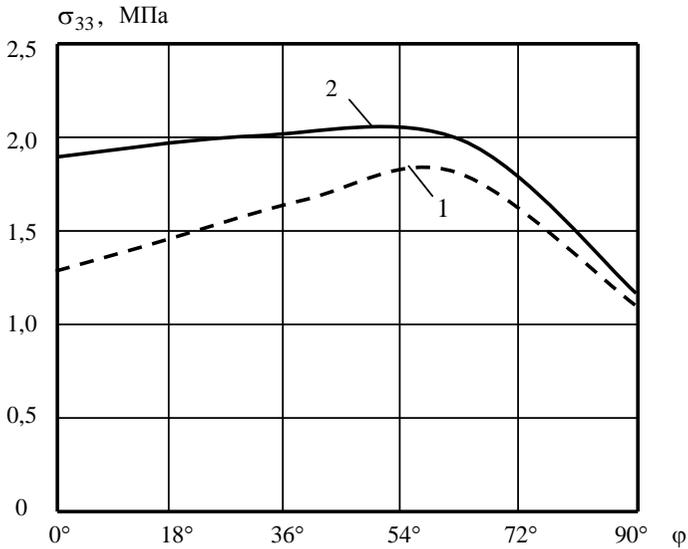


Рис. 4.54. Значение напряжений в центре пластины вблизи верхнего края: 1 – упругое решение; 2 – вязкоупругое решение

На рисунке 4.54 показана зависимость между напряжениями в центре пластины вблизи верхнего края. Как можно видеть из графика максимальные значения напряжений достигаются при угле армирования, равном  $54^\circ$ .

Распределение максимальных перемещений верхнего края пластины в зависимости от угла армирования показано на рис. 4.55. Максимальные значения перемещения принимают при угле армирования  $0^\circ$ , а затем плавно уменьшаются до угла приблизительно равного  $45^\circ$ , после чего резко уменьшаются принимая минимальное значение при угле  $90^\circ$ .

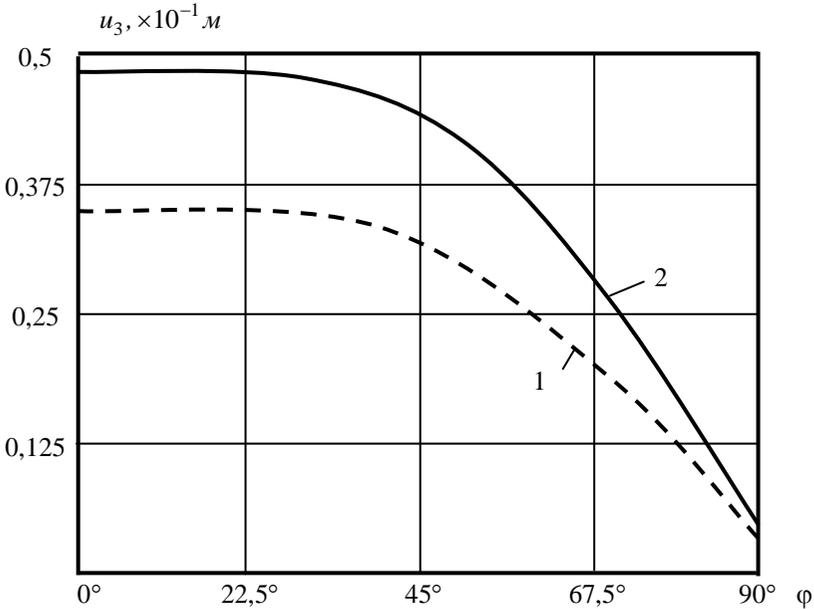


Рис. 4.55. Величина перемещения верхнего края пластины: 1 – упругое решение; 2 – вязкоупругое решение

Из полученных результатов видно, что перемещения и напряжения в вязкоупругом случае превышают упругое решение на 20-25% при угле армирования  $\varphi=0^\circ$  и на 3-5% при угле армирования  $\varphi=90^\circ$ .

## **4.8. Вибросейсмоизоляция тяжелых машин, зданий и сооружений с помощью эластомерных блоков**

Концепция сейсмической изоляции сооружений является весьма актуальной. В Японии, Новой Зеландии, Франции, Греции, Англии, США и ряде других стран она успешно использована для защиты от землетрясений таких важных сооружений как атомные электростанции, школы, мосты, музеи, административные и жилые здания. Наибольшее распространение получили сейсмоизоляционные системы, включающие резиновые блоки и механические предохранители. В этих же странах опубликованы и основные научные статьи без приведения аналитических расчетов и технологических особенностей изготовления элементов. В последние годы, несмотря на остроту проблемы, количество публикаций резко сократилось. В Украине (в основном в ИГТМ НАН Украины) концепция развивалась двумя путями: разработка сейсмоизоляционных блоков для защиты от землетрясений жилых зданий; разработка виброизоляционных блоков для защиты от вибраций тяжелого оборудования (вес до 300 т, использовано в России, Украине), зданий и сооружений.

Система полной вибросейсмоизоляции сооружений (см. Приложение 1-3) состоит из резинометаллических сейсмоизоляционных блоков (РСБ) и механических предохранителей: упруго-пластичные демпферы, скользящие опоры, нелинейные торсионные элементы и т.д. Она предназначена для защиты от землетрясений чувствительных к колебаниям сооружений, которые имеют большое значение для безопасности людей: больницы, школы, музеи, транспортные средства, электростанции, административные и военные объекты и т.д. РСБ для железных дорог могут иметь вид прокладок. РСБ для крупных сооружений изготавливаются путем набора листов специальной резины толщиной 3-20 мм и стальных пластин толщиной 2-5 мм, соединенных с помощью вулканизации. РСБ работают на сжатие, растяжение, сдвиг и кручение; они могут выдерживать кратковременные циклические отклонения  $\pm 400$  мм в горизонтальном направлении и  $\pm 200$  мм в вертикальном. РСБ могут быть использованы для уменьшения колебаний в пространстве (см. Приложение 3). РСБ действуют как фильтр: при

малой интенсивности землетрясений (0,15-0,20g) сооружение благодаря РСБ колеблется упруго и возвращается в свое первоначальное положение; при землетрясениях большой интенсивности (свыше 0,25g) сооружение колеблется упруго, а затем вступают в действие механические предохранители. РСБ имеют заданные технические характеристики и низкую собственную частоту колебаний; они снижают также высокочастотный спектр колебаний. РСБ выдерживают многократные сейсмические нагрузки без ремонта, легко заменяются (см. Приложение 1); они эксплуатируются при резком перепаде температур, радиации, активном влиянии внешней среды; система может быть резервируемой, т.е. выход жесткостных параметров одного блока за пределы допускаемых значений не будет отражаться на безопасности объекта; РСБ обладают высокой надежностью и не имеют внезапного отказа. Технические характеристики и высокая надежность РСБ доказаны результатами промышленных исследований в течение 10 лет системы виброизоляции инерционных дробилок типа КИД весом 155 т, работающих при постоянных циклических нагрузках (амплитуда вертикальных колебаний 5-8 мм, частота 16 Гц) в условиях свинцово-цинкового комбината (г. Джезказган, Средняя Азия). На РСБ со свинцовым вкладышем и нелинейной силовой характеристикой институт имеется патент Украины № 93300932 от 29.10.1993 г. Для виброизоляции сооружений могут быть использованы также резиновые блоки; так, например, при виброизоляции административного здания (г. Минск, Белоруссия, вес здания 30000 т, количество опор – 300, несущая способность каждой опоры – 100 т) от вибраций проходящего рядом метрополитена были использованы монолитные резиновые блоки высотой 120 мм, аналогичные блоки были использованы при сейсмоизоляции жилых 9-ти этажных домов в Узбекистане.

В последние годы в г. Москве резиновые и резинометаллические блоки успешно используют для виброзащиты зданий, возводимых вблизи трасс метрополитена. Практика показывает высокую эффективность применения таких блоков [3].

Рассмотрим расчет сплошных цилиндрических виброизоляторов, в которых плоские слои резины чередуются с плоскими слоями металла и резина привулканизована к металлу по всей поверхности

соприкосновения. Схема такого виброизолятора показана в приложении 2. Будем их называть слоистыми, включая в это понятие и простейший частный случай – виброизолятор с одним слоем резины.

Такие элементы обладают специфическими анизотропными свойствами: жесткости на сдвиг и на сжатие могут различаться на несколько порядков. Их использование очень выгодно для виброизоляции некоторых тяжелых машин, а также для защиты зданий и сооружений, находящихся в сейсмоопасных районах.

В результате расчета слоистого резинометаллического виброизолятора должны быть найдены его геометрические размеры: диаметр резинового слоя  $D$ , толщина резинового слоя  $h_p$ , толщина слоя металла  $h_m$ , количество слоев резины  $n$ . При этом имеется в виду, что диаметр металлического слоя практически равен или превосходит  $D$ , а количество слоев металла  $n+1$ . Крайние, нижний и верхний слои металла обычно выполняются утолщенными и имеют форму, удобную для крепления виброизолятора. При расчете последнее обстоятельство, естественно, не будет учитываться.

Исходными данными для расчета являются грузонесущие, жесткостные и деформационные характеристики, которыми должен обладать рассчитываемый виброизолятор, а также упругие характеристики резины. В качестве исходных данных можно выбрать следующие шесть величин: грузонесущую способность  $Q$ , вертикальную деформацию под нагрузкой  $\varepsilon$ , вертикальную жесткость на сжатие  $C_в$ , горизонтальную жесткость или жесткость на сдвиг  $C_с$ , модуль сдвига резины  $G$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . В ряде случаев вместо жесткостей  $C_в$  и  $C_с$  удобно использовать условные собственные частоты  $\omega_в$  и  $\omega_с$  вертикальных и горизонтальных колебаний, соответственно:

$$\omega_в = \sqrt{\frac{g \cdot C_в}{Q}}; \quad \omega_с = \sqrt{\frac{g \cdot C_с}{Q}},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $Q$  – вертикальная сила (вес груза), действующая на виброизолятор.

Коэффициент Пуассона  $\nu$  для резины близок к 0,5, поэтому вместо него удобно применять так называемый модуль одностороннего сжатия  $B$ :

$$B = 2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}.$$

Основные соотношения, определяющие жесткости виброизолятора, имеют вид:

$$C_v = E_k \frac{\pi \cdot D^2}{4n \cdot h_p}; \quad (4.1)$$

$$C_s = G_k \frac{\pi \cdot D^2}{4n \cdot h_p}, \quad (4.2)$$

где  $E_k$  и  $G_k$  – так называемые кажущиеся модули растяжения и сдвига соответственно.

Величины  $E_k$  и  $G_k$  отличаются от истинных модуля растяжения  $E$  и модуля сдвига  $G$  и являются функциями упругих характеристик резины и размеров резинового слоя:

$$E_k = E_k(G, B, D, h_p); \quad G_k = G_k(G, B, D, h_p).$$

Знание этих функций позволяет на основании формул (4.1) и (4.2) произвести расчет всех необходимых величин.

Разработана полная методика расчета эластомерных блоков, включающая в себя выбор параметров и прогнозирование срока службы с учетом старения резины. Ресурс работы сейсмоизоляторов по предварительной оценке составляет не менее 50 лет.

Рассмотрим два конкретных примера. В качестве первого рассмотрим расчет необходимых параметров виброизолирующей системы конусной инерционной дробилки КИД-2200. Масса дробилки 755 т. Для обеспечения требуемого колебательного режима с учетом переходных процессов собственные частоты должны иметь значения:  $\omega_0=2,5 \div 3$  Гц,  $\omega_2=0,7$  Гц. Будем считать, что виброизолирующая система состоит из восьми РСБ. Тогда  $Q=19,4$  т. Давление  $P$  примем равным 1,5 МПа. При расчете получим следующие параметры виброизолятора из резины марки 2959:  $D=406$  мм,  $h_p=64 \div 80$  мм,  $n=5 \div 6$ . Реально были изготовлены и установлены виброизоляторы с параметрами  $D=400$  мм,  $h_p=70$  мм,  $n=5$ . Испытания подтвердили расчетные характеристики и показали, что виброизоляторы имеют линейную характеристику сила-

осадка при сжатии до  $\epsilon=0,2$ . Эксплуатация этих виброизоляторов в течение длительного времени в экстремальных условиях дала хорошие результаты.

В качестве второго примера рассмотрим задачу защиты зданий и сооружений от землетрясений.

Хотя колебания почвы при землетрясении носят случайный характер, из опубликованных данных следует, что основной диапазон частот колебаний простирается от 0 до 25 Гц, а частоты наиболее опасных колебаний лежат в пределах 1,6÷6,0 Гц.

Рассчитаем параметрический ряд сейсмоизоляторов, которые должны устанавливаться под зданиями и сооружениями и обеспечивать защиту от опасных сдвиговых (горизонтальных) колебаний. Для этого необходимо, во-первых, потребовать, чтобы  $\omega_s=1,6/3=0,55$  Гц. Во-вторых, для предотвращения резонансных явлений при вертикальных колебаниях зданий необходимо положить  $\omega_b=6$  Гц  $\times 3=18$  Гц. При давлении  $P=5$  МПа для резины марки 2959 получаем геометрические характеристики, приведенные в таблице (см. Приложение 2)

В институте геотехнической механики НАН Украины имеются возможности осуществлять аналитические расчеты по выбору параметров РСБ с допускаемой нагрузкой 300-3000 кН и собственной частотой горизонтальных колебаний 0,35-1,6 Гц для вибро- и сейсмоизоляции реальных машин и сооружений.

Внедрение РСБ существенно снизит влияние вибраций и землетрясений на сооружения, и поэтому в ближайшее время намечаются следующие тенденции в данном направлении:

1. Значительно расширится выбор строительных площадок;
2. Снизится стоимость строительных работ;
3. Станет возможным унифицировать проектируемые сооружения;
4. Улучшатся технологические характеристики сооружений;
5. Повысится безопасность и надежность сооружений;
6. Будут созданы предпосылки для использования новых технологий.

В научном смысле позволит более глубоко понять природу влияния землетрясений на сооружения и разработать новые способы их защиты.

#### *Литература к главе 4*

1. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. – М.: Недра, 1986. – 144 с.
2. Гребенюк С.Н., Дохняк Б.М., Киричевский Р.В., Киричевский В.В. Термомеханические параметры разрушения вязкоупругих элементов сит грохотов // Вісник східноукраїнського державного університету. – 1999. – №3(18). – С. 76–81.
3. Дашевский М.А., Мондус В.Л., Моторин В.В. Виброзащита крупнопанельных зданий, возводимых вблизи трасс метрополитена неглубокого заложения // Промышленность и гражданское строительство. – 2001. – № 9. – С. 19-21.
4. Дырда В.И., Чижик Е.Ф. Резиновые детали в машиностроении. – Днепропетровск: Поліграфіст, 2000. – 581 с.
5. Киричевский В.В., Гребенюк С.Н. Исследование процессов разрушения эластомерных конструкций в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 129-140.
6. Киричевский В.В., Гребенюк С.Н., Киричевский Р.В. Численное исследование параметров механики разрушения и полей диссипативного разогрева трапециевидного амортизатора в нелинейной постановке // Вісник східноукраїнського державного університету. – 2000. – №5(27). – С. 89-94.
7. Киричевский В.В., Толлок В.А., Гребенюк С.Н. Расчет тороидальной оболочки в условиях вязкоупругого деформирования // Вісник східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 2(36). – С. 204-208.
8. Киричевский В.В., Толлок В.А., Лисица Н.И., Гребенюк С.Н. Численное исследование процессов деформирования резинового виброизолятора // Геотехнічна механіка. – Дніпропетровськ: Ін-т геотехнічної механіки НАН України, 2001. – Вип. 24. – С. 162-165.
9. Киричевський В.В., Толлок В.О., Гребенюк С.М. Визначення параметрів механіки руйнування циліндричного амортизатора в умовах нелінійного в'язкопружного деформування // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – № 1. – С. 60-66.

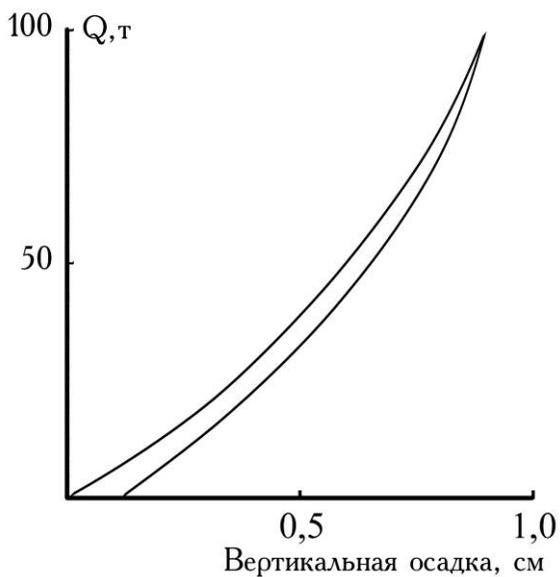
10. Киричевський В.В., Толок В.О., Гребенюк С.М. Нелінійні деформації тороїдальної оболонки // Вісник східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 11(45). – С. 220-225.
11. Лисица Н.И. Разработка и экспериментальные исследования резиновых виброизоляторов повышенной устойчивости // Геотехническая механика: Сб. научных. тр. ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 1999. – Вып.11. – С. 390-396.
12. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В.В. Киричевский., Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. – К.: Наукова думка, 2005. – 416 с.
13. Резонирующие ленточно-струйные сита для грохотов / А.Г. Червоненко, Л.А. Вайсберг, О.А. Вальцева и др. // Строительные материалы. – 1985. – № 2. – С. 29–30.

## **Приложение 1** **Резинометаллические сейсмоизоляционные блоки** **(РСБ наборного типа)**

Применение: для защиты сооружений, находящихся в сейсмоопасных районах; для виброизоляции сооружений и сверхтяжелых машин (дробилки, окомкователи-смесители и т.д., массой от 30 т и выше).



Достоинства: обладают явно выраженными анизотропными свойствами – жесткости на сдвиг и сжатие отличаются на несколько порядков; блок РСБ набирается из отдельных элементов; обладают повышенной устойчивостью при сжатии и сдвиговых нагрузках; имеют высокие диссипативные свойства и малое старение резины.

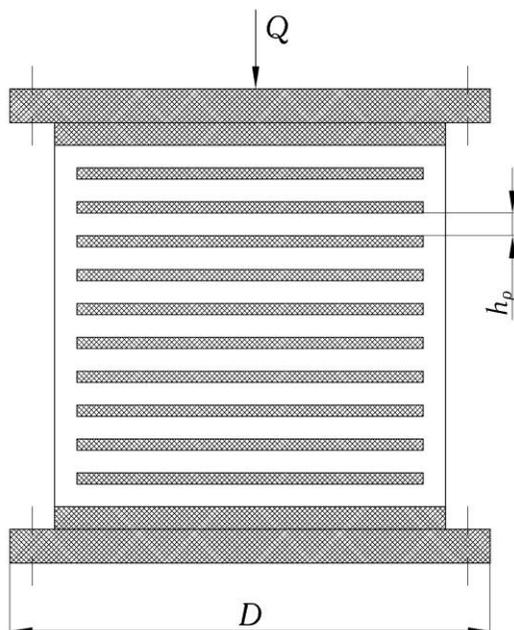


**Техническая характеристика**

Грузоподъемность, тс	100	
Количество резиновых элементов виброизолятора, шт.	10	15
Жесткость вертикальная, тс/см	120	80
Жесткость горизонтальная, тс/см	0,73	0,48
Собственная частота вертикальных колебаний, Гц	5,5	4,5
Собственная частота горизонтальных колебаний, Гц	0,43	0,35
Допустимое горизонтальное смещение, см	20	30

## Приложение 2 Резинометаллические сейсмоизоляционные блоки (РСБ, отдельный блок)

Применение: для защиты сооружений, находящихся в сейсмоопасных районах; для виброизоляции сооружений и сверхтяжелых машин (дробилки, окомкователи-смесители и т.д., массой от 30 т и выше).

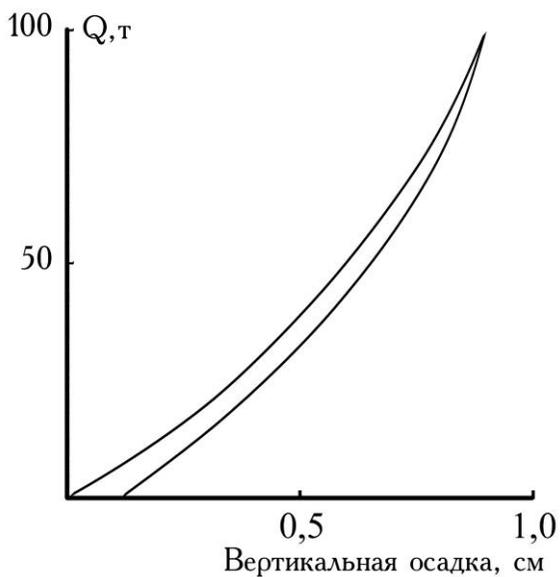


Толщина металла  $h_m = 1 \div 5$  мм

Толщина резины  $h_p = 3,7 \div 12,8$  мм

Количество слоев резины –  $n$

Достоинства: устойчивы против агрессивного влияния внешней среды; обладают явно выраженными анизотропными свойствами – жесткости на сдвиг и сжатие отличаются на несколько порядков; обладают повышенной устойчивостью при сжатии и сдвиговых нагрузках; имеют высокие диссипативные свойства и малое старение резины.

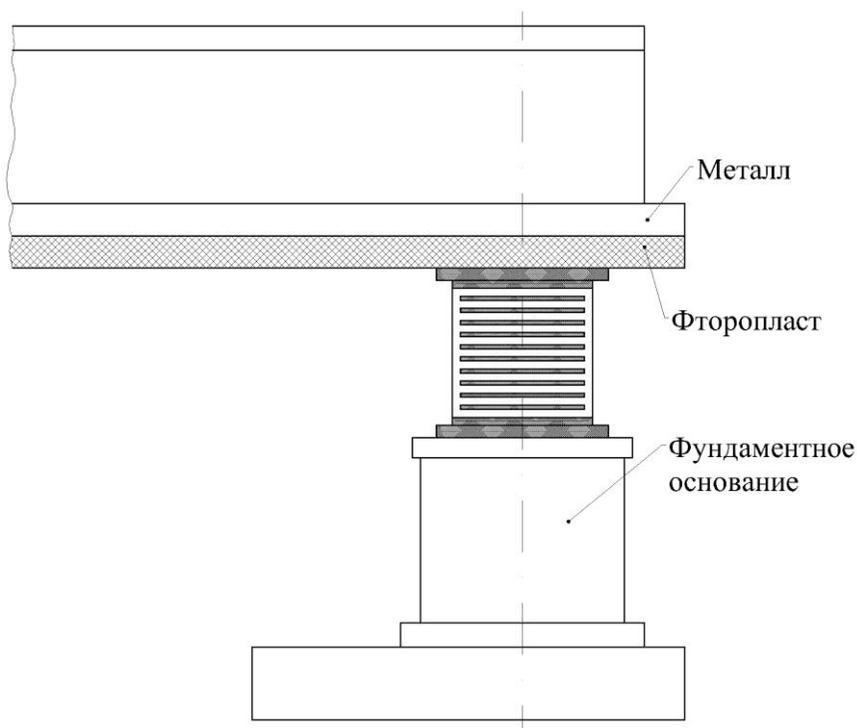


**Техническая характеристика**

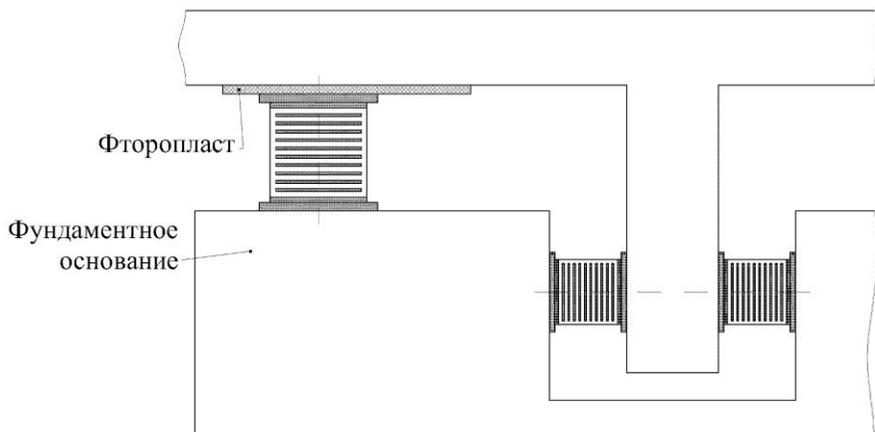
$Q$ , кН	$D$ , мм	$h_p$ , мм	$n$
250	250	3,7	49
500	350	5,2	35
750	440	6,4	28
1000	500	7,5	25
2000	720	10,5	17
3000	880	13,0	14

### Приложение 3

#### Пример использования резинометаллических сейсмоизоляционных блоков при защите сооружений от землетрясений



Пример 1. РСБ устанавливается вместе с опорой скольжения



Пример 2. Использование РСБ для гашения вертикальных и горизонтальных колебаний сооружения; аналогично можно использовать РСБ для полной пространственной сейсмо- или виброизоляции сооружений.

## СОДЕРЖАНИЕ

		Предисловие	3
		Введение	5
Глава	1	Резина как конструкционный материал	11
	1.1.	Общие сведения о резине	11
	1.2.	Применение концепций термодинамики необратимых процессов к механике деформирования и разрушения резин	20
	1.3.	Математическое описание вязкоупругого поведения резин	33
	1.4.	Определение реологических параметров вязкоупругих материалов	58
	1.5.	Уточнение упругих постоянных резино-кордного материала	92
	1.6.	Современное состояние и тенденции развития резиновых деталей машин	99
	1.7.	Способы изготовления массивных резиновых и резиноталлических деталей	115
	1.8.	Влияние технологических факторов на свойства резиновых деталей	126
		Литература к главе 1	132
Глава	2	Аналитические и эмпирические методы расчета резиновых деталей	141
	2.1.	Общий алгоритм расчета резиновых деталей	141
	2.2.	Методы расчета силовых резиновых деталей	149
	2.3.	Рекомендации для инженерных расчетов	198
		Литература к главе 2	210
Глава	3	Численные методы расчета резиновых деталей	216
	3.1.	Основные соотношения механики деформируемого твердого тела	216
	3.2.	Вывод уравнений МКЭ для эластомеров	245

---

	3.3.	Сингулярный криволинейный трехмерный конечный элемент треугольной формы	252
	3.4.	Примеры расчета МКЭ на основе моментной схемы	267
	3.5.	Энергетические методы определения параметров механики разрушения	283
	3.6.	Определение вектора дополнительной нагрузки	286
	3.7.	Алгоритм определения параметров механики разрушения в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования	291
	3.8.	Алгоритм определения параметров разрушения в условиях нелинейного деформирования на основе $J$ -интеграла	296
	3.9.	Автоматизация анализа результатов численного расчета	299
	3.9.1.	Методы визуализации пространственных объектов	300
	3.9.2.	Системы координат в компьютерной графике	301
	3.9.3.	Преобразования координат	302
	3.9.4.	Методы проецирования трехмерных образов на плоский экран	305
	3.9.5.	Методы удаления невидимых линий	307
	3.10.	Алгоритмы визуализации численных результатов расчета	311
	3.10.1.	Построение полутоновых изображений	311
	3.10.2.	Деформация поверхности объекта	314
		Литература к главе 3	322
Глава	4	Напряженно-деформированное состояние резиновых элементов конструкций	325
	4.1.	Тороидальная оболочка	325
	4.2.	Резиновый виброизолятор ВН-101	330
	4.3.	Разрушение эластомерных элементов сит грохотов	332
			369

4.4.	Полый цилиндр с поверхностной трещиной	336
4.5.	Трапециевидный амортизатор	338
4.6.	Цилиндрический амортизатор	348
4.7.	Вязкоупругое деформирование конструкций из резинокордного материала	351
4.8.	Вибросейсмоизоляция тяжелых машин, зданий и сооружений с помощью эластомерных блоков	355
	Литература к главе 4	360
	Приложение 1	362
	Приложение 2	364
	Приложение 3	366
	Содержание	368

Монография

*Дырда Виталий Илларионович*  
*Гребенюк Сергей Николаевич*  
*Гоменюк Сергей Иванович*

# **АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ**

(на русском языке)

Редактор *С.А. Левчук*  
Корректор *В.В. Мухин*  
Технический редактор *Н.В. Ярош*

Подп. к печати 29.11.2011. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать ризографическая. Гарнитура Таймс. Усл. печ. лист. 22,5.  
Заказ № 350. Тираж 300 экз.

Запорожский национальный университет  
69600, г. Запорожье, МСП-41  
ул. Жуковского, 66  
Свидетельство о внесении субъекта издательского дела  
в Государственный реестр издателей, изготовителей  
и распространителей печатной продукции  
ДК № 2952 от 30.08.2007