

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.В. Киричевський, Н.М. Д'яченко

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Практикум з розв'язання задач
для студентів денної та заочної форм
навчання спеціальності
6.050100 „Економічна кібернетика”

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № __ від «__» _____.

Запоріжжя 2005

УДК 517.31/38 (075.8)
ББК В162я73

Киричевський В.В., Д'яченко Н.М. Інтегральне числення: Практикум з розв'язання задач для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 6.050100 «Економічна кібернетика». – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 78 с.

Практикум з розв'язання задач призначений для студентів 1 курсу економічного факультету спеціальності „економічна кібернетика”, що вивчають математичний аналіз, і охоплює одну з тем 2 семестру: «Інтегральне числення». Подано теоретичний матеріал за даною темою з прикладами розв'язку деяких задач, варіанти типових індивідуальних завдань та список рекомендованої літератури.

Рецензент Сніжко Н.В., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний

за випуск Киричевський В.В., д.т.н., професор, зав. кафедрою.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	5
1.1. Первісна і неозначений інтеграл	5
1.1.1. Основні властивості неозначеного інтегралу	5
1.1.2. Таблиця основних інтегралів	6
1.2. Основні методи інтегрування	6
1.2.1. Безпосереднє інтегрування	6
1.2.2. Метод підстановки	7
1.2.2.1. Частковий випадок: метод інтегрування внесення під диференціал	7
1.2.2.2. Загальний випадок	9
1.2.3. Інтегрування частинами	10
1.3. Інтегрування раціональних функцій	14
1.4. Інтегрування тригонометричних функцій	18
1.5. Інтегрування ірраціональних функцій	20
2. ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	24
2.1. Поняття означеного інтегралу Римана та його властивості. Геометричний зміст означеного інтегралу	24
2.2. Економічний зміст означеного інтегралу	28
2.3. Обчислення означених інтегралів	30
3. ЗАСТОСУВАННЯ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ	31
3.1. Застосування означеного інтегралу в геометрії	31
3.1.1. Обчислення площ плоских фігур	31
3.1.2. Обчислення довжин плоских дуг	37
3.1.3. Обчислення об'ємів тіл обертання	38
3.2. Застосування означеного інтегралу в економіці	40
4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ	44
5. УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛУ	49
5.1. Визначення подвійного інтегралу та його властивості	49
5.2. Обчислення подвійних інтегралів	50
5.3. Геометричний зміст подвійного інтегралу	54
ТИПОВЕ ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ	57
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	67
Додаток А	68
Додаток Б	70

„Немое число... Услышать его язык дано не каждому. Понять его суть могут лишь избранные и одержимые. Ибо заговорив, оно становится прозорливым проводником на неисчерпаемых раздорожьях науки»

(Н.А. Сорока)

ВСТУП

Фахівці з економіки повинні добре володіти математичним апаратом. Фундаментом математики служить математичний аналіз. Дуже багато понять, математичного аналізу знаходять своє застосування в економічній теорії.

В курсі мікроекономіки часто розглядають так звані граничні величини, тобто для даної величини, що представляється деякою функцією $y = f(x)$ розглядають її похідну $f'(x)$. Наприклад, якщо задана функція витрат C в залежності від об'єму товару q , що випускається у вигляді $C = C(q)$, то граничні витрати будуть задаватися похідною цієї функції формулою $MC = C'(q)$. Економічний зміст функції витрат – це витрати на виробництво додаткової одиниці продукції, що випускається. Часто потрібно знаходити функцію витрат за даною функцією граничних витрат. Це можливо зробити інтегруванням.

Даний посібник присвячений вивченню математичної теорії інтегрального числення і застосуванню її при розв'язанні конкретних задач, зокрема задач економіки. Розв'язання задач за цією темою не дуже просто дається студентам. Метою цього посібника є спроба допомогти студентам у подоланні цієї проблеми.

Друга мета даного посібника – видача типового індивідуального завдання для кожного студента, що складається із 7 варіантів. Номер варіанта типового індивідуального завдання визначається як залишок від ділення номера прізвища студента в журналі на число 7. Типове завдання складене так, що дотримується принцип однакової складності для усіх варіантів. Кожний варіант містить завдання з усіх тем різного рівня складності для дотримання принципу диференційованого навчання. Викладач, що веде практичне заняття, вказує на необхідний рівень задач для обов'язкового вирішення, який доступний середньому студенту, а інші завдання студент вирішує для заглиблення своїх знань і підвищення атестаційної оцінки.

1. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Первісна і неозначений інтеграл

Нехай множина X є інтервалом (a,b) , променем $(-\infty,a)$ чи $(a,+\infty)$ або числовою прямою $(-\infty,+\infty)$.

Визначення 1.1. Функцію $F(x)$ називають *первісною функцією* $f(x)$ на множині X , якщо функція $F(x)$ диференційована на X і виконується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1. Якщо дві функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$ на множині X , то $F_1(x) = F_2(x) + C$, де $C = const$.

Визначення 1.2. Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ на множині X називають *неозначеним інтегралом функції* $f(x)$ на множині X і позначають

$$\int f(x)dx.$$

Функцію $f(x)$ називають *підінтегральною*, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Якщо $F(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на X , то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Останнє співвідношення слід розуміти як рівність між двома множинами.

1.1.1. Основні властивості неозначеного інтегралу.

$$\begin{aligned} 1^{\circ} & \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \\ 2^{\circ} & d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx \\ 3^{\circ} & \int dF(x) = F(x) + C \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{(символ інтегралу і символ диференціалу} \\ \text{взаємо знищуються, якщо символ інтегралу} \\ \text{стоїть перед символом диференціалу і навпаки)} \end{array} \right.$$
$$\begin{aligned} 4^{\circ} & \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int [f(x) \pm g(x)]dx \\ 5^{\circ} & \int [\alpha f(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{— властивості лінійності} \end{array} \right.$$
$$6^{\circ} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Властивості лінійності мають місце з точністю до константи.

1.1.2. Таблиця основних інтегралів.

Нехай $X \subseteq D(f)$

№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$	№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1.	$\int dx = x + C$		
2.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	3.	$\int \frac{dx}{x-a} = \ln x-a + C$
4.	$\int e^x dx = e^x + C$	5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
8.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	11.	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
12.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$	13.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
14.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$	15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C \end{cases}$
16.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
18.	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$		
19.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$		

1.2. Основні методи інтегрування

До основних методів інтегрування можна віднести

- 1) безпосереднє інтегрування,
- 2) метод підстановки (заміни), зокрема метод внесення під диференціал
- 3) метод інтегрування частинами.

1.2.1. Безпосереднє інтегрування.

Цей метод передбачає застосування таблиці і властивостей неозначеного інтегралу. Розглянемо приклади.

1. (№Д1638¹) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx =$
 $= \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx \stackrel{(2., 3.)}{=} \ln |x| + \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \ln |x| - \frac{1}{4x^4} + C.$
2. (№Д1670) $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \frac{dx}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \stackrel{(8., 6^o)}{=}$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1/2)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$
3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int \frac{(x^2 - 2 + 2) dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int \sqrt{x^2 - 2} dx + \int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} \stackrel{(19., 17.)}{=}$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + 2 \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C =$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C$

1.2.2. Метод підстановки.

Теорема 1.2. Якщо функція $t = \varphi(x)$ визначена і диференційована на множині X і має множину визначення $T = \varphi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто $\int g(t) dt = G(t) + C$, тоді на X функція $g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ має первісну, що дорівнює $G(\varphi(t))$, тобто

$$\int g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = G(\varphi(t)) + C.$$

1.2.2.1. Частковий випадок: метод інтегрування внесення під диференціал.

Розглянемо приклади

1. (№Д1675) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx = \left| \frac{d(1 + x^3)}{x^2 dx} = \frac{3x^2 dx}{d(1 + x^3)} \right| = \frac{1}{3} \int (1 + x^3)^{1/3} d(1 + x^3) \stackrel{(2.)}{=}$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + x^3)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(1 + x^3)^4} + C.$

¹ Якщо наведений приклад надається з номером, в якому присутня літера „Д”, то це означає, що приклад знаходиться під відповідним номером в збірнику задач Б.П. Демидовича [11].

$$\begin{aligned}
2. \quad (\text{№Д1679}) \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} &= \int \frac{1/4 d(x^4)}{(x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} \stackrel{(16.)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C. \\
3. \quad (\text{№Д1697}) \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \stackrel{(3.)}{=} -\ln |\cos x| + C. \\
4. \quad (\text{№Д1704}) \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \stackrel{(16.)}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos(\pi/2 - x)}{1 - \cos(\pi/2 - x)} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi - x}{4} \right) \right| = \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi - x}{4} \right) \right| + C.
\end{aligned}$$

Наступний інтеграл відноситься до найпростіших і інтегрується методами внесення під диференціал і методом безпосереднього інтегрування.

Інтеграли виду $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx$

інтегруються розкладом чисельника в суму двох доданків, одним з яких є похідна від квадратного тричлена знаменника, помножена на константу, а іншим – стала, а саме:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx &= \int \frac{a/2(2x + p) + b - ap/2}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx = \\
&= \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx + \left(b - ap/2 \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\lambda}.
\end{aligned}$$

Перший з отриманих інтегралів береться занесенням під диференціал, а другий – виділенням повного квадрату:

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx = \frac{a}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \left(b - ap/2 \right) \int \frac{dx}{\left[\left(x + p/2 \right)^2 - p^2/4 + q \right]^\lambda}.$$

Відповідь буде залежати від λ . Розглянемо приклад.

8. (№Д1852)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \left| x+1 = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \\
&= \left| x^2+x+1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + x + 1)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right| + C = \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

1.2.2.2. Загальний випадок.

1. (№Д1776)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1+e^x} \\ x = \ln(t^2 - 1) \\ dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} \stackrel{(16.)}{=} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + C.$$

2. (№Д1777)

$$\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left| \begin{array}{l} t = \arctg \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} \end{array} \right| = 2 \int t dt = t^2 + C = \arctg^2 \sqrt{x} + C.$$

За допомогою тригонометричних заміन обчислюють інтеграли, що містять такі ірраціональності:

- 1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ (після заміни $x = a \sin t$ отримаємо $\sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos t|$);
- 2) $\sqrt{x^2 + a^2}$ (після заміни $x = a \operatorname{tg} t$ отримаємо $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{|\cos t|}$);
- 3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ (після заміни $x = \frac{a}{\cos t}$ отримаємо $\sqrt{x^2 - a^2} = a |\operatorname{tg} t|$) та інші.

Наприклад:

$$3. \quad I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \left| \begin{array}{ll} x = \frac{a}{\cos t} & \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a \sin t}{\cos t} \\ 0 < t < \frac{\pi}{2} & dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} \\ 0 < a < x & t = \arccos \frac{a}{x} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{a}{\cos t}\right)^3 \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{a \sin t}{\cos t}} =$$

$$\begin{aligned}
&= a^3 \int \frac{dt}{\cos^4 t} = a^3 \int \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = a^3 \int (1 + \tan^2 t) d(\tan t) = \\
&= a^3 \left(\tan t + \frac{\tan^3 t}{3} \right) + C = a^3 \left(\tan \left[\arccos \frac{a}{x} \right] + \frac{1}{3} \tan^3 \left[\arccos \frac{a}{x} \right] \right) + C .
\end{aligned}$$

Оскільки $0 < a < x$, а $\tan [\arccos z] = \pm \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$, то

$$\tan \left[\arccos \frac{a}{x} \right] = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2} , \text{ тому}$$

$$I = a^3 \left(\frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{3a^3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} \right) + C = \frac{2}{3} a^2 \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - a^2} + C .$$

$$\begin{aligned}
4. \quad I &= \int \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} dx = \left| \begin{array}{l} x = 4 \cos t \\ 0 < t < \pi \\ t = \arccos \frac{x}{4} \\ dx = -4 \sin t dt \end{array} \right| = -4 \int \sqrt{\frac{4-4 \cos t}{4+4 \cos t}} \sin t dt = \\
&= -4 \int \left| \tan \frac{t}{2} \right| 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt
\end{aligned}$$

Оскільки $0 < t < \pi$, то $\tan \frac{t}{2} > 0$, тому модуль відкривається із знаком „+”, звідки отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= -8 \int \sin^2 \frac{t}{2} dt = -4 \int (1 - \cos t) dt = -4(t - \sin t) + C = \\
&= -4 \arccos \frac{x}{4} + 4 \sin \left(\arccos \frac{x}{4} \right) + C .
\end{aligned}$$

Далі скористаємось формулою $\sin \arccos y = \sqrt{1-y^2}$ і одержимо

$$I = -4 \arccos \frac{x}{4} + 4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4} \right)^2} + C = -4 \arccos \frac{x}{4} + \sqrt{16 - x^2} + C .$$

1.2.3. Інтегрування частинами.

Теорема 1.3. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані на X і існує на X неозначений інтеграл $\int u(x) d(v(x))$, тоді існує інтеграл $\int v(x) d(u(x))$ і має місце формула

$$\boxed{\int u(x) d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x) d(u(x)) .}$$

Основні класи функцій, що інтегруються частинами.

	Види інтегралів	Перша підінтегр. функція	Друга підінтегр. функція	Заміни	Зауваження
А)	$\int P_n(x)f(x)dx$ та звідні до них	$P_n(x)$ - многочлен, $\deg P_n = n$	$f(x) = \left[\begin{array}{l} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx}, a^{bx}, \\ \frac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \frac{1}{\sin^2(bx)} \\ i\ m.n. \end{array} \right]$	$u = P_n(x)$ $dv = f(x)dx$	Формула інтегрування частинами застосовується n разів
Б)	$\int g(x)f[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\varphi[f(x)]dx$ та звідні до них.	$g(x)$ - дробово- лінійна функція, зокрема многочлен	$\varphi(x) = \left[\begin{array}{l} \arcsin(bx), \\ \arccos(bx), \\ \arctg(bx), \\ \operatorname{arctg}(bx) \\ \ln(bx), \\ i\ m.n. \end{array} \right]$	$u = f[\varphi(x)]$ $dv = g(x)dx$ відповідно $u = \varphi[f(x)]$ $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \varphi(x)$, відповідно $t = f[\varphi(x)]$)	Інтегрувати частинами стільки разів, доки підінтегральна функція буде містити $\varphi(x)$
В)	$\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$ та звідні до них				Двічі інтегрувати частинами (див. приклад 3)
Г)	інші				

1. Обчислимо інтеграл, що відноситься до класу А.

$$\begin{aligned}
 \int (2x^2 + 4) \sin^2 x dx &= \int (x^2 + 2)(1 - \cos 2x) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \int (x^2 + 2) \cos 2x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2 \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} + 2x - \left[\frac{1}{2} (x^2 + 2) \sin 2x - \int x \sin 2x dx \right] = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{2} (x^2 + 2) \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x - \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{2} \int \cos 2x \right) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{2} (x^2 + 2) \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

2. Тепер обчислимо інтеграл із класу Б (№Д1813).

$$\begin{aligned}
\int x \arctg^2 x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg^2 x & du = \frac{\arctg x}{1+x^2} dx \\ dv = x dx & v = x^2/2 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg^2 x - \int x^2 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{x^2}{1+x^2} dx & v = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctg x \end{array} \right| = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctg^2 x - \left(\arctg x (x - \arctg x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx \right) = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctg^2 x - x \arctg x + \arctg^2 x + \int \frac{1/2 d(1+x^2)}{1+x^2} - \int \arctg x d(\arctg x) = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctg^2 x - x \arctg x + \arctg^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\arctg^2 x}{2} + C = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctg^2 x - x \arctg x + \frac{1}{2} \arctg^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

3. Позначимо $A = \int e^{ax} \cos bxdx$. Цей інтеграл потрібно двічі інтегрувати частинами, кожен раз уводячи споріднені заміни, тобто або кожен раз експоненціальну функцію позначати через $v(x)$, а тригонометричну, помножену на dx через $dv(x)$, або навпаки:

$$\begin{aligned}
A = \int e^{ax} \cos bxdx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = ae^x dx \\ dv = \cos bxdx & v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = ae^x dx \\ dv = \sin bxdx & v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \\
&- \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx \right) = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} A.
\end{aligned}$$

Маємо: $A = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} A$, звідки одержимо

$$A = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C.$$

Аналогічно можна отримати

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

4. (№Д1808) Інтеграл типу Б

$$\begin{aligned} \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln \frac{1+x}{1-x} & du = \frac{2}{1-x^2} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C = x + \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

Згідно до таблиці інтеграл $\int \frac{dx}{1-x^2}$ виражається через $\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, в якому опущено у відповіді модуль, тому що дана підінтегральна функція $x \ln \frac{1+x}{1-x}$ має множину визначення $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

5. (№Д1820) Інтеграл типу Г.

$$\begin{aligned} B &= \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = x \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} d(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} & v = \frac{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}{3} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x}{3} (\sqrt{a^2 + x^2})^3 - \frac{1}{3} \int (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} dx = \\ &= \frac{x}{3} (\sqrt{a^2 + x^2})^3 - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx - \frac{1}{3} \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx \stackrel{(19.)}{=} \\ &= \frac{x}{3} (\sqrt{a^2 + x^2})^3 - \frac{a^2}{3} \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| \right) - \frac{1}{3} B \end{aligned}$$

Звідки одержимо

$$B = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x(a^2 + 2x^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C.$$

Зауважимо, що цей інтеграл також можна інтегрувати тригонометричними або гіперболічно-тригонометричними підстановками.

Зауваження 1.1. Не всі елементарні функції інтегруються в елементарних функціях. До таких функцій відносяться

- 1) *інтеграл Пуассона* (інтеграл помилок) $\int e^{-x^2} dx$, що використовується в теорії ймовірностей, в статистичній фізиці, теорії теплопровідності і дифузії,

- 2) *інтеграли Френеля* $\int \cos(x^2)dx$, $\int \sin(x^2)dx$, що використовуються в оптиці,
- 3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{x}$, $x > 0, x \neq 1$,
- 4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

В наступному параграфі ми розглянемо методи інтегрування раціональних функцій, які завжди інтегруються в елементарних функціях. Після цього перейдемо до деяких інтегралів від тригонометричних і ірраціональних функцій, інтегрування яких можна здійснювати безпосередньо або через раціоналізуючу заміну.

1.3. Інтегрування раціональних функцій

Будемо розглядати раціональні дробі з дійсними коефіцієнтами. Незвідні многочлени будемо розглядати над полем дійсних чисел.

Визначення 1.3. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менша за степінь знаменника.

До *найпростіших раціональних дробів* відносяться раціональні дробі вигляду

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} \text{ і } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda},$$

де тричлен у знаменнику другого дробу незвідний, тобто його дискримінант від'ємний.

Із курсу алгебри відома наступна теорема.

Теорема 1.4. Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти в суму найпростіших раціональних дробів, тобто

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_1^{(s)}}{x-a_s} + \dots + \frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{(x-a_s)^{\alpha_s}} + \\ &+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x + N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_1^{(r)}x + N_1^{(r)}}{x^2 + p_rx + q_r} + \dots + \frac{M_{\lambda_r}^{(r)}x + N_{\lambda_r}^{(r)}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{\lambda_r}}, \end{aligned}$$

де $n < m$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 2(\lambda_1 + \dots + \lambda_r) = m$.

Для отримання відповідного розкладу правильного раціонального дробу в суму найпростіших діють за наступним *алгоритмом*.

Крок 1. Знаменник дробу розкладають на незвідні (над полем дійсних чисел) множники.

Крок 2. Дріб формально розкладають в суму найпростіших дробів за формулою теореми 1.4. При цьому записують в чисельниках усіх дробів не-

визначені коефіцієнти, для отримання значень яких використовують **метод невизначених коефіцієнтів**. Цей метод полягає в наступному:

- 1) праву частину зводять до спільного знаменника;
- 2) розглядаючи чисельники даної і отриманої дробів, прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x ;
- 3) одержують систему лінійних рівнянь, розв'язуючи яку, знаходять значення невизначених коефіцієнтів.

Якщо дріб неправильний, то попередньо виділяють в ньому цілу частину.

Кожна з найпростіших дробів інтегрується з використанням формул 2., 3. таблиці інтегралів, властивості 6^0 , а також на основі прикладу 8 (і зауваження до нього), наведеного в методі підстановки.

Теорема 1.5. Будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Наведемо приклади.

1. (№Д1868) Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} dx$.

Підінтегральний раціональний дріб є неправильним, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l}
 -x^{10} + 0x^9 + 0x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + x - 2 \\
 \hline
 -x^{10} + x^9 - 2x^8 & \\
 \hline
 -x^9 + 2x^8 + 0x^7 & \\
 \hline
 -x^9 - x^8 + 2x^7 & \\
 \hline
 -3x^8 - 2x^7 + 0x^6 & \\
 \hline
 -3x^8 + 3x^7 - 6x^6 & \\
 \hline
 -5x^7 + 6x^6 + 0x^5 & \\
 \hline
 -5x^7 - 5x^6 + 10x^5 & \\
 \hline
 -11x^6 - 10x^5 + 0x^4 & \\
 \hline
 -11x^6 + 11x^5 - 22x^4 & \\
 \hline
 -21x^5 + 22x^4 + 0x^3 & \\
 \hline
 -21x^5 - 21x^4 + 42x^3 & \\
 \hline
 -43x^4 - 42x^3 + 0x^2 & \\
 \hline
 -43x^4 + 43x^3 - 86x^2 & \\
 \hline
 -85x^3 + 86x^2 + 0x & \\
 \hline
 -85x^3 - 85x^2 + 170x & \\
 \hline
 -171x^2 - 170x + 0 & \\
 \hline
 -171x^2 + 171x - 342 & \\
 \hline
 -341x + 342 &
 \end{array}$$

Звідки отримаємо

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} \right) dx = \\
 &= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \int \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} dx
 \end{aligned}$$

Тепер розглянемо підінтегральну функцію в останньому інтегралі і розкладемо цей дріб на найпростіші

$$\frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} = \frac{-341x + 342}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Обчислимо невідомі коефіцієнти методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A + B = -341 \\ 2A - B = 342 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -341 - B \\ -682 - 3B = 342 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1024}{3} \end{cases}$$

Звідки одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} dx &= \int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1024}{3(x+2)} \right) dx = \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1024}{3} \ln |x+2| + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right| + C = . \end{aligned}$$

Об'єднуючи разом усі отримані результати маємо:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \\ &+ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right| + C . \end{aligned}$$

2. (№Д1879) Обчислити інтеграл $\int \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)^2} .$

Підінтегральний дріб є правильним, розкладемо його на найпростіші

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} = \\ &= \frac{A(x-1)(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)^2} . \end{aligned}$$

Коефіцієнти обчислюємо за методом невизначених коефіцієнтів

$$\begin{matrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C + D = 0 \\ 2B + C - 2D = 1 \\ -2A + 2B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/25 \\ B = 1/5 \\ C = -1/25 \\ D = -8/25 \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5(x-1)^2} - \frac{1}{25} \cdot \frac{x+8}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{25} \ln |x-1| - \frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{25} \int \frac{1/2(2x+2)+7}{x^2 + 2x + 2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{7}{25} \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \\
&= -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln(x-1)^2 + \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) + \frac{7}{25} \arctg(x+1) + C = \\
&= -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} + \frac{7}{25} \arctg(x+1) + C.
\end{aligned}$$

3. (№Д1888) Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його знаменник на незвідні множники. Раціональні корені многочлену $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ можуть бути або $+1$ або -1 . Підставляючи ці числа в многочлен отримаємо, що таким коренем є число $+1$. Поділимо даний многочлен на $x-1$. Ділення можна здійснити „стовпчиком”, як в прикладі 1, але в цьому прикладі простіше застосувати схему Горнера

	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	0	1	0	1	0

Таким чином, результат ділення можна записати так:

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^4+x^2+1).$$

Для розкладу многочлена четвертого степеня на множники зробимо такі елементарні перетворення

$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

В результаті маємо дріб

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1-x)(x^2+1+x)},$$

який підлягає розкладу в найпростіші:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Після застосування методу невизначених коефіцієнтів одержимо $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=-1/6$, $D=0$, $E=-1/2$, тому

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2-x+1)} \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.4. Інтегрування тригонометричних функцій

Оскільки кожна раціональна функція інтегрується в елементарних функціях, то введення заміни під знаком інтегралу, яке перетворює підінтегральну функцію в раціональну (раціоналізуючої заміни), дозволяє стверджувати, що відповідний інтеграл інтегрується в елементарних функціях.

Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$

- 1) завжди раціоналізується *універсальною тригонометричною підстановкою* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, після введення якої отримаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\text{тому } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Недоліком наведеної підстановки є громіздкість отримуваних раціональних функцій у багатьох випадках. Саме тому розглянемо заміни, що призводять до більш зручних щодо інтегрування раціональних функцій.

- 2) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = \cos x$.
- 3) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = \sin x$.
- 4) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = \operatorname{tg} x$.

Наведемо відповідні приклади.

1. У наступному прикладі використовується універсальна тригонометрична заміна

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 5} &= \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \left| t^2 + t + 4 = t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \right| =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \arctg \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C.$$

2. Підінтегральна функція в інтегралі $\int \frac{\sin^3 x dx}{2 \cos x + \sin^2 x + 2}$ є непарною відносно синуса, тому зручно застосовувати другу з наведених замінін

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2 \cos x + \sin^2 x + 2} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{-(1-t^2)dt}{2t + (1-t^2) + 2} = \\ &= \int \frac{(t^2-1)dt}{-t^2 + 2t + 3} = - \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)(t+3)} dt = - \int \frac{t-1}{t+3} dt = - \int \frac{(t+3)-4}{t+3} dt = \\ &= - \int \left(1 - \frac{4}{t+3} \right) dt = -t + 4 \ln |t+3| + C = -\cos x + 4 \ln(\cos x + 3) + C. \end{aligned}$$

3. Наступний приклад стосується заміни 4.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (tg^2 x + 3tg x)} = \int \frac{d(tg x)}{tg^2 x + 3tg x} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 3t} = \int \frac{dt}{t(t+3)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{3} (\ln |t| - \ln |t+3|) + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t}{t+3} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{tg x}{tg x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтеграли виду $\int \sin^u x \cos^v x dx$ інтегрують або за допомогою замінін $t = \cos x$ чи $t = \sin x$ (внесення під диференціал), або кратним використанням формули зниження ступеня і формул тригонометричних функцій подвійних кутів.

$$\begin{aligned} 4. \quad \int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^3 x} dx &= \int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^2 x (\cos x dx)} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} d(\sin x) = \\ &= |t = \sin x| = \int \sqrt[3]{t^2 (1-t^2)} dt = \frac{3\sqrt[3]{t^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{t^{11}}}{11} + C = \frac{3\sqrt[3]{\sin^5 x}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{\sin^{11} x}}{11} + C. \end{aligned}$$

5. Використовуємо формули зниження ступеня

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (-\cos^3 2x - \cos^2 2x + \cos 2x + 1) dx. \end{aligned}$$

Для інтегрування першої з функцій застосуємо заміну $t = \sin 2x$, а саме:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 2x dx &= \int \cos^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + C = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C,\end{aligned}$$

а для другої – формулу зниження ступеня

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C,$$

останні інтегруємо безпосередньо, тому разом одержимо

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \frac{1}{8} \left(-\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin^3 2x}{6} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} + x \right) + C = \\ &= \frac{\sin^3 2x}{48} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{x}{16} + C.\end{aligned}$$

1.5. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей виду

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \quad (a, b, c, d = \text{const}, n \in \mathbb{N})$$

Здійснюємо підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, звідки $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$,

$$dx = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2} dt. \text{ Ця підстановка раціоналізує підінтегральний вираз.}$$

1. (№Д1932)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \\ x = \frac{1+t^3}{t^3-1} \end{array} \right. \quad dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = \\ &= \int \frac{t}{\left(\frac{1+t^3}{t^3-1} + 1 \right) \left(\frac{1+t^3}{t^3-1} - 1 \right)} \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2} t + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.\end{aligned}$$

Частковим випадком дробово-лінійної ірраціональності є функція $R(x, \sqrt[n]{x})$.

2. (№Д1927) Для інтеграла $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ у виразі дробово-лінійної

ірраціональності треба обрати $a = d = 1, b = c = 0, n = 6 = HCK\{2,3\}$, тоді після заміни $t = \sqrt[6]{x}$ отримаємо: $x = t^6, dx = 6t^5 dt$

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^6(1+2t^3+t^2)} = \int \frac{6dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1} \right) dt.$$

Метод невизначених коефіцієнтів дає такі результати:

$$A = 6, B = -\frac{3}{2}, C = -9, D = \frac{3}{2}, \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} I &= 6 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| - \int \frac{9t - \frac{3}{2}}{2t^2 - t + 1} dt = 6 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| - \int \frac{\frac{9}{2}(4t-1) + \frac{3}{4}}{2t^2 - t + 1} dt = \\ &= 6 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| - \frac{9}{4} \int \frac{d(2t^2 - t + 1)}{2t^2 - t + 1} - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \\ &= 6 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| - \frac{9}{4} \ln(2t^2 - t + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C = \\ &= 6 \ln |\sqrt[6]{x}| - \frac{3}{2} \ln |\sqrt[6]{x} + 1| - \frac{9}{4} \ln(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

<i>Інтегрування квадратичних ірраціональностей $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$</i>
--

здійснюється підстановками Ейлера, які у даному випадку є універсальними:

перша основна підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$, якщо $a > 0$;

друга основна підстановка Ейлера $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$;

третя неосновна підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + xt$.

3. (№Д1966)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = -x+t \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}, dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2} dt = \\ &= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t+1} - \frac{3}{(2t+1)^2} \right) dt = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t+1| - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2t+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ &= 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2+x+1} \right| - \frac{3}{2} \ln \left| 2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} \right| + \frac{3}{2\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)} + C \end{aligned}$$

Інтегрування підстановками Ейлера іноді призводить до обчислення

складних раціональних функцій. Розглянемо один частковий випадок, що дозволяє спростити таке інтегрування.

*Інтегрування квадратичних ірраціональностей виду $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$,
де $P_n(x)$ - многочлен степені n*

здійснюється представленням інтегралу у вигляді

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, λ - невизначений коефіцієнт.

4. (№Д1946) Обчислити інтеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$.

В чисельнику стоїть многочлен третього степеня, тому многочлен з невизначеними коефіцієнтами треба обрати другого степеня, і тоді отримаємо:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

Для отримання значень невизначених коефіцієнтів треба спочатку продиференціювати обидві частини останньої рівності:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} &= (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (Ax^2 + Bx + C) \cdot \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 3}} + \\ &+ \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}, \end{aligned}$$

потім обидві частини помножаємо на квадратичну ірраціональність $\sqrt{x^2 + 4x + 3}$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda,$$

після чого застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 2A + A = 1 \\ x^2 & 8A + B + 2A + B = -6 \\ x^1 & 6A + 4B + 2B + C = 11 \\ x^0 & 3B + 2C + \lambda = -6 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -14/3 \\ C = 37 \\ D = -66 \end{cases}$$

Звідки отримаємо

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right|.$$

Інтеграл від диференціального біному $\int x^m (a + bx^n)^p dx$,

де m, n, p - раціональні числа,

може бути зведений до інтегрування раціональних функцій лише у трьох наступних випадках (теорема Чебишева)

- 1) якщо p - ціле, то покладають $x = t^N$, де N - спільний знаменник дробів m і n ;
 - 2) якщо $\frac{m+1}{n}$ - ціле, покладають $a + bx^n = t^N$, де N - знаменник дробу p ;
 - 3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле, покладають $ax^{-n} + b = t^N$, де N - знаменник дробу p .
5. (№Д1987)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1+x^6}} &= \int x^{-1} (1+x^6)^{-1/6} = \left| \begin{array}{l} a=1, b=1, \\ m=-1, n=6, \\ p=-1/6, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} p \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{m+1}{n} = \frac{0}{6} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{випадок 2} \end{array} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{l} 1+x^6 = t^6 \Rightarrow x = (t^6-1)^{1/6} \\ dx = \frac{6t^5 dt}{6(t^6-1)^{5/6}} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 dt}{(t^6-1)^{5/6} t} = \int \frac{t^4 dt}{(t^6-1)} = \\ &= \int \frac{t^4 dt}{(t-1)(t+1)(t^2+t+1)(t^2-t+1)} = \int \left(\frac{1/6}{t-1} - \frac{1/6}{t+1} + \frac{-1/6x+1/6}{t^2+t+1} + \frac{1/6x+1/6}{t^2-t+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \ln |t-1| - \frac{1}{6} \ln |t+1| + \int \left(\frac{-1/12(2x+1)+1/4}{t^2+t+1} + \frac{1/12(2x-1)+1/4}{t^2-t+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{12} \ln(t^2+t+1) + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(t+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{12} \ln(t^2-t+1) + \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(t-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{12} \ln \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt[6]{1+x^6}+1} \right| - \frac{1}{12} \ln \frac{\sqrt[3]{1+x^6}-\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt[3]{1+x^6}+\sqrt[6]{1+x^6}+1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

2. ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Поняття означеного інтегралу Римана та його властивості. Геометричний зміст означеного інтегралу

Визначення 2.1. Якщо для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a, b]$, для будь-якого розбиття $R = \{a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\}$ відрізка $[a, b]$ скінченною кількістю точок $\{x_k\}_{k=0}^n$ і для будь якого набору проміжних точок $P = \{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}\}$ відрізків розбиття, існує скінченна границя I інтегральних сум $\sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ при діаметрі розбиття $d = \max_{k=1, n} (x_k - x_{k-1})$, що прагне до нуля, тобто $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, R)$, яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P , то така функція називається інтегрованою за Риманом на відрізку $[a, b]$, а значення границі – означеним інтегралом Римана, що позначається $I = \int_a^b f(x) dx$.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a, b]$. Плоска фігура D , що обмежена на декартовій площині графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ називається криволінійною трапецією (див рис. 2.1).

Геометричний зміст інтегральної суми. Значення $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ відповідає площі прямокутника, що є складовою сходинкової фігури, зображеної на рис. 2.2. Значення площі усієї сходинкової фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma(f, R)$.

Геометричний зміст означеного інтегралу: числове значення площі криволінійної трапеції D на декартовій площині дорівнює значенню інте-

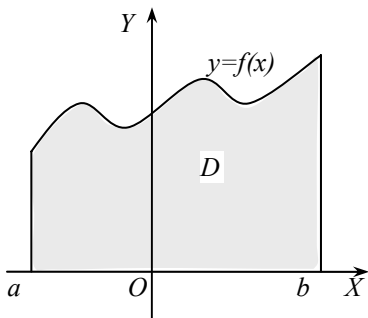


Рис. 2.1.

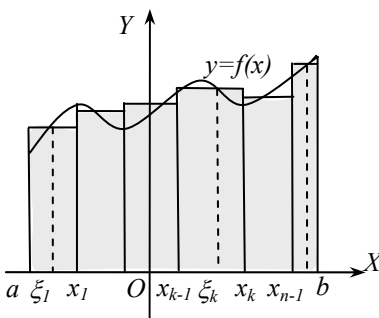


Рис. 2.2.

рала $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 2.1 (необхідна умова інтегрованості функції). Якщо функція інтегрована на відрізьку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізьку.

Зворотне твердження невірне: не кожна обмежена функція інтегрована за Риманом. Розглянемо функцію Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \in R \setminus Q \end{cases}.$$

Вона не інтегрована за Риманом, оскільки границя її інтегральних сум залежить від вибору проміжних точок розбиття R . Дійсно, якщо $\xi'_k \in Q \cap [x_{k-1}, x_k]$, то

$$\sigma'(f, R) = \sum_{k=1}^n f(\xi'_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0 \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0,$$

а якщо $\xi''_k \in (R \setminus Q) \cap [x_{k-1}, x_k]$, то

$$\sigma''(f, R) = \sum_{k=1}^n f(\xi''_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1 \xrightarrow{d \rightarrow 0} 1.$$

Наведений приклад свідчить про те, що необхідно знати, які саме функції інтегровані за Риманом.

Основні класи функцій, що інтегровані за Риманом:

- 1) неперервна на відрізьку $[a, b]$ функції,
- 2) обмежена, монотонна на відрізьку $[a, b]$ функція,
- 3) обмежена на відрізьку $[a, b]$ функція, що має зчисленну або скінченну кількість точок розриву.

Формула Ньютона-Лейбниця: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізьку $[a, b]$, а $F(x)$ - первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Задача 2.1. (№Д2216) Чому формальне застосування формули Ньютона-Лейбниця призводить до невірних результатів, якщо а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 dx}{1 + \tan^2 x}$?

1. (№Д2220) Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$.

Складемо інтегральну суму для функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$ при розбитті

відрізка $[0,1]$ на n рівних частин точками $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{k}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ і при виборі проміжних точок в прaviх

кінцях відповідних відрізків розбиття, тобто $\xi_k = \frac{k}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{1+x}$ на відрізку $[0,1]$ неперервна, то вона інтегрована на цьому відрізку (див. „Основні класи інтегрованих функцій”). Це означає, що границя послідовності інтегральних сум не залежить ні від вибору способу розбиття, ні від вибору набору проміжних точок. Прагнення n до нескінченності рівносильне прагненню діаметра розбиття до нуля. Тому дана границя, що відповідає границі обраної послідовності інтегральних сум, дорівнює інтегралу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln |1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Властивості інтегралу Римана.

Якщо функція $f(x)$ ($g(x)$) інтегрована на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), тоді

- 1) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;
- 2) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
(лінійність інтегралу);

- 3) вона інтегрована на будь-якому відрізку, що міститься в середині $[a, b]$; і навпаки: якщо функція інтегрована на кожному із складових відрізків $[a, b]$, то вона інтегрована на усьому відрізку $[a, b]$; зокрема, має місце формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b \text{ (адитивність інтегралу);}$$

геометрично для неперервної невід'ємної на $[a, b]$ функції $f(x)$ остання рівність означає, що площа криволінійної трапедії на відрізку $[a, b]$

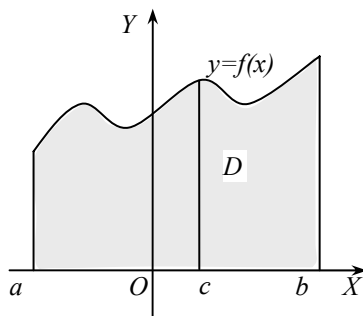


Рис. 2.3.

дорівнює сумі площ складових криволінійних трапецій на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$ (рис. 2.3).

- 4) добуток і частка є інтегрованою на відрізку функцією (для частки в припущенні про те, що для функції знаменника виконано: $\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0$);

- 5) функція $|f(x)|$ інтегрована і має місце нерівність $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$;

- 6) якщо $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$;

зокрема, якщо $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;

- 7) якщо $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то має місце оцінка (теорема про середнє):

$$\inf_{[a, b]} f(x) \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \sup_{[a, b]} f(x) \cdot \int_a^b g(x) dx,$$

а якщо, крім того, $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує таке значення $c \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Частковий випадок теореми про середнє: якщо $g(x) = 1 \forall x \in [a, b]$, $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Значення $f(c)$ називається *середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$* і обчислюється за формулою

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

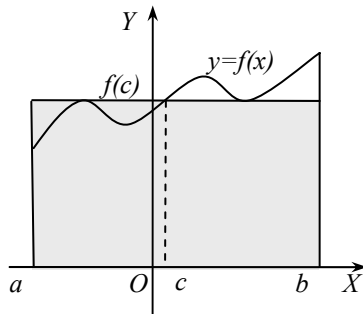


Рис. 2.4.

Геометричний зміст теореми про середнє (в формулюванні часткового випадку).

Якщо $f(x)$ невід'ємна, неперервна на $[a, b]$, тоді знайдеться така точка c з відрізка $[a, b]$, що площа криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника із сторонами довжини $f(c)$ і $b-a$ (рис. 2.4).

Формула заміни змінної під знаком означеного інтегралу.

Якщо

- 1) функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$,
- 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\varphi[\alpha, \beta] = [a, b]$,
- 3) функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційована на $[\alpha, \beta]$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ функція } f(x) \text{ неперервна на } [a, b], \\ 2) \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \text{ і } \varphi[\alpha, \beta] = [a, b], \\ 3) \text{ функція } x = \varphi(t) \text{ неперервно дифере-} \\ \text{нційована на } [\alpha, \beta] \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt}$$

Формула інтегрування частинами під знаком означеного інтегралу.

Функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно диференційовані на $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Функції } u(x) \text{ і } v(x) \text{ неперервно дифе-} \\ \text{ренційовані на } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

2. (№Д2333) Довести рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0)$.

В теоремі про середнє оберемо $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $a = n$, $b = n + p$, тоді $g(x) > 0$, на $[n, n + p]$, $-1 \leq \inf_{[a,b]} f(x)$; $\sup_{[a,b]} f(x) \geq 1$, і буде мати місце

оцінка

$$-1 \cdot \int_n^{n+p} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \leq 1 \cdot \int_n^{n+p} \frac{1}{x} dx.$$

Формула Ньютона-Лейбниця дозволяє зробити обчислення

$$\int_n^{n+p} \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_n^{n+p} = \ln \frac{n+p}{n}.$$

Тому за теоремою про двостороннє обмеження (про двох міліціонерів) отримаємо при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{ccc} -\ln \frac{n+p}{n} & \leq & \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \leq \ln \frac{n+p}{n} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ 0 & & 0 \quad 0 \end{array}$$

Що й треба було довести.

2.2. Економічний зміст означеного інтегралу

Література [4 с. 286-287]. Нехай функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва залежно від часу. Знайдемо обсяг продукції u , що вироблено за проміжок часу $[0, T]$.

Відмітимо, що за умови незмінності продуктивності з часом (тобто $f(t) = \text{const}$) обсяг продукції Δu , яка виготовлена за деякий проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, визначається формулою $\Delta u = f(t) \Delta t$. В загальному випадку здійс-

нуються наближена рівність $\Delta u = f(\xi)\Delta t$, де $\xi \in [t, t + \Delta t]$, яка стає тим більш точною, чим менше Δt .

Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на проміжки часу

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1.$$

Для величини обсягу продукції Δu_k , що вироблено за проміжок часу $[t_{k-1}, t_k]$, маємо $\Delta u_k = f(\xi_k)\Delta t_k$, де $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).
Тоді

$$u \approx \sum_{k=1}^n \Delta u_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta t_k.$$

Якщо $d = \max_k \Delta t_k$ прагне до нуля, то наближена рівність стає все більш точною, тому

$$u = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta t_k.$$

Враховуючи визначення означеного інтегралу, отримаємо

$$u = \int_0^T f(t)dt,$$

тобто, якщо $f(t)$ - продуктивність праці в момент часу t , то $u = \int_0^T f(t)dt$ - це обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0, T]$.

З наведеного випливає, що обсяг продукції, що виробляється за проміжок часу від t_1 до t_2 дорівнює

$$u = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

1. За функцією продуктивності праці $f(t) = \frac{20t}{t^2 + 3}$ [дет/год], знайти скільки деталей зробить робітник за другу половину робочого дня.
Другій половині робочого дня відповідає проміжок часу від $t_1 = 4$ [год.] до $t_2 = 8$ [год.]. За цей час робітник виготовить

$$\begin{aligned} u &= \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_4^8 \frac{20t}{t^2 + 3} dt = 10 \int_4^8 \frac{d(t^2 + 3)}{t^2 + 3} = 10 \ln \Big| t^2 + 3 \Big|_4^8 = 10(\ln 67 - \ln 20) = \\ &= 10 \ln \frac{67}{20} \approx 12 \text{ [дет]}. \end{aligned}$$

2.3. Обчислення означених інтегралів.

$$\begin{aligned}
 1. \quad (\text{№Д2242}) \quad \int_{1/e}^e |\ln x| dx &= \left| \begin{array}{ll} \ln x \geq 0 & \ln x < 0 \\ x \geq 1 & x < 1 \\ |\ln x| = \ln x & |\ln x| = -\ln x \end{array} \right| = \int_{1/e}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = - \left(x \ln x \Big|_{1/e}^1 - \int_{1/e}^1 x \cdot \frac{dx}{x} \right) + \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} \right) = \\
 &= - \left(\ln 1 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - x \Big|_{1/e}^1 \right) + \left(e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e \right) = - \left(\frac{1}{e} - \left[1 - \frac{1}{e} \right] \right) + (e - [e - 1]) = \\
 &= 2 \left[1 - \frac{1}{e} \right]
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (\text{№Д2247})$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \left| \begin{array}{ll} t = \frac{1}{x+1} & dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x = \frac{1}{t} - 1 & \frac{x}{t} \Big|_0^{0,75} = \frac{0,75}{4/7} \end{array} \right| = \int_1^{4/7} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1}} = \\
 &= - \int_{4/7}^1 \frac{-dt}{t \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2}} = \int_{4/7}^1 \frac{dt}{t \sqrt{1 - 2t + 2t^2}} = \int_{4/7}^1 \frac{dt}{t \sqrt{2 \left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| \Big|_{4/7}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right| - \right. \\
 &\left. - \ln \left| \frac{1}{14} + \frac{5}{7\sqrt{2}} \right| \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{4\sqrt{2}+9}{7}.
 \end{aligned}$$

$$3. \quad (\text{№Д2246})$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} x = a \sin t & dx = a \cos t dt \\ a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t & \frac{x}{a^2 - x^2} \Big|_0^a = \frac{a}{\pi/2} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 \cos^2 t} a \cos t dt = \\
 &= \int_0^{\pi/2} a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} \left(t + \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{a^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi - \sin 0}{4} \right) = \frac{\pi a^4}{16}.
 \end{aligned}$$

Задача 2.2. Отримати формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } n - \text{парне} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n - \text{непарне} \end{cases} \quad (2.1)$$

3. ЗАСТОСУВАННЯ ОЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

3.1. Застосування означеного інтегралу в геометрії

3.1.1. Обчислення площ плоских фігур.

Площа плоскої фігури D , що обмежена на декартовій площині неперервними на відрізку $[a, b]$ кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_2(x) \leq f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (рис. 3.1), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Якщо $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ - параметричне рівняння кривої,

обидві координатні функції якої неперервні разом із своєю похідною на $[\alpha, \beta]$, крім того крива є замкнутою, пробігає проти

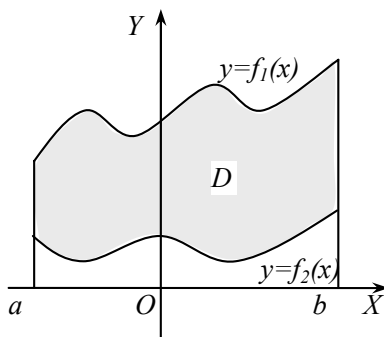


Рис. 3.1.

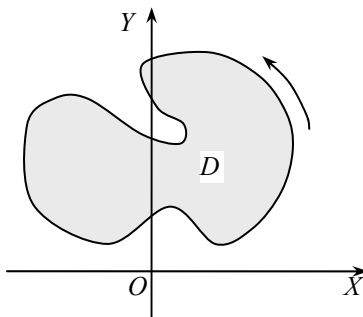


Рис. 3.2.

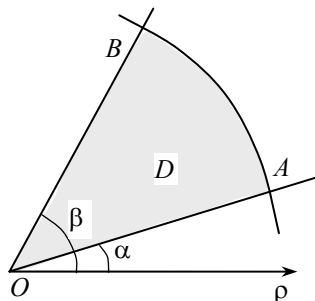


Рис. 3.3.

руху стрілки годинника, обмежує зліва від себе фігуру D з площею S (рис. 3.2), тоді

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt.$$

Площа S сектора OAB (рис. 3.3), що обмежений неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$, заданою в полярній системі координат, і двома півпрямими $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Не будемо зупинятися на строгому математичному визначенні квадрованих фігур, але зазначимо, що всі області, що розглянуті вище з наведеними для них формулами обчислення площ є квадрованими плоскими фігурами, тобто фігурами, що мають площу.

1. (№Д2400 Знайти площу фігури, що обмежена кривими $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$.

На рис. 3.4. зображено дану фігуру D ($OAECB$). Вона є криволінійною трапецією, площа якої дорівнює

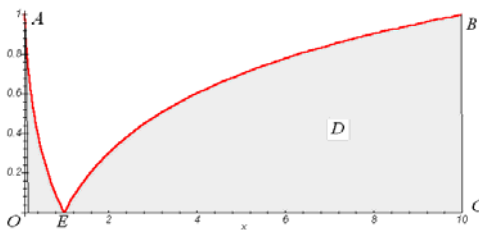


Рис. 3.4.

$$S = \int_{0,1}^{10} |\lg x| dx. \text{ Цей інтеграл}$$

будемо обчислювати частинами аналогічно прикладу 1 пункту 2.2:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\ln 10} \left(\int_{0,1}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{10} \ln x dx \right) = \frac{1}{\ln 10} \left[- \left(x \ln x \Big|_{0,1}^1 - \int_{0,1}^1 dx \right) + \right. \\ &+ \left. \left(x \ln x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} dx \right) \right] = \frac{1}{\ln 10} [-(-0,1 \ln 0,1 - (1 - 0,1)) + (10 \ln 10 - (10 - 1))] = \\ &= \frac{1}{\ln 10} [-(0,1 \ln 10 - 0,9) + (10 \ln 10 - 9)] = \frac{1}{\ln 10} [9,9 \ln 10 - 8,1] \approx 6,38 \end{aligned}$$

2. (№Д2400.2) Знайти площу фігури, що обмежена кривими $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$).

Дану фігуру D зображено на рис. 3.5. Її площу можна обчислювати двома способами. Перший спосіб цікавий з методичного погляду і він полягає в необхідності розбиття області на дві частини віссю ординат. Ліва з цих частин є криволінійною трапецією, що обмежена віссю абсцис, графіком функції $y = (x+1)^2$ і вертикальними прямими $x = -1$ і $x = 0$. Права частина обмежена знизу гілкою синусоїди, що виражається через обернену тригонометричну функцію за формулою $y = \frac{1}{\pi} \arcsin x$, а

зверху іншою гілкою - $y = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin x$, а також вертикальними прямими $x = 0$ і $x = 1$. Площа області D буде дорівнювати сумі площ двох утворених частин, тому

$$S = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin x \right) - \frac{1}{\pi} \arcsin x \right] dx.$$

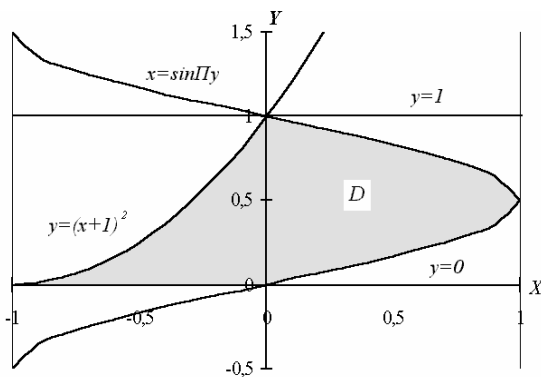


Рис. 3.5.

Перший інтеграл обчислюється, як інтеграл від степеневої функції, а другий - частинами. Не будемо зупинятися на його обчисленні і запропонуємо це зацікавленому читачеві.

Наведемо більш простий другий спосіб. Оскільки ця фігура зліва обмежена гілкою (правую) параболи, справа - синусоїдою, а також горизонтальними прямими $y = 0$ і $y = 1$, то

її площу можна обчислити також за формулою $S = \int_c^d (x_1(y) - x_2(y)) dy$, де $c = 0$, $d = 1$, $x_1(y) = \sin \pi y$, рівняння правої гілки параболи, в якому x виражене через y , утворює рівняння кривої $x_2(y)$. Якщо $y = (x+1)^2$, то звідси $x = \pm \sqrt{y} - 1$. Знак „+” дає праву гілку параболи, а „-” - ліву, тому $x_2(y) = \sqrt{y} - 1$. Таким чином,

$$S = \int_0^1 (\sin \pi y - \sqrt{y} + 1) dy = \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi y - \frac{y^{1/2+1}}{1/2+1} + y \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0,97$$

Для спрощення студентові задачі з виконання типових завдань на рис. 3.7-3.9 наведено графіки деяких функцій, що задані параметрично.

3. (№Д2414) Обчислимо площу петлі, що зображена на рис. 3.9:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}.$$

Щоб дізнатися, яким значенням параметра t відповідає петля, потрібно знайти точку (x^*, y^*) самоперетину графіку цієї функції і два

значення t_1 і t_2 параметру t , що їй відповідають, тобто

$$\begin{cases} x^* = x(t_1) = x(t_2) \\ y^* = y(t_1) = y(t_2) \end{cases}.$$

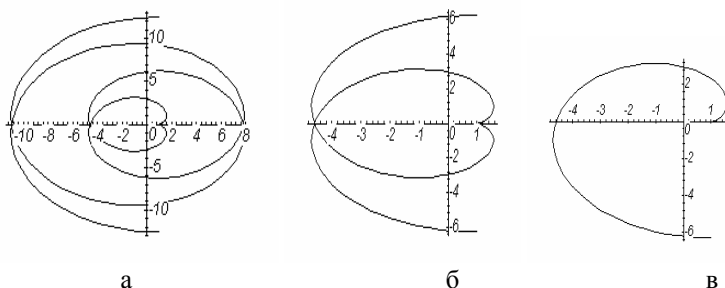


Рис. 3.6. Графік розгортки круга $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ при

а) $-4\pi \leq t \leq 4\pi$; б) $-2\pi \leq t \leq 2\pi$, в) $0 \leq t \leq 2\pi$

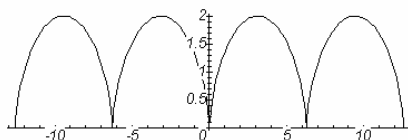


Рис. 3.7. Графік циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ при $-4\pi \leq t \leq 4\pi$

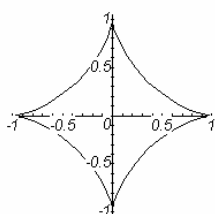


Рис. 3.8. Графік астроїди

$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases} \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi$$

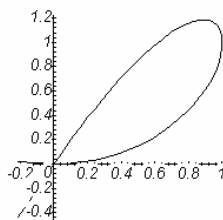


Рис. 3.9. Графік функції

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases} \text{ при } 0 \leq t \leq 2$$

У даному випадку це точка $(0,0)$ і їй відповідають два значення параметру $t_1=0$ і $t_2=2$. Коли значення параметру збільшується від 0 до 2, петля обходить область, яку обмежує, проти руху стрілки годинника, тому

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2t - t^2)' dt = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t) dt = -\int_0^2 (4t^2 - 6t^3 + 2t^4) dt =$$

$$= - \left(\frac{4t^3}{3} - \frac{6t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} \right) \Big|_0^2 = - \left(\frac{32}{3} - 24 + \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{15}.$$

4. (№Д2429) Зводячи рівняння до параметричного виду, знайти площу фігури, що обмежена кривою $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Треба увести таку тригонометричну параметризацію, яка після підстановки у ліву частину виділяє в ній тригонометричну одиницю. Такою

параметризацією буде $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$. При зростанні параметра t від 0 до

2π крива робить повний обхід проти руху стрілки годинника і замикається в точці $(a, 0)$. Ця крива називається астроїдою; при $a = 1$ її графік зображено на рис. 3.8. Обчислимо її площу

$$S = - \int_0^{2\pi} a \sin^3 t (a \cos^3 t)' dt = 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t dt.$$

Перший спосіб обчислення інтегралу. Отриманий інтеграл має суму показників степенем обох тригонометричних функцій парну, тому його можна обчислити з використанням формули зниження степеня і формули синуса подвійного кута:

$$\begin{aligned} \sin^4 t \cos^2 t &= (\sin^2 t) (\sin^2 t \cos^2 t) = \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2t = \\ &= \frac{1}{8} (\sin^2 2t - \sin^2 2t \cos 2t) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \sin^2 2t \cos 2t \right). \end{aligned}$$

Звідки одержимо

$$\begin{aligned} S &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \sin^2 2t \cos 2t \right) dt = \frac{3a^2}{8} \left(\left[\frac{t}{2} - \frac{\cos 4t}{8} \right] \Big|_0^{2\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t d(\sin 2t) \right) = \frac{3a^2}{8} \left(\pi - \frac{\sin^3 2t}{2 \cdot 2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

Другий спосіб обчислення інтегралу. Для застосування формули (2.1) зауважимо, що в силу симетрії даної функції відносно прямих

$$y = \frac{\pi n}{2} \quad (n \in Z) \quad \text{отримаємо} \quad \int_0^{2\pi} \dots = 4 \int_0^{\pi/2} \dots, \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} S &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = 12a^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt - \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt \right) = \\ &= 12a^2 \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) = 6a^2 \pi \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

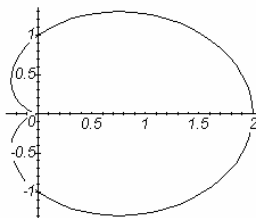


Рис. 3.10. Графік кардіоїди
 $\rho = 1 + \cos \varphi$

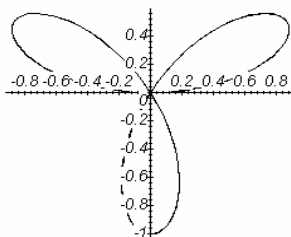
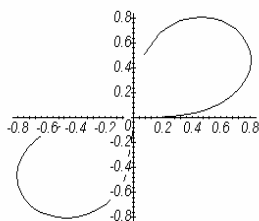
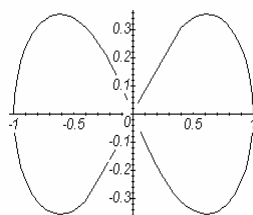


Рис. 3.11. Графік трилисника
 $\rho = \sin 3\varphi$



а



б

Рис. 3.12. Графіки лемніска а) $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$, б) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$

Для спрощення студентіві задачі з виконання типових завдань на рис. 3.10 - 3.12 наведено графіки деяких функцій, що задані в полярній системі координат.

5. (№Д2419) Обчислити площу фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

При $a = 1$ графік кардіоїди зображено на рис. 3.10. Графік даної функції обмежує симетричну відносно вісі абсцис фігуру, тому площа частини цієї фігури, що відповідає зміні полярного кута φ від 0 до π , дорівнює половині площі усієї цієї фігури, тобто

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 (\varphi + 2 \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = a^2 \pi + \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

6. (№Д2428) Переходячи до полярних координат, знайти площу кривої $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

Нехай $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, тоді рівняння кривої перепишеться у вигляді

$\rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi$, тобто $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ (при $a = 1$ графік даної лемніскати зображено на рис. 3.12 а). Щоб дізнатися про межі зміни полярного кута φ потрібно розв'язати нерівність $\rho \geq 0$. У даному випадку вона рівносильна нерівності $\sin 2\varphi \geq 0$, розв'язок якої має вигляд

$\varphi \in \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$. Щоб не потрапити на повторний оберт навколо

кривої потрібно взяти $n = 0$ і $n = 1$, тоді $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$. Фігура симетрична відносно початку координат, тому

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \rho^2(\varphi) d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^2.$$

3.1.2. Обчислення довжин плоских дуг

Якщо функція задана явно $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ і має неперервну на $[a, b]$ похідну, то довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ і кожна з координатних функцій має неперервні на $[\alpha, \beta]$ похідну, то довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Якщо функція задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ і має неперервну на $[\alpha, \beta]$ похідну, то довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

1. (№Д2434) Знайти довжину дуги кривої $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

$$l = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1 + e^{2x}} \\ x = \frac{1}{2} \ln(t^2 - 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dx = \frac{2tdt}{2(t^2 - 1)} \\ \frac{x}{t} \Big|_{\frac{0}{\sqrt{2}}} \end{array} \right| \frac{x_0}{\sqrt{1 + e^{2x_0}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{t \cdot t dt}{t-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{(t^2 - t) + (t-1) + 1}{t-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\
&= \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} = \frac{1+e^{2x_0}}{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} + \ln(\sqrt{1+e^{2x_0}} - 1) - \\
&- \left(1 + \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1) \right) = \frac{e^{2x_0}}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} + \ln \frac{\sqrt{1+e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{2} - 1}.
\end{aligned}$$

2. (№Д2440) Обчислити довжину кривої $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Параметризацією астроїди, як ми вже бачили (приклад 4 п. 3.1.1), є

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}.$$

Скористаємось симетрією кривої (рис. 3.9), отримаємо

$$\begin{aligned}
l &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{[a \cos^3 t]^2 + [a \sin^3 t]^2} dt = \\
&= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \\
&= -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a.
\end{aligned}$$

3. (№Д2448) Обчислити довжину лінії $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Скориставшись симетрією даної кардіоїди (рис. 3.10) отримаємо

$$\begin{aligned}
l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{[1 + \cos \varphi]^2 + [-\sin \varphi]^2} d\varphi = \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2(\varphi/2)} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos(\varphi/2) d\varphi = 8a \sin(\varphi/2) \Big|_0^{\pi} = \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

3.1.3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Об'єм кільця, утвореного обертанням навколо вісі Ox фігури $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - неперервні невід'ємні функції, дорівнює

$$V_x = \pi \int_a^b [y_1^2(x) - y_2^2(x)] dx.$$

Об'єм кільця, утвореного обертанням навколо вісі Oy фігури $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$, де $y(x)$ - однозначна неперервна функція, дорівнює

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, до того ж функція $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на $[\alpha, \beta]$ і $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, а функція $y(t)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$, то об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $D = \{a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x^{-1}(t))\}$ навколо вісі Ox , дорівнює

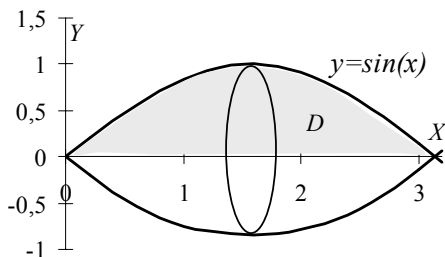


Рис. 2.14. Схема обертання області D навколо вісі абсцис

вісі Ox і схему цього обертання. Об'єм утвореного тіла дорівнює

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\pi} y^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

б) Відповідну криволінійну

трапецію і схему обертання навколо вісі Ox зображено на рис. 3.14, а об'єм утвореного тіла дорівнює

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^{\pi} xy(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2\pi \left(\pi + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = 2\pi^2. \end{aligned}$$

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt.$$

1. (№Д2474) Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнею, утвореною обертанням відрізків наступних ліній $y = \sin x, y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$)

а) навколо вісі Ox , б) навколо вісі Oy .

а) На рис.3.13. зображено відповідну криволінійну трапецію D , що обертається навколо

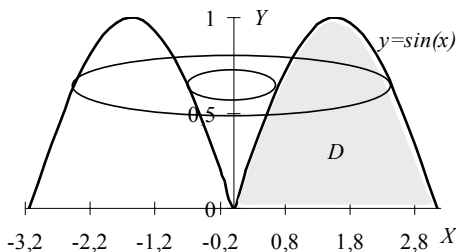


Рис. 2.15. Схема обертання області D навколо вісі ординат

2. (Д2480) Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнею, утвореною обертанням відрізків наступних ліній $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

а) навколо вісі Ox , б) навколо вісі Oy .

- а) При $a = 1$ графік циклоїди зображено на рис. 3.7.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) x'(t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} z = t/2 \\ t = 2z \end{array} \right| \frac{dt}{dz} = \frac{2dz}{\pi} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2\pi \end{array} \right| = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 z dz = 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 z dz \quad (2.1) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} 32\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5!!}{6!!} = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} x(t) y(t) x'(t) dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - 2t \cos t + t \cos^2 t - \sin t + 2 \sin t \cos t - \sin t \cos^2 t) dt = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - 2t \cos t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cos 2t - \sin t + \sin 2t - \sin t \cos^2 t) dt = 2\pi a^3 \times \\ &\times \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2} - 2(t \sin t + \cos t) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right) + \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi a^3 \times \frac{3}{2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2} = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

Задача 3.1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням круга $x^2 + (y - 2a)^2 \leq a^2$ навколо вісі Ox , тобто об'єм тора.

3.2. Застосування означеного інтегралу в економіці

Література [4 с. 315-318]. Вище було зазначено економічний зміст означеного інтегралу, як обсяг продукції, що виготовляється, при відомій функції продуктивності праці. Розглянемо інші приклади застосування інтегралу в економіці.

Якщо припустити, що витрати праці лінійно залежать від часу, а витрати капіталу – експоненціально, то, згідно до *функції Кобба-Дугласа*, величина суспільного продукту, виробнича функція, залежить від часу і обчислюється за формулою $g(t) = (\alpha t + \beta) e^{\gamma t}$. Тоді об'єм виробництва продукції за T років складатиме

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt .$$

1. Знайти обсяг продукції, що виготовлено за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $g(t) = (2t + 3)e^{5t}$.

Обчислюємо об'єм продукції за наведеною вище формулою:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^4 (2t + 3)e^{5t} dt = \left| \begin{matrix} u = 2t + 3 & du = 2dt \\ dv = e^{5t} & v = 1/5 e^{5t} \end{matrix} \right| = \frac{1}{5} \left((2t + 3)e^{5t} \Big|_0^4 - \int_0^4 e^{5t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(11e^{20} - 3 - \frac{1}{5} e^{5t} \Big|_0^4 \right) = \frac{1}{5} \left(11e^{20} - 3 - \frac{1}{5} [e^{20} - 1] \right) \approx 1,04 \cdot 10^9 \text{ [ум. од.]} \end{aligned}$$

Чисті інвестиції $I(t)$, як похідна за часом t від капіталу $K(t)$, обчислюються за такою формулою $I(t) = \frac{dK}{dt}(t)$. Приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2 визначається формулою

$$\Delta K = K(t_1) - K(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt .$$

2. Чисті інвестиції задані функцією $f(t) = 1500(3t + 1)^3 + 150(3t + 1)$. Визначити а) приріст капіталу за $t = 15$ років; б) через скільки років приріст капіталу становитиме $Q = 250000$ грош. од.?

а) Згідно до останньої формули

$$\begin{aligned} \Delta K &= \int_0^{15} I(t) dt = \int_0^{15} (1500(3t + 1)^3 + 150(3t + 1)) dt = \\ &= \left(1500 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3t + 1)^4}{4} + 150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3t + 1)^2}{2} \right) \Big|_0^{15} = (125 \cdot (3t + 1)^4 + 25 \cdot (3t + 1)^2) \Big|_0^{15} \approx \\ &\approx 8,2 \cdot 10^9 \text{ [грош. од.]} \end{aligned}$$

б) за умовою потрібно знайти таке значення T , при якому

$$Q = \Delta K = K(0) - K(T) = \int_0^T I(t) dt , \text{ тобто}$$

$$250000 = \int_0^T (1500(3t + 1)^3 + 150(3t + 1)) dt .$$

Підставляючи знайдене раніше значення неозначеного інтегралу, отримаємо

$$250000 = \left(125 \cdot (3t+1)^4 + 25 \cdot (3t+1)^2 \right) \Big|_0^T,$$

$$250000 = 125 \cdot (3T+1)^4 + 25 \cdot (3T+1)^2 - 150,$$

$$125 \cdot (3T+1)^4 + 25 \cdot (3T+1)^2 - 250150 = 0.$$

Зробимо заміну $z = (3T+1)^2$. Рівняння $125 \cdot z^2 + 25 \cdot z - 250150 = 0$ має корені $z_1 \approx 44,6$, $z_2 \approx -44,8$. Оскільки змінна z додатна, то другий корінь – зайвий. За значенням $z_1 \approx 44,6$ знаходимо T :

$$T = \frac{\sqrt{z} - 1}{3} \approx \frac{\sqrt{44,6} - 1}{3} \approx 2 \text{ роки.}$$

Визначення початкової суми за значенням суми, що отримана після t років, при річній відсотковій ставці p називається дисконтуванням. Задачі такого роду зустрічаються за необхідності визначення ефективності капіталовкладень.

Нехай K_t - сума, що отримана після t років, K - початкова сума, що підлягає дисконтуванню. Якщо відсотки прості, то $K_t = K(1+it)$, де $i = p/100$ - питома відсоткова ставка. Тоді $K = K_t / (1+it)$. У випадку складних відсотків $K_t = K(1+it)^t$, тому $K = K_t / (1+it)^t$.

Нехай прибуток, що поступає щорічно, змінюється в часі і описується функцією $f(t)$ і при питній відсотковій ставці i відсоток нараховується неперервно. В цьому випадку сума K , що підлягає дисконтуванню, за час T обчислюється за формулою

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt.$$

3. Визначити суму дисконтування за три роки при відсотковій ставці 8%, якщо початкові фінансові вкладення складають 10 млн. грош. од. і планується щорічний приріст капіталу 1 млн. грош. од.

За умови задачі капіталовкладення задаються функцією $f(t) = 10 + 1 \cdot t$ [млн. грош. од.]. Тоді за формулою дисконтування $K = \int_0^3 (10+t) e^{-0,08t} dt$,

звідки

$$K = \int_0^3 (10+t) e^{-0,08t} dt = -12,5 \left((10+t) e^{-0,08t} + 12,5 e^{-0,08t} \right) \Big|_0^3 \approx 30,5 \text{ [млн. грош. од.]}$$

од.].

Отримане означає, що для одержання однакої суми, що нараховується, через три роки щорічних капіталовкладень від 10 до 13 млн. грош.

од. рівносильне одночасним початковим вкладенням 30,5 млн. грош. од. при тій же відсотковій ставці, що нараховується неперервно.

Нехай відома функція $t = t(x)$, що описує зміну витрат часу t на виготовлення виробу в залежності від ступеня освоєння виробництва, де x - порядковий номер виробу в партії. Тоді *середній час* t_{cp} , що витрачається на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів обчислюється за теоремою про середнє

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx.$$

Що стосується функції зміни витрат часу $t = t(x)$ на виготовлення виробів, то частіше за все вона має вигляд $t = ax^{-b}$, де a - витрати часу на перший виріб, b - показник виробничого процесу.

Задача 3.1. Знайти середній час, що витрачається на освоєння виробів в період освоєння $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ виробів, покладаючи $a = 600$ (хвилин), $b = 0,5$.

Досліджуючи криву Лоренца - залежність відсотку прибутків від відсотку населення, що його має, (крива OBA , рис. 3.15) - ми можемо оцінити ступінь нерівності в розподілі прибутків населення. При рівномірному розподілі прибутків крива Лоренца вироджується в пряму - бісектрису OA , тому площа фігури OBA між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині), характеризує ступінь нерівності у розподілі доходів населення.

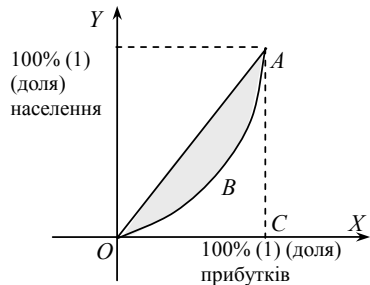


Рис. 3.15.

4. По даним досліджень у розподілі доходів в одній країні крива Лоренца (рис. 3.15) може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x - доля населення, y - доля прибутків населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Оскільки $S_{\Delta OAC} = 1/2$, то з рисунку випливає, що коефіцієнт Джині може бути обчислено за формулою $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}$.

Так як

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx = \left(x - \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

$$\text{то } k = 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Достатньо високе значення k показує на суттєво нерівномірний розподіл прибутків серед населення даної країни.

4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласний інтеграл першого роду. Якщо функція $f(x)$ інтегрована за Риманом на будь-якому відрізку $[a, A]$, то за визначенням покладають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Вираз в лівій частині останнього співвідношення називають *невласним інтегралом першого роду*.

Невласний інтеграл другого роду. Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі точки b і інтегрована за Риманом на будь-якому відрізку $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), то за визначенням приймають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Вираз в лівій частині останнього співвідношення називають *невласним інтегралом другого роду*.

Якщо границя існує, то відповідний інтеграл називається збіжним, у протилежному випадку – розбіжним. Для розбіжного інтегралу застосовується те ж позначення, що і для розбіжного (ті, що надані вище).

Ознака порівняння для інтегралів від невід’ємних функцій. Якщо $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$, то із збіжності інтегралу (першого чи другого роду) від функції $g(x)$ випливає збіжність інтегралу від функції $f(x)$, а із розбіжності інтегралу від функції $f(x)$ випливає розбіжність інтегралу від функції $g(x)$.

Ознака порівняння для інтегралів від невід’ємних функцій $f(x)$ в граничній формі.

а) Якщо при $x \rightarrow +\infty$ має місце співвідношення $f(x) \sim \frac{1}{x^p}$, то невла-

сний інтеграл першого роду $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ при $p > 1$ збігається, а при $p \leq 1$ - розбігається.

б) Якщо при $x \rightarrow b-0$ має місце співвідношення $f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^p}$, то

невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)dx$ при $p < 1$ збігається, а при $p \geq 1$ - розбігається.

Геометричний зміст невід'ємного інтегралу першого роду.

Нехай дана невід'ємна, неперервна на проміні $[a; +\infty)$ функція $y = f(x)$. Для кожного $A > a$ числове значення площі інтегралу $\int_a^A f(x)dx$

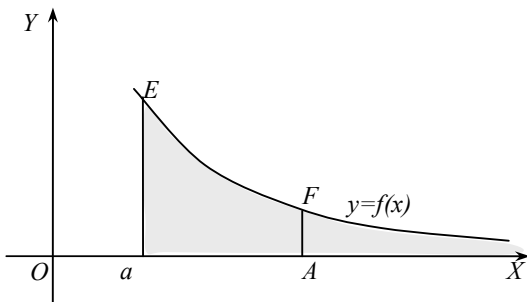


Рис. 4.1.

дає площу криволінійної трапеції $aEFA$ (рис. 4.1).

Якщо уявно пересувати відрізок FA вправо, то ми отримаємо в якості значення невід'ємного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ площу криволінійного нескінченного трикутника $aE\infty$. Аналогічно для невід'ємного інтегралу другого роду.

Зв'язок між невід'ємними інтегралами першого та другого роду.

Якщо інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є невід'ємним інтегралом другого роду з особливою точкою b , то після заміни $t = \frac{1}{b-x}$ він перетворюється на невід'ємний інтеграл

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt \text{ першого роду.}$$

1. (№Д2338) Обчислити інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.ю

Знаменник підінтегральної функції на множині інтегрування не об'єднується в нуль, тому скінченних особливих точок ця функція не має. Обчислення проведемо згідно визначенню невід'ємного інтегралу першого роду:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1/2)^2 - (3/2)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x+1/2-3/2}{x+1/2+3/2} \right| \Bigg|_2^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{A-1}{A+2} \right| - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} (\ln 1 + \ln 4) = \frac{\ln 4}{3}.$$

2. (№Д2337) Обчислити інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Знаменник підінтегральної функції обертається в нуль у двох точках -1 і 1 , тому вони особливі і даний інтеграл потрібно перед початком розрахунків розкласти в суму двох невласних інтегралів другого роду і подальші обчислення робити за визначенням:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^0 + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (-\arcsin(-1+\varepsilon_1)) + \\ &= \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \arcsin(1-\varepsilon_2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

3. (№Д2359) Дослідити інтеграл на збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+1}}$.

Нехай $x \rightarrow +\infty$, тоді $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^3+1}} \sim \frac{1}{x\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x^2}$. В ознаці порівняння в граничній формі $p = 2 > 1$, тому даний інтеграл збігається.

4. (№Д2364) Дослідити інтеграл на збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg ax}{x^n} dx$.

Цей інтеграл містить дві особливості: точку 0 і нескінченність, тому розбиваємо його на суму невласних інтегралів першого і другого роду:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg ax}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\arctg ax}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctg ax}{x^n} dx.$$

Нехай $x \rightarrow +0$, тоді, скориставшись наслідком з першої істотної граници отримаємо $\frac{\arctg ax}{x^n} \sim \frac{ax}{x^n} \sim \frac{a}{x^{n-1}}$. З ознаки порівняння в граничній формі отримаємо, що перший із інтегралів суми (він є невласним інтегралом другого роду) збігається, якщо $n-1 < 1$, тобто $n < 2$.

Нехай $x \rightarrow +\infty$, тоді з нерівності $\frac{\arctg ax}{x^n} \leq \frac{\pi/2}{x^n}$ і ознаки порівняння отримаємо, що із збіжності інтегралу від функції, що стоїть в цій нерівності справа буде випливати збіжність інтегралу від функції, що стоїть

зліва. Оскільки невласний інтеграл першого роду $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ збігається за умови $n > 1$, то за тією ж умовою буде збігатися і другий інтеграл суми.

Для збіжності даного інтегралу потрібно, щоб обидва інтеграли суми збігалися одночасно, тобто повинна задовольнятися система нерівностей

$$\begin{cases} n > 1 \\ n < 2 \end{cases}. \text{ Її розв'язком є подвійна нерівність } 1 < n < 2.$$

5. (№Д2370.1) Дослідити інтеграл на збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Підінтегральна функція на множині інтегрування містить дві особливості: 0 і $+\infty$, тому даний інтеграл представляємо у вигляді суми

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$$

Нехай $x \rightarrow +0$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ і в ознаці порівняння

(для невласного інтегралу другого роду) $p = 1/2 < 1$, тому перший інтеграл суми збігається.

Нехай $x \rightarrow +\infty$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ і в ознаці порівняння (для невласного інтегралу першого роду) $p = 3/2 > 1$, тому другий інтеграл суми збігається.

Висновок: даний інтеграл збігається.

6. Дослідити інтеграл на збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x^3}$.

Дві особливості: 0 і $+\infty$, тому $\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$. Нехай $x \rightarrow +0$, тоді використовуючи наслідок з другої істотної границі отримаємо: $\frac{\ln(1+x)}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. В ознаці порівняння для невласного інтегралу другого роду $p = 2 \geq 1$, тому перший інтеграл суми розбігається. Це означає, що незалежно від збіжності чи розбіжності другого інтегралу суми даний інтеграл є розбіжним.

Головне значення в розумінні Коші. Якщо функція $f(x)$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують інтеграли Римана $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$, то під

головним значенням в розумінні Коші (v.p.) розуміють число

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Аналогічно

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Розглянемо один наглядний приклад. Інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ як невластий

інтеграл розбіжний, оскільки розбіжним є кожен із складових його інтегралів $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ і $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (ступінь знаменника 1). При цьому у розумінні головного значення Коші він існує і дорівнює нулю, а саме:

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |x| \Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{1-\varepsilon}{-1+\varepsilon} \right| = 0.$$

Задача 4.1. Довести, що $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

Розглянемо задачу на **застосування невластних інтегралів в економіці** (література [7, с. 270]). Припустимо, що грошовий потік не припиняється ніколи, наприклад, в ситуації експлуатації земельної ділянки. Якщо r - неперервна відсоткова ставка, а $R(t)$ - відповідна рента, то знаходження вартості дисконтування земельної ділянки приводить до формули, що включає невластний інтеграл

$$\Pi = \int_0^{\infty} R(t) e^{-rt} dt.$$

Нехай $R(t) = 5e^{-0,7t}$ (млн. грош. од./рік) – рента, яку отримують від експлуатації земельної ділянки, $r=10\%$ - відсоткова ставка. Визначимо вартість його дисконтування за останньою формулою:

$$\Pi = \int_0^{\infty} 5e^{-0,7t} \cdot e^{-0,1t} dt = 5 \int_0^{\infty} e^{-0,8t} dt = 5 \cdot \frac{e^{-0,8t}}{-0,8} \Big|_0^{\infty} \approx 6,25 \text{ (млн. грош. од.)}$$

З функції ренти можна дізнатися початкову вартість ділянки: $R(0) = 5$ млн. грош. од. і це дає можливість порівняння вартості ділянки з вартістю дисконтування.

5. УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛУ

5.1. Визначення подвійного інтегралу та його властивості

Подвійний інтеграл на прямокутнику. Прямокутник $R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ розбивається прямими, паралельними осям координат $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_p = d$ на $n \cdot p$ часткових прямокутника $R_{i,j} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j]$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$. Вказане розбиття прямокутника позначимо через T . На кожному з часткових $R_{i,j}$ прямокутників оберемо довільну точку (ξ_i, η_j) . Покладемо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$; $\Delta R_{i,j} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$. Довжину діагоналі прямокутника $R_{i,j}$, що дорівнює $d_{i,j} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$ назовемо діаметром прямокутника, а найбільший із діаметрів усіх часткових прямокутників $R_{i,j}$ називається діаметром розбиття T прямокутника R і позначається Δ , тобто $\Delta = \max_{i,j} d_{i,j}$.

Число $\sigma = \sigma(f, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f(\xi_i, \eta_j) \Delta R_{i,j}$ називається *інтегральною сумою* функції $f(x, y)$, що відповідає даному розбиттю T прямокутника R і даному вибору проміжних точок (ξ_i, η_j) на частинних прямокутниках розбиття T .

Якщо існує скінченна границя $I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma(f, T)$, що не залежить ні від вибору розбиття T прямокутника R , ні від вибору проміжних точок (ξ_i, η_j) на частинних прямокутниках розбиття T , то функція $f(x, y)$ називається інтегрованою на прямокутнику R , а ця границя називається подвійним інтегралом і позначається $I = \iint_R f(x, y) dx dy$.

Подвійний інтеграл по довільній області. Нехай D - обмежена замкнена множина, що утворює квадровану фігуру. Позначимо через R будь-який прямокутник, що містить в собі область D . Визначимо на цьому прямокутнику функцію $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$. Функцію $f(x, y)$ називають інтегрованою в області D , якщо функція $F(x, y)$ інтегрована в прямо-

кутнику R . Число $I = \iint_R F(x, y) dx dy$ назвемо подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначимо символом $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Мають місце багато спільних властивостей подвійного інтеграла функції двох змінних і означеного інтеграла функції однієї змінної:

- 1) необхідна умова інтегрованості функції: будь-яка інтегрована функція є обмеженою;
- 2) властивість лінійності інтегралу;
- 3) властивість адитивності, яка дещо відрізняється від такої властивості одновимірних інтегралів, а саме: інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів по квадратних областях, на які розбито область D ;
- 4) добуток і частка інтегрованих на D функцій є інтегрованою на D функцією (для частки в припущенні про те, що для функції знаменника виконано: $\inf_{(x,y) \in D} |g(x, y)| > 0$);
- 5) якщо дана функція $f(x, y)$ інтегрована на D , то функція $|f(x, y)|$ інтегрована

D і має місце нерівність $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$;

- 6) якщо $f(x, y)$ і $g(x, y)$ інтегровані на D і $f(x, y) \leq g(x, y)$ на D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy;$$

зокрема, якщо $f(x, y) \geq 0$ на D , то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$;

- 7) має місце теорема про середнє: якщо $f(x, y)$ неперервна на D , то існує така точка $(\xi, \eta) \in D$, що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S_D.$$

5.2. Обчислення подвійних інтегралів

Якщо $D = \{a \leq x \leq b; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ (рис. 5.1), де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на $[a, b]$ функції, а $f(x, y)$ - інтегрована на D , тоді подвійний інтеграл виражається через повторний співвідношення:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy$$

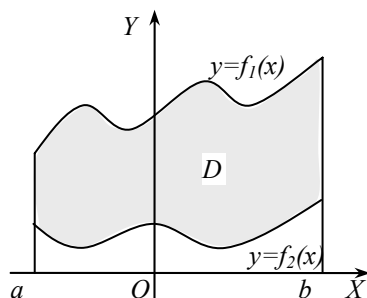


Рис. 5.1.

При переході до полярних координат: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$, при якому область

D_{xy} переходить в область $D_{\rho\varphi}$, має місце формула

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (5.1)$$

1. Представити подвійний інтеграл

$\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді

повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями

$$D: y \leq 0, y + x^2 = 0, x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Рисунок області зображено на рис. 5.2. Спочатку знайдемо точку перетину даних кривих:

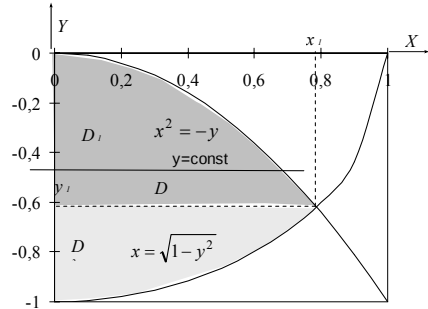


Рис. 5.2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + x^2 = 0 \\ x = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{-y} \\ y \leq 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ x = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y} \\ -1 \leq y \leq 0 \\ \sqrt{-y} = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y} \\ -1 \leq y \leq 0 \\ \sqrt{-y} = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y} \\ -1 \leq y \leq 0 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y} \\ -1 \leq y \leq 0 \\ y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 0,79 \\ y_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62 \end{cases}. \end{aligned}$$

Представимо подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за y . В цьому випадку треба вказати незмінні межі інтегрування за y , а межі інтегрування за x будуть функціями, що залежать від y . Для цього потрібно

- 1) в рівняннях границі виразити x через y : $x = \sqrt{-y}, x = \sqrt{1 - y^2}$, при цьому необхідно врахувати, що в рівнянні першої кривої перед коренем стоїть знак „+”, тому що у даному випадку область обмежена правою гілкою параболі;
- 2) провести прямі, паралельні вісі абсцис (тобто прямі $y = \text{const}$) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме:

- якщо така пряма проходить вище прямої $y = y_1$, то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву $x = \sqrt{-y}$,
- якщо така пряма проходить нижче прямої $y = y_1$, то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву $x = \sqrt{1-y^2}$;
- отримане означає, що дану область потрібно розбити на дві частини прямою $y = y_1$;

3) першій з отриманих областей D_1 відповідають такі зміни y і x :

$$y_1 \leq y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{-y},$$

4) другій з отриманих областей D_2 відповідають такі зміни y і x :

$$1 \leq y \leq y_1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Розставляємо межі інтегрування з зовнішнім інтегруванням за y :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx + \int_1^{y_1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

Представимо подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x . В цьому випадку треба вказати незмінні межі інтегрування за x , а межі інтегрування за y будуть функціями, що залежать від x . Для цього потрібно

- 1) в рівняннях границі виразити y через x : $y = -x^2$, $y = -\sqrt{1-x^2}$, при цьому необхідно врахувати, що в рівнянні другої кривої перед коренем стоїть знак „-“, тому що у даному випадку область обмежена нижньою частиною кола $x^2 + y^2 = 1$,
- 2) провести прямі, паралельні вісі ординат (тобто прямі $x = const$) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме: незалежно від розташування такої прямої вона спочатку перетинає криву $y = -x^2$, а потім криву $y = -\sqrt{1-x^2}$, тому у даному випадку розбивати область на частини не потрібно,
- 3) області D відповідають такі зміни x і y :

$$0 \leq x \leq x_1, \quad -x^2 \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}.$$

Розставляємо межі інтегрування з зовнішнім інтегруванням за x :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{x_1} dx \int_{-x^2}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy, D: y = (x+1)^2, x = \sin \pi y, 0 \leq y \leq 1$$

Рисунок області інтегрування зображено на рис. 3.5. У даному випадку зручніше ставити зовнішню межу інтегрування – y , щоб не розбивати область інтегрування на частини.

Виражаємо x через y в рівняннях кривих, отримаємо:
 $x = \sqrt{y} - 1, x = \sin \pi y$. Області D відповідають такі зміни y і x : $0 \leq y \leq 1$,
 $\sqrt{y} - 1 \leq x \leq \sin \pi y$, тому

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} (x+y) dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} = \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{\sin^2 \pi y}{2} + y \sin \pi y - \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{2} - y(\sqrt{y}-1) \right) = \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\pi y + y \sin \pi y - \frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{1}{2} - y\sqrt{y} + y \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{4} y - \frac{1}{8\pi} \sin 2\pi y + \frac{y^2}{4} + \frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{2\sqrt{y^5}}{5} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 y \sin \pi y dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = y \quad du = dy \\ dv = \sin \pi y dy \quad v = -\frac{1}{\pi} \cos \pi y \end{array} \right| = \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi} \left(y \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y dy \right) = \\ &= \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi} \left(-1 - \frac{1}{\pi} \sin \pi y \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{15} + \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

3. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

Рисунок області інтегрування зображено на рис. 5.3. Уведемо полярні координати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \text{ тоді } x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ а рівняння кола}$$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, тобто $x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0)$ в поля-

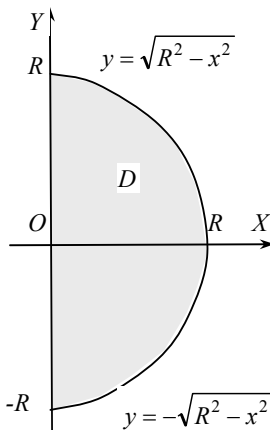


Рис. 5.3.

рних координатах переписуться, як $\rho = R$. Тому область D перейде в область $D_{\rho\varphi}$, якій відповідають зміни полярних координат: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq R$. Тоді згідно до формули (5.1) отримаємо

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\rho \cos^2 \varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{d\rho}{\cos^2 \varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \operatorname{tg} \rho \Big|_0^R = \operatorname{tg} R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi \operatorname{tg} R.$$

5.3. Геометричний зміст подвійного інтегралу

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на D , то подвійний інтеграл представляє собою об'єм прямого циліндричного тіла, що побудовано на області D , як на основі і обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$ (див. рис. 5.4).

Якщо $f(x, y) = 1$ для усіх $(x, y) \in D$, то

$\iint_D dx dy$ чисельно дорівнює площі області

D , тобто $\iint_D dx dy = S_D$.

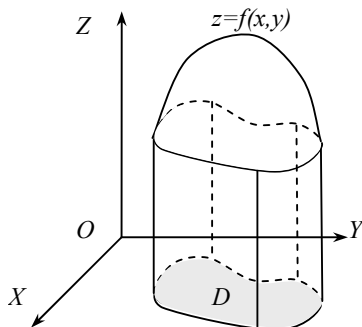


Рис. 5.4.

- Обчислити площі плоских фігур, що обмежені лініями

а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$,

б) $(x^2 + y^2)^3 = 2ay^3$.

- Дані дві параболи читачеві пропонується зобразити самостійно. Координати точок перетину цих парабол є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ У даному випадку в якості зовнішньої межі інтегрування простіше обрати } x. \text{ Области } D \text{ відповідають такі зміни } x \text{ і } y: -1 \leq x \leq 2, x^2 - 2x \leq y \leq 4 - x^2, \text{ Вважаючи на геометричний зміст подвійного інтегралу, отримаємо:}$$

$$S = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-2x}^{4-x^2} dy = \int_{-1}^2 dx y \Big|_{x^2-2x}^{4-x^2} = \int_{-1}^2 dx (4 - x^2 - (x^2 - 2x)) = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = 9.$$

б) Уведемо полярні координати $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$ тоді $x^2 + y^2 = \rho^2$, а рівняння

кривої, що обмежує область придбає вигляд: $\rho^6 = 2a\rho^3 \sin^3 \varphi$, тобто $\rho = \sqrt[3]{2a} \sin \varphi$. Межі зміни полярного кута знайдемо із нерівності $\rho \geq 0$, тобто $\sin \varphi \geq 0$. На відрізку $[0, 2\pi]$ ця нерівність має розв'язок $0 \leq \varphi \leq \pi$, тому

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{2a} \sin \varphi} \rho d\rho = \int_0^\pi d\varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt[3]{2a} \sin \varphi} = \int_0^\pi d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{2} \sin^2 \varphi = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{4} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi \sqrt[3]{4a^2}}{4}. \end{aligned}$$

2. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

а) $y = 2x, x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,

б) $z^2 = 4 - x, x^2 + y^2 = 4x, z \geq 0$.

а) В першому октанті площина $x + y + z = 2$ відсікає піраміду, а на площині xOy - трикутник OAB прямою $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ z = 0 \end{cases}$, тобто $y = 2 - x$.

Площина $y = 2x$ ділить піраміду на дві піраміди, а трикутник OAB - на два трикутники OKB і OKA , які є проєкціями створених пірамід. Оскільки не зазначено, об'єм якої саме піраміди потрібно знайти, знайдемо об'єми обох.

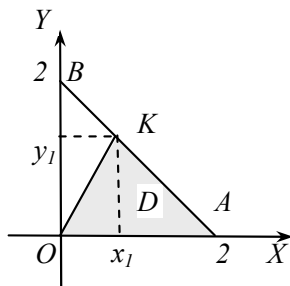


Рис. 5.5.

Знайдемо координати точки K , що є точкою перетину прямих $y = 2x$ і $y = 2 - x$. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2 - x \end{cases}, \text{ звідки отримаємо } \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ y_1 = 4/3 \end{cases}.$$

Виходячи з геометричного змісту подвійного інтегралу, знайдемо об'єм піраміди з основою OKA : $V_1 = \iint_D (2 - x - y) dx dy$. Даний інтеграл про-

стіше обчислити, обравши зовнішньою межею інтегрування y . В рівняннях прямих x виразимо через y , одержимо: $x = y/2, x = 2 - y$, а інтеграл придбає вигляд:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \iint_D (2-x-y) dx dy = \int_0^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} (2-x-y) dx = \int_0^{4/3} dy \left(2x - \frac{x^2}{2} - yx \right) \Big|_{y/2}^{2-y} = \\
 &= \int_0^{4/3} dy \left[2(2-y) - \frac{(2-y)^2}{2} - y(2-y) - \left(y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) \right] = \int_0^{4/3} \left(2 - 3y + \frac{9}{8} y^2 \right) dy = \\
 &= \left(2y - \frac{3}{2} y^2 + \frac{3}{8} y^3 \right) \Big|_0^{4/3} = \frac{8}{9}.
 \end{aligned}$$

Об'єм піраміди з основою OKB можна знайти за допомогою подвійного інтегралу, а можна і з розуміння аналітичної геометрії. Об'єм усієї піраміди, що відсікається площиною $x + y + z = 2$ $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \right)$ дорівнює

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}, \text{ тому шуканий об'єм дорівнює } V_2 = V - V_1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}.$$

- б) Поверхня $z^2 = 4 - x$ є циліндричною з твірною, що паралельна вісі Oy . Вона відсікає на площині xOy півплощину $x \leq 4$. Рівняння поверхні $x^2 + y^2 = 4x$ можна переписати, виділивши повний квадрат, у вигляді $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Звідси зрозуміло, що ця поверхня є круговим циліндром. В проекції на xOy цей циліндр утворює коло з центром в точці $(2; 0)$ радіусу 2, яке цілком міститься в середині півплощини $x \leq 4$. Тому проекцією даного тіла на площину xOy є круг, який обмежує зазначене коло (рис. 5.6).

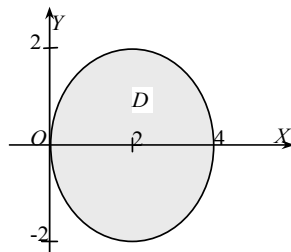


Рис. 5.6.

Об'єм даного тіла обчислюється за формулою $V = \iint_D \sqrt{4-x} dx dy$. В рі-

внянні кола виражаємо y через x : $y = \pm \sqrt{4x-x^2}$, де знак „+” відповідає верхній частині кола, а „-” – нижній. Область D характеризується такою зміною координат: $0 \leq x \leq 4$, $-\sqrt{4x-x^2} \leq y \leq \sqrt{4x-x^2}$, тому одержуємо:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{4-x} dy = \int_0^4 dx \left(y \sqrt{4-x} \right) \Big|_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} = \int_0^4 dx 2\sqrt{4x-x^2} \sqrt{4-x} = \\
 &= 2 \int_0^4 \sqrt{x} (4-x) dx = 2 \left(4 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{256}{15}.
 \end{aligned}$$

ТИПОВЕ ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант 1.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

в) $\int \frac{5^x}{4+5^{2x}} dx$;

г) $\int \frac{\cos 3x}{\sin^4 3x} dx$;

д) $\int \frac{5x}{4x^2 + 3} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int x \sin 2x dx$;

б) $\int \ln^2 x dx$;

в) $\int \arctg x dx$;

г) $\int e^x \sin x dx$;

д) $\int x^4 \ln x dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{4-x^2}{(x+1)(x-1)} dx$;

б) $\int \frac{3x+2}{(x+2)^2(x-1)} dx$;

в) $\int \frac{x+5}{(x^2-6x+11)x} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$;

б) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x} + \sqrt{1-3x}} dx$;

2. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^4} dx$;

б) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^4} dx$;

в) $\int_1^2 \arctg \sqrt{2x-1} dx$.

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y = ch x$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$;

б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$;
 $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$

1.2. методом підстановки

а) $\int x \sin(2x^2 + 1) dx$;

б) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx$;

в) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$;

г) $\int x(5x^2 - 3)^7 dx$;

д) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

б) $\int \frac{1}{3+5\cos x} dx$;

в) $\int \sin^4 x dx$;

г) $\int \cos 4x \cos 7x dx$;

д) $\int tg^5 x dx$;

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{3x+1}{4x^2+4x+5} dx$;

б) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$;

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$;

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$;

в) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

а) $y = 4 \sin x$, $y = 2 \sin x$;
 $0 \leq x \leq \pi$ (ОХ)

в) $\rho = 2 + \cos \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi$.

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy, D: y = x^2, x = y^2$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$$

$$6) \begin{cases} x = 3 \cos^3 t; \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (OX).$$

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{у вигляді повторного}$$

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: y = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = x^2 + y^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 2.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int (3x^2 - 6x + 2)^9 (6x - 6) dx$

б) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$; в) $\int \frac{4x + 9}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$;

г) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx$; д) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int x \cos 3x dx$; б) $\int x^5 \ln x dx$;

в) $\int e^{3x} \cos 2x dx$; г) $\int \arcsin 3x dx$;

д) $\int x e^{-x} dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{5}{x^2(x+1)} dx$; б) $\int \frac{4-x}{(2x-1)(x^2+1)} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + x + 1}{-x^2 - 2x + 3} dx$;

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx$; б) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$; г) $\int x(2x+5)^9 dx$;

д) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

б) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

г) $\int \sin 3x \cos 4x dx$; д) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$;

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+8} dx$;

б) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{2x-1}{x\sqrt{2-x}}dx$; б) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$;

2. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3\sin x + 2}dx$; б) $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx$;

в) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (2x+5)\sin 2x dx$.

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y = \ln \sin x$ від $x_1 = \pi/3$ до $x_2 = \pi/2$; б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$

в) $\rho = 1 - \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

6. Обчислити наступний невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^1 x^2 \ln x dx$

8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D y^2 x dx dy, D: y = x^2, y = 2x$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy$

Варіант 3.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а); $\int (5x^2 - 3x + 8)^7 (10x - 3) dx$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$;

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), x = 0, x = a, y = 0$ б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, y = 0 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

в) $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

а) $y = 1/e^x, x = -3; x = 1; y = 0$ (ОХ);

б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2$ (ОХ).

7. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: 2y = x^2, 5x - 2y - 6 = 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$z = 2 - (x^2 + y^2), x + 2y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\text{б)} \int \frac{3^x}{5+3^{2x}} dx; \quad \text{в)} \int \frac{16x+4}{\sqrt{8x^2+7}} dx;$$

$$\text{г)} \int e^{3\cos x} \sin x dx; \quad \text{д)} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

1.3. методом інтегрування частинами

$$\text{а)} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б)} \int x^4 \ln x dx;$$

$$\text{в)} \int e^{3x} \sin 2x dx; \quad \text{г)} \int \arccos 3x dx;$$

$$\text{д)} \int x^2 e^{-x} dx;$$

1.5. від дробово-раціональних функцій

$$\text{а)} \int \frac{3-x}{(x^2+4x+6)x} dx; \quad \text{б)} \int \frac{x^2+4x}{x+1} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{7+x}{(2x+1)x(x-1)} dx;$$

1.7. від ірраціональних функцій

$$\text{а)} \int \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$\text{а)} \int_0^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{б)} \int_0^3 \sqrt{1+5x} dx;$$

$$\text{в)} \int_0^2 (2-x)e^{-2x} dx.$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$\text{а)} 3y^2 = x^3 \text{ від } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 8; \quad \text{б)} \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/2$$

$$\text{в)} \rho = 3(1 - \sin \varphi); \quad \pi/2 \leq \varphi \leq \pi.$$

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} dx$$

$$\text{в)} \int \frac{(\arctg x)^2}{1+x^2} dx; \quad \text{г)} \int x(4x^2+6)^5 dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}} dx;$$

1.4. від тригонометричних функцій

$$\text{а)} \int \cos^4 x dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx;$$

$$\text{г)} \int \sin 5x \sin 4x dx; \quad \text{д)} \int \lg^6 x dx;$$

від функцій, що містять квадратний многочлен

$$\text{а)} \int \frac{5x-3}{3x^2+6x+4} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{-3x+2}{\sqrt{-x^2-2x+8}} dx;$$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$\text{а)} \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$\text{а)} \begin{cases} y = (x-2)^3 \\ y = 4x-8 \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$\text{в)} \rho = 4(1 - \cos \varphi), \quad \rho = 4.$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

$$\text{а)} y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0 \text{ (OX)};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = t^3 \\ y = t-1 \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ (OY)}.$$

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ у вигляді повторного}$$

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y ,

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy, D: x = y^2, x = y$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$$

якщо область D задана указаними лініями $D: x = \sqrt{8-y^2}, y = x, y \geq 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y = 7, z \geq 0$$

Варіант 4.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

$$а) \int (tgx + ctgx)^2 dx \quad б) \int \frac{e^{3/x}}{x^2} dx;$$

$$в) \int \frac{4x}{\sqrt{16-x^4}} dx; \quad г) \int \frac{\sin 5x}{\cos^6 5x} dx;$$

$$г) \int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx$$

1.3. методом інтегрування частинами

$$а) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; \quad б) \int \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$в) \int e^{3x} \cos 3x dx; \quad г) \int x^{10} \ln x dx;$$

$$д) \int x \cos 3x dx;$$

1.5. від дробово-раціональних функцій

$$а) \int \frac{x}{(x^2+1)(x+2)} dx; \quad б) \int \frac{2x^2-2x+1}{x^2+2} dx$$

$$в) \int \frac{x-2}{x^2(x-1)} dx;$$

1.7. від ірраціональних функцій

$$а) \int \frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)} dx; \quad б) \int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx;$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$а) \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{1+\sqrt[3]{x}}; \quad б) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

методом підстановки

$$а) \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx; \quad б) \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx;$$

$$в) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx; \quad г) \int x(5x+2)^6 dx;$$

$$д) \int \frac{1}{x\sqrt{3x+4}} dx;$$

1.4. від тригонометричних функцій

$$а) \int \cos^4 x \sin^3 x dx;$$

$$б) \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx; \quad в) \int \frac{1}{1+tgx} dx;$$

$$г) \int \sin 7x \sin 3x dx; \quad д) \int \sin^4 x dx;$$

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

$$а) \int \frac{9x-19}{x^2+6x+8} dx;$$

$$б) \int \frac{-3x+11}{\sqrt{x^2-4x+2}} dx;$$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$а) \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$а) \begin{cases} y = \cos x, \\ x = \pi/4, x = \pi/2 \end{cases}, \quad б) \begin{cases} x = R \cos^3 t/4 \\ y = R \sin^3 t/4 \end{cases}$$

$$в) \int_0^5 \arctg \sqrt{4x-1} dx.$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$а) y = \ln(1-x^2) \quad б) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} ;$$

від $x_1 = 0$ до $0 \leq t \leq \pi/2$;
 $x_2 = 1/4$;

$$в) \rho = 8 \sin \varphi; \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіж-

$$ність) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D x^2 y dx dy, D: y = 2 - x, y = x, x \geq 0$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$в) \rho = a \sin 4\varphi.$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

$$а) y = x^2, \quad y = \sqrt{x} \quad (OY);$$

$$б) \begin{cases} x = 8 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad (OX).$$

7. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного ін-

теграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: y = \ln x, x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2, y = x, z \geq 0$$

Варіант 5.

2. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

$$а) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx; \quad б) \int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2-3}} dx;$$

$$в) \int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx; \quad г) \int \sqrt{4-3x} dx;$$

$$д) \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx;$$

1.3. методом інтегрування частинами

$$а) \int x 2^{-x} dx; \quad б) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$в) \int \arcsin 5x dx; \quad г) \int e^{5x} \sin 2x dx;$$

$$д) \int x^{3/4} \ln x dx;$$

1.2. методом підстановки

$$а) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx; \quad б) \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$в) \int \frac{e^x}{5e^x-8} dx; \quad г) \int \frac{\ln tg x}{\sin x \cos x} dx;$$

$$д) \int e^{3x^2-8x+5} (6x-8) dx;$$

1.4. від тригонометричних функцій

$$а) \int \frac{1}{8-4 \sin x + 7 \cos x} dx;$$

$$б) \int \sin^2 x \cos^5 x dx; \quad в) \int \cos^2 x dx;$$

$$г) \int \cos 5x \cos 6x dx; \quad д) \int tg^4 x dx;$$

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$; б) $\int \frac{x}{(x+2)^2(x+1)} dx$;

в) $\int \frac{x+5}{(x^2+9)x} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+2x}} dx$;

6. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{(4+x^2)}}$;

в) $\int_0^{\pi/6} (4x-2)\sin 2x dx$.

8. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y = x^2/2$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$; б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$; $\pi/6 \leq t \leq \pi/3$

в) $\rho = 5\varphi$; $1 \leq \varphi \leq 2$.

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$,

$D: y = x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 0$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$.

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{5-2x}{2x^2-4x+6} dx$;

б) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx$;

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$;

7. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) б) $\begin{cases} y = x^3, y = x, \\ y = 2x \end{cases} \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{a^2 + t^2}, 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

в) $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = \cos \varphi$.

9. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

а) $y = \sqrt{x-3}, x=1, y=0, y=3(OY)$;

б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi (OX)$.

7. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: x^2 = 2 - y, x + y = 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$z = 2x^2 + y^2, y = 3x, x \geq y, x = 2, z \geq 0$

Варіант 6.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int e^{-x^2+6} dx$ б) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$;

в) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{3x^2+2}} dx$; г) $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$;

д) $\int \frac{x+3}{3x^2+8} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^{5/2} \ln x dx$;

в) $\int e^{2x} \cos 5x dx$; г) $\int x \arctg 2x dx$;

д) $\int x^2 e^{-3x} dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x-2)} dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{(x-4)x} dx$;

в) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2-2x+3)} dx$

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} dx$; б) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x+4})} dx$

2. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_2^5 \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$; б) $\int_{a/\sqrt{3}}^a \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+a^2}}$

в) $\int_3^6 (3x+4)e^{2x} dx$.

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y^2 = 4 - x$ між точками її перетину з ОУ; б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$; $\pi/2 \leq t \leq \pi$

в) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$; $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$.

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$;

в) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$; г) $\int x(5x^2-3)^{11} dx$;

д) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

б) $\int \frac{1}{2 \sin x + \cos x + 3} dx$ в) $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$;

г) $\int \sin x / 3 \cos x / 4 dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;

від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{3x+1}{-x^2-4x+1} dx$;

б) $\int \frac{3x+3}{\sqrt{9x^2+6x+10}} dx$;

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$;

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) $\begin{cases} xy = -1, & y = 0, \\ x = 1, & x = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$, $y = 0$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

в) $\rho = 2 \sin \varphi$.

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

а) $y+3=(x-1)^2$, $y=0$ (ОХ) ;

б) $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi/2$ (ОХ) .

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (y-x) dx dy, D: y = x^2, y = x$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$$

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$
 у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями

$$D: y = \sqrt{2-x^2}, y = x^2$$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = x, y = 4, x = \sqrt{26-y^2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 7.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$ б) $\int \frac{\sin 5x}{6-4 \cos 5x} dx$;

в) $\int \sqrt{9-4x} dx$; д) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$;

г) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$; б) $\int x^7 \ln x dx$;

в) $\int e^{7x} \cos 5x dx$; г) $\int \arctg \sqrt{x} dx$;

д) $\int x^2 \sin x \cos x dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{2x^2}{(x-2)^2(x+1)} dx$; б) $\int \frac{x^2-2}{x(x^2+2x+3)} dx$;

в) $\int \frac{x^3}{(x+1)^2} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx$; б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$;

в) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$; г) $\int (x+2)e^{x^2+4x+3} dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-2}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;

б) $\int \frac{2 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$ в) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;

г) $\int \cos 4x \cos 7x dx$; д) $\int \lg^8 x dx$;

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{4x+1}{x^2+6x+10} dx$;

б) $\int \frac{x-3}{\sqrt{4x^2-4x-3}} dx$;

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$a) \int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+2} dx \quad б) \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+1)} dx$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$a) \int_e^{e^2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx; \quad б) \int_{-1}^0 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+8}}$$

$$в) \int_{1/2}^1 (1-6x)e^{2x} dx.$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$a) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad б) \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases};$$

між $x_1 = 0$ і $\pi/3 \leq t \leq \pi$;
 $x_2 = \ln 3$;

$$в) \rho = 3e^{\varphi}; \pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

6. Обчислити наступний невласний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (y+1) dx dy, D: x = y^2, 5y = x$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy$$

Варіант 8.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

$$a) \int (x^2 + 5x + 1)^{10} (2x + 5) dx;$$

$$б) \int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx; \quad в) \int \frac{3^x}{5-3^{2x}} dx;$$

$$a) \int \frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}} dx;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$a) \begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y^2 = x-1 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = t^3 \\ y = 1-2t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$в) \rho = 5 + \cos \varphi.$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

$$a) x = y^3, \quad x = y^2 \quad (OY);$$

$$б) \begin{cases} x = t+1 \\ y = 3-t \end{cases} \text{ в першій чверті } (OY).$$

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ у вигляді повторного}$$

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: y = -2 + x^2, y = x$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$x + y + z = 2, \quad y = x, \quad y = \sqrt{x}, \quad z \geq 0$$

$$г) \int \frac{\sin 4x}{\cos^4 4x} dx;$$

$$д) \int \frac{7x+1}{2x^2+3} dx;$$

1.3. методом інтегрування частинами

$$а) \int x^2 \sin 2x dx;$$

$$б) \int \ln^2 2x dx;$$

$$в) \int x \arctg x dx;$$

$$г) \int e^{2x} \sin 3x dx;$$

$$д) \int x^5 \ln x dx;$$

1.5. від дробово-раціональних функцій

$$а) \int \frac{3+x^2}{(x+2)(x-1)} dx; \quad б) \int \frac{5x^2+3x+2}{(x+2)^2(x+1)} dx;$$

$$в) \int \frac{2x+5}{(x^2-6x+12)x} dx;$$

1.7. від ірраціональних функцій

$$а) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} dx; \quad б) \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x} + \sqrt{1-2x}} dx;$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$а) \int_0^1 \frac{x^2}{3+x^6} dx; \quad б) \int_4^5 \frac{x^5}{(x^2-4)^2} dx;$$

$$в) \int_0^1 \ln(x^2+4) dx.$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$а) y^2 = 3x^3 \text{ від } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 5; \quad б) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}; \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/3$$

$$в) \rho = 3 - \sin 2\varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіж-

$$\text{ність)} \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy, D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$$

$$д) \int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx;$$

1.4. від тригонометричних функцій

$$а) \int \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{3 \sin x + 5 \cos x}; \quad в) \int \sin^6 x dx;$$

$$г) \int \cos 5x \cos 7x dx; \quad д) \int tg^5 x dx;$$

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

$$а) \int \frac{2x+4}{x^2+4x+3} dx;$$

$$б) \int \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+6x-1}} dx;$$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$а) \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} dx;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$а) y = e^x; y = \sqrt{x}; \quad б) \begin{cases} x = 5(t - \sin t)t \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}; \quad x = 0; x = 1; y = 0, 0 \leq t \leq \pi$$

$$в) \rho = 4 \cos 3\varphi.$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

$$а) y = 5 \sin x, y = 3 \sin x; \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (OX)$$

$$б) \begin{cases} x = 5 \cos^3 t \\ y = 5 \sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (OX).$$

7. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: y = \sqrt{4-x^2}, x = 1, y = 0, x \geq 0$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2) dy$$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$y = 1 - x^2, x + y + z = 3, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 9.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int (4x^2 - 5x + 2)^9 (8x - 5) dx$

б) $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{2^x 3^x} dx$; в) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+5}} dx$;

г) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}} dx$; д) $\int \frac{(\ln x)^7}{x} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int x^2 \cos 3x dx$; б) $\int x^4 \ln x dx$;

в) $\int e^{4x} \cos 2x dx$; г) $\int \arcsin 5x dx$;

д) $\int x e^{-4x} dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{x+1}{x^2(x-2)} dx$; б) $\int \frac{7x+x^2}{(x+1)(x^2+4)} dx$;

в) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{x-1}{x\sqrt[3]{2-x}} dx$; б) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}\sqrt{x}} dx$;

2. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$; б) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$;

в) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x+1) \sin 2x dx$.

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{1}{x\sqrt{3x+2}} dx$; б) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$; г) $\int x(3x-1)^9 dx$;

д) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$;

б) $\int \frac{1}{\sin x + 2 \cos x} dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

г) $\int \sin 5x \cos 4x dx$; д) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{-x+3}{-x^2-x+4} dx$;

б) $\int \frac{5x+1}{\sqrt{-4x^2-4x+15}} dx$;

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x^2} dx$;

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) б)
$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

 $x = 0, \quad x = a, \quad y = 0 \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$

в) $\rho = 2 \sin 5\varphi$.

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y = \ln \cos x$

від $x_1 = \pi/3$ до $x_2 = \pi/2$; б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq \pi/3 \end{cases}$

в) $\rho = 1 + \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D x(y-1) dx dy, D: y = 5x, y = x, x = 3$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

а) $y = 1/e^x, x = -5; x = 2; y = 0$ (OX) ;

б) $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ (OX).

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: 2-x = y^2, y = x$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = 2x^2 + y^2, x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 10.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int (7x^2 + 2x + 8)^7 (14x + 2) dx$

б) $\int \frac{2^x}{5 + 2^{2x}} dx$; в) $\int \frac{16x + 4}{\sqrt{4x^2 + 7}} dx$;

г) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$; д) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^4 \ln 2x dx$;

в) $\int e^x \sin 5x dx$; г) $\int \arccos 4x dx$;

д) $\int e^{-\sqrt{x}} dx$;

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

в) $\int \frac{(\arctg x)^3}{1+x^2} dx$; г) $\int x(4x+6)^5 dx$;

д) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+7}} dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \cos^4 2x dx$;

б) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$;

г) $\int \sin 5x \sin x dx$; д) $\int \lg^4 2x dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

$$a) \int \frac{3-x^2}{(x^2+1)(x-1)} dx; \quad б) \int \frac{x^2+x-2}{x^2+x} dx;$$

$$в) \int \frac{2x}{(x+1)(x-2)^2} dx;$$

1.7. від ірраціональних функцій

$$a) \int \frac{x-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}} dx; \quad б) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$a) \int_0^{1/2} \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad б) \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2-2} dx;$$

$$в) \int_0^{\pi/6} (2x-3)\cos 5x dx.$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$a) 3y^2 = x^3 \text{ від } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 8; \quad б) \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/2$$

$$в) \rho = 3(1 - \sin \varphi); \quad \pi/2 \leq \varphi \leq \pi.$$

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_1^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x-2)y dx dy, \quad D: y = x, y = x/2, x = 2$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$$

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

$$a) \int \frac{1-x}{x^2-4x+5} dx;$$

$$б) \int \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-4x+6}} dx;$$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$a) \int \frac{1}{x\sqrt{1+9x^2}} dx;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$a) \begin{cases} y = -x^2 \\ y + x + 2 = 0 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

$$в) \rho = \sin 4\varphi.$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

$$a) y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0 \quad (OX);$$

$$б) \begin{cases} x = t^3 \\ y = t-1 \end{cases}; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (OY).$$

7. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями $D: y = \sqrt{9-x^2}, y \geq x, x \geq 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$z = 4 - x^2, x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 11.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (tgx - ctgx)^2 dx ; & \quad \text{б) } \int \frac{e^{2/x}}{x^2} dx ; \\ \text{в) } \int \frac{4x^3}{\sqrt{16-x^4}} dx ; & \quad \text{д) } \int \frac{\sin 5x}{\sqrt[5]{\cos^6 5x}} dx ; \\ \text{г) } \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx \end{aligned}$$

1.3. методом інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx ; & \quad \text{б) } \int \sqrt[4]{x} \ln x dx ; \\ \text{в) } \int e^{2x} \cos 2x dx ; & \quad \text{г) } \int x^{11} \ln x dx ; \\ \text{д) } \int x \cos 7x dx ; \end{aligned}$$

1.5. від дробово-раціональних функцій

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{1-3x}{(x^2+2x+3+1)x} dx & \quad \text{б) } \int \frac{4x^2-2}{x^2-5x} dx \\ \text{в) } \int \frac{3-x}{(x+1)^2(x-5)} dx ; \end{aligned}$$

1.7. від ірраціональних функцій

$$\text{а) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+4)} dx ; \quad \text{б) } \int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx ;$$

2. Обчислити визначені інтеграли

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{1+x} ; & \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx ; \\ \text{в) } \int_0^5 \operatorname{arccotg} \sqrt{4x+1} dx . \end{aligned}$$

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

$$\begin{aligned} \text{а) } y = \ln(1+x^2) \\ \text{від } x_1 = 0 \text{ до } x_2 = 1/2 ; \\ \text{б) } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t ; \\ -\pi \leq t \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. методом підстановки

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx ; & \quad \text{б) } \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx ; \\ \text{в) } \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx ; & \quad \text{г) } \int x(x+2)^6 dx ; \\ \text{д) } \int \frac{1}{x+\sqrt{3x+4}} dx ; \end{aligned}$$

1.4. від тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \cos^3 x \sin^4 x dx ; \\ \text{б) } \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx ; & \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 + \operatorname{ctg} x} ; \\ \text{г) } \int \sin 6x \sin 3x dx ; & \quad \text{д) } \int \sin^5 x dx ; \end{aligned}$$

1.6. від функцій, що містять квадратний многочлен

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{3x-4}{4x^2+12x+10} dx ; \\ \text{б) } \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx ; \end{aligned}$$

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

$$\text{а) } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{16-x^2}} dx ;$$

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} y = \cos x, y = \sin x, \\ x = 5\pi/4, x = 3\pi/2 \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} x = 7 \cos^3 t \\ y = 7 \sin^3 t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{в) } \rho^2 = 9 \cos 2\rho .$$

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX або OY

$$\text{а) } y = x^3, \quad y = 2x \text{ (OX)} ;$$

в) $\rho = 8\sin\varphi; \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$.

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (y^2 - x) dx dy, D: y = x^2, y = 1$$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy$$

б) $\begin{cases} x = t \\ y = 10 - t \end{cases}$ в першій чверті (OY).

7. Представити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$
 у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y , якщо область D задана указаними лініями

$$D: y^2 = 2 - x, y = x$$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$$2x + 3y = 12, 2z = y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Варіант 12.

1. Обчислити невизначені інтеграли

1.1. безпосереднім інтегруванням або внесенням під диференціал

а) $\int \frac{x^2 - 11}{x + 1} dx$; б) $\int \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$;

в) $\int \frac{e^{12/x}}{x^2} dx$; г) $\int \sqrt{4 + 12x} dx$;

д) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \ln x}{x} dx$;

1.3. методом інтегрування частинами

а) $\int x 12^{-x} dx$; б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

в) $\int \arcsin 12x dx$; г) $\int e^{5x} \sin 12x dx$;

д) $\int x^{3/5} \ln x dx$;

1.5. від дробово-раціональних функцій

а) $\int \frac{x^4 - x^2}{x^4 + x^3} dx$; б) $\int \frac{x + 5}{(x - 2)^2 x} dx$;

в) $\int \frac{x - 2}{x^3 + 2x} dx$;

1.2. методом підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x + 1}} dx$;

в) $\int \frac{e^x}{e^x - 12} dx$; г) $\int \frac{\ln \cot x}{\sin x \cos x} dx$;

д) $\int e^{x^2 - 8x + 12} (2x - 8) dx$;

1.4. від тригонометричних функцій

а) $\int \frac{dx}{3 + 2 \sin x + \cos x}$;

б) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$; в) $\int \cos^5 x dx$;

г) $\int \cos 12x \cos 6x dx$; д) $\int \lg^4 x dx$;

1.7. від функцій, що містять квадратний многочлен

а) $\int \frac{4 - 3x}{4x^2 + 12x + 10} dx$;

б) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$;

1.7. від ірраціональних функцій

а) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 - \sqrt{x}}} dx$; б) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+3x}} dx$;

2. Обчислити визначені інтеграли

а) $\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$; б) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{(9-x^2)\sqrt{(9-x^2)}}$;

в) $\int_0^{\pi/3} (4x-2)\cos 2x dx$.

4. Обчислити довжини дуг кривих, що задані наступними рівняннями

а) $y = x^3/3$ від $x_1 = 3$ до $x_2 = 16$; б) $\begin{cases} x = 11\cos^3 t \\ y = 11\sin^3 t \end{cases}$; $\pi/6 \leq t \leq \pi/3$

в) $\rho = 4\varphi$; $0 \leq \varphi \leq 2$.

6. Обчислити наступний невластний інтеграл (або встановити його розбіжність)

$\int_2^{\infty} x \cdot 3^{-x} dx$

8. Обчислити подвійний інтеграл

$\iint_D (x^2 y) dx dy$, $D: y = 2x^3, x = 1, y = 0$

9. Обчислити подвійний інтеграл, використавши полярні координати

$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$.

1.8. за допомогою тригонометричної підстановки

а) $\int \frac{\sqrt{1-9x^2}}{x^2} dx$;

3. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями

а) $\begin{cases} y = 6 \cdot 3^{-x}, \\ y = x+1, \\ x = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$

в) $\rho = 1 + \cos \varphi$.

5. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі ОХ або ОУ

а) $y = 2\sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ (ОХ);

б) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$ (ОХ).

7. Представити подвійний інтеграл

$\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді повторного

інтеграла з зовнішнім інтегруванням за x та зовнішнім інтегруванням за y ,

якщо область D задана указаними лініями $D: x = \sqrt{2-y^2}, x = y^2, y \geq 0$

10. Обчислити об'єм тіла, що обмежено поверхнями

$z = 10 + x^2 + 2y^2, y = x, x = 1, y \geq 0, z \geq 0$

Останні два завдання (тут N - номер групи, S - номер варіанта студента)

11. За функцією продуктивності праці

$f(t) = S + \ln(S \cdot t + N) + \frac{S \cdot t}{S \cdot t + N}$

[дет/год], знайти скільки деталей зробить робітник за проміжок часу від $t_1 = N$ [год.] до $t_2 = N + 3$ [год.].

12. Чисті інвестиції задані функцією

$f(t) = N \cdot 1000 \cdot (S \cdot t + 1)^3 + S \cdot (S \cdot t + 1)$.

Визначити а) приріст капіталу за $t = S$ років; б) через скільки років приріст капіталу становитиме $Q = N \cdot S \cdot 50000$ грош. од.?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Курс математики для економістів. – К.: Наук. думка, 2002. – Ч.2. – 413с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Ч.2. – М.: Дрофа, 2003.
3. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч.1.2. – К.: Техніка, 2000
4. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.:ЮНИТИ, 2002. – 471 с.
5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, изд-во ДИС, 1007. – 368 с.
6. Колесников А.Н. Краткий курс математиков для экономистов.: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208с.
7. Солодовников А.С., Бабейцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: А 3 ч. – Ч. 2. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 224 с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ.- М.:Наука,1979.-720 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-М.:Наука.-Т.1.-1966.-608 с.,Т.2.-1966.-800 с.,Т.3.-1969.-656 с.
10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука,1985.-383 с.
11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.-М.:Наука,1990.-624 с.
12. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник. – Запоріжжя: Просвіта; К.: Наукова думка, 2000. – 656 с.

**Витяг з робочої програми курсу математичного аналізу для спеціальності
“Економічна кібернетика”
СТРУКТУРА І ЗМІСТ КУРСУ**

№ п п	Зміст теми (лекційні заняття)	К- сть го- дин	Зміст практичних, семінарських, лабора- торних занять	К- сть год.	Перелік кон- трольн- их завдань, СР, ІР	Лі- те- ра- ту- ра
1	2	3	4	5	6	7
6	<u>Первісна функція та невизначений інтеграл.</u> - Визначення та властивості первісної функції. Таблиця невизначених інтегралів. - Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами. - Інтегрування раціональних функцій. - Інтегрування ірраціональних функцій. - Інтегрування тригонометричних функцій	<u>6</u> 1 1 1 2 1	- Безпосереднє інтегрування. - Інтегрування раціональних функцій. - Інтегрування ірраціональних функцій. - Інтегрування тригонометричних функцій. - Контрольна робота.	<u>10</u> 2 2 2 2 2	1 к.р. КОЛОКВІУМ	1- 11

1	2	3	4	5	6	7
7	Визначений інтеграл Рімана. - Означення інтеграла. Необхідна умова інтегрованості. Верхні та нижні суми Дарбу. - Критерій інтегрованості функцій. Класи інтегрованих функцій. - Основні властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення. - Інтеграл Рімана зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца. - Методи обчислення визначеного інтеграла. - Застосування визначеного інтегралу	<u>7</u> 2 1 1 1 1 1	- Формула Ньютона-Лейбніца. - Методи інтегрування означеного інтеграла. - Застосування визначеного інтегралу в геометрії - Дослідження на збіжність невластних інтегралів та їх обчислення - Самостійна робота - Потрійні інтеграли - Потрійні інтеграли	<u>14</u> 1 1 4 3 1 2 2	1 с.р.	1-11
8	<u>Невластні інтеграли.</u> - Невластні інтеграли першого роду. Критерій Коші їх збіжності. - Невластні інтеграли другого роду. Критерій Коші їх збіжності. - Достатні ознаки збіжності невластних інтегралів та методи їх обчислення.	<u>3</u> 1 1 1				1-11
9	<u>Узагальнення поняття інтегралу.</u> - Поняття про кратні інтеграли, зокрема подвійні і потрійні інтеграли - Застосування кратних інтегралів в геометрії - Заміна під знаком кратного інтегралу. Полярні координати в подвійному інтегралі.	<u>6</u> 2 1 1				1-11
	Застосування інтегралів в економіці	2				1-7

Питання, що виносяться на самостійне вивчення

1. Теорема про середнє значення означеного інтеграла.

Питання, що виносяться на іспит і на колоквіум

2. Первісна і неозначений інтеграл функції та їх властивості.
3. Безпосереднє інтегрування та основні табличні інтеграли.
4. Метод заміни змінної інтегрування та його застосування.
5. Метод інтегрування частинами та його застосування.
6. Розклад раціональної функції на елементарні раціональні функції.
7. Інтегрування елементарних раціональних функцій.
8. Інтегрування ірраціональних функцій. Підстановки Ейлера.
9. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей. Приклади.
10. Інтегрування квадратичних ірраціональностей виду $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, де $P_n(x)$ - многочлен степені n
11. Інтегрування диференціальних біномів. Теорема Чебишева.
12. Інтегрування тригонометричних функцій.
13. Задачі, що приводять до поняття означеного інтеграла.
14. Означення означеного інтеграла. Необхідна умова інтегрованості функції на відрізьку.
15. Суми Дарбу та їх властивості та геометричний зміст. Критерій інтегрованості функції за Ріманом.
16. Властивості означеного інтеграла, пов'язані із знаком рівності.
17. Властивості означеного інтеграла, пов'язані із знаком нерівності.
18. Класи інтегрованих функцій за Ріманом.
19. Інтеграл з змінною верхньою межею інтегрування та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.
20. Метод підстановки в означеному інтегралі та його застосування.
21. Метод інтегрування частинами в означеному інтегралі та його застосування.
22. Площа плоскої фігури. Квадровані фігури. Обчислення площі криволінійної трапеції.
23. Обчислення площі криволінійного сектора в полярних координатах.
24. Довжина дуги та методи її обчислення.
25. Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою означеного інтеграла.
26. Невласні інтеграли першого роду. Достатні ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду.
27. Невласні інтеграли другого роду. Ознаки їх збіжності.
28. Головне значення невластного інтеграла.
29. Методи обчислення невластних інтегралів.
30. Поняття про кратні інтеграли, зокрема подвійні і потрійні інтеграли
31. Заміна під знаком кратного інтегралу. Полярні координати в подвійному інтегралі.
32. Застосування кратних інтегралів в геометрії
33. Застосування інтегралів в економіці

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Киричевський Віктор Володимирович

Д'яченко Наталія Миколаївна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Практикум з розв'язання задач
для студентів денної та заочної форм
навчання спеціальності
6.050100 „Економічна кібернетика”

Відповідальний

за випуск

Киричевський В.В., д.т.н., професор, зав. кафе-
дрою

Рецензент

Сніжко Н.В., к.ф.-м.н., доцент

Коректор

Д'яченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент